सैध्दान्तिक मृत्तिका-बलविज्ञान

महाराष्ट्र राज्य साहित्य संस्कृति मंडळ

तमसो मा ज्योतिर्गमय

अनुवादक

श्री. श. म. भालेराव

महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळाची विज्ञानमालेतील प्रकाशित झालेली पुस्तके :

१. मानवी अनुवंशिकता : लेखक–प्रा. श. वि. सोहनी, पृष्ठे १३+९९ किंमत रु. ३·००
२. आरोग्य आणि आहारशास्त्र : लेखिका–प्रा. शांता केळकर, पृष्ठे १५८, किंमत ३·५०.
३. होमिओपाथिक औषधांचा निघंटु : (द्वितीयावृत्ती) लेखक–डॉ. श. र. फाटक, पृष्ठे ५९५, किंमत रु. १०·००
४. होमिओपाथिक लक्षणांचा भावकोश : (द्वितीयावृत्ती) लेखक–डॉ. श. र. फाटक, पृष्ठे ५९४ किंमत रु. १०·५०.
५. माणसाचा मेंदू व त्याचे कार्य : लेखक–डॉ. म. ग. गोगटे, पृष्ठे ७५, किंमत १·५० (सचित्र)
६. इंग्रजी–मराठी स्थापत्य विश्वकोश : संपादक–वि. मराठे, पृष्ठे ८+२९०, किंमत रु. १५·००
७. देशनांक–निर्देशांक : लेखक–श्री. चं. न. डफाळ, पृष्ठे ६+१७५, किंमत रु. ३·००
८. संक्षिप्त संख्यानक : लेखक–श्री. चं. न. डफाळ, पृष्ठे १३+२७८, किंमत रु. ४·००.
९. प्राणिसृष्टि : भाग १ : लेखक–डॉ. म. वि. आपटे, पृष्ठे ११+४००, किंमत रु. ७·०० (सचित्र).
१०. प्राणिसृष्टि : भाग २ : लेखक–डॉ. म. वि. आपटे, पृष्ठे ४४८, किंमत रु. १०–०० (सचित्र)
११. रेडिओ दुरुस्ती : (सुधारित तृतीयावृत्ती) लेखक–श्री. श्री. वि. सोहोनी, पृष्ठे १३+५१९, किंमत रु, १०·०० (सचित्र).
१२. ग्रहगति सिद्धान्त : लेखक–कै. शि. ग. पवार, पृष्ठे २०+४८८, रु. १०·५०
१३. रेडिओ : रचना आणि कार्य : लेखक–श्री. श्री. वि. सोहोनी, पृष्ठे १२+४१४, किंमत रु. ८·०० (सचित्र).
१४. अणुयुग : लेखक–श्री. वि. त्र्यं. आठवले, पृष्ठे १३+३८४, किंमत रु. १२·०० (सचित्र).
१५. आयुर्वेदीय शब्दकोश : भाग १ व २ (संस्कृत–संस्कृत) संपादक–पं. वेणीमाधवशास्त्री जोशी आणि कै. पं. ना. ह. जोशी. पृष्ठे २२+९७५, किंमत रु. ५०·००

सैद्धांतिक मृत्तिका-बलविज्ञान

भाषांतरमाला क्रमांक २३

सैद्धांतिक मृत्तिका-बलविज्ञान

THEORETICAL SOIL MECHANICS

By

KARL TERZAGHI

: लेखक :

कार्ल् तेरझागी

: अनुवादक :

श. म. भालेराव

महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळ, मुंबई

१९७४

प्रथमावृत्ती : १९७४ (शके १८९६)

मूल्य : बेचाळीस रुपये

प्रकाशक : सचिव,
© महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळ,
सचिवालय, मुंबई-३२.
(सर्व हक्क प्रकाशकाधीन)

मूळ प्रकाशक :
© मेसर्स जॉन वायले अँड सन्स
६०५, थर्ड ॲव्हेन्यू, न्यूयॉर्क १००१६,
अमेरिका.

1974 (Year of first publication)
by Government of Maharashtra,
State Board for Literature & Culture,
Sachivalaya, Bombay 400 032.
All Rights Reserved.

Authorised translation from the English language
edition by Karl Terzaghi, published by
John Wiley & Sons, Inc., New York.
Copyright, 1943
All Rights Reserved.

मुद्रक :
वि. पु. भागवत,
मौज प्रिंटिंग ब्यूरो,
खटाववाडी, मुंबई-४.

ज्ञानसाधनेला
मुक्तहस्ते दिलेल्या
उत्तेजनाच्या गौरवार्थ
हार्वर्ड विद्यापीठास
कृतज्ञतापूर्वक
अर्पण.

निवेदन

मराठी भाषेला व साहित्याला ज्ञानविज्ञानाच्या क्षेत्रात पश्चिमी भाषांचा दर्जा प्राप्त व्हावा; इंग्रजी, फ्रेंच, जर्मन, रशियन इत्यादी भाषांना जसे विद्यापीठीय स्तरावर स्वयंपूर्ण महत्त्व प्राप्त झाले आहे तसे मराठी भाषेला व साहित्याला प्राप्त व्हावे; इंग्रजी भाषेला आज विद्यापीठांमध्ये जसे मुख्य स्थान आहे तसे स्थान, महाराष्ट्रामधील विद्यापीठांत मराठी भाषेला व साहित्याला प्राप्त व्हावे या उद्देशाने साहित्य आणि संस्कृती मंडळाने वाङ्मयनिर्मितीचा विविध कार्यक्रम हाती घेतला आहे. विश्वकोश, मराठी महाकोश, वाङ्मयकोश, विज्ञानमाला, आंतरभारती, भाषांतरमाला, ललितकलाविषयक संशोधन व प्रकाशन इत्यादी योजना या कार्यक्रमात अंतर्भूत आहेत.

२. मराठी भाषेला विद्यापीठीय भाषेचे प्रगल्भ स्वरूप व दर्जा येण्याकरिता मराठीत विज्ञान, तत्त्वज्ञान, सामाजिक शास्त्रे आणि तंत्रविज्ञान या विषयांवरील संशोधनात्मक व अद्ययावत माहितीने युक्त अशा ग्रंथांची रचना मोठ्या प्रमाणावर होण्याची आवश्यकता आहे. वरील उद्देश ध्यानात ठेवून मंडळाने जो बहुविध वाङ्मयीन कार्यक्रम आखला आहे त्यातील पहिली पायरी म्हणून सामान्य सुशिक्षित वाचकवर्गाकरिता सुबोध भाषेत लिहिलेली विज्ञान व तंत्रविषयक पुस्तके प्रकाशित करून स्वल्प किंमतीत देण्याची व्यवस्था केली आहे. तसेच, विज्ञान, तंत्र आणि अभियांत्रिकी या विषयांवरील पश्चिमी भाषांतील अभिजात ग्रंथांचा अनुवाद करून प्रकाशित करण्याचा कार्यक्रमही मंडळाने आपल्या भाषांतरमालेत अंतर्भूत केला आहे. संस्कृत, बंगाली, गुजराती, कानडी, तमिळ इत्यादी भारतीय भाषा, आणि त्याचप्रमाणे इंग्रजी, फ्रेंच, जर्मन, इटालियन, रशियन, ग्रीक इत्यादी पश्चिमी भाषा यांतील उच्च साहित्यामधील विशेष निवडक पुस्तकांची भाषांतरे किंवा सारांश-अनुवाद प्रसिद्ध करणे अथवा विशिष्ट विस्तृत ग्रंथांचा परिचय करून देणे हा भाषांतरमालेचा उद्देश आहे.

३. भाषांतर योजनेतील पहिला कार्यक्रम म्हणून ज्यांना अग्रक्रम दिला पाहिजे अशी पाश्चात्त्य व भारतीय भाषांतील सुमारे २०० पुस्तके निवडली आहेत. डॉ. बोमाँ, नेल्सन, लिओनार्ड, नेल्मेरोव, कॉम्री, जॉर्ज एफ सॉवर्स, स्पँगलर, डेविस्, क्रीगर, जस्टिन हाइण्ड्स, चार्लस आर. कॉक्स इत्यादी लेखकांची विज्ञान व तंत्र विषयांवरील पुस्तके या अग्रक्रम योजनेत निवडली आहेत.

४. मंडळाने आजवर आरोग्यशास्त्र, शरीरविज्ञान, जीवशास्त्र, आयुर्वेद, गणित, भौतिकी, रेडिओ, लेथ, रेकॉर्ड प्लेअर, अणुविज्ञान, स्थापत्यशास्त्र इत्यादी वैज्ञानिक व

तांत्रिक विषयांवर २६ दर्जेदार पुस्तके प्रकाशित केली आहेत. बोमॉ-लिखित "Medicine : Essentials for Practitioners & Students" या ग्रंथाचे भाषांतर मंडळाने या वर्षी प्रकाशित केले आहे. क्रीगर, जस्टिन व हाइण्ड्स लिखित "Engineering for Dams" आणि स्पॅंगलरचे "Soil Engineering" या पुस्तकांची भाषांतरे पूर्ण झाली आहेत.

५. मंडळाच्या भाषांतरमालेतील विज्ञानविषयक ग्रंथांपैकी तेरझागी-लिखित "Theoretical Soil Mechanics" या ग्रंथाचे मराठी भाषांतर अभियंता, श्री. श. म. भालेराव, यांनी केले असून ते "सैद्धांतिक मृत्तिका-बलविज्ञान" या शीर्षकाने प्रकाशित करण्यास मंडळास आनंद होत आहे. हा ग्रंथ स्थापत्य शास्त्रातील महत्त्वाच्या शाखेचा एक प्रमाणभूत ग्रंथ म्हणून मानण्यात येतो. विषयाचे मौलिक स्वरूप व सैद्धांतिक दृष्ट्या विषयाचा त्यात केलेला ऊहापोह यामुळे सदर ग्रंथाचे भाषांतर करणे अतिशय कठिण असले, तरी श्री. भालेराव यांनी मराठीमध्ये सुबोध भाषांतर करण्यासाठी विशेष श्रम घेतले आहेत. या भाषांतराच्या प्रकाशनामुळे मराठीतील शास्त्रीय वाङ्मयात मोलाची भर पडणार आहे.

६. या ग्रंथाचा मराठी अनुवाद प्रकाशित करण्यास मंडळास परवानगी दिल्याबद्दल मूळ इंग्रजी ग्रंथाचे प्रकाशक जॉन वायूले अँड सन्स, न्यूयॉर्क, अमेरिका यांचे मंडळाच्या वतीने मी मनःपूर्वक आभार मानतो.

वाई :
आश्विन कृष्ण ४
शके १८९५
१५ ऑक्टोबर, १९७३

लक्ष्मणशास्त्री जोशी
अध्यक्ष
महाराष्ट्र राज्य साहित्य आणि संस्कृति मंडळ

प्रस्तावना

ग्रंथकर्त्याने मृत्तिकाबलविज्ञानावरील त्याचे पहिले पुस्तक प्रकाशित केले त्याला आज पंधरा वर्षे झाली. या पंधरा वर्षांत या विषयाबाबतची आस्था आणि औत्सुक्य सर्व जगभर निर्माण झाले आहे आणि या विषयाचे आपले सैद्धांतिक ज्ञान आणि अनुभवजन्य ज्ञान यांच्या कक्षा झपाट्याने रुंदावत आहेत. केवळ संख्येच्याच दृष्टीने पाहिले, तर इ. स. १९१० पर्यंतच्या स्थापत्यविषयक संपूर्ण साहित्यात मृत्तिका आणि आधारभूमी यांविषयी उपलब्ध असलेल्या माहितीपेक्षा कितीतरी अधिक माहिती मृत्तिकाबलविज्ञानविषयक पहिल्या आंतरराष्ट्रीय परिषदेच्या (इ. स. १९३६, केंब्रिज) वृत्तांतग्रंथात ग्रथित झालेली आहे. तरीही सैद्धांतिक तत्त्वांच्या प्रतिपादनानंतर त्या सिद्धांतांच्या विवेकशून्य वापराची प्रवृत्ती आणि तद्विषयक अतिव्याप्त विधाने करणे हींच ज्याची वैशिष्ट्ये सांगता येतील असा एक संक्रमणकाल येऊन गेला. स्थापत्याच्या इतर प्रत्येक शाखेत असेच घडले आहे. त्यामुळे मृत्तिकाबलविज्ञानावर लिहावयाच्या नव्या पाठ्यपुस्तकाची जुळवाजुळव करीत असताना सैद्धांतिक ज्ञान आणि त्याचा व्यावहारिक वापर हे दोन विषय पूर्णतः अलग करणेच उचित ठरेल, असा ग्रंथकर्त्याचा अभिप्राय पडला. प्रस्तुत ग्रंथात या दोहोंपैकी केवळ सैद्धांतिक तत्त्वांचा ऊहापोह केला आहे.

सैद्धांतिक मृत्तिकाबलविज्ञान म्हणजे व्यावहारिक बलविज्ञानाच्या अनेक शाखांपैकी एक होय. व्यावहारिक बलविज्ञानाच्या कोणत्याही क्षेत्रात काम करणाऱ्या संशोधकाला केवळ आदर्शरूप पदार्थांशीच व्यवहार करावा लागतो. उदा., प्रबलित काँक्रीटच्या सिद्धांतांत प्रत्यक्षातील प्रबलित काँक्रीट विचारात घेतलेच जात नाही. त्यात विचारार्थ घेतलेल्या आदर्श पदार्थाचे गृहीत धरलेले गुणधर्म म्हणजे प्रत्यक्षातील प्रबलित काँक्रीटच्या गुणधर्मांना मुळातच सरळ रूप देण्याच्या प्रक्रियेतून निर्माण झालेले गुणधर्म असतात. हे विधान मृत्तिकावर्तनविषयक प्रत्येक सिद्धांतालासुद्धा लागू पडते. क्षेत्रातील परिस्थित्यनुसार होणारे नैसर्गिक मृत्तिकांचे वर्तन आणि सिद्धांतांच्या आधारे केलेले तद्विषयक अनुमान यांत पडणाऱ्या अंतराची महत्ता प्रत्यक्ष अनुभवानेच केवळ जाणता येते. अनुभवाच्या कसोटीला उतरलेले आणि विशिष्ट परिस्थितीत आणि मर्यादेत व्यावहारिक समस्यांची सत्यसमीप उकल करण्यास उपयुक्त असलेले असे सिद्धांतच या ग्रंथात समाविष्ट केले आहेत.

सैद्धांतिक मृत्तिकाबलविज्ञानातून व्यावहारिक उपयुक्ततेच्या विश्लेषणपद्धतीचे कार्योपयोगी ज्ञान तर मिळतेच परंतु त्याव्यतिरिक्त एक महत्त्वाचे शैक्षणिक उद्दिष्टही

साध्य होते. ते असे की, सिद्धांत आणि त्यांचा वापर हे दोन विषय मुळातच वेगळे केल्याने ज्यांना सिद्धांत म्हणतात, अशा विविध बौद्धिक उपक्रमांच्या यथार्थत्वासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे वाचकांच्या मनावर ठसविणे सुलभ होते. विश्लेषणजन्य फलितांच्या आधारे, आंतरिक आणि बाह्य बलांच्या प्रभावाखाली होणारे साध्या आणि आदर्शरूप पदार्थांचे वर्तन निश्चित करणाऱ्या अनेकविध घटकांचे आकलन वाचकाला एकदा का झाले म्हणजे अपुऱ्या माहितीवर अवलंबून कोणताच आधार नसलेली अशी अतिव्याप्त विधाने करण्याच्या सार्वत्रिक मोहाला तो बळी पडण्याचा संभव कमी होतो.

सैद्धांतिक ज्ञान उपयुक्त ठरावयाचे असेल, तर ते ज्ञान आणि प्रत्यक्षातील मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांचे, तसेच मृत्तिकांचे प्रयोगशाळेतील आणि प्रत्यक्षातील वर्तन यांमधील भेदांचे सखोल ज्ञान, या दोहोंचा समन्वय साधला पाहिजे. अन्यथा गणिताधारे काढलेली फलिते किती प्रमाणात सदोष आहेत, याचा निर्णय अभियंत्यास करता येणार नाही. नैसर्गिक मृत्तिकांचे गुणधर्म आणि क्षेत्रस्थ परिस्थितीत मृत्तिकांचे होणारे वर्तन या विषयांची चर्चा, या ग्रंथाला पूरक ठरेल अशा दुसऱ्या एका ग्रंथात केली जाईल.

मृत्तिकाबलविज्ञानातील सैद्धांतिक ज्ञान मिळविणे हेच अंतिम साध्य आहे, अशी ग्रंथकर्त्याची धारणा कधीच नव्हती. प्रत्यक्षात काम करताना मिळालेल्या अनुभवांचे सार काढणे आणि मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांचे आपले ज्ञान व्यावहारिक समस्यांना लागू करण्याचे तंत्र विकसित करणे, या खटाटोपालाच बव्हंशी त्याने वाहून घेतले आहे. कोणत्या ना कोणत्या व्यावहारिक समस्येचा उलगडा व्हावा हाच एकमेव हेतू त्याने केलेल्या सैद्धांतिक संशोधनामागेसुद्धा होता. म्हणूनच व्यावहारिक बलविज्ञानाच्या सार्वत्रिक क्षेत्रातील प्रगल्भबुद्धी विशेषज्ञांनी लिहिलेल्या ग्रंथांतून आढळणारे आणि प्रस्तुत ग्रंथकर्त्याने ज्यांची नेहमीच प्रशंसा केली आहे, असे गुणविशेष या ग्रंथात अभावानेच आढळतील. तथापि असा ग्रंथ स्वतःच लिहिण्याचे कार्य टाळणेही ग्रंथकर्त्याला शक्य नव्हते, कारण शास्त्राच्या एकंदर व्यापात प्रत्येक सिद्धांताचे योग्य स्थान कोणते आहे ते निश्चित करून ग्रंथलेखनाचे कार्य करण्यास आवश्यक असलेली अनुभवसिद्ध पार्श्वभूमी प्रस्तुत ग्रंथकर्त्याजवळ होती.

ज्या ग्रंथांतून प्रस्तुत विषयाचे ज्ञान गोळा केले आहे, त्यांची यादी संदर्भग्रंथ-सूचीत दिलेली आहे. परिच्छेद ४६ ते ४९ मधील पादकांची भारधारणक्षमता ठरविण्याच्या आसन्नमान पद्धती, परिच्छेद ७४ मधील कूपांच्या भितींवरील वालुकांच्या मृत्तिकादाबाचा विषय, परिच्छेद ९४ ते ९६ मधील बिलक्रियेच्या क्रांतिकारी संचिताचा विषय, परिच्छेद ११२ मधील बुडबुडे आणि पोकळी यांतील वायुदाब हा विषय आणि परिच्छेद ११८, ११९ व १२२ मधील निस्सारण समस्येची सत्यसमीप उत्तरे, यापूर्वी प्रसिद्ध झालेली नाहीत.

श्री. आल्बर्ट ई. कुमिंग्ज आणि डॉ. राल्फ बी. पेक यांनी या ग्रंथाचे पहिले हस्तलिखित साद्यंत अभ्यासून त्यावर भाष्य केले. हे भाष्य इतके विधायक आणि उपयुक्त होते की, त्यामुळे कित्येक संपूर्ण प्रकरणे आणि अन्य कित्येक प्रकरणांचे भाग मुळातच नव्याने लिहावेसे वाटले. त्यांचे ऋण आहेच. त्यांच्याप्रमाणेच, हस्तलिखित निरनिराळ्या अवस्थांतून जात असताना त्याची काळजीपूर्वक छाननी करण्याचे बाबतीत आपली पत्नी, डॉ. रूथ डी. टेरझागी हिचा आणि डॉ. फिल. एम. फर्ग्युसन यांनी केलेल्या बहुमोल सूचनांबाबत त्यांचाही ग्रंथकर्ता ऋणी आहे.

ग्रॅज्युएट स्कूल ऑफ एंजिनियरिंग
हार्वर्ड युनिव्हर्सिटी
केंब्रिज (मॅसा.)
डिसेंबर १९४२

कार्ल तेरझागी

ग्रंथमांडणी

ग्रंथात १९ प्रकरणे आहेत व निरनिराळे विषय १ ते १६४ परिच्छेदांत चर्चिले आहेत. परिच्छेदांचे क्रमांक प्रकरणवार निरनिराळे नाहीत. हे क्रमांक प्रत्येक पृष्ठाच्या वरच्या कोपऱ्यात दिले आहेत. आकृतींच्या क्रमासाठी अ, आ, इ, ई अशी अक्षरे वापरली आहेत.

लेखकाचे नाव व वर्ष (डार्वी १८५८) कंसात दिले आहेत त्यावरून ग्रंथाच्या शेवटी दिलेल्या संदर्भाचा बोध होईल.

ग्रंथाच्या शेवटी, संदर्भ, लेखकसूची, विषयसूची दिल्या आहेत.

अक्षर-संकेत

इतर शास्त्रांप्रमाणे मृत्तिकाबलविज्ञानातही गणिताचा वापर आवश्यक ठरतो. त्यामुळे भौमितिक आकृती, आलेख, बीजगणितीय समीकरणे यांमध्ये अक्षरांचा उपयोगही ओघाने येतोच. त्यात मराठी अक्षरे अपुरी पडल्यामुळे अन्य भारतीय भाषेचे साहाय्य घ्यावे लागले. दिसण्यातील भिन्नत्वामुळे व सोपेपणामुळे कानडी अक्षरे स्वीकारार्ह वाटली. थोड्याशा सरावाने ती सहज काढता येतात व लक्षात राहतात. इंग्रजी ग्रंथांतूनही याच कारणास्तव ग्रीक अक्षरे वापरली जातात. कानडीव्यतिरिक्त इंग्रजीतील $\int$, d, ∂, Δ ही कलन समीकरणात किंवा चलानयनात येणारी चिन्हे व अक्षरेही प्रस्तुत ग्रंथात वापरली आहेत. सुबोधतेसाठी व स्मरणात ठेवणे सोपे व्हावे या उद्देशाने पुढील सूत्रांचाही अवलंब केला आहे.

१. कोनांसाठी निरपवादपणे कानडी अक्षर वापरले आहे. उदा., ಕ (क) भिंतघर्षण कोन, ಖ (ख) अंतर्गतघर्षण कोन इ.
२. एकांक पदासाठीही कानडी अक्षरे वापरली आहेत. उदा., प्रतिबल : ಲ (ल); विकृती विकार ರ (र).
३. शक्य तेथे संज्ञेतील आद्याक्षर निवडले आहे. उदा., वजन : व; घनता : घ; खोली : ख; इ.
४. पुनरुक्ती टाळण्यासाठी शेवटचे अक्षरही घेतले आहे. उदा., वेग : ग; अवसीदन : न; जाडी : ड; उंची : च; इ.
५. काही ठिकाणी मधलेच एखादे अक्षर—ज्याने संज्ञेचा चटकन बोध होईल असे—घेतले आहे. उदा., गुरुत्वाकर्षण : त्व, पाझरगुणांक : झ; इ.
६. इतके करूनही काही काही ठिकाणी अगदी वेगळे अक्षर घ्यावे लागले. उदा., परिवस्तु : ज; प्रभावमूल्य : ऋ; इ.
७. भिन्न वस्तूंचा एकच गुणधर्म व्यक्त करण्यासाठी मूळ अक्षरापुढे वस्तुदर्शक अक्षर जोडले आहे. उदा., वजन व; — जलाचे $\text{व}_{\text{ज}}$; — स्थूणेचे $\text{व}_{\text{स्थू}}$ इ.
८. एकाच वस्तूतील भिन्न प्रकार दाखविण्यासाठी मूळ अक्षरापुढे १, २, ३ असे आकडे किंवा डोक्यावर एक, दोन मात्रा दिल्या आहेत किंवा अक्षरावर रेघ दिली आहे. उदा; ड_1, ड_2, ड_3 म्हणजे पायातील तीन थरांच्या जाड्या; च, $\text{च}'$ (च एक मात्रा), $\text{च}''$ (च दोन मात्रा) म्हणजे निरनिराळी उंची; द : दाब आणि $\bar{\text{द}}$ (द रेघ) म्हणजे कार्यसाधक दाब.

९. आकृतींमध्ये उगमबिंदू, केंद्रबिंदू यासाठी नेहमी उ, विशिष्ट बिंदूसाठी नेहमी ठ, आलेखासाठी *आ*, वर्तुळासाठी ळ हींच अक्षरे सर्व ठिकाणी वापरली आहेत.

१०. मृत्तिकादाबाच्या विषयात भिंतीमागील त्रिकोणी खंड सर्व आकृतींत *गमन* असाच दाखविला आहे, त्यातही *म* म्हणजे भिंतीच्या माथ्याजवळचा बिंदू, *ग* म्हणजे तळाचा व *न* म्हणजे घसरपृष्ठ जमिनीला मिळते तो बिंदू असा संकेत कटाक्षाने पाळला आहे.

सूत्र ९ व १० यामुळे विषयाची मांडणी आकृतीच्या साहाय्याने लक्षात ठेवणे सोपे होते.

११. गुणांक/गुणक : ज्या पदांचे मूल्य प्रत्येक ठिकाणी किंवा पातळीवर एकच असते– उदा., पाझरगुणांक, मृ. दा. गुणांक–तेथे गुणांक शब्द योजला आहे. जेथे सरासरी मूल्य व्यक्त करायचे तेथे गुणक हा शब्द योजला आहे. उदा. धारणगुणक, स्थैर्यगुणक.

अक्षरचिन्हे :

अ : साधारणतः गुणकासाठी

$अ_{ख}$: घर्षणनिर्देशांक

$अ_{गा}$: गाधतागुणक (उतारस्थैर्य विषयातील)

$अ_{द}$: दमनीयतागुणांक (ग्रॅम$^{-१}$ सेंमी^{२})

$अ_{धु}$: उ. मृ. दाबाचे कारकस्थान देणारा गुणक (आधारकाष्ठविषयक)

$अ_{श}$: अवकाशबदलाचा गुणांक (ग्रॅम$^{-१}$ सेंमी^{२})

$अ_{स्थै}$: स्थैर्यगुणक (उतारस्थैर्य विषयातील)

$अ_{स्फ}$: स्थितिस्थापक प्रत्यावर्तनाचा गुणांक

अ : आयाम (कंपनाचा) (सेंमी)

आ : आलेखदर्शक अक्षर $आ_{१}$, $आ_{२}$, इ. किंवा $आ_{धु}$, $आ_{बॉ}$.

आ : क्षेत्रफळ(सेंमी^{२})

उ : आकृतीतील उगमबिंदू, केंद्रबिंदू इ.

$उ_{अति}$: अतिरिक्त जलदाब (ग्रॅम सेंमी$^{-२}$)

$उ_{न}$: उदासीन प्रतिबल (ग्रॅम सेंमी$^{-२}$)

ऊ : एकूण उदासीन बल (ग्रॅम किंवा ग्रॅम सेंमी$^{-१}$)

: ऊर्जा किंवा कार्यशक्ति (ग्रॅम. सेंमी) (स्थूणाविषयात)

ए : कार्य

क : प्रभावांक;

$क_{न}$: ,, ; अवसीदनाचा

$क_{ळ}$: ,, ; प्रतिबलाचा

$क$: कार्तनिक प्रतिबल (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)
$क_{प}$: परिमितीय कर्तन
$का$: एकूण कार्तनिक बल (ग्रॅम किंवा ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
$का_{त्र}$: दंडगोलाकृती छेदावरील एकूण कार्तनिक बल
$ख$: खोली
$ख$: अक्ष; क्ष आणि य अक्षांना लंबरूप
$ग_{आ}$: वाळुकेचा प्रतिक्रिया गुणांक
$ग$: वेग; (सेंमी सेकंद$^{-1}$) स्रावाचा
$ग_{क}$: ,, ; क-लहरीचा
$ग_{ख}$: ,, ; ख अक्षाच्या दिशेतील
$ग_{ण}$: ,, ; क्षरणाचा
$ग_{द}$: ,, ; द-लहरीचा
$ग_{बा}$: ,, ; बाष्पीभवनाचा
$ग_{य}$: ,, ; य–अक्षाच्या दिशेतील
$ग_{वृ}$: ,, ; वृष्टीचा
$ग_{क्ष}$: ,, ; क्ष–अक्षाच्या दिशेतील
$ग_{नि}$: गतिमान निम्नस्तर प्रतिक्रियेचा गुणांक (ग्रॅम सेंमी$^{-3}$) (कंपन विषयातील)
$घ$: घनता; (ग्रॅम सेंमी$^{-3}$)
$घ'$: ,, ; निमज्जित
$घ_{घ}$: ,, ; घन कणांची
$घ_{ज}$: ,, ; जलाची
$घ_{नि}$: ,, ; निस्सारणोत्तर
$च$: उंची किंवा संचित (सेंमी)
$च_{अ}$: अधिभाराला अनुषंगिक उंची
$च_{आ}$: आधारभूमीसह उच्छेद घडविणारी उंची
$च_{ज}$: उंची; पाण्याची
$च_{के}$: ,, ; केशाकर्षणाची
$च_{द्दु}$: ,, ; मृ. दाबाच्या कारकत्वाची (छत्रक्रिया विषयातील)
$च_{बि}$: बिलक्रिया संचित
$च_{भु}$: उंची; भुयाराची
$च_{ल}$: ,, ; लक्ष्मण
$च_{स}$: ,, ; विनाधार समाकर्षणयुक्त दरडीची
$च_{ह}$: ,, ; वातावरणाच्या दाबाला अनुषंगिक

छ	: अनुक्रमानुसार कोणतेही स्थान दर्शविणारे अक्षर
छ	: सच्छिद्रता
ज	: परिवस्तू (सेंमी^{४})
झ	: पाझर-गुणांक; (सेंमी सेकंद$^{-१}$)
$\text{झ}_{\text{स}}$	: ,, ; थरांना समांतर दिशेतील
$\text{झ}_{\text{लं}}$	: ,, ; थरांना लंबरूप दिशेतील
$\text{झ}_{\text{त्र}}$	: ,, ; त्रिज्यादिक् प्रवाहाचा
ट	: संचित क्षयाच्या टप्प्यांची संख्या (क्षरणजाल)
ठ	: विशिष्ट स्थान, ठिकाण
ठ	: तौलनिक ताठपणाचा गुणक (पादकतळावरील स्पर्शदाब विषयात)
ड	: जाडी / खोली
$\text{ड}_{\text{पा}}$	: पायाची खोली
ढ %	: दृढीभवनमान;
$\text{ढ}_{\text{ख}}$ %	: ,, ; अक्षीय
$\text{ढ}_{\text{त्र}}$ %	: ,, ; त्रिज्यादिक्
ण	: विसर्पण मूल्य = स्प^{२} (४५° + ञ/२)
त	: ताण; (एकांक)
$\text{त}_{\text{की}}$	: ,, ; कीलकातील
$\text{त}_{\text{पृ}}$	: ,, ; पृष्ठीय (ग्रॅम सेंमी$^{-१}$)
त	: तपमान
त	: तरंगसंख्या
$\text{ता}_{\text{की}}$	: एकूण ताण (कीलकातील)
त्र	: त्रिज्या;
$\text{त्र}_{\text{घ}}$	: ,, ; घर्षणवर्तुळाची
$\text{त्र}_{\text{बा}}$	: ,, ; बाह्य
त्रि	: त्रिज्या
त्व	: गुरुत्वाकर्षण प्रवेग (ग्रॅम सेंमी$^{-२}$)
थ	: स्थिरांक, चलानयनातील, किंवा इतर
$\text{थ}_{\text{क}}$	: ताठपणाचा स्थिरांक (ग्रॅम सेंमी$^{-३}$)
$\text{थ}_{\text{स}}$	: स्थिरांक, सर्पिल (ग्रॅम सेंमी$^{-१}$) (कंपन विषयातील)
$\text{थ}_{\text{मं}}$	: ,, ; मंदत्व
$\text{थ}_{\text{त्व}}$	: ,, ; भूकंप प्रवेग/गुरुत्वाकर्षण प्रवेग हे गुणोत्तर
द	: दाब (एकांक) (ग्रॅम सेंमी$^{-२}$)

दॅ : ,, ; कार्यसाधक
$दॅ_{\text{उल}}$: उद्युक्त दाबाचा लंब घटक
$दॅ_{\text{उत}}$: ,, ,, तद्दिक् घटक
$दॅ_{\text{प्रल}}$: प्रतियोगी ,, लंब घटक
$दॅ_{\text{वा}}$: दाब; वायूचा
$दॅ_{\text{ह}}$: ,, ; हवेचा
$दॅ_{\text{ळ}}$: ,, ; ळ या क्षणाचा
$दा_{\text{उ}}$: दाब (एकूण); उद्युक्त (ग्रॅम सेंमी[-1])
$दा_{\text{प्र}}$: ,, ,, ; प्रतियोगी
$दा_{\text{धु}}$: ,, ,, उद्युक्त } कूलोमची सीमालक्षणे नसतात अशा ठिकाणचा किंवा छत्रक्रिया असते तेथील
दृ : दृढीभवनाचा गुणांक (सेंमी^{2} सेकंद$^{-1}$)
द्र : केंद्रीकरणाचा निर्देशांक (भारधारणक्षमता विषयातील)
ध : कंपनाचा नियतकाल (एका कंपनाचा अवधि) (सेकंद)
ध : धारणगुणक; (भारधारणक्षमतेचे)
$ध_{\text{घ}}$: ,, ; घनतावलंबी
$ध_{\text{भ}}$: ,, ; अधिभारावलंबी
$ध_{\text{स}}$: ,, ; समाकर्षणावलंबी
ध्रु : ध्रुवबिंदू; (मोहर रेखाकृतीतील)
$ध्रु_{\text{उ}}$: ,, ; उद्युक्त
$ध्रु_{\text{प्र}}$: ,, ; प्रतियोगी
न : अवसीदन; (सेंमी) किंवा वेधन
$न_{\text{को}}$: ,, ; कोपऱ्याचे
$न_{\text{प}}$: ,, ; परीघाचे
$न_{\text{स}}$: ,, ; सरासरी
नि% : निस्सारण-मान
प : क्षरणपात्रांची संख्या
प : परिबल; (ग्रॅम सेंमी किंवा ग्रॅम) एकूण किंवा एकांक लांबीवरील
$प_{\text{घ}}$: ,, ; घसरणकारी
$प_{\text{वि}}$: ,, ; घसरणविरोधी
$प_{\text{स}}$: ,, ; समाकर्षणजन्य
$प_{\text{त्र}}$: परिमिती; पादकाची

$प_द$: अवकाशक्षयाचा गुणांक
$प_{स्फ}$: अवकाशवर्धनाचा ,,
पॉ : पॉयसनचे गुणोत्तर
प्र : प्रत्यानयनाचा गुणांक (न्यूटनचा आघात–सिद्धांत)
प्र : प्रतिक्रिया
$प्र_{आ}$: प्रतिक्रिया गुणांक ; मृत्तिकेचा आडवा (ग्रॅम सेंमी $^{-3}$)
$प्र_{नि}$: ,, ,, ; निम्नस्तराचा (,, ,,)
$प्र_{स्थू}$: ,, ,, ; स्थूणेचा (ग्रॅम सेंमी $^{-1}$)
फ : गणितातील फलनदर्शक अक्षर
फ : वारंवारता, फेरे (कंपनविषयक) (सेकंद ^{1})
$फ_{०}$: वारंवारता स्वाभाविक
ब : बल; (ग्रॅम किंवा ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
$ब_{त}$: ,, ; तद्दिक्
$ब_{लं}$: ,, ; लंबदिक्
$ब_{मं}$: ,, ; मंदत्वकारी
बृ : गुणक, बृहदीकरणाचा (कंपन विषयातील)
भ : भार (एकांक) (ग्रॅम सेंमी $^{-2}$)
$भ_{अनुज्ञेय}$: भार; अनुज्ञेय
भा : भार (एकूण) (ग्रॅम); भारधारणक्षमता (ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
$भा_{ए}$: भार ; एकूण
$भा_{मह}$: भार ; महत्तम
$भा_{वि}$: ,, ; विनामक (स्थूणाविषयक लक्षणमूल्य)
$भा_{स}$: ,, ; सरासरी
$भा_{ड}$: भारधारणक्षमता; ड खोलीवरील ; पादकाची
$भा_{डव}$: ,, ; ,, ; वर्तुळाकार पादकाची
$भा_{डस्तं}$: ,, ; ,, ; स्तंभाची
$भा_{स्थ}$: ,, ; स्थूणेची
$भा_{अ}$: भारधारणक्षमता; अग्रविरोधजन्य (स्थूणेची)
$भा_{घ}$: ,, ; त्वचाघर्षणजन्य (,,)
$भा_{श}$: शीघ्रवेधनविरोध; स्थूणेचा (ग्रॅम)
म : जलीय प्रक्रम
$म_{त्व}$: गुरुत्वमध्य
$म_{द}$: प्रक्रम, दाबाचा

मं : मंदत्वगुणक (सेकंद$^{-1}$)
$\text{मा}_{\text{धु}}$: मृत्तिकादाबगुणक (छत्रक्रिया विषयात)
मृ_{o} : मृत्तिकादाब–गुणांक; स्तब्ध (ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
$\text{मृ}_{\text{उ}}$: ,, ,, ; उद्युक्त
$\text{मृ}_{\text{प्र}}$: ,, ,, ; प्रतियोगी
$\text{मृ}_{\text{प्रघ}}$: ,, ,, ; ,, ; घनताजन्य घटक
$\text{मृ}_{\text{प्रभ}}$: ,, ,, ; ,, ; अधिभारजन्य घटक पादकाच्या बाबतीतील
$\text{मृ}_{\text{प्रस}}$: ,, ,, ; ,, ; समाकर्षणजन्य घटक
यं : यंगचा मापांक (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)
$\text{यं}_{\text{उ}}$: ,, ,, ; उभ्या दिशेतील
$\text{यं}_{\text{आ}}$: ,, ,, ; आडव्या ,,
र : रंध्रांक
र : रुंदी
ल : लांबी
$\text{ल}_{\text{चा}}$: ,, ; चापाची
$\text{ल}_{\text{व}}$: ,, ; भुजेची, वजनाच्या
लघु : लघुगणक (लघु अ : अ चा लघुगणक असे वाचावे)
व : वजन एकूण किंवा एकांक लांबीवरील (ग्रॅम किंवा ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
व : वजन; कार्यसाधक
व : ,, ; निमज्जित
$\text{व}_{\text{ज}}$: ,, ; जलाचे
$\text{व}_{\text{स्थ}}$: ,, ; स्थूणेचे
$\text{व}_{\text{श}}$: ,, ; शकलाचे
$\text{व}_{\text{ह}}$: ,, ; घणाचे/हातोड्याचे
श : अवकाश / घनफळ (सेंमी^{3})
ष : विषमाकर्षण (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)
षा : एकूण विषमाकर्षण
स : समयगुणक / कालगुणक (दृढीभवन विषयातील)
स : समाकर्षण (कूलोम समीकरणातील) ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)
$\text{स}_{\text{आ}}$: ,, ; आवश्यक
$\text{स}_{\text{उ}}$: ,, ; उपलब्ध
$\text{स}_{\text{ल}}$: ,, ; लक्ष्मणमूल्य
$\text{स}_{\text{लत}}$: ,, ; ,, ; तळबिंदुवर्तुळावरील
$\text{स}_{\text{लम}}$: ,, ; ,, ; मध्यमावर्तुळावरील

$स_{स}$: ,, ; सत्य
सा : समाकर्षण एकूण (ग्रॅम किंवा ग्रॅम सेंमी$^{-1}$)
$सा_{मृ}$: ,, ; मृत्तिकेचे
सु : सुरक्षिततांक
$स_{वृ}$: ,, ; वृष्टिकालीन
सं% : संपृक्तिमान
स्न : स्निग्धतागुणांक (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$ सेकंद)
स्फ : स्फायनगुणांक (सेंमी^{2} सेकंद$^{-1}$)
स्र : स्राव (एकांक) (सेंमी^{3} सेकंद$^{-1}$)
स्रा : ,, (एकूण)
ह : ऱ्हस्वत्व
ह : हवा–अवकाश गुणोत्तर (निस्सारणविषयातील)
ळ : वर्तुळदर्शक अक्षर
$ळ_{उ}$: ,, ; उद्युक्त
$ळ_{प्र}$: ,, ; प्रतियोगी
ळ : काळ (सेकंद)
क्ष : क्ष अक्ष
य : य अक्ष
ज्ञ : कार्तनिक मापांक (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)

कानडी अक्षरे

ಇ (इ) : भूपृष्ठाने किंवा भरणपृष्ठाने क्षितिजाशी केलेला कोन (आधारभिंत विषयात)
ಕ (क) : भिंतघर्षण कोन (मुख्यतः)
ಖ (ख) : अंतर्गत घर्षणकोन/कार्तनिक विरोधाचा कोन
ಗ (ग) : भिंतपाठीने क्षितिजाशी केलेला कोन (आधारभिंत विषयात)
ಚ (च) : कोणात्मक वेग/चक्रीय वारंवारता (कंपनविषयक) (सेकंद$^{-1}$)
ಠ (ठ) : कोन
ತ (त) : कार्तनिक प्रतिबल (अपारप्राय राशी विषयात)
ದ (द) : दशाकोन (कंपनविषयात)
ನ (न) : कोन
ರ (र) : विकृति (एकांक)
ಲ (ल) : प्रतिबल (ग्रॅम सेंमी$^{-2}$)

ष (श) : घसरपृष्ठाने क्षितिजाशी केलेला कोन (आधारभिंतीवरील मृत्तिकादाब विषयात)

$\text{ळ}_{१}$, $\text{ळ}_{२}$, $\text{ळ}_{३}$: प्रतिबल प्रधान; अनुक्रमे ज्येष्ठ, मध्यम, कनिष्ठ

ळ : ,, ; कार्यसाधक (उच्चार : ल शिरोरेघ किंवा ल रेघ)

$\text{ळ}_{\text{अ}}$: ,, ; अक्षीय

$\text{ळ}_{\text{आ}}$: ,, ; आडवे

$\text{ळ}_{\text{उ}}$: ,, ; उभे/उद्युक्त

$\text{ळ}_{\text{ख}}$: ,, ; ख खोलीवरील

$\text{ळ}_{\text{त्र}}$: ,, ; त्रिज्यादिक्

$\text{ळ}_{\text{लं}}$: ,, ; लंबदिक्

$\text{ळ}_{\text{प्र}}$: ,, ; प्रतियोगी

$\text{ळ}_{\text{प}}$: ,, ; परिघस्थ

इंग्रजी अक्षरे :

$\triangle$: (डेल्टा)

∂ : (डेल्)

d : (डी)

$\in$: (ई) : लघुगणकाचा मूलांक

गणितातील संकेत :

$\overline{गम}$: सरळ अंतर

$\overset{\frown}{गम}$: चापात्मक अंतर

$\approx$: आसन्नमानाने समान

१५(३): परिच्छेद १५ मधील समी. ३

मृत्तिकाबलविज्ञानातील शास्त्रीय संज्ञांचा परिचय

१ स्थापत्य[1] व्यवहारात बांधकामाची सामग्री म्हणून किंवा वास्तूची[2] आधारभूमी[3] म्हणून मृत्तिकेचा[4] संबंध येत असल्यामुळे तिच्या स्थापत्यविषयक गुणधर्मांचा अभ्यास करणे आवश्यक ठरते. या अभ्यासाचे शास्त्र म्हणजेच मृत्तिकाबलविज्ञान[5] किंवा मृत्तिकास्थापत्य[6] होय. या शास्त्रात पाणी आणि भार[7] यांचा मृत्तिकेवर होणारा परिणाम मुख्यत्वेकरून अभ्यासावा लागत असल्यामुळे बलविज्ञान[8] आणि जलशास्त्र[9] यांचा अधिक संबंध येत असला, तरी हे शास्त्र मूलतः व्यावहारिक उपयोगाचे असल्यामुळे इतर शास्त्रांचाही त्यात संबंध येतो; उदा., भूस्तरशास्त्र[10], पदार्थविज्ञान[11], रसायनशास्त्र[12], मृत्तिकाविज्ञान[13], संरचना स्थापत्य[14] इ. इ.

1. Civil engineering
2. Structure
3. Foundation
4. Soil
5. Soil mechanics
6. Soil engineering
7. Load
8. Mechanics
9. Hydraulics
10. Geology
11. Physics
12. Chemistry
13. Soil physics
14. Structural engineering

२ मृत्तिका या शब्दाची या शास्त्रातली व्याख्या इतर शास्त्रांतील—उदा., कृषिशास्त्रातील[1]—व्याख्येपेक्षा निराळी आहे. भूमीतील खडकांपासून प्राकृतिक[2] व रासायनिक[3] विघटनामुळे निर्माण झालेल्या व भूपृष्ठापर्यंत पसरलेल्या सर्व अदृढ किंवा विस्कळित स्वरूपातील पदार्थ म्हणजे मृत्तिका अशी या शास्त्रातील व्याख्या आहे. विविध रंगांची, विविध पोतांची[4] माती, वाळू, मुरूम, दगडगोटे इ. सर्वांचा या व्याख्येत समावेश होतो. या सर्वसमावेशक अर्थानेच येथे मृत्तिका हा शब्द वापरला आहे. तीत खनिजाप्रमाणे सेंद्रीय[5] पदार्थही असतात.

1. Agriculture
2. Physical
3. Chemical
4. Texture
5. Organic

३ निसर्गात आढळणाऱ्या खडकांचे तीन मुख्य प्रकार आहेत. अग्निज[1], शादज[2], आणि परिवर्तित[3]. त्यांतील खनिजे असंख्य प्रकारांची असतात. अशा खडकांच्या विघटनातून निर्माण झालेल्या मृत्तिका ज्यावेळी मूळ स्थानीच राहतात तेव्हा त्यांना स्थानीय[4] मृत्तिका म्हणतात. जलप्रवाह, वारा, इ. अनेक कारणांमुळे त्या

1. Volcanic
2. Sedimentary
3. Metamorphic
4. Residual

जेव्हा अन्य ठिकाणी जाऊन पडतात, तेव्हा त्यांना निक्षेपित[5] मृत्तिका म्हणतात. या प्रवासात त्यांचे गुणधर्म बदलणे साहजिकच असते. स्थानपरत्वे, गुणधर्मपरत्वे मृत्तिकांचे अनेक प्रकार असण्याची शक्यता यावरून सहज ध्यानात येईल. अभ्यासाच्या सोयीसाठी काही प्रातिनिधिक आदर्श प्रकार कल्पून आणि त्यांच्या गुणधर्मांविषयी काही सुकरतादायी[6] गृहीते स्वीकारून मृत्तिकेच्या वर्तनाविषयीचे सिद्धांत मांडले जातात. त्यांतून मिळणारी काटेकोर शास्त्रपूत[7] उत्तरे व्यावहारिक समस्यांसाठी वापरण्यापूर्वी आदर्श गृहीते आणि क्षेत्रीय वस्तुस्थिती[8] यांतील फरकाची सतत जाणीव ठेवावी लागते. याच कारणामुळे आसन्नमान[9] किंवा सत्यसमीप[9] उत्तरेही पुरेशी होतात. काही समस्यांमध्ये "प्रयत्नांती यश[10]" पद्धतही वापरावी लागते.

5. Deposited or Transported
6. Simplifying
7. Rigorous
8. Field conditions
9. Approximate
10. Trial and error

४ काही मृत्तिकांच्या कणांमध्ये एकमेकांस चिकटण्याचा गुण असतो. एकाच पदार्थातील दोन कणांमधील या गुणास समाकर्षण[1] म्हणतात. भिन्न पदार्थांतील कणांत असा गुण असल्यास त्यास विषमाकर्षण[2] म्हणतात. समाकर्षणाचे अस्तित्व किंवा अभाव या निकषानुसार मृत्तिकांचे दोन गट पाडले, तर त्यांचे इतर गुणही भिन्न असल्याचे आढळते. उदा., नम्यत्व[3] हा असा एक गुणधर्म आहे. समाकर्षणयुक्त चिकण मातीच्या लग्द्याला हवा तो आकार देता येतो म्हणजेच तिला हवे तसे नमविता येते. ही घडण-सुलभता म्हणजेच नम्यत्व होय. समाकर्षणहीन वाळूत नम्यतेचा पूर्ण अभाव असतो. म्हणून समाकर्षणयुक्त आणि समाकर्षणहीन असे उपरोक्त दोन प्रातिनिधिक प्रकार अभ्यासासाठी घेणे सोयीचे होते. मृत्तिकांचे अन्य प्रकार या दोन मर्यादांत पडतात. हळवी[4] चिकण मृत्तिका हा त्यांतलाच एक विशेष प्रकार आहे.

1. Cohesion
2. Adhesion
3. Plasticity
4. Sensitive/Fat

५ मृत्तिकेत निरनिराळ्या आकारांचे व आकारमानांचे[1] कण असतात आणि ती सच्छिद्र[2] असते. त्यामुळे तिने व्यापलेल्या अवकाशात[3] मृत्तिकेचे घनकण[4] व रंध्रांच्या[5] स्वरूपातील पोकळीचा[6] अवकाश या दोहोंचा समावेश होतो. या संबंधात जे दोन शब्दप्रयोग वापरले जातात त्यांच्या व्याख्या अशा :

1. Size
2. Porous
3. Space/Volume
4. Solid particles
5. Pores
6. Voids

१. रंध्रांक[7] = रंध्रांचा अवकाश/कणांचा अवकाश
२. सच्छिद्रता[8] = रंध्रांचा अवकाश/एकूण अवकाश
शुष्क मृत्तिकेच्या पोकळीत फक्त हवा असते. रंध्रे पूर्ण पाण्याने भरलेली असतील, तर मृत्तिका संपृक्त[9] होते. मृत्तिकेचे वजन म्हणजे तिच्यांतील कणांचे व रंध्रांतील पाण्याचे वजन यांची बेरीज असते. एकांक[10] अवकाश व्यापणाऱ्या मृत्तिकेचे वजन म्हणजे तिची घनता[11] होय. मृत्तिकेतील ओलावा[12] म्हणजे $\frac{\text{पाण्याचे वजन}}{\text{कणांचे वजन}} \times १००$ होय. ते प्रतिशत प्रमाणात मांडले जाते. मृत्तिकेला उष्णता लावून, ओलावा काढून घेतल्यास तिचे संकोचन[13] होते. उद्धरणामुळे[14] मृत्तिकेची घनता कमी होते. तिला निमज्जित[15] किंवा उद्धरित[15] घनता म्हणतात. त्याचप्रमाणे शुष्क[16] घनता आणि आर्द्र[17] घनता हे शब्दप्रयोगही नेहमी येतात.

7. Void ratio
8. Porosity
9. Saturated
10. Unit
11. Density
12. Moisture content
13. Shrinkage
14. Buoyancy
15. Submerged/ Buoyant
16. Dry
17. Wet

६ एखाद्या वस्तूचे विस्थापन[1] करावयाचे झाल्यास बलाचा[2] वापर करावा लागतो. बलाच्या साहाय्याने विस्थापनाप्रमाणेच वस्तूत विचलन[3] तसेच विरूपत्वही[4] निर्माण करता येते. बलविषयक अभ्यास म्हणजे बलविज्ञान. बलास महत्ता[5] आणि कारकत्वाची दिशा[6] असतात. बलाची महत्ता आणि दिशा व्यक्त करणाऱ्या रेषेस सदिश[7] म्हणतात. दोन बलांची बेरीज भूमितीच्या साहाय्याने करून फलरूप[8] बल मिळते. एखाद्या वस्तूवर बले कारक असतील व ती समतोल[9] अवस्थेत असेल, तर बलांची बेरीज करण्यासाठी काढलेला बहुभुज[10] बंदिस्त किंवा बंदमुख[11] असतो. दोन बले सममूल्य परंतु विरुद्धदिक्[12] असू शकतात. बलाच्या साहाय्याने वस्तूचे विस्थापन होते हे पाहिलेच. प्रतिसेकंद होणारे विस्थापन म्हणजे वेग[13] होय. गती[14] वेगळी वेग वेगळा. वेगात प्रतिसेकंद होणाऱ्या फरकास प्रवेग[15] म्हणतात. गुरुत्वाकर्षण[16]-बलामुळे निर्माण होणारा प्रवेग म्हणजेच गुरुत्वाकर्षणजन्य प्रवेग होय. एखाद्या वस्तूचे वजन म्हणजे तिचे वस्तुमान[17] व गुरुत्वजन्य प्रवेग यांचा गुणाकार असतो. बलाच्या साहाय्याने भ्रमणही[18] निर्माण करता येते. भ्रमणाचा केंद्रबिंदू व बलाचा कारकबिंदू[19] यांमधील लंबात्मक अंतरास

1. Displacement
2. Force
3. Deflection
4. Deformation
5. Magnitude
6. Line of action
7. Vector
8. Resultant
9. Equilibrium
10. Polygen (of forces)
11. Closed
12. Equal and opposite
13. Velocity
14. Speed
15. Acceleration
16. Gravity
17. Mass
18. Rotation
19. Point of application

भुजा[20] म्हणतात. बल × भुजा = परिबल[21] होय. भ्रमण विषयात परिवस्तु[22] ही संज्ञा येते. बल × विस्थापन (त्याच दिशेतील) = कार्य[23]; ते करताना ऊर्जा[24] किंवा कार्यशक्ती[24] खर्च होते.

20. Arm
21. Moment
22. Moment of inertia
23. Work
24. Energy

७ बलांचे प्रकार तीन : १. ताण[1], २. दमन[2], आणि ३. कर्तन.[3] एकांक क्षेत्रावर कारक असणारे बल किंवा बल / क्षेत्र म्हणजे प्रतिबल[4] होय. एकांक क्षेत्रावरील दमन बलास दाब[5] ही संज्ञा वापरतात. परिपीडनजन्य[6] प्रतिबल हा कार्तनिक प्रतिबलाचाच प्रकार म्हणता येईल. एकांक विरूपत्व म्हणजे विकृती[7] होय. उदा., ताणलेल्या तारेची वाढलेली लांबी हे विरूपत्व आणि विरूपत्व÷मूळ लांबी म्हणजे विकृती होय. स्थितिस्थापक[8] पदार्थातील प्रतिबल आणि विकृती यांविषयीचा हूकचा नियम आणि यंगचा मापांक[9] तसेच पॉयसनचे गुणोत्तर प्रसिद्धच आहेत. याच विषयात प्रत्यावर्तनाचा[10] गुणांक[11] ही संज्ञा येते. प्रतिबल तेच राहून विरूपत्व चालूच राहते तेव्हा त्या घटनेस नम्य विसर्पण[12] म्हणतात. नम्य विसर्पणानंतर अंतिम उच्छेदाप्रत[13] होणाऱ्या संक्रमणास[14] वर्धमान[15] उच्छेद-क्रिया म्हणतात. प्रत्यक्ष उच्छेदापूर्वी उच्छेद समीपावस्था[16] येते. निश्चित पृष्ठावरून न झालेला उच्छेद म्हणजे अवपात[17] होय. आधारभूमीतील उच्छेदामुळे भूपृष्ठावर काही उदाहरणांत, फुगवटा किंवा उत्क्षेप[18] निर्माण होतो.

1. Tension
2. Compression
3. Shear
4. Stress
5. Pressure
6. Torsional
7. Strain
8. Elastic
9. Modulus
10. Restitution
11. Coefficient
12. Plastic flow
13. Failure
14. Transition
15. Progressive
16. State of incipient failure
17. Slump
18. Heave

८ मृत्तिकेत ताण सहन करण्याचे सामर्थ्य[1] नसतेच म्हटले तरी चालेल. दमनकारी बले पेलण्याचे किंवा कार्तनिक बलांना विरोध करण्याचे सामर्थ्य मात्र तिच्यात असते. समाकर्षणाप्रमाणेच कणाकणांतील घर्षणाचा म्हणजेच अंतर्गत घर्षणाचाही[2] या विरोधात भाग असतो. मृत्तिकेचे कार्तनिक सामर्थ्य ठरविण्यासाठी एकदिक्[3] किंवा त्रिदिक्[4] प्रयोग करतात. या प्रयोगांतील परिस्थितीनुसार त्यांचे तीन प्रकार होतात. १ द्रुत[5] २ दृढीभवनोत्तर द्रुत[6] आणि ३ विलंबित.[7] प्रयोगातील प्रतिबल-विकृती संबंधाचा आलेख काढला असता, मृत्तिकेचा वश्यताबिंदू[8] तसेच अंतिम कार्तनिक सामर्थ्य मिळते. या प्रयोगावरून

1. Strength
2. Internal friction
3. Direct
4. Triaxial
5. Quick
6. Consolidated quick
7. Slow
8. Yield point

मिळणारा कार्तनिक विरोधाचा कोन आणि वाळूचा नैसर्गिक विरामकोन[9] हे एक नव्हेत. आधारभूमीचे सामर्थ्य ठरविण्यासाठी अव्यंग[10] नमुना घ्यावा लागतो. या प्रयोगात शीघ्रचेतन[11] दाबमापक[12] व संचयपात्र[13] वापरली जातात. मृत्तिकेच्या रंध्रांतील पाण्याचा दाब कार्तनिक विरोधावर महत्त्वाचा प्रभाव पाडतो. हाच रंध्रजलदाब[14] होय.

9. Angle of repose
10. Undisturbed
11. Sensitive
12. Pressure gauge
13. Accumulator
14. Pore pressure

९ संपृक्त मृत्तिकाथरातील आडव्या छेदावर येणाऱ्या दमनप्रतिबलाचे दोन घटक पडतात : १. पाण्याचा दाब; त्याला उदासीन[1] प्रतिबल म्हणतात; कारण मृत्तिकेच्या कार्तनिक विरोधात तो भाग घेत नाही आणि २. कार्यसाधक[2] प्रतिबल; त्यावर कार्तनिक विरोध अवलंबून असतो.

1. Neutral
2. Effective

१० एखाद्या भारवाही पदार्थातून घेतलेल्या ज्या छेदावर कार्तनिक प्रतिबलाचा अभाव असतो त्या छेदपृष्ठास प्रधान पृष्ठ[1] असे म्हणतात व त्यावरील लंबदिक्[2] प्रतिबल म्हणजे प्रधान प्रतिबल होय. त्याचे तीन पृष्ठांनुसार होणारे प्रकार असे : ज्येष्ठ[3], मध्यम[4] आणि कनिष्ठ[5]. मोहरप्रणीत प्रतिबलवर्तुळ पद्धतीचा अवलंब करून प्रधान प्रतिबले ठरविता येतात. या पद्धतीत कूलोमचे समीकरण व्यक्त करणाऱ्या रेषेला भंजन-रेषा[6] म्हणतात. या पद्धतीत विशिष्ट पृष्ठावरील एखाद्या बिंदुस्थानी असणारी प्रतिबले देणारा ध्रुवबिंदू[7] काढला जातो.

1. Principal plane
2. Normal
3. Major
4. Medium
5. Minor
6. Line of rupture
7. Pole

११ साधारणतः मृत्तिकेच्या भरावाला[1] किंवा दरडीला[2] स्थिर राहण्यासाठी उतार ठेवावा लागतो. सरळ उभी दरड फार काळ स्थिर राहू शकत नाही. अशा दरडी कोसळल्याची किंवा घसरण[3] घडून आल्याची उदाहरणे नेहमी ऐकण्यात येतात. सुरक्षिततेसाठी आवश्यक असा उतार न ठेवता दरड स्थिर ठेवायची असेल, तर तिला उभी आडवी किंवा तिरपी लाकडे म्हणजेच धीरे व तीर अशी आधारकाष्ठे[4] लावून किंवा भिंत बांधून आधार द्यावा लागतो. अशा भिंतीस आधारभिंत[5] असे म्हणतात. पाण्याचे नळ टाकण्यासाठी खणलेल्या चरांना आधारकाष्ठे लावलेली नेहमी दृष्टीस पडतात. तसेच पुलाच्या दोन्ही बाजूंस असणाऱ्या भरावांना आधारभिंती बांधून आधार

1. Embankment
2. Cut
3. Slide
4. Timbering
5. Retaining wall

दिलेला असतो हेही आपण पाहतो. समुद्रकाठी बांधल्या जाणाऱ्या धक्क्याच्या भिंती[6] यासुद्धा आधारभिंतींचा एक प्रकार होय. आधारभिंतीमागील मृत्तिकाराशीचा पृष्ठभाग समतल[7] असू शकेल किंवा उतरता अथवा तिरकस असू शकेल. त्याचप्रमाणे त्यावर इमारतीमुळे वगैरे येणारा अधिभारही[8] असू शकेल. आधारभिंतीमागे भरलेली माती म्हणजे भरण[9] होय. पाणी साठविले असता ज्याप्रमाणे भिंतीवर दाब येतो तसाच मृत्तिकेमुळेही आधारभिंतीवर तसेच आधारकाष्ठांवर दाब येतो. त्यास मृत्तिकादाब[10] असे म्हणतात. भिंतीमागील मृत्तिकाराशीच्या अवस्थेनुसार तिच्यावर येणाऱ्या दाबाचे तीन प्रकार केले जातात. १. उद्युक्त[11], २. प्रतियोगी[12] आणि ३. स्तब्ध[13]. उद्युक्त अवस्थेत मृत्तिकाराशीचे पार्श्वीय[14] प्रसरण किंवा विस्तरण[15] होते व प्रतियोगी अवस्थेत पार्श्वीय दमन होते. हे दाब ठरविणारे गुणांक म्हणजेच मृत्तिकादाब-गुणांक[16] होत. रॅन्किन्‌प्रणीत मृत्तिकादाबविषयक सिद्धांत प्रसिद्ध आहे. मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या पद्धतींपैकी कूलोमची, कुल्मानची तसेच घर्षणवर्तुळाची[17], लघुगणकीय वक्राची[18] इ. पद्धती विशेष प्रसिद्ध आहेत. मृत्तिकाभरणामुळे येणारा पार्श्वीय दाब पेलण्यासाठी जेव्हा फक्त भिंतीच्या वजनाचाच उपयोग केला जातो तेव्हा त्या भिंतीस गुरुत्वाधारी[19] आधारभिंत असे म्हणतात. आधारभिंतीचा दुसरा प्रकार म्हणजे वितानरूपी[20] भिंत हा होय. लाकडी किंवा लोखंडी फलकस्थूणा[21] भूमीत ठोकून किंवा दुसऱ्या शब्दात त्यांची भिंत बांधून मृत्तिकाराशीला आधार देता येतो. अशा भिंतीस फलकभिंत[22] म्हणतात. फलकभिंतीच्या स्थैर्यासाठी तिच्यामागील भरणामध्ये काही अंतरावर कीलक किंवा खुटवा[23] स्थापावा लागतो. कीलक आणि भिंत कीलक-वाहूने[24] जोडलेले असतात. भित्तिका किंवा पाट[25] यांचाही कीलक म्हणून उपयोग केला जातो.

6. Quay wall
7. Horizontal
8. Surcharge
9. Fill
10. Earth pressure
11. Active
12. Passive
13. At Rest
14. Lateral
15. Expansion or Extension
16. Coefficient of earth pressure
17. Friction circle
18. Logarithmic Spiral
19. Gravity wall
20. Cantilever
21. Sheet pile
22. Bulkhead
23. Anchor
24. Anchor arm
25. Anchor plate

१२ आधारभिंतींचा उच्छेद दोन प्रकारे होतो : १. विचलन पद्धतीचा म्हणजे कलंडून[1] होणारा आणि २. स्थानांतर[2] पद्धतीचा म्हणजे मूळ स्थानास समांतर ठिकाणी तळापासून सरकून झालेला. उच्छेदाच्या

1. Tilting
2. Displacement

वेळी भिंतीच्या पाठीमागे त्रिकोणी आकाराचा मृत्तिकाखंड सरकू लागतो. त्याच्या तिरकस तळास घसरपृष्ठ[3] असे म्हणतात. फलकभिंतीच्या बाबतीत वाकून[4] उच्छेद होण्याचा संभव असतो.

3. Surface of sliding
4. Buckling

१३ एखाद्या मृत्तिकाराशीतील मधलाच भाग खाली सरकू लागला, तर या सरकणाऱ्या भागाकडून शेजारच्या भागावर दाब संक्रमित केला जातो. या क्रियेस छत्रक्रिया[1] म्हणतात व विचलित होणाऱ्या भागावर मृत्तिकेने छत्र धरले किंवा तिने छत्ररूप[2] धारण केले असे म्हणतात.

1. Arch action
2. Arch over

१४ इमारती, धरणे, रस्ते इ. मुळे भूमीवर भार पडतो. ज्या क्षेत्रावर बाह्य भार ठेवला जातो त्यास भारधारण क्षेत्र[1] म्हणतात. भूमीवर भार ठेवला असता, खडक सोडता, इतर ठिकाणी कमी अधिक प्रमाणात भूमी दबून वरची वास्तू खाली सरकते म्हणजेच खचते. या क्रियेस अवसीदन[2] असे म्हणतात. अवसीदनाचे प्रमाण फार वाढल्यास आधारभूमीचा उच्छेद घडून येण्याचा संभव असतो. अवसीदन कालानुवर्ती असते. आधारभूमीचा उच्छेद घडवून आणण्यास आवश्यक असलेल्या भारास भारधारणक्षमता[3] म्हणतात. ती ठरविण्यासाठी धारण-गुणक[4] उपयोगी ठरतात. इमारतींचा पाया भूपृष्ठाजवळच असतो. सलग भिंतीऐवजी पुष्कळ वेळा इमारतींचा भार खांबांवर घेतलेला असतो. अशा खांबांच्या खाली पादकांची[5] योजना करून हा भार मृत्तिकेवर संक्रमित केला जातो. काही ठिकाणी भूपृष्ठाखाली खांब ठोकून त्यांवर इमारतीचा पाया ठेवतात. या खांबांना स्थूणा[6] म्हणतात. ही सर्व उदाहरणे स्थैतिक भारांची आहेत. एंजिनांच्या पायामुळे, वाहनांच्या रहदारीमुळे भूमीवर गतिजन्य भारही[7] निर्माण होतात. भूकंपामुळेही असे गतिजन्य भार निर्माण होतात. स्थूणा ठोकताना तिच्या बाजूवर घर्षणजन्य विरोध निर्माण होतो त्यास त्वक्घर्षण[8] म्हणतात. खालच्या टोकाला विरोध होतो तो अग्रविरोध[9] होय. वेधनविरोधाचे दोन प्रकार आहेत. १. मंदवेधन विरोध[10] आणि २. शीघ्रवेधन विरोध[11] स्थूणेवर भारप्रयोग[12] केला असता, पहिल्या

1. Bearing area
2. Settlement
3. Bearing capacity
4. B. C. Factors
5. Footing
6. Pile
7. Dynamic loads
8. Skin friction
9. Point resistance
10. Static resistance
11. Dynamic resistance
12. Load test

प्रकारचा आणि तो ठोकताना दुसऱ्या प्रकारचा विरोध होतो. स्थूणांच्या बाबतीत क्वचित् उद्वेधनाचा[13] अनुभव येतो. स्थूणेच्या माथ्यावर संरक्षणासाठी टोपण[14] बसविले जाते.

13. Rebound
14. Pile cap

१५ मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागापासून खाली उभ्या दिशेने निरनिराळ्या कामांसाठी दंडगोलाकृती[1] विवरांची खोदाई करावी लागते. अशा विवरांचा व्यास खोलीच्या मानाने लहान असेल तर त्यास विवर[2] अशी संज्ञा आहे. उदा., भूमीचे अन्वेषण[3] करण्यासाठी घेतलेली वेधन विवरे. ज्यावेळी अशा विवराचा व्यास खोलीच्या मानाने लक्षणीय असेल त्यावेळेस कूप[4] ही संज्ञा वापरली जाते. उदा., पाणी अथवा धान्य साठविण्यासाठी घेतलेले कूप किंवा भूमीपासून भुयारापर्यंत पोचण्यासाठी घेतलेले कूप. भूपृष्ठाला साधारणतः समांतर अशा तऱ्हेने घेतलेल्या दंडगोलाकृती विवरास बोगदा[5] किंवा भुयार हे शब्द वापरले जातात. सर्वसाधारण भूपृष्ठाच्या वर असलेल्या डोंगरातून पलिकडे जाण्यासाठी काढलेल्या विवरास बोगदा ही संज्ञा वापरली जाते. उदा., रस्त्यावरील किंवा लोह-मार्गातील बोगदे आणि असे विवर ज्यावेळी सर्वसाधारण भूपृष्ठाच्या खाली असेल, त्या वेळी भुयार ही संज्ञा वापरली जाते. उदा., भूपृष्ठाखालून लोहमार्ग नेण्यासाठी घेतलेले आडवे विवर किंवा सांडपाणी वाहून नेण्यासाठी घेतलेली विवरे. अशा बांधकामामुळेसुद्धा भूमीच्या अंतरंगातील मृत्तिकेत भार कारक होतात. या विषयात कंकण-क्रिया[6] अनुभवास येते.

1. Cylindrical
2. Hole
3. Investigation
4. Shaft/Well
5. Tunnel
6. Ring action

१६ स्थिर पाण्याचे गुणधर्म आणि वर्तन यांचा अभ्यास स्थिरजलशास्त्रात[1] होतो तर प्रवाही स्वरूपातील विषयाचा अभ्यास चलज्जलशास्त्रात[2] केला जातो. मृत्तिका-बलविज्ञानांत या दोन्ही शास्त्रांचा संबंध येत असल्यामुळे त्यांतील संज्ञांचा परिचय आवश्यक ठरतो.

1. Hydrostatics
2. Hydraulics

१७ एखाद्या भांड्यात पाणी साठविले, तर त्यातील विवक्षित बिंदुस्थानचा दर चौ. फुटावरील जलदाब, पाण्याची घनता आणि त्या स्थानी असलेली पाण्याची उंची या गुणाकाराइतका असतो. म्हणजेच साठविलेल्या किंवा

संचित[1] पाण्याच्या उंचीनुसार तो वाढत जातो. दुसऱ्या शब्दांत, साठ्याच्या म्हणजेच संचिताच्या उंचीचे मूल्य किंवा थोडक्यात संचिताचे[2] मूल्य हे जलदाबाचे निदर्शक असते असे म्हणता येईल. अशा भांड्याला तळाजवळ एखादे छिद्र[3] पाडले तर त्यातून पाणी वाहू लागते. स्थिर पाण्याला प्रवाही रूप देण्यास संचित कारणीभूत होते किंवा संचिताचाच हा खेळ होय. स्थिर परिस्थितीतील जलदाबदर्शक संचित ते स्थैतिक[4] संचित होय.

1. Headed up
2. Head
3. Orifice
4. Static head

१८ वाहणाऱ्या पाण्यात गतिकारी[1] ऊर्जा असते. ज्या स्थिर पाण्याचे प्रवाही अवस्थेत रूपांतर झाले त्यात अव्यक्त स्वरूपात ही ऊर्जा होतीच; तिला दाब ऊर्जा[2] म्हणतात. उंच स्थानापासून उताराने पाणी वाहते. उंचीचे आधिक्य या ठिकाणी प्रवाही स्वरूपास कारणीभूत होते. स्थानविशेषत्वामुळे येणारी ही ऊर्जा म्हणजे स्थानजन्य[3] किंवा स्थान ऊर्जा होय. म्हणजे ऊर्जेचे तीन प्रकार झाले. हे प्रकार संचिताच्या उंचीच्या स्वरूपात मांडता येतात. त्यामुळे प्रत्येक प्रकाराला आनुषंगिक असे विशेषण संचिताला लावता येते, ते असे : स्थानसंचित[4], दाबसंचित[5] आणि वेगसंचित.[6] एखाद्या सार्वत्रिक स्वरूपाच्या उदाहरणात हे तिन्ही प्रकार अस्तित्वात असू शकतील.

1. Kinetic
2. Pressure
3. Static
4. Static head
5. Pressure head
6. Velocity head

१९ एखाद्या बिंदुस्थानी पाण्यातील दाब-संचित किती आहे हे त्या ठिकाणी जलस्तंभ-मापिका[1] लावली असता, तिच्यात चढणाऱ्या जलस्तंभाच्या उंचीवरून कळू शकते. या स्तंभाचे माथ्याचे बिंदू जोडले असता जलीय प्रक्रम[2] मिळतो. जलीय प्रक्रमाच्या मूल्यावर पाण्याचा वेग अवलंबून असतो.

1. Piezometric tube
2. Hydraulic gradient

२० आदर्शरूप पाण्यात स्निग्धता[1] नसते असे गृहीत धरले जाते. प्रवाहाच्या स्वरूपावरून त्याचे प्रकार पडतात ते असे : सुस्तर[2], क्षुब्ध[3] इ. मृत्तिका सच्छिद्र असतात त्यामुळे त्यांतून पाणी झिरपते.[4] हा प्रवाह सुस्तर असतो. वाळू झिरपण्यास सुलभ असते म्हणजेच पाझरक्षम[5] असते; तर चिकण माती जलाभेद्य[6] म्हणण्याइतकी कमी पाझरणारी असते. झिरपून बाहेर पडणारे पाणी म्हणजे स्राव[7] होय. दर सेकंदास एकांक

1. Viscosity
2. Linear
3. Turbulent
4. Percolate
5. Permeable
6. Impervious
7. Discharge

क्षेत्रातून प्राप्त होणारा स्राव म्हणजेच पाझराचा वेग किंवा स्रावाचा वेग होय. स्राव-वेगाचे डार्सीचे सूत्र प्रसिद्ध आहे. ते असे :

ग (स्राववेग) = झ (पाझर-गुणांक[८]) × म (जलीयप्रक्रम). प्रत्यक्षात मृत्तिकेतून वाहणाऱ्या पाण्याचा प्रवास तिच्यातील रंध्रांच्या सलगतेतून निर्माण होणाऱ्या मार्गांनी होत असतो. या प्रवासाचा वेग म्हणजेच क्षरण[९]-वेग. हा स्राववेगापेक्षा निराळा असतो. मृत्तिकाराशीतून पाणी झिरपण्याचे जे मार्ग असतात त्यांना क्षरणरेषा[१०] म्हणतात व त्यांना काटकोनात छेदणाऱ्या रेषांना समदाबसंचित रेषा[११] असे म्हणतात. या रेषेवर प्रत्येक बिंदुस्थानी जलस्तंभ-मापिका ठेवल्या, तर त्यांतील पाणी एकाच उंचीतपर्यंत चढते. मृत्तिकाराशीतून किंवा भरावातून पाणी झिरपताना क्षरणरेषा आणि समदाबसंचित रेषा यांची मिळून जी आकृती तयार होते तिला क्षरणजाल[१२] असे म्हणतात. दोन क्षरणरेषांतील जागा म्हणजे पात्र[१३] होय आणि दोन समदाबसंचित रेषांतील जागा म्हणजे क्षेत्र[१४] होय. भरावातील क्षरणजालाची सर्वांत वरची रेषा म्हणजे क्षरणशिरोरेषा[१५] होय.

8. Coefficient of permeability
9. Velocity of seepage
10. Flow line
11. Equipotential lines
12. Flow net
13. Channel
14. Field
15. Phreatic line

२१ झिरपणाऱ्या पाण्यामुळे विशिष्ट परिस्थितीत मृत्तिकेतील कण विस्थापित होऊन पाण्याबरोबर बाहेर पडू शकतात. जसजसे कण बाहेर जातात तसतसा पाण्याला उपलब्ध झालेला मार्ग वाढत जातो आणि त्यामुळे पाण्याचा वेग वाढून मातीचे अधिकाधिक कण बाहेर पडतात म्हणजेच माती पोखरली जाऊन तिच्यामध्ये बिळासारखा मार्ग निर्माण होतो. म्हणून या क्रियेस बिलक्रिया[१] असे म्हणतात. मृत्तिकाराशीच्या स्थैर्यास[२] बिलक्रियेमुळे फार मोठा धोका निर्माण होऊ शकतो. म्हणून मृत्तिकाराशीतून झिरपणारे पाणी सुलभपणे आणि मृत्तिकेच्या स्थैर्याला बाध न येता बाहेर टाकण्यासाठी विजालकांची[३] योजना केली जाते. विजालक सच्छिद्र अशा वाळूचा किंवा वाळूच्या अनेक थरांचा बनलेला असतो. विजालकांतील थरांच्या विशिष्ट रचनेमुळे त्यास व्युत्क्रम विजालक[४] असे म्हणतात.

1. Piping
2. Stability
3. Filter
4. Inverted filter

२२ मृत्तिकाराशीतील पाणी काढून घेण्याच्या क्रियेला निस्सारण[1] हा शब्दप्रयोग वापरला जातो. मृत्तिकेत चर[2] किंवा भुयारे यांचा व्यूह[3] बांधून पाणी बाहेर पडण्यासाठी वाट काढून दिली असता, त्यास गुरुत्वानुसारी[4] निस्सारण असे म्हणतात. भूपृष्ठातून होणाऱ्या बाष्पीभवनामुळे जे निस्सारण घडून येते त्यास उच्छोषणजन्य[5] निस्सारण असे म्हणतात. विहिरीतून पाणी उपसून केलेल्या निस्सारणास उपसा-निस्सारण[6] म्हणतात.

1. Drainage
2. Trench
3. System/Layout
4. by gravity
5. Desiccation
6. Drainage by pumping

२३ सूक्ष्म नलिकांत केशाकर्षणामुळे[1] पाणी वर खेचले जाते हा नेहमीचा अनुभव आहे. मृत्तिकांमधील सूक्ष्म रंध्रे एकमेकांस जोडली जाऊन मृत्तिकेमध्ये नलिकांसारखे[2] किंवा खाचांसारखे[3] मार्ग निर्माण होतात व केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनामुळे[4] सर्वसाधारण भूमिगत जलपातळी[5]पेक्षाही वर बऱ्याच उंचीपर्यंत पाणी चढू शकते. जेव्हा एखाद्या सूक्ष्म नलिकेत केशाकर्षणामुळे पाणी वर चढते त्यावेळेस अशा जलस्तंभाच्या माथ्याच्या पृष्ठभागास पृष्ठीय तवंग[6] असे म्हणतात. या पृष्ठीय तवंगात पृष्ठीय ताण[7] अस्तित्वात असतो. केशाकर्षण नलिकेतील द्रवाच्या पृष्ठभागाचा आकार नेहमी एखाद्या कुंभाच्या तळासारखा असतो. म्हणून त्यास कुंभपृष्ठ[8] असे म्हणतात. या पृष्ठाने नलिकेच्या उभ्या भिंतीशी केलेला कोन म्हणजे स्पर्शकोन[9] होय. कुंभपृष्ठ अंतर्वक्र[10] तसेच बहिर्वक्र[11] असू शकते. पाणी भरलेल्या पात्रात वक्र, सूक्ष्म नलिका ठेवली असता, केशाकर्षणामुळे उत्क्षेपणीची[12] निर्मिती सुद्धा होऊ शकते.

1. Capillary
2. Tubes
3. Grooves
4. Capillary rise
5. Ground water table
6. Surface film
7. Surface tension
8. Meniscus
9. Angle of contact
10. Concave
11. Convex
12. Siphon

२४ मृत्तिकेपैकी काही भाग पोकळ असतो तेव्हा तो कमी करून मृत्तिकेची घनता वाढविणे म्हणजेच तिचे दृढीकरण[1] करणे शक्य आहे हे ध्यानात येईल. दृढीकरणाच्या प्रक्रियेत मृत्तिकेतील कण अधिक जवळ आणले जातात. ही हालचाल होण्यासाठी बलाचा उपयोग करावा लागतो. त्याचप्रमाणे पाण्याचाही स्नेहांजनासारखा[2] उपयोग होतो. दृढीकरणाच्या प्रयोगात असे दिसून येते की कमी जलमान किंवा अतिरिक्त जलमान ठेवून दृढीकरण केल्यास घनता कमी असते परंतु विशिष्ट जलमान—ज्यास उत्तमीय[3] जलमान म्हणतात—असल्यास, घनता महत्तम

1. Compaction
2. Lubricant
3. Optimum

असते. हिलाच उत्तमीय घनता म्हणतात. दृढीकरणाच्या प्रक्रियेत मृत्तिका संपृक्त नसते. दृढीकरण आणि दृढीभवन[4] यांतील फरक लक्षात ठेवला पाहिजे. सामान्य व्यवहारात हे दोन्ही शब्द पुष्कळ वेळा समानार्थी वापरले जातात. दोन्ही प्रकारांत घनता वाढते परंतु दृढीभवनात मृत्तिका संपृक्त असावी लागते. अशा मृत्तिकेच्या नमुन्यावर भार ठेवला असता, पाणी बाहेर पडते व तेवढ्याच प्रमाणात पोकळीचे मानही कमी होते. म्हणजेच बाहेरची हवा पोकळीत येत नाही. दृढीभवनाचे हे व्यवच्छेदक लक्षण आहे. अर्थातच नमुन्याची घनता वाढते. दृढीभवनाच्या उलट प्रक्रियेस स्फायन[5] म्हणतात. दृढीभवनाच्या प्रक्रियेत मृत्तिकेवर ठेवलेला भार प्रारंभी अंशतः कणांनी आणि अंशतः पाण्याने पेलला जातो. क्रमशः पाण्याने पेललेला भार शून्य होऊन शेवटी सर्व भार मृत्तिका कणांनीच पेलला जातो. ज्याचे दृढीभवन होत आहे अशा थरात निरनिराळ्या स्थानी विशिष्ट क्षणी असलेला जलदाब दाखविणाऱ्या आलेखास एककालीन[6] रेषा म्हणतात. प्रारंभीची ती एककालीन आदिरेषा[7] आणि शेवटची ती एककालीन अंतिम रेषा[8] होय. मधल्या काळातील निरनिराळ्या क्षणांसाठीही अशा रेषा काढता येतात. या सर्वांचे मिळून संचितचित्र[9] होते. दृढीभवन विषयात कालगुणक[10] किंवा समयगुणक आणि पूर्वदृढीभवन[11] या संज्ञा येतात. त्याचप्रमाणे अवकाशवर्धनाचा[12] व अवकाशक्षयाचा[13], दमनीयतेचा[14] व स्थितिस्थापक प्रत्यावर्तनाचा, दृढीभवनाचा व स्फायनाचा असे गुणांकही येतात. दृढीभवन द्विमितीत[15] तसेच त्रिमितीतही[16] घडून येते. दृढीभवन क्रिया आणि उष्णतासंवहन क्रिया[17] तसेच वायूचे अभिसरण[18] यांत गणिती साम्य[19] आहे.

4. Consolidation
5. Swelling
6. Isochrones
7. Zero isochrone
8. Final isochrone
9. Piezograph
10. Time factor
11. Preconsolidation
12. Volume increase
13. Volume decrease
14. Compressibility
15. Two dimensional
16. Three dimensional
17. Thermodynamic process
18. Diffusion
19. Mathematical analogue

२५ धरणांसाठी किंवा रस्त्यांसाठी जे भराव बांधले जातात त्यांच्या दोन्ही बाजूंस कोणत्याही परिस्थितीत स्थिर राहतील असे उतार ठेवावे लागतात. धरणाच्या बाबतीत नदीच्या उगमाकडचा तो उगम-दिशेचा[1] उतार आणि प्रवाह जिकडे जातो त्या बाजूचा तो प्रवाह-दिशेचा[2] उतार म्हटला जातो. उताराचा उच्छेद साधारणपणे

1. Up-stream
2. Down-stream

वर्तुळाकार पृष्ठावरून होतो. त्यास घसर-वर्तुळ[3] म्हणतात. ही घटना लक्षात घेऊन स्थैर्य-निश्चितीची[4] जी पद्धत रूढ केलेली आहे तीस घसर-वर्तुळ-पद्धती म्हणतात. या पद्धतीत विचारार्थ घेतलेल्या मृत्तिकाखंडाची शकले[5] करून स्थैर्यविश्लेषण करतात. घसरवर्तुळे तळबिंदुगामी[6] किंवा मध्यमावर्तुळे[7] असतात. काही विशिष्ट परिस्थितीत घसरपृष्ठ संमिश्र[8] आकाराचे असते. स्थैर्यनिश्चिती करताना सुरक्षिततांक[9] विशिष्ट मूल्याचा असावा लागतो. जलाशय पूर्ण भरून भरावात स्थायी क्षरणजाल निर्माण झाले असताना, म्हणजेच स्थायीक्षरणजाल[10] अवस्थेत भरावाच्या स्थैर्याची निश्चिती करावी लागते. त्याचप्रमाणे या परिस्थितीत अतिवृष्टी होत असेल, तर या स्थितीतील म्हणजेच अतिवृष्टीकालीन[11] अवस्थेतील स्थैर्यही निश्चित करावे लागते. जलाशय द्रुतगतीने रिकामा झाला, तर उगम-दिशेकडील उताराचे स्थैर्य धोक्यात येऊ शकते. या स्थितीस द्रुतरिक्तनावस्था[12] म्हणतात.

3. Slip circle
4. Stability analysis
5. Slices
6. Toe-circle
7. Median-circle
8. Composite
9. Factor of safety
10. Steady flownet condition
11. Heavy downpour condition
12. Sudden draw-down condition

२६ धरणाच्या पायातून पाणी अतिरिक्त प्रमाणात झिरपून जाऊ नये म्हणून जे उपाय योजतात त्यांना जलरोधक[1] उपाय म्हणतात. उदा., जलरोधक खंदक[2]. नदी-पात्रातील बांधकामाच्या वेळी तेथे नदीचे पाणी येऊ नये व बांधकामासाठी शक्य तेवढे कोरडे क्षेत्र उपलब्ध व्हावे म्हणून नदी-पात्रात जो तात्पुरता बांध घालतात त्यास कुंडनबांध[3] म्हणतात. धरणातील पुराचे पाणी उत्सारण-मार्गावरून[4] पडून खाली नदीत जाण्यापूर्वी त्याचा वेग सुरक्षित मर्यादेत आणावा लागतो. त्यासाठी थारोळे[5] किंवा जलक्षोभनाशी कुंड[6] बांधले जाते. काही वेळा त्याचा आकार पाण्यापुढे पायघडी[6] घालावी असा असतो. चिरेबंदी[7] किंवा काँक्रीटच्या धरणात छत्रपथ[8] ठेवतात. धरणातून पाणी सोडण्यासाठी विमोचक[9] असतात. वीजघराकडे पाणी नेणाऱ्या नलिकांत झडपा[10] असतात.

1. Cut-off arrangement
2. Cut-off trench
3. Coffer dam
4. Spillway
5. Stilling basin
6. Apron
7. Masonry
8. Gallery
9. Outlet
10. Valve

२७ पादकालगतच्या मातीच्या थरास निम्नस्तर[1] असे म्हणतात. ज्यावेळी एखादा भार पादकाचे द्वारा मृत्तिकेवर संक्रमित केला जातो त्या वेळी अशा पादकाच्या तळावर स्पर्शदाब[2] निर्माण होतो. स्पर्शदाब पादकाच्या

1. Subgrade
2. Contact pressure

क्षेत्रावर सर्व ठिकाणी सारखा नसतो. तरीही सोपेपणासाठी एकांक क्षेत्रावरील स्पर्शदाब आणि तदनुषंगिक अवसीदन या गुणोत्तराचे मूल्य भारीत क्षेत्राच्या प्रत्येक ठिकाणी सारखेच असते, असे काही समस्यांत गृहीत धरण्याचा प्रघात आहे. प्रत्यक्षातील स्पर्शदाब आणि उपरोक्त गृहीतातील स्पर्शदाब यांतील वेगळेपणा स्पष्ट व्हावा म्हणून या स्पर्शदाबास निम्नस्तर-प्रतिक्रिया[3] असे म्हणतात. निम्नस्तर प्रतिक्रिया आणि तदनुषंगिक अवसीदन यांतील गुणोत्तरास निम्नस्तर प्रतिक्रियेचा गुणांक असे म्हणतात. क्षितिजलंब[4] दिशेतील प्रतिक्रियेप्रमाणे क्षितिजसमांतर[5] दिशेतही अशा तऱ्हेचा गुणांक काही उदाहरणांत ठरविता येतो.

3. Subgrade reaction
4. Vertical
5. Horizontal

२८ विवेचनाच्या सोयीसाठी प्रत्यक्षातील भारांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण केले जाते. १. बिंदुभार[1], २. रेषाभार[2], ३. क्षेत्रव्यापी भार[3] क्षेत्रव्यापी भारांचे पुनः आकारानुसार उपवर्ग पाडता येतात. १. पट्टिका[4], २. चौरसाकृती[5], ३. वर्तुळाकृती[6], ४. आयताकृती[7]. ज्या पादकांच्या द्वारे भार संक्रमित होतात, त्यांचेही त्यांच्या गुणधर्मानुसार ताठ[8] आणि लवचिक[9] असे प्रकार करता येतात. एकूण भार आणि भारांचा आकार किंवा आकारमान हे जसे महत्त्वाचे तसेच विवक्षित भाराचे रेषेवरील किंवा क्षेत्रावरील वितरण[10] हेही महत्त्वाचे असते. एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य सगळीकडे सारखेच असेल तेव्हा तो समप्रमाण[11] वितरित भार असतो. अन्य प्रकारची वितरणेही शक्य असतात. खोलीनुसार वाढत जाणारे स्थिरजलदाबासारखे वितरण[12] हे एक त्यांपैकी नेहमीचे उदाहरण आहे.

1. Point load
2. Line load
3. Area load
4. Strip load
5. Square
6. Circular
7. Rectangular
8. Rigid
9. Flexible
10. Distribution
11. Uniform
12. Hydrostatic distribution

२९ मृत्तिकाराशीत निरनिराळ्या प्रकारांच्या भारांमुळे किंवा बांधकामामुळे जी प्रतिबले निर्माण होतात त्यांच्या सैद्धांतिक अन्वेषणासाठी मृत्तिकाराशीला आदर्श रूप दिले जाते. प्रथमतः हा राशी अपारप्राय[1] आहे असे गृहीत धरतात. समतल पृष्ठभाग असलेल्या व अधस् दिशेत तसेच सर्व क्षितिजसमांतर दिशांत अपार पसरलेल्या राशीस अपारप्राय राशी असे म्हणतात. पूर्णपणे अपार नाही परंतु जवळजवळ तशीच मानता येईल म्हणजेच प्रायः अपार अशी राशी म्हणजे अपारप्राय राशी होय. त्याचप्रमाणे हा

1. Semi-infinite

राशी समांग[2] म्हणजे कोणत्याही बिंदुस्थानी सारख्या दिशेत सारखेच गुणधर्म असलेला किंवा समदैशिक[3] म्हणजे कोणत्याही बिंदुस्थानी प्रत्येक दिशेत सारखेच गुणधर्म असलेला असा गृहीत धरला जातो. समांग नाही तो विषमांग[4]. तसेच समदैशिक नाही तो विषमदैशिक.[5] एखाद्या पदार्थात सर्व दिशांऐवजी परस्परांना लंबरूप असणाऱ्या पातळ्यांपुरते सारखे गुणधर्म असतील, तर त्या पदार्थाला लंबदैशिक[6] म्हणतात.

2. Homogeneous
3. Isotropic
4. Heterogeneous
5. Unisotropic
6. Orthotropic

३० अशा राशीत भाराच्या खाली असणाऱ्या भागात दाब निर्माण होतात. या भागाच्या आकारावरून त्याला दाबकंद[1] असे नाव दिले जाते. बॉसिनेस्कची तद्विषयक समीकरणे प्रसिद्ध आहेत. घनराशीतील प्रतिबले ठरविण्यासाठी प्रकाशविकार[2] पद्धतीचा किंवा गणिती साम्यगुण[3] पद्धतीचा अवलंब करता येतो. एखाद्या घनराशीतील प्रतिबले किंवा अवसीदन ठरविण्यासाठी प्रभावांक[4] वापरले जातात. त्याचप्रमाणे अधिमेलना[5]चा नियमही वापरतात.

1. Pressure bulb
2. Photo-elastic
3. Mathematical analogue
4. Influence values
5. Law of superposition

३१ स्थिर असलेल्या वस्तूवर आघात[1] करून तिच्यात कंपन[2] निर्माण करता येते. भूकंप, चालू असणारी यंत्रे इ. मुळे मृत्तिकेत कंपन निर्माण होते. जेव्हा एखादी वस्तू एका रेषेला समांतर पद्धतीने किंवा एका पातळीत एकाच अक्षाभोवती कंप पावू शकते तेव्हा तिची स्वाधीनतेची कोटी[3] एकच आहे असे म्हटले जाते. अशा कोटी सहा असू शकतात. कंप पावणाऱ्या रचनेतील कणांची सापेक्ष स्थाने बदलत नसतील, तर अशा रचनेस एकराशिव्यूह[4] म्हणतात. परंतु अनेक वस्तू लवचिक अवयवांद्वारे एकमेकींशी जोडलेल्या असतील, तर कंपनविषयात अशी रचना अनेकराशिव्यूह[5] ठरते. कंपनविषयाच्या अभ्यासात स्प्रिंगांच्या शय्येवर[6] ठेवलेल्या ठोकळ्यावर आघात करून कंपनांचा अभ्यास केला जातो. स्थूणांमध्ये ठोकण्यामुळे अनुदीर्घ[7] कंपने निर्माण होतात.

1. Impact
2. Vibration
3. Degree of freedom
4. Single mass system
5. Multiple mass System
6. Spring bed
7. Longitudinal

३२ आघातामुळे कंप पावणाऱ्या वस्तूचा गुरुत्वमध्य[1] मूळ स्थानापासून विशिष्ट अंतरापर्यंत विस्थापित होतो व पुनः परत फिरून उलट्या दिशेत तितक्याच

1. Centre of gravity

अंतरापर्यंत जाऊन परत फिरतो. मूळ स्थानापासून एका दिशेकडचे विस्थापनाचे अंतर म्हणजे कंपनाचा आयाम[2] होय. गुरुत्वमध्य दोन्ही बाजूंस जाऊन प्रथमच मूळ स्थानी येतो तेव्हा एक फेरा[3] पुरा होतो. एका फेऱ्याला लागणारा काल तो कंपनाचा नियतकाल[4] होय आणि एकांक कालात होणारे फेरे म्हणजे कंपनाची वारंवारता[5] होय. कंपने दोन प्रकारांची असतात. केवळ एकदा कारक झालेल्या प्रेरणेमुळे[6] निर्माण होणारी ती मुक्त कंपने.[7] अशा कंपनाचा नियतकाल म्हणजे वस्तूच्या कंपनाचा स्वाभाविक नियतकाल[8] होय. दुसरा प्रकार म्हणजे नियतकालिक पद्धतीने कारक होणाऱ्या प्रेरणेमुळे निर्माण होणारी कंपने. त्यांना प्रवृत्त कंपने[9] म्हणतात. प्रवृत्त कंपनात प्रेरणेची वारंवारता आणि वस्तूची स्वाभाविक वारंवारता या दोहोंचा संबंध येणार हे उघडच आहे. प्रवृत्त कंपनांमध्ये आयाम वाढतो. तद्विषयक गुणकास बृहदीकरण गुणक[10] म्हणतात. प्रेरणेच्या वारंवारतेचे मूल्य जेव्हा कंप पावणाऱ्या वस्तूच्या स्वाभाविक वारंवारतेच्या जवळ येऊ लागते त्यावेळी विस्पंद कंपनांची घटना[11] घडून येते. यावेळी कंपनाचा आयाम बदलत असतो. या दोन्ही वारंवारता एकच मूल्याच्या असतील तर आयाम सारखा वाढतच राहतो आणि अनुकंपनाची[12] घटना घडते. प्रेरणेची वारंवारता वस्तूच्या स्वाभाविक वारंवारतेपेक्षा मोठी असते त्यावेळी प्रेरणा आणि प्रवृत्त कंपन यांत कालदृष्ट्या अंतर पडते. त्यास दशांतर[13] म्हणतात.

2. Amplitude
3. Cycle
4. Period
5. Frequency
6. Impulse
7. Free vibration
8. Natural period
9. Forced vibration
10. Magnification factor
11. Beat phenomenon
12. Resonance
13. Phase difference

३३ वस्तूच्या गुरुत्वमध्याचे स्थिर परिस्थितीतील स्थान हे केंद्र समजून त्याभोवती आयामाइतक्या लांबीचा सदिश स्थिरमूल्य कोणात्मक गतीने फिरतो आहे असे गृहीत धरून कंपनातील विस्थापन, काल, इ. पदांतील संबंध व्यक्त करण्याची एक पद्धत आहे. या पद्धतीतील कोणात्मक वेग[1] म्हणजेच वस्तूची चक्रीय वारंवारता[2] होय.

1. Angular velocity
2. Circular frequency

३४ कंपनांच्या क्रियेला काही कारणामुळे विरोध झाला तर ती हालचाल बंद होतात. या क्रियेस मंदीकरण[1] म्हणतात. मंदीकरणास कारणीभूत होणारे बल ते मंदत्व-

1. Damping

कारी बल[2] होय. मंदीकरणाचा अभाव गृहीत धरल्यास मिळणारी कंपने एकतान[3] कंपने असतात.

2. Damping force
3. Harmonic

३५ कंपनामुळे एखाद्या माध्यमात ज्या लहरी[1] निर्माण होतात त्या ध्वनिलहरीप्रमाणे पसरतात. त्यांचा प्रसार संचार-वेगावर अवलंबून असतो. कंपनाचा नियत-काल × संचारवेग = लहरलांबी होय. लहरीची अग्रसीमा[2] लहरीच्या संचारदिशेशी[3] काटकोन करते. लहरींचे दोन प्रकार आहेत. १. दमन किंवा द–लहरी आणि २. कार्तनिक किंवा क–लहरी. या लहरींच्या बाबतीत प्रकाशलहरींप्रमाणे परावर्तन[4] आणि वक्रीभवन[5] इत्यादी घटना घडू शकतात. या गोष्टीचा फायदा घेऊनच भूकंपसाधित अन्वेषणाच्या[6] पद्धती बसविल्या आहेत. लहरींच्या बाबतीत समाघात घटनाही[7] अनुभवास येते.

1. Wave
2. Wavefront
3. Line of propagation
4. Reflection
5. Refraction
6. Siesmological investigation
7. Interference phenomena

३६ भूकंपामुळे निर्माण होणारी कंपने कृत्रिम प्रेरणांच्या कंपनांसारखीच असतात. भूकंपांचे प्रकार तीन : १. भूगर्भातील रचनात्मक[1] घडामोडींमुळे निर्माण होणारे, २. ज्वालामुखीच्या घडामोडींमुळे[2] होणारे ३. पाताळिक[3] म्हणजे फार खोलातून आलेले. भूकंप प्रेरणेचे उगमस्थान ते त्याचे उगमकेंद्र[4] होय, आणि त्याच्यावर भूपृष्ठावरचा जो बिंदू असतो तो प्रतिकेंद्र[5] होय. भूकंपजन्य प्रवेग आणि गुरुत्वाकर्षणजन्य प्रवेग यांमधील गुणोत्तराने भूकंपाची तीव्रता दर्शविता येते. भूकंपाची महत्ता[6] आणि तीव्रता[7] भिन्न असून त्या मोजण्याची प्रमाणेही भिन्न आहेत.

1. Tectonic
2. Volcanic
3. Plutonic
4. Focus
5. Epicentre
6. Magnitude
7. Intensity

३७ भूकंपपीडित क्षेत्रात कंपनांमुळे वास्तूतील प्रतिबलांत होणारी वाढ लक्षात घेऊन बांधकाम केले जाते. एखादी वास्तू कशी बांधावी याची चित्रे[1] प्रथम सिद्ध केली जातात. त्यात पुरोदर्शन,[2] पार्श्वदर्शन,[3] पदविन्यास,[4] छेद[5] इ. काढतात. वास्तूतील निरनिराळे अवयव[6] उदा., लादी,[7] तुळई,[8] खांब[9] इ. किती जाडीचे असावेत, त्यात लोखंडी सळया[10] किती वापराव्यात यासाठी बांधकाम सामग्रीच्या गुणधर्मांचा विचार करून गणित मांडावे लागते. वास्तूच्या बांधकामापूर्वी करावे लागणारे हे गणित म्हणजे पूर्वकल्प[11] होय. पूर्वकल्पातील फलितांनुसार[12] चित्रे तयार होतात व या उभयतांच्या आधारे प्रकल्प[13] तयार होतो.

1. Plans/Drawings
2. Front elevation
3. Side elevation
4. Plan
5. Section
6. Member
7. Slab
8. Beam
9. Column
10. Reinforcement Bars
11. Design
12. Results
13. Project

प्रकल्प अहवालात प्रत्येक बांधकामास खर्च किती येईल त्याचे प्राकलनही[१४] असते. बांधकामात हल्ली प्रबलित[१५] काँक्रीटचा नेहमीच वापर केला जातो. पूर्वप्रबलित[१६] तसेच पूर्वाकारित[१७] असे काँक्रीटच्या बांधकामाचे प्रकार आहेत. खांब व तुळया मिळून सिद्ध होणाऱ्या चौकटींच्या अवयवातील विनामक परिबले[१८] ठरविण्यासाठी हार्डी क्रॉसची परिबल वितरण[१९] पद्धत प्रसिद्धच आहे. तसेच शैथिल्य पद्धतीही[२०] ज्ञात आहेत. खणपद्धतीच्या[२१] बांधकामात सारख्या मापाच्या चौकटी[२२] वापरतात. तुळईला तिच्यावरील भारामुळे वक्रता येते. तिची टोके मुक्त[२३] किंवा बद्ध[२४] असू शकतात. तिच्या वाकण्यात प्रतिवक्रता[२५] बिंदू येण्याचाही संभव असतो. खांबांच्या बाबतीत बिजागरी पद्धतीचे[२६] टोक असाही एक प्रकार आहे. तुळईतील तंतू-प्रतिबले[२७] ठरविताना सुकरतादायी गृहीते स्वीकारावी लागतात.

14. Estimate
15. Reinforced
16. Prestressed
17. Prefabricated
18. Bending moment
19. Moment distribution method
20. Relaxation methods
21. Modular construction
22. Frames
23. Free
24. Fixed
25. Contraflexture
26. Hinged
27. Fibre-stress

३८ लक्ष्मणरेषा हा शब्दप्रयोग सर्वांना माहीत आहेच. त्याच अनुरोधाने जेव्हा प्रतिबलाचे मूल्य विशिष्ट मर्यादेपलीकडे गेले असता परिस्थितीत फार मोठा बदल होतो, त्या मूल्यासाठी लक्ष्मणमूल्य[१] असा शब्दप्रयोग केला आहे. लक्ष्मणवर्तुळ, लक्ष्मणभार लक्ष्मण-संचित हे त्यासारखे शब्दप्रयोग होत.

1. Critical value

३९ विषयाच्या विवेचनात भूमिती, बीजगणित इ. मधील संज्ञा आल्या आहेत. गणित मांडून, आकडेमोड करून मूल्य ठरविले तर त्यास गणितसिद्ध[१] मूल्य म्हटले आहे. आलेखावरून अंतर्वेशन[२] किंवा बहिर्वेशन[३] पद्धतीनेही मूल्ये घ्यावी लागतात. आलेखाचे नेहमीचे अक्ष म्हणजे क्ष-अक्ष आणि य-अक्ष. त्याव्यतिरिक्त तिसरा अक्ष तो ख-अक्ष म्हटला आहे. भुजा[४] आणि कोटी[५] यांच्या साहाय्याने म्हणजेच सहनिर्देशकांच्या[६] साहाय्याने आलेखावरील कोणत्याही बिंदूचे स्थान ठरविता येते. त्यासाठी त्रिज्यादिक् सदिशाचाही उपयोग करण्याची पद्धत आहे. कोनाचे मूल्य अंशांत तसेच त्रिज्यकांतही[७] व्यक्त करता येते. भौमितिक आकृतीत जीवा[८], परिवलय[९], अतिपरिवलय[१०], असंपात रेषा[११], स्पर्शरेषा[१२], चाप[१३],

1. Computed
2. Interpolation
3. Extrapolation
4. Abscissa
5. Ordinate
6. Coordinates
7. Radians
8. Chord
9. Parabola
10. Hyperbola
11. Asymptot
12. Tangent line
13. Arc

बिंदुपथ[14], समलंब चौकोन[15] इ. संज्ञा वापरल्या आहेत. त्याचप्रमाणे आलेखात धन[16] आणि ऋण[17] मूल्येही आली आहेत. समरूप[18] व सममात्र[19] आकृतींचाही उल्लेख आहे. त्रिकोणमितीतील ज्या[20], कोज्या[21], स्प[22], कोस्प[23], ज्याह[24], कोज्याह[25] या संज्ञा व शून्यलब्धी[26] गणितातील कलन समीकरणे[27], चलानयन[28], चलानयनातील स्थिरांक[29], फलने[30] या संज्ञाही अनेक ठिकाणी आल्या आहेत. लघु क्ष[31] म्हणजे क्षचा लघुगणक होय. काही ठिकाणी निर्देशांक[32], शुद्धांक[33], सातत्यलक्षणे[34], बहुपद श्रेणी[35] यांचाही वापर झालेला आहे. विवेचनासाठी नेहमी मृत्तिकेचा समपार्श्व[36] विचारात घेतला आहे. चक्रीय हालचालीत सव्य[37] अपसव्य[38] शब्द वापरले आहेत.

14. Locus
15. Trapezium
16. Positive
17. Negative
18. Equivalent
19. Symmetrical
20. Sine
21. Cosine
22. Tangent
23. Contangent
24. Sinh
25. Cosh
26. Calculus
27. Differential Equation
28. Integration
29. Constant
30. Function
31. Log x
32. Index
33. Pure number
34. Conditions of continuity
35. Polynomial series
36. Prism
37. Clockwise
38. Anti clockwise

अनुक्रमणिका

प्रथम खंड : मृत्तिकाबलविज्ञानातील सिद्धांतांत अंतर्भूत असलेली सामान्य तत्त्वे

द्वितीय खंड : आदर्श मृत्तिकांतील कार्तनिक उच्छेदाची लक्षणे

प्रकरण ५

प्रकरण ६

प्रकरण ७

प्रकरण १४

प्रकरण १५

चतुर्थ खंड : मृत्तिकाबलविज्ञानातील स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्या

प्रकरण १६

प्रथम खंड

मृत्तिकाबलविज्ञानातील सिद्धांतांत अंतर्भूत असलेली सामान्य तत्त्वे

प्रकरण १

विषय-परिचय

१. **विषयाचा आशय आणि उद्देश :** खडकांच्या प्राकृतिक आणि रासायनिक विघटनामुळे निर्माण होणाऱ्या विस्कळित स्वरूपांतील घन पदार्थांचे समुच्चय, तसेच गाळासारखे पदार्थ–त्यांत सेंद्रिय पदार्थ मिसळलेले असोत वा नसोत–यांचा संबंध स्थापत्यकार्यात आला असता उद्भवणाऱ्या समस्या, बलविज्ञानातील व चलजलशास्त्रातील नियम वापरून सोडविण्याचे शास्त्र म्हणजे **मृत्तिकाबलविज्ञान** होय. भूस्तरशास्त्रात उपरोक्त समुच्चयाला **अश्मज पदार्थांचे कवच** असे म्हटले जाते आणि वनस्पतींचे पोषण ज्यामुळे होते, अशा भूपृष्ठालगतच्या विघटित स्तरांपुरतीच **मृत्तिका** ही संज्ञा योजिली जाते. या उलट, स्थापत्यशास्त्रात मृत्तिका या संज्ञेने भूस्तरशास्त्रातील अश्मज कवचातील सर्वच पदार्थांचा सामान्यतः बोध होतो. भूस्तरशास्त्रज्ञ किंवा कृषिशास्त्रज्ञ यांना अभिप्रेत असलेल्या मृत्तिकेचा विचार या ग्रंथात केला जाणार नाही; कारण वास्तूंची आधारभूमी किंवा बांधकामाची सामग्री यांपैकी कोणत्याच दृष्टीने ही मृत्तिका उपयुक्त नसते. स्थापत्यशास्त्राच्याच एका शाखेचा ऊहापोह या ग्रंथात करावयाचा असल्यामुळे त्यात रूढ असलेली मृत्तिका ही काहीशी संदिग्ध संज्ञा अपरिहार्यपणे वापरावी लागणार आहे. खरे पाहता अश्मज पदार्थ हीच योग्य संज्ञा आहे.

मृत्तिकाबलविज्ञानात पुढील विषयांचा समावेश होतो – (१) बलप्रभावित मृत्तिकेच्या वर्तनाचे मुळातच सरळ रूप दिलेल्या गृहीतांवर आधारलेले सिद्धांत, (२) प्रत्यक्षातील मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांचे संशोधन आणि (३) व्यवहारातील समस्या सोडविण्यासाठी सिद्धांतजन्य आणि अनुभवजन्य ज्ञानाचा उपयोग.

अर्धशतकापूर्वीच मृत्तिकाविषयक काही सिद्धांतांचा विकास जवळजवळ पूर्ण झाला होता. परंतु प्रत्यक्षातील मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांचे ज्ञान मात्र खऱ्या अर्थाने गेल्या पंचवीस वर्षांतच संकलित झाले आहे. त्यापूर्वी वास्तव रूपातील मृत्तिकांच्या गुणधर्मांविषयीच्या अपुऱ्या ज्ञानामुळे, ज्यांत मृत्तिकांचा संबंध येई, अशा स्थापत्य विषयक समस्यांत या सिद्धांतांतून अवलंबिलेल्या उपपत्तींचा वापर अयोग्य रीतीने केला जाई. परिणामी घडणाऱ्या चुकांचे खापर मात्र या सिद्धांतांच्या माथी फोडण्यात येई.

मृत्तिकांचे प्राकृतिक गुणधर्म आणि नैसर्गिक मृत्तिकास्तरांच्या रचनेतील बारकावे, याविषयीच्या ज्ञानात झालेल्या शीघ्र प्रगतीमुळे एक जाणीव मात्र झाली आहे की, उपरस्थ भार किंवा निस्सारण-सुलभता एतद्विषयक परिस्थितीतील बदलांचे मृत्तिकेवरील

परिणाम, बांधकामास प्रारंभ करण्यापूर्वीच अचूकपणे ठरवू म्हटल्यास तसा संभव साधारणतः फारच थोडा असतो. पाण्याच्या क्रियेचा विचार जेथे प्रस्तुत असतो, अशा सर्व समस्यांत तर उपरोक्त विधानाची सार्थता विशेषत्वाने प्रत्ययास येते; कारण अन्वेषणासाठी घेतलेल्या वेधनविवरांतून मिळणाऱ्या माहितीत भूस्तरांतील ज्या बारकाव्यांची नोंद होत नाही, त्यांवरच पाण्याची क्रिया पुष्कळदा अवलंबून असते. सैद्धांतिक मृत्तिकाबलविज्ञानाचे मृत्तिकास्थापत्यातील प्रयोजन आणि वास्तुरचना पूर्वकल्पात होणारा एखाद्या सिद्धांताचा वापर या दोहोंत या कारणांमुळे फार फरक पडतो. व्यावहारिक बलविज्ञानाचा वापर करून एखाद्या पोलादी किंवा प्रबलित काँक्रीटच्या वास्तूचा पूर्वकल्प सिद्ध केला जातो, तेव्हा प्रारंभीच निर्णायक स्वरूपाची माहिती मिळू शकते; कारण पूर्वकल्पाचे गणित सापेक्षतेने अधिक विश्वासार्ह अशा माहितीवर आधारित असते. या उलट, मृत्तिकाबलविज्ञानातील सिद्धान्तांतून मात्र केवळ स्थूल स्वरूपाची कामचलाऊ अनुमाने प्राप्त होतात. आधारस्तरांतील मृत्तिकांचे सरासरी प्राकृतिक गुणधर्म आणि स्तरास्तरांतील सीमारेषांच्या दिशा यांविषयीचे ज्ञान हे नेहमीच अपूर्ण आणि पुष्कळदा अतिशय त्रोटक असते, हे त्याचे कारण होय. असे असूनही मृत्तिकाबलविज्ञानाद्वारे प्राप्त होणारे स्थूल अनुमान, व्यवहारात स्थापत्यशास्त्राच्या इतर शाखांत एखादा वास्तुरचनाविषयक सिद्धांत जितका उपयुक्त ठरतो, तितकेच उपयुक्त ठरते. समस्यांची उकल होण्यासाठी आपण मांडलेल्या गणितातील मूलभूत गृहीतांच्या बाबतीत असलेल्या अनिश्चिततेची पूर्ण जाणीव स्थापत्यशास्त्रज्ञास असेल, तर वस्तुस्थितीविषयक समज आणि प्रत्यक्षात उद्भवू शकणारी परिस्थिती, यांत पडणाऱ्या फरकाचे स्वरूप आणि महत्त्व यांची पूर्वकल्पना त्याला असू शकते. अशा संभाव्य फरकाची जाणीव झालेली असल्यामुळे पूर्वकल्प आणि प्रत्यक्ष परिस्थिती यांचा सुसंवाद वेळीच साधता यावा, यासाठी बांधकाम चालू झाल्यानंतर कोणत्या गोष्टींकडे काळजीपूर्वक लक्ष ठेवण्याची आवश्यकता आहे, एतद्विषयक योजना त्याला अगोदरच करून ठेवणे शक्य होते. एवंच, बांधकाम चालू असतानाच स्वतःच्या ज्ञानातील उणिवा भरून काढल्यामुळे अनपेक्षित घटना निर्माण होऊन चकित होण्याचा प्रसंग त्याच्यावर येत नाही.

'माहिती घेत पुढे चला,' अशा या कार्यपद्धतीमुळे इतर स्थापत्यकार्यांत उदा० प्रबलित काँक्रीटच्या बांधकामात, सर्वसामान्यपणे आवश्यक मानलेल्या सुरक्षिततांकापेक्षा कमी मूल्याचा सुरक्षिततांक मान्य करूनही मृत्तिकाविषयक काम निर्धोकपणे चालू ठेवणे शक्य असते. तेव्हा मृत्तिकासिद्धांतांचे सखोल ज्ञान असणे व्यावहारिक दृष्ट्या किती महत्त्वाचे आहे, हे आणखी आवर्जून सांगण्याची आवश्यकता असू नये. सिद्धांतांची मांडणी, आदर्श मृत्तिका आणि आदर्श भूस्तरीय रचना गृहीत धरून केलेली असली, तरी प्रत्यक्ष बांधकामात पुढे ठाकणाऱ्या बिकट समस्यांची चातुर्यपूर्ण उकल करण्यास हे सिद्धांत साहाय्यक ठरतात.

पूर्वानुभवावर अधिष्ठित असलेला प्रत्येक ठोकताळेवजा असणारा नियम किंवा सूत्र

केवळ सांख्यकीय दृष्टया ग्राह्य मानता येते. त्यातून संभाव्यता व्यक्त होते, निश्चितता नाही, असे दुसऱ्या शब्दांत म्हणता येईल. तसे नसते, तर अशा सूत्रांऐवजी गणिती समीकरणच मांडता आले असते. तेवढ्यापुरता तरी अनुभवजन्य सूत्र आणि मृत्तिका-बलविज्ञानाने दिलेले कामचलाऊ स्थूल अनुमान यांत भेद नाही. परंतु अशा कामचलाऊ स्थूल अनुमानांच्या आधारे जेव्हा आपण बांधकामाला प्रारंभ करतो, तेव्हा त्यातील अनिश्चिततेची पूर्ण जाणीव आपणास असते. त्यामुळे पुढे काही निराळे घडल्यास आश्चर्य करण्याची वेळ येत नाही. या उलट, पूर्वी घडत असे त्याप्रमाणे अनुभवजन्य सूत्रांवरच पूर्णपणे विश्वास ठेवला, तर संख्याशास्त्राच्या नियमांनुसार जे घडेल ते बघायचे एवढेच आपल्या हाती राहते. या नियमांचे कार्य कसे चालते, हे मृत्तिका-स्थापत्यात कित्येक मोठे अपघात झाल्याविना एकही वर्ष सुने जात नाही यावरून दिसतेच. त्यांतील बरेचसे अपघात पाण्याच्या अनपेक्षित वर्तनामुळे घडतात, हा काही केवळ योगायोग म्हणता येणार नाही. क्षुल्लक भासणाऱ्या भूस्तरीय बारकाव्यांवर मृत्तिकेचे वर्तन जितके अवलंबून असते, त्यापेक्षा कितीतरी अधिक प्रमाणात पाण्याचे वर्तन त्यांवर अवलंबून असते. म्हणूनच पाझरक्षम भूस्तरांवर बांधल्या जाणाऱ्या धरणांच्या रचनेत वापरल्या जाणाऱ्या अनुभवजन्य सूत्रांत गृहीत धरलेले मृत्तिकेचे सरासरी गुणधर्म आणि प्रत्यक्षांतील गुणधर्म यांतील भिन्नतेस अपवादात्मक महत्त्व येते. याच कारणासाठी एखाद्या वास्तूच्या संदर्भात होणारे पाण्याचे वर्तन जाणण्यासाठी मृत्तिकासिद्धांतानुसार केलेल्या आकडेमोडीचा उपयोग, बांधकामाची प्रगती होत असताना झिरपणाऱ्या पाण्याची वास्तव परिस्थिती दर्शविणाऱ्या जलदाबमापकांच्या स्थानांचा आराखडा ठरविण्यापुरताच केवळ करणे बरे. अशा आकडेमोडीची फलिते आहेत तशीच मान्य केली, तर त्यांची उपयुक्तता अनुभवाधिष्ठित सूत्रांइतकीच, क्वचित प्रसंगी त्याहूनही अल्प ठरते. मृत्तिकाबलविज्ञानाचा अभ्यास आणि वापर या मनोभूमिकेतून झाला पाहिजे.

२. **सिद्धांत आणि सत्यस्थिती :** स्थितिस्थापक अवस्था टिकेल एवढ्या मर्यादेत असलेले बल ज्यावर कारक आहे अशा पोलादाचा अपवाद वगळल्यास, बांध-कामाचे साहित्य म्हणून वापरल्या जाणाऱ्या कोणत्याच पदार्थाचे प्रत्यक्षातील प्राकृतिक गुणधर्म शास्त्रीय विश्लेषणासाठी आधारभूत म्हणून मान्य होण्याइतके साधे असत नाहीत. त्यामुळे व्यावहारिक बलविज्ञानातील जवळजवळ प्रत्येक सिद्धांत, संबंधित पदार्थांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांच्या बाबतीत काही गृहीतांचा स्वीकार करून, त्यांवर आधारलेला असतो. ही गृहीते आणि प्रत्यक्ष परिस्थिती यांत नेहमीच थोड्याफार प्रमाणात विसंवाद असतो. अशा कार्यपद्धतीचा अवलंब करूनही प्राप्त होणाऱ्या काटेकोर गणितात्मक रीती, वास्तू-पूर्वकल्पाच्या संदर्भात नित्योपयोगाच्या दृष्टीने साधारणतः अति क्लिष्टच असतात. अशा प्रकरणांच्या संशोधनातील गणितात्मक भाग सोपा होण्याच्या उद्देशाने, आणखी काही सुकरतादायी गृहीते स्वीकारणे आपणास भाग पडते.

उपरोक्त सत्यसमीप गृहीतांचे स्वरूप व त्यांतील गर्भितार्थ विशद करण्यासाठी एक उदाहरण येथे देता येईल; ते म्हणजे दोन्ही टोकांस मुक्ताधारांवर अधिष्ठित असलेल्या व जिच्यावर विशिष्ट भार-समूह कारक आहे, अशा प्रबलित काँक्रीटच्या तुळईतील तंतू-प्रतिबलांची परममूल्ये ठरविण्यासाठी कराव्या लागणाऱ्या आकडेमोडीच्या सर्वमान्य पद्धतीचे होय. या पद्धतीतील पहिली कृती म्हणजे विश्लेषणात्मक किंवा आलेखात्मक पद्धतीचा अवलंब करून परिबलाचे महत्तम मूल्य ठरविणे ही असते. गणित आणि सैद्धांतिक बलविज्ञान यांतील नियमांवरच केवळ ही आकडेमोड आधारित असल्यामुळे या कृतीतून मिळणारे उत्तर पूर्णपणे विश्वासार्ह असते. या पुढची कृती म्हणजे नेहमीच्या समीकरणांच्या साहाय्याने, तुळईच्या छेदावरील प्रतिबलांची मूल्ये ठरविण्यासाठी आकडेमोड करणे ही होय. या दुसऱ्या कृतीसाठी निदान चार तरी पूरक गृहीते स्वीकारावी लागतात, ती पुढीलप्रमाणे—(१) तुळईच्या उदासीन अक्षाशी लंबरूप असणाऱ्या प्रत्येक छेदाचे सरळ पृष्ठ तुळईला बाक येत असतानाही सरळच राहते, (२) काँक्रीटचे ताणसामर्थ्य शून्य आहे, (३) दमनकारी बलांच्या प्रभावाखाली काँक्रीटचे दमन हूक-प्रणीत नियमानुसार होते, (४) पोलाद आणि काँक्रीट यांच्या स्थितिस्थापकत्वमापांकांचे गुणोत्तर १५ किंवा तत्सम निश्चित मूल्याचे असते. यांतील पहिले गृहीत स्थिति-स्थापकत्व-सिद्धांताशी थोडेसे विसंगत आहे. या विसंगतीमुळे उद्भवणाऱ्या चुकीचे गांभीर्य तुळईची उंची व तिच्या दोन आधारांतील अंतर यांच्या गुणोत्तरावर अवलंबून असते. उर्वरित तीन गृहीते खऱ्या काँक्रीटच्या गुणधर्मांशी उघडउघड विसंवादी आहेत. या कारणांमुळे आकडेमोडीच्या या पद्धतीला **प्रबलित काँक्रीटचा सिद्धांत** असे नामाभिधान देणे बरोबर होणार नाही. हा प्रबलित काँक्रीटचा सिद्धांत नव्हेच, प्रबलित काँक्रीटच्या ठिकाणी एक आदर्श पदार्थ कल्पून मांडलेला असा हा सिद्धांत आहे. या आदर्श पदार्थाला चिकटविण्यात येणारे गुणधर्म म्हणजे खऱ्या काँक्रीटच्या गुणधर्मांना दिलेले अत्यंत सरळ असे रूप आहे. तरीही सामान्यतः ही पद्धत पूर्णत्वाने ग्राह्य मानली जाते. प्रबलित काँक्रीटच्या सर्वसाधारण वास्तूंच्या पूर्वकल्पात या रीतीचा अवलंब केल्यामुळे उद्भवणारी चूक, सुरक्षिततांकामुळे प्राप्त होणाऱ्या निर्धोकताकक्षेच्या आतच असते, हे सर्वश्रुतच आहे. काँक्रीटच्या पूर्वकल्पात सुरक्षिततांकाचे रूढ मूल्य ३·५ ते ४ असते.

सिद्धांतजन्य निष्कर्ष कुठपर्यंत लागू करावयाचे हे विचाराधीन पदार्थाच्या प्राकृतिक गुणधर्मांविषयी स्वीकारलेल्या गृहीतांवर अवलंबून असल्यामुळे, कोणताही सिद्धांत त्याला आधारभूत मानलेल्या गृहीतांचा संक्षिप्त परंतु संपूर्ण निर्देश केल्याविना मांडू नये. अन्यथा, ज्या उदाहरणांत अशा सिद्धांताची फलिते यथार्थपणे लागू होत नाहीत, तेथेही त्यांचा उपयोग केला जाण्याचा संभव असतो.

एखाद्या सिद्धांताच्या सयुक्तिकतेच्या मर्यादांचे अपुरे ज्ञान असले म्हणजे घेतल्या जाणाऱ्या चुकीच्या निर्णयाचे एक उद्बोधक उदाहरण म्हणून कूलोमप्रणीत उद्युक्त-मृत्तिकादाबाविषयीचा सिद्धांत आणि प्रत्यक्ष अनुभव, यांतील तथाकथित विसंवादाचे

सांगता येईल. मृत्तिकाराशीला दिलेल्या पार्श्वीय आधाराची माथ्याची कड क्षितिज-समांतर दिशेने एका विशिष्ट क्रांतिकारी अंतरापर्यंत किंवा अधिक कलली, तरच केवळ कूलोमचा सिद्धांत लागू पडतो, हे पुढील एका परिच्छेदात दाखविण्यात येणार आहे. काही वर्षांपूर्वीपर्यंत ही महत्त्वाची मर्यादा ज्ञात नव्हती. तथापि वालुकेतील खोदाईत वापरल्या जाणाऱ्या लाकडी आधारावर येणारा पार्श्वीय मृत्तिकादाब ठरविण्यासाठी हा सिद्धांत सर्रास वापरला जात असे. माथ्याजवळच्या आडव्या दांडक्याच्या ताठपणामुळे पार्श्वीय आधाराची माथ्याची कड वर वर्णिल्याप्रमाणे कलणे शक्य नसते. साहजिकच या विशिष्ट परिस्थितीत कूलोमचा सिद्धांत लागू होत नाही. या सिद्धांतानुसार मिळणारे मृत्तिकादाब-वितरण आणि उपरोक्त उदाहरणात प्रत्यक्षात दिसणारे वितरण यात मूलतःच भेद आहे, हे ज्या थोड्या अभियंत्यांना अनुभवाने ज्ञात झाले होते, ते हा सिद्धांतच टाकाऊ असून त्याचा वापर सोडून दिला पाहिजे, अशा चुकीच्या निर्णयाप्रत आले. दुसऱ्या काहींनी त्याचा वापर चालू ठेवला. अर्थातच काटकसर आणि सुरक्षितता यांचा विचार करता असा वापर बाधक ठरला. उपरोक्त दर्शनी विसंवादाचे खरे कारण ज्ञात होईपर्यंत सिद्धांत आणि अनुभव यांचा मेळ घालता येईना.

अशाच प्रकारे जवळजवळ प्रत्येक सिद्धांत आणि वस्तुस्थिती यांतील तथाकथित विसंवादाचे मूळ, सिद्धांताच्या सयुक्तिकतेच्या मर्यादांच्या बाबतीतील चुकीच्या कल्पनांत सापडेल. या कारणास्तव अशा महत्त्वाच्या आणि मूलभूत मर्यादांकडे या ग्रंथात विशेष लक्ष दिले जाईल.

३. **समाकर्षणहीन आणि समाकर्षणयुक्त मृत्तिका :** मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांची दोन टोके कल्पिता येतील. त्यांपैकी एक म्हणजे नम्य चिकण मृत्तिकेचे गुणधर्म आणि दुसरे म्हणजे स्वच्छ व पूर्णत्वाने शुष्क किंवा संपूर्णपणे निमज्जित असलेल्या वालुकेचे गुणधर्म. शुष्क किंवा पूर्णतया निमज्जित वालुकेच्या थरात खणले असता खोदाईच्या भिंतीतील वालुका ढासळून तळाशी येते. वालुकाकण एकमेकांशी संलग्न ठेवणाऱ्या गुणाचा पूर्ण अभाव या वर्तनावरून स्पष्ट दिसून येतो. उताराचा कोन एका विशिष्ट कोनाइतका म्हणजेच **विरामकोनाइतका** होईपर्यंत ही ढासळण्याची क्रिया थांबत नाही. शुष्क वालुका तसेच पूर्णतया निमज्जित वालुका यांच्या विरामकोनाचे मूल्य उताराच्या उंचीवर अवलंबून नसते. उलटपक्षी, घट्ट झालेल्या नम्य चिकण मृत्तिकेत उभ्या बाजूंना आधार न देताही, २० ते ३० फूट खोलीचा खंदक खणणे शक्य होते. एकमेकांना घट्टपणे चिकटून राहण्याच्या गुणाचे चिकणांतील अस्तित्व या घटनेमुळे दिसून येते. तथापि, अशा खंदकाची खोली एका विशिष्ट लक्षमण मूल्यापलीकडे जाताच त्याच्या बाजू ढासळतात आणि अशा उच्छेदानंतर तळाशी गोळा झालेल्या ढिगाऱ्याचा उतार मूळच्या उभ्या उतारापेक्षा फारच वेगळा असतो. उपरोक्त लक्षमण मूल्य चिकणांतील संलग्नता-गुणाच्या तीव्रतेवर अवलंबून असते. मृत्तिकाकणांतील या संलग्नता-गुणास **समाकर्षण** असे म्हणतात. समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेच्या बाबतीत विरामकोनास निश्चित मूल्य देता

येत नाही; कारण उंची जशी वाढेल त्यानुसार मृत्तिका न ढासळू देता, उभ्या राहू शकणाऱ्या महत्तम उभट उताराच्या कोनाचे मूल्य अशा मृत्तिकेत घटत जाते. ओलसर असल्यास वालुकेतही समाकर्षणाचा प्रादुर्भाव होतो व परिणामी अशा वालुकेच्या उताराचे वर्तनही वरीलप्रमाणे होते.

सर्वसाधारण वैशिष्ट्यांत साधेपणा भासत असला, तरीही प्रत्यक्षातील वालुकांचे आणि चिकण मृत्तिकांचे प्राकृतिक गुणधर्म इतके गुंतागुंतीचे असतात की, त्यांच्या वर्तनाचे काटेकोर गणितात्मक विश्लेषण करू पाहणे केवळ अशक्य होते. म्हणून सैद्धांतिक मृत्तिकाबलविज्ञानात **आदर्श वालुका** आणि **आदर्श चिकण मृत्तिका** अशा केवळ काल्पनिक पदार्थांचाच ऊहापोह केला जातो आणि या आदर्श पदार्थांचे गुणधर्म म्हणजे प्रत्यक्षातील वालुका आणि चिकण मृत्तिका यांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांना दिलेले सरळ रूप असते. आदर्श मृत्तिका आणि वास्तव मृत्तिका यांतील भेदाचा बोध खालील उदाहरणावरून होईल. कार्तनिक सामर्थ्याचा विशेष लोप होऊ न देता, बरीचशी विरूपता सहन करण्याचा गुण प्रत्यक्षातील बहुतेक मृत्तिकांत असतो, परंतु आदर्श मृत्तिकांचे कार्तनिक सामर्थ्य विरूपतेच्या प्रमाणावर मुळीच अवलंबून नसते, असे आपण सिद्धांताच्या सोईसाठी मानतो. या गृहीतामुळे कार्तनिक सामर्थ्याशी संबंधित असलेले सर्व सिद्धांत आणि वस्तुस्थिती यांत विसंवाद निर्माण होतो. एखाद्या समस्येची उकल काटेकोर गणितात्मक पद्धतीने केली, एवढ्याच कारणास्तव मूळ गृहीतात समाविष्ट झालेल्या चुकीचे निराकरण होत नाही. पुष्कळदा समस्येच्या गणितात्मक मांडणीला मूलतः सरळ रूप देण्यामुळे होणाऱ्या चुकीपेक्षा गुणधर्मविषयक मूलभूत गृहीतातील चुकीचेच गांभीर्य अधिक असते. तथापि, प्रत्यक्षातील प्राकृतिक गुणधर्म आणि गृहीत धरलेले गुणधर्म यांतील फरकाचे प्रमाण निरनिराळ्या मृत्तिकांत निरनिराळे असते. हा फरक आणि त्याचा सिद्धांतांद्वारे काढलेल्या निष्कर्षांच्या विश्वासार्हतेवरील प्रभाव या दोहोंचा शोध घेणे हा विषय मृत्तिकाविज्ञान आणि व्यावहारिक मृत्तिकाबलविज्ञान यांच्या प्रांतात पडणारा आहे; आणि हे दोन्ही विषय प्रस्तुत ग्रंथाच्या कक्षेबाहेरचे आहेत.

ज्या पदार्थांचे कार्तनिक सामर्थ्य विरूपता-प्रमाणावर अवलंबून नसते, अशा पदार्थांना व्यावहारिक बलविज्ञानात **नम्य पदार्थ** म्हणतात, आपल्या गृहीतानुसार आदर्श वालुका हा एक समाकर्षणहीन नम्य पदार्थ आहे. नम्य पदार्थांचा कार्तनिक उच्छेद होऊन नंतर नम्यताजन्य विसर्पण निर्माण होते. प्रतिबल-परिस्थिती स्थायी असूनही जेव्हा विरूपता चालूच राहते, तेव्हा त्या अवस्थेला **नम्यताजन्य विसर्पण** असे म्हणतात.

४. स्थैर्यविषयक आणि स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्या : मृत्तिकाबलविज्ञानातील समस्यांचे दोन मुख्य गट करता येतील, ते असे : स्थैर्यविषयक समस्या आणि स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्या. आदर्श मृत्तिकांत नम्यताजन्य विसर्पणरूपाने होणाऱ्या अंतिम उच्छेदाच्या निकटच्या पूर्वकालातील समतोलासाठी आवश्यक

असणाऱ्या लक्षणांचा विचार स्थैर्यविषयक समस्यांत केला जातो. या प्रकारातील विशेष महत्त्वाच्या समस्या म्हणजे मृत्तिकाराशीमुळे पार्श्वीय आधारावर कारक होणारा लघुतम दाब ठरविणे (मृत्तिकादाब-समस्या), बाह्य भाराखालील-उदा० वजनयुक्त पादकामुळे मृत्तिकेत निर्माण होणाऱ्या उभ्या दिशेतील दाबाखालील-मृत्तिकेचे **अंतिम** सामर्थ्य ठरविणे (भारधारणक्षमतेची समस्या) आणि उतारांच्या स्थैर्यलक्षणांचा अभ्यास, या होत. मृत्तिकेतील उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थितीचे ज्ञान ह्या समस्या सोडविण्यास पुरेसे होते. मृत्तिकेच्या विरूपतेवर विवक्षित बंधने लादलेली नसतील, तर उच्छेदकालीन विकृती विचारात घेण्याची आवश्यकता उरत नाही. अशा बंधनाचे उदाहरण म्हणून पार्श्वीय आधाराच्या एखाद्या भागाची स्थानांतर करण्याची अक्षमता, हे सांगता येईल. जरी अशी बंधने असली, तरीही त्यांचा विचार स्थूलमानाने केल्यास भागते आणि तदनुषंगिक विकृतीच्या मात्रात्मक विश्लेषणाचा प्रयत्न करण्याची आवश्यकता नसते.

स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्यांमध्ये मृत्तिकेच्या स्वतःच्या वजनामुळे किंवा उपरस्थ वास्तूंच्या वजनासारख्या बाह्य बलांमुळे निर्माण होणाऱ्या विरूपतेचा विचार केला जातो. अवसीदनविषयक सर्व समस्या ह्या प्रकारात मोडतात. ह्या समस्या सोडविताना मृत्तिकेच्या बाबतीतील प्रतिबल आणि विकृती यांमधील संबंधाचे ज्ञान आपणास असले पाहिजे; परंतु उच्छेदाप्रत नेणारी प्रतिबल-परिस्थिती समस्येच्या विश्लेषणात उपस्थित होत नाही.

एखाद्या मृत्तिकाराशीतील विवक्षित बिंदुस्थानी नम्यतेची अवस्था निर्मिणारी भारलक्षणे व आधारलक्षणे ठरविण्याची समस्या उपरोक्त दोन समस्याप्रकारांच्या मधल्या प्रांतात पडते. या समस्याप्रकारात स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म आणि उच्छेदकारक प्रतिबलपरिस्थिती, ही दोन्हीही विचारात घ्यावी लागतात. मूळ अवस्थेपासून निघून नम्यताजन्य विसर्पण घडून येऊन अंतिम उच्छेदाप्रत होणाऱ्या संक्रमणास **वर्धमान उच्छेद क्रिया** असे म्हणतात.

निसर्गात प्रत्येक मृत्तिकेतील पोकळी अंशतः किंवा पूर्णतः जलयुक्त असते. हे जल स्थिर असेल, तर स्थैर्य आणि विरूपता एतद्विषयक समस्या सोडविण्याच्या पद्धती व साधारणतः घनपदार्थांच्या बलविज्ञानातील तत्सम समस्या सोडविण्याच्या पद्धती ह्या तत्त्वतः एकच असतात. या उलट, मृत्तिकेतील पोकळीतून पाणी झिरपत असेल, तर मृत्तिकेतील या रंध्रस्थित पाण्यातील प्रतिबलपरिस्थिती प्रथम निश्चित केल्याविना अशा समस्यांचा उलगडा होऊ शकत नाही. अर्थातच अशा प्रकरणी घनपदार्थांचे बलविज्ञान आणि व्यावहारिक चलज्जलशास्त्र या दोहोंचे साहाय्य घेणे भाग पडते (प्रकरणे १२ ते १५).

प्रकरण २

मृत्तिकांतील उच्छेदकारक प्रतिबल-परिस्थिती

५. **लंबदिक् प्रतिबल आणि कार्तनिक सामर्थ्य यांतील संबंध** : या ग्रंथात **प्रतिबल** ही संज्ञा, मृत्तिकाराशीच्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील बल, या अर्थानेच केवळ वापरली आहे. समाकर्षणयुक्त मृत्तिकाराशीच्या प्रत्येक छेदावरील ७ हे लंबदिक् प्रतिबल आणि क हा एकांक क्षेत्रावरील तदनुषंगिक कार्तनिक विरोध यांतील संबंध खालील प्रयोग-प्राप्त समीकरणाने व्यक्तविता येतो, असे साधारणतः मानले जाते.

$$\text{क} = \text{स} + \text{७ स्प ω} \qquad [१]$$

या ठिकाणी ७ हे दमनकारी प्रतिबल आहे. स या पदाने समाकर्षण दाखविले जाते. ७ चे मूल्य शून्य असताना अनुभवास येणारा कार्तनिक विरोध म्हणजे समाकर्षण होय. या समीकरणास **कूलोमप्रणीत समीकरण** असे म्हणतात. समाकर्षणहीन (स = ०) मृत्तिकांच्या बाबतीत हे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडले जाते.

$$\text{क} = \text{७ स्प ω} \qquad [२]$$

उपरोक्त समीकरणांतील स आणि ω यांची मूल्ये प्रयोग करून ठरविता येतात. त्यासाठी मृत्तिकेच्या समतल छेदावरील ७ या लंबदिक् प्रतिबलाच्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार निर्माण होणारा कार्तनिक विरोध मोजावा लागतो. व्यवहारात आपल्याला मुख्यतः संपृक्त अथवा तत्सम मृत्तिकांच्या कार्तनिक विरोधाच्या बाबतीत स्वारस्य असते. संपृक्त मृत्तिकेवरील प्रतिबलात बदल होताच तिच्यातील ओलाव्यातही बदल झाल्याविना राहत नाही. प्रतिबल-परिस्थितीतील विवक्षित बदलामुळे ओलाव्यात घडून येणाऱ्या बदलाची गती मृत्तिकेच्या पाझरक्षमतादी अनेक घटकांवर अवलंबून असते. प्रतिबलातील बदलामुळे नमुन्यातील ओलाव्यात होणाऱ्या बदलास लागणाऱ्या कालावधीपेक्षा अधिक त्वरेने, शेवटी उच्छेदाप्रत नेणारी प्रतिबले प्रयोगातील नमुन्यास लावली असता, नमुन्यावरील ७ या लंबदिक् प्रतिबलाचा काही अंश, उच्छेदक्षणी रंध्रस्थ जलात उत्पन्न होणाऱ्या स्थैतिक जलदाबाने घेतला जातो. हा जलदाब म्हणजे रंध्रस्थ जल बाहेर टाकण्याच्या क्रियेतील प्रवाह चालू ठेवण्यासाठी आवश्यक असलेले जलदाबाधिक्य असते. विवक्षित ७ पैकी किती अंश रंध्रस्थ जलाने घेतला जाईल हे प्रयोगातील परिस्थितीवर अवलंबून असते. तेव्हा या उदाहरणात स आणि ω या दोहोंची मूल्ये केवळ मृत्तिकेचे गुणधर्म आणि प्रयोगपूर्व अवस्था यांवरच नव्हे, तर नमुन्यावर प्रतिबल लावण्याची गती, मृत्तिकेचा

पाझरगुण आणि आकारमान या गोष्टींवरही अवलंबून असतात. अशा प्रयोगातून प्राप्त होणाऱ्या ϕ या कोनास **कार्तनिक विरोधाचा कोन** असे म्हणतात. चिकण मृत्तिकांच्या बाबतीत या कोनाचे मूल्य २०° (अपवादात्मक उदाहरणात अधिक) तसेच विस्कळित व संपृक्त वालुकांच्या बाबतीत ३५° या मर्यादांपर्यंत असू शकते. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे, तर कोणत्याही मृत्तिकेच्या बाबतीत ϕ या कोनास एकच निश्चित मूल्य देता येत नाही, असे म्हणावे लागेल; कारण ते मृत्तिकेचे स्वरूप आणि मूळ अवस्था या व्यतिरिक्त अन्य गोष्टींवर अवलंबून असते.

उलटपक्षी, प्रयोगातील नमुन्यावर प्रतिबले पुरेशा सावकाश गतीने कारक झाली, तर कार्तनिक पृष्ठावरील उच्छेद-क्षणाचे लंबदिक् प्रतिबल ७ जवळजवळ पूर्णतः कणांकणांतून संक्रमित होते. या प्रकारच्या प्रयोगांना **विलंबित कार्तनिक प्रयोग** असे म्हणतात. अशा प्रयोगांत कार्तनिक गती काय असावी, हे मृत्तिकेच्या पाझरगुणानुसार ठरवावे लागते.

कारक प्रतिबले पूर्णपणे कणांकणांतून संक्रमित होतील, अशा पद्धतीने विवक्षित घनतेच्या वालुकेवर कार्तनिक प्रयोग केला असता आपल्याला असे आढळते की, क = ७ स्प ϕ या समीकरणाने व्यक्त होणारा कार्तनिक विरोध प्रतिबलातील बदलांच्या उच्छेदपूर्व वैशिष्ट्यांवर अवलंबून नसतो. उदा० नमुन्याच्या एकांक क्षेत्रावरील भार प्रयोगापूर्वी दर चौ. फुटास ० ते १ टन असा क्रमाक्रमाने वाढविला काय किंवा प्रथम ० ते ५ टनांपर्यंत वाढवून नंतर एका टनावर आणला काय, दोन्हीही परिस्थितीतील कार्तनिक विरोधांत काहीच फरक दिसून येत नाही. उच्छेदक्षणी नमुन्यावरील प्रतिबल जोवर दर चौ. फुटास १ टन आहे, तोवर दोन्ही पद्धतीत क या कार्तनिक विरोधाचे मूल्य तेच राहते. याचाच अर्थ असा की, क हा कार्तनिक विरोध, संभाव्य कार्तनिक पृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबलावरच पूर्णत्वाने अवलंबून असतो. अशा प्रकारच्या कार्तनिक विरोधास **घर्षणजन्य विरोध** असे म्हणतात. ϕ चे तदनुषंगिक मूल्य म्हणजे **अंतर्गत घर्षणकोन** होय. स्थापत्य-समस्यांत अनुभवास येणाऱ्या दाबमूल्यांच्या कक्षेत, वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणकोनाचे मूल्य प्रायः स्थायी असते, असे व्यावहारिक दृष्ट्या समजता येईल. हे मूल्य वालुकेचे स्वरूप आणि तिची मूळ घनता यांवर अवलंबून असते. ३०° व ५०° ह्या त्या मूल्याच्या परमसीमा होत. एखाद्या वालुकेचा घनतम अवस्थेतील आणि अति विस्कळित अवस्थेतील अंतर्गत घर्षणकोन यांतील अंतर १५° इतके मोठे असू शकते.

मृत्तिकाविषयक समस्यांचे संशोधन करणाऱ्या पहिल्या काही संशोधकांचा साधारणतः असा समज होता की, वाळूचा अंतर्गत घर्षणकोन आणि परिच्छेद ३ मध्ये वर्णिलेला विरामकोन हे एकच असतात; परंतु वर विशद केल्याप्रमाणे वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन बऱ्याच अंशी तिच्या मूळ घनतेवर अवलंबून असतो, ही एक प्रयोगसिद्ध गोष्ट आहे. तथापि, शुष्क वालुकेच्या विरामकोनाचे मूल्य मात्र प्रायः स्थायी असते आणि स्थूलमानाने ते वालुकेच्या अति विस्कळित अवस्थेतील अंतर्गत घर्षणकोनाच्या मूल्याइतके असते. समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांचा विरामकोन परिच्छेद ४ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे उताराच्या

उंचीवर अवलंबून असला, तरी काही पाठ्यपुस्तकांतून अशा मृत्तिकांच्या विराम-कोनाच्या मूल्यांचीदेखील यादी दिलेली असते.

स्थैर्यविषयक गणिताच्या संदर्भात जेव्हा समीकरण २ वापरले असेल, तेव्हा ω हे पद वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन दर्शविते. या ग्रंथात हा प्रघात निरपवादपणे पाळला जाईल.

समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांवर केलेल्या विलंबित कार्तनिक प्रयोगांची फलिते सामान्यतः खालील समीकरणाने पुरेशा अचूकपणे व्यक्तविता येतात.

$$क = स + ए \; स्प ω$$

ए स्प ω हे पद घर्षणजन्य विरोधाच्या व्याख्येत बसते किंवा नाही, म्हणजेच ए स्प ω हा विरोध पूर्णतया ए या लंबदिक् प्रतिबलावर अवलंबून आहे की नाही, हे पाहण्यासाठी आपण प्रयोगपूर्व ओलावा तोच ठेवून विचाराधीन पदार्थावर दोन निरनिराळे प्रयोग करू. एका प्रयोगात ए चे मूल्य शून्यापासून $ए_{१}$ पर्यंत वाढवून तदनुषंगिक $क_{१}$ हा कार्तनिक विरोध ठरवू. दुसऱ्या प्रयोगात $ए_{१}$ पेक्षा पुष्कळच अधिक असलेल्या $ए_{२}$ या दाबाखाली पदार्थाचे प्रथम दृढीभवन घडवू, नंतर तो $ए_{१}$ या मूल्याप्रत आणू. नंतर विलंबित प्रयोगाने तदनुषंगिक $क'_{१}$ हा कार्तनिक विरोध ठरवू. अंतिम दाबापेक्षा अधिक मूल्याच्या दाबाखाली एखादा नमुना अल्पकाळ ठेवणे, या प्रक्रियेला **पूर्वदृढीभवन** असे म्हणतात. उपरोक्त प्रयोगावरून असे दिसून येईल की, पूर्वदृढीभूत पदार्थाचा $क'_{१}$ हा कार्तनिक विरोध $क_{१}$ इतका किंवा अधिकही असण्याचा संभव असतो. दोन्हींचे मूल्य एकच असेल, तर समीकरण १ मधील ए स्प ω हे पद घर्षणजन्य विरोध दर्शविते. तेव्हा या ठिकाणी ω हा अंतर्गत घर्षणकोन आहे, असे मानणे समर्थनीय ठरते. या उलट, $क'_{१}$ चे मूल्य $क_{१}$ च्या मूल्यापेक्षा अधिक असेल, तर ए स्प ω या पदाने व्यक्तविलेल्या कार्तनिक विरोधात दोन भाग आहेत, असे आपल्याला मानावे लागते. एक भाग घर्षणजन्य विरोधाचा आणि दुसरा ए वर अवलंबून नसणाऱ्या एका अन्य प्रकारच्या विरोधाचा. पूर्वदृढीभवनामुळे पदार्थात घडणारे विशेष उल्लेखनीय आणि स्थायी स्वरूपाचे परिवर्तन म्हणजे घनतेतील वाढ आणि ओलाव्यातील तदनुषंगिक घट हे होय. $क'_{१}$ चे मूल्य $क_{१}$ च्या मूल्यापेक्षा प्रकर्षाने अधिक असेल, तर आपल्याला नेहमी असे आढळते की, तदनुषंगिक ओलावा $क_{१}$ च्या संदर्भातील ओलाव्यापेक्षा कमी असतो. एखाद्या चिकण मातीतील मूळ ओलावा घटत गेल्यास, त्या प्रमाणात समीकरण १ मधील स चे मूल्य वाढत जाते, असाही अनुभव येतो. त्यामुळे बहुतेक प्रकरणांत आपण पुढील निष्कर्ष काढल्यास तो समर्थनीय ठरतो. जर $क'_{१}$ चे मूल्य $क_{१}$ च्या मूल्यापेक्षा प्रकर्षाने अधिक असेल, तर समीकरण १ मधील ए स्प ω या पदाने व्यक्त होणाऱ्या विरोधात दोन घटक असून त्यांतील प्रत्येकामागचे प्राकृतिक कारण वेगळे असते. पहिला घटक म्हणजे ए या लंबदिक् प्रतिबलाद्वारे

निर्मिले गेलेले घर्षण होय आणि दुसरा म्हणजे ओलाव्यातील घटीमुळे उत्पन्न झालेली समाकर्षणातील वाढ होय. ही घट नमुन्यावरील दाब शून्यापासून ७ मूल्यापर्यंत वाढत असताना झालेली असते.

वरील विधान समीकरणरूपात पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$\text{क} = \text{स} + \text{७ स्प ळ} = \text{स} + \frac{\text{७}_1 + \text{७}_3}{2} \cdot \text{अ} + \text{७ स्प ळ}_{\text{ग}} \qquad [३]$$

येथे ७_1 आणि ७_3 म्हणजे विलंबित प्रयोगातील उच्छेदक्षणाची परममूल्यांची प्रधान प्रतिबले असून अ हा एक प्रयोगप्राप्त गुणक आहे. कार्तनिक विरोधातील $\text{७ स्प ळ}_{\text{ग}}$ हा अंश विवक्षित बिंदूतून जाणाऱ्या पातळीच्या दिशेनुसार बदलतो; तर स आणि $\frac{\text{७}_1 + \text{७}_3}{2} \cdot \text{अ}$ हे अंश मात्र कोणत्याही दिशेत तेच राहतात. समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांचा कार्तनिक विरोध ठरविण्याच्या रूढ प्रायोगिक पद्धतीतून वरील समीकरण ३ मधील डावीकडील स आणि ळ यांचीच मूल्ये केवळ प्राप्त होतात. $\text{ळ}_{\text{ग}}$ आणि अ यांची मूल्ये ठरविण्यासाठी आणखी विस्तृत संशोधन करावे लागते; परंतु ते मृत्तिका-विज्ञानाच्या प्रांतात पडते.

निसर्गतः गच्च असणाऱ्या वालुकेमध्ये $\text{क}'_1$ चे मूल्य साधारणतः क_1 च्या मूल्याच्या जवळपास असते. अशा पदार्थांच्या बाबतीत समीकरण १ मधील ७ स्प ळ च्या मूल्याने केवळ घर्षणजन्य विरोध व्यक्त केला जातो. उलटपक्षी, चिक्कण मृत्तिकेवरील प्रयोगांत पूर्वदृढीभूत नमुन्याचा विवक्षित भाराखालील $\text{क}'_1$ हा कार्तनिक विरोध त्याच भाराखालील क_1 या विरोधापेक्षा नेहमीच प्रकर्षाने अधिक असतो. म्हणून चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत समीकरण १ मधील ळ या कोनाने, जरी त्याचे मूल्य विलंबित कार्तनिक प्रयोगांनी ठरविलेले असले, तरी अंतर्गत घर्षणकोन किंवा चिक्कण मृत्तिकांना लागू पडणारा एखादा स्थिरांक, यांपैकी काहीच दर्शविले जात नाही. प्रयोगपूर्व ओलावा विवक्षित मूल्याचा ठेवून चिक्कण मृत्तिकेवरील विलंबित प्रयोगमालिकेत नमुन्यावरील दाब शून्यापासून ७_1, ७_2 इ. विविध मूल्यांप्रत वाढविला असता, आपल्याला खालील समीकरण मिळते.

$$\text{क} = \text{स} + \text{७ स्प ळ}$$

प्रयोगातील दाबापेक्षा अधिक दाबाखाली पूर्वदृढीभूत झालेल्या त्याच चिक्कण मृत्तिकेच्या नमुन्यावर केलेल्या दुसऱ्या प्रयोगमालिकेतून आपल्याला आणखी दुसरे समीकरण मिळते. ते असे :

$$\text{क} = \text{स}' + \text{७ स्प ळ}'$$

येथे स' चे मूल्य स पेक्षा पुष्कळच अधिक व ळ' चे मूल्य ळ पेक्षा पुष्कळच कमी असते. म्हणून चिक्कण मृत्तिकेच्या बाबतीत कूलोमप्रणीत समीकरण वापरताना स आणि

φ यांची या समीकरणातील मूल्ये म्हणजे सरळ रेषेच्या समीकरणातील दोन प्रयोगप्राप्त गुणांक आहेत, ही गोष्ट आपण लक्षात ठेविली पाहिजे. समाकर्षण ही संज्ञा केवळ ऐतिहासिक कारणासाठी ठेविली आहे. **दृश्य समाकर्षण** या शब्दसमूहाचे संक्षिप्त रूप म्हणून ती वापरली जाते. दृश्य समाकर्षणाहून भिन्न असणारे ते **सत्य समाकर्षण** होय. या संज्ञेने कार्तनिक विरोधातील ओलाव्यावरच अवलंबून असणाऱ्या अंशाचा केवळ बोध होतो. या सत्य समाकर्षणात कूलोमच्या समीकरणातील स चाच नव्हे तर $σ$ स्प $φ$ मधील बऱ्याचशा भागाचा अंतर्भाव होतो. नामसादृश्यापलीकडे दृश्य समाकर्षण आणि सत्य समाकर्षण यांत काहीच संबंध नाही.

दृश्य समाकर्षण आणि सत्य समाकर्षण ह्या दोहोंतील भेदाची कल्पना येण्यासाठी दृढीकरणानुसार ज्याचे समाकर्षण वाढत जाते, अशा पदार्थाचा पुन्हा विचार करू. अशा पदार्थावरील कार्तनिक प्रयोगमालिकेतून पुढील समीकरण मिळते.

$$क = स + σ \, स्प \, φ$$

तसेच या पदार्थाच्या कार्तनिक विरोधातील कोणता भाग समाकर्षणजन्य आहे, याचा शोध घेताना आपल्याला पूर्वोक्त समीकरण ३ प्राप्त होते, ते असे—

$$क = स + \frac{σ_1 + σ_3}{2} अ + σ \, स्प \, φ_{ग}$$

वरील दोन समीकरणांची तुलना केल्यास असे दिसते की, सत्य समाकर्षणाचे मूल्य स हे नसून ते पुढीलप्रमाणे आहे.

$$स_{स} = स + \frac{σ_1 + σ_3}{2} \cdot अ$$

चिकण मृत्तिकेवरील एकूण दाब जर कणांकणांतून संक्रमित होत असेल, तर सत्य समाकर्षणाचे मूल्य दृश्य समाकर्षणाच्या मूल्यापेक्षा कधीच कमी नसते.

समीकरण १ मधील $σ$ स्प $φ$ शून्य असेल, तर आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$क = स \qquad [४]$$

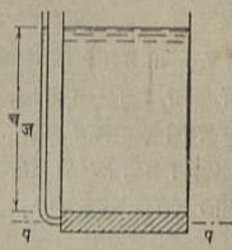
द्रवांचे बाबतीत स आणि $φ$ या पदांची मूल्ये शून्य असतात याचाच अर्थ असा की,

$$क = ० \qquad [५]$$

६. **कार्यसाधक आणि उदासीन प्रतिबले :** क्षेत्रातील प्रत्येक सूक्ष्मकणयुक्त मृत्तिकेतील पोकळी अंशतः किंवा पूर्णतः जलयुक्त असते. आपण संपृक्त मृत्तिकेचा छेद

घेतला, तर तो अंशतः घनरूप कणांतून आणि अंशतः पाण्यातून जातो. या वस्तुस्थितीच्या प्राकृतिक परिणामांचे निरूपण करण्यासाठी आकृती १ मध्ये दाखविलेला प्रयोग विचारार्थ घेऊ.

या आकृतीत पात्राच्या तळाशी बसलेल्या समाकर्षणहीन मृत्तिकेच्या थराचा छेद दाखविलेला आहे. प्रयोगारंभी मुक्त पाण्याची पातळी मृत्तिकेच्या पृष्ठभागालगत आहे असे गृहीत धरले आहे. तसेच हा थर इतका बारीक आहे की, या अवस्थेत पप या पातळीच्या वर असलेली मृत्तिका आणि पाणी यांच्यामुळे निर्माण होणारे प्रतिबल दुर्लक्षिता येईल. पाण्याची पातळी मूळ पातळीपासून $च_{ज}$ इतक्या उंचीवर नेली असता, पप पातळीवरील शून्यवत् असलेल्या लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य



आकृती १ : कार्यसाधक आणि उदासीन प्रतिबल यांतील भेद दाखविणारे उपकरण.

$$ए = च_{ज}\, घ_{ज}$$

पर्यंत वाढते. येथे $घ_{ज}$ ही पाण्याची घनता आहे. मृत्तिकेच्या थरातून घेतलेल्या प्रत्येक क्षितिजसमांतर छेदावर, हे दमनकारी प्रतिबल शून्यापासून ए पर्यंत वाढलेले असूनसुद्धा ते मृत्तिकेच्या थरात मोजण्याइतपत दमन निर्माण करू शकत नाही. याऐवजी $च_{ज}\, घ_{ज}$ याच मूल्याचा दाब, मृत्तिकाथराच्या पृष्ठभागावर शिशाचा गोळा ठेवून लावला, तर त्यामुळे थराचे बऱ्याच प्रमाणात दमन होते. प्रयोगात योग्य ते फेरफार करून असेही दाखविणे शक्य आहे की, पात्रातील जलपृष्ठाच्या स्थानाचा मृत्तिकेच्या क या कार्तनिक विरोधावर काहीच प्रभाव पडत नाही. परंतु अशा जलदाबाइतक्याच मूल्याचा घनरूप उपरस्थ भार मात्र अशा विरोधात बरीच वाढ करतो. संपृक्त मृत्तिकेतील दमनकारी प्रतिबल, ज्यांचे प्राकृतिक परिणाम फार भिन्न आहेत, अशा दोन घटकांचे बनलेले असते, असा निष्कर्ष या व अशाच इतर प्रयोगांवरून काढावा लागतो.

जलदाबाइतके मूल्य असलेला जो एक घटक असतो, तो दमन घडवीत नाही किंवा कार्तनिक विरोधातही वाढ करीत नाही. या घटकास **उदासीन प्रतिबल**, $उ_{ज}$,* म्हणतात. त्याचे मूल्य पाण्याची घनता $घ_{ज}$ आणि विचाराधीन बिंदुस्थानी लावलेल्या

* उदासीन प्रतिबल म्हणजे पाण्यातील खरा दाब नव्हे हे या व्याख्येवरून स्पष्ट होईल. त्यात वातावरणाच्या वजनामुळे निर्माण होणारा दाब समाविष्ट होत नाही, हे त्याचे कारण आहे. जेव्हा आपल्याला पाण्यातील प्रत्यक्ष दाब किती आहे, हे जाणून घ्यावयाचे असेल, उदा० प्रकरण १४ मधील केशाकर्षणविषयक सिद्धांतामध्ये, तेव्हा उदासीन प्रतिबलात वातावरणाचा दाब मिळविला पाहिजे.

जलस्तंभमापिकेत चढणाऱ्या पाण्याची उंची $च_{ज}$ यांच्या गुणाकाराइतके असते. समीकरणरूपात हेच मूल्य पुढीलप्रमाणे मांडतात—

$$उ_{ज} = व_{ज} च_{ज} \qquad [१]$$

$च_{ज}$ या पदाने विचाराधीन बिंदुस्थानाचे **दाब-संचित** दर्शविले जाते. हे संचित धन किंवा ऋण असू शकते. अर्थातच $उ_{ज}$ चे मूल्यही धन किंवा ऋण असू शकते. $उ_{ज}$ धन चिन्हांकित असेल, तर त्यास **रंध्रजलदाब** म्हणण्याचा प्रघात आहे.

एकूण प्रतिबल $ए$ आणि उदासीन प्रतिबल $उ_{ज}$ यांतील फरक म्हणजे $\bar{ए}$ हा $ए$ मधील दुसरा घटक होय.

$$\bar{ए} = ए - उ_{ज} \qquad [२]$$

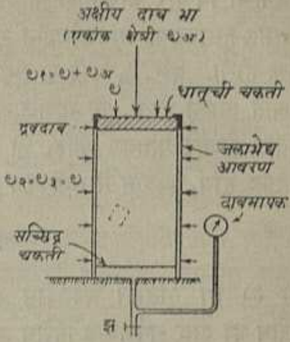
त्यास **कार्यसाधक प्रतिबल** असे म्हणतात; कारण एकूण प्रतिबलातील दृढीभवन किंवा कार्तनिक विरोधातील वाढ हे मापनीय परिणाम घडवून आणणारा असा हा घटक आहे. एवंच, एकूण लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.

$$ए = \bar{ए} + उ_{ज} \qquad [३]$$

दंडगोलाकृती नमुन्यावर केलेल्या **त्रिदिक् दमन-प्रयोगात** एकूण प्रतिबल आणि उदासीन प्रतिबल एकाच वेळी मोजणे शक्य असते. त्यामुळे अशा प्रयोगांच्या साहाय्याने समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांच्या बाबतीत प्रतिबल, विकृती आणि कार्तनिक विरोध यांतील अन्योन्य संबंधांवर पडणाऱ्या रंध्रजलदाबाच्या प्रभावाचे संशोधन अतिशय अचूकपणे करता येते.

त्रिदिक् दमन-प्रयोगातील तत्त्व आकृती २ मध्ये दाखविले आहे. संपृक्त चिक्कण मृत्तिकेच्या दंडगोलाकृती उभ्या नमुन्याचा छेद या आकृतीत दाखविला आहे. नमुन्याच्या माथ्यावर एक धातूची चकती आहे व तळाशी एक सच्छिद्र दगडी चकती आहे. या चकतीतील पोकळी, झ या विमोचक झडपेशी संपर्क साधू शकते. नमुन्याचा आणि सच्छिद्र दगडाचा बाह्य पृष्ठभाग आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एका जलाभेद्य वेष्टणाने झाकलेला आहे. नमुन्याच्या भोवती दाबयुक्त पाणी अथवा तेल भरलेले आहे. हा दाब उपसयंत्र किंवा संचयपात्राच्या साहाय्याने कायम ठेवता येतो. जलाभेद्य आवरणावर कारक असणारा $ए$ हा बाह्य स्थैतिक द्रवदाब नमुन्यावरही कारक होतो. तसेच नमुन्याच्या माथ्यावर अक्षदिशेने $ए_{अ}$ या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा आणखी एक दाब लावता येतो. बाहेरचा स्थिरद्रवदाब आणि अक्षदिशेतील दाब यामुळे नमुन्याच्या उभ्या अक्षाभोवती सममात्र असणारी प्रतिबलपरिस्थिती निर्माण होते. म्हणून प्रयोगातील नमुन्याच्या प्रत्येक आडव्या छेदावर $ए_{१} = ए + ए_{अ}$ या मूल्याचे उभ्या दिशेतील प्रतिबल आणि प्रत्येक उभ्या छेदावर $ए_{२} = ए_{३} = ए$ म्हणजेच बाह्य दाब, असे आडवे प्रतिबल कारक होते.

झ ही झडप बंद ठेवून किंवा उघडी ठेवून, अशा दोन प्रकारांनी हा प्रयोग करता येतो. प्रयोग चालू असताना चिकण मृत्तिकेतील ओलावा स्थिरमूल्य राहावा या उद्देशाने पहिल्या प्रकारच्या प्रयोगमालिकेत आपण *झ* ही झडप बंद ठेवू. झडपेच्या वर एक शीघ्रचेतन दाबमापक लावलेला आहे. या दाबमापकामुळे हे दाखविता येते की, नमुन्यावरील एकूण प्रतिबल-परिस्थितीतील प्रत्येक बदलागणिक रंध्रजलदाबातही काही तरी बदल घडून येतो. तसेच नमुन्याचा कार्तनिक उच्छेद होण्याच्या क्षणापूर्वी रंध्रजलदाब किती होता, हेही मोजता येते. अशा प्रकारे प्रतिबल, विकृती, कार्तनिक विरोध आणि रंध्रजलदाब यांतील अन्योन्य संबंध दर्शविणाऱ्या माहितीचा एक संच आपल्याला प्राप्त होतो.



आकृती २ : त्रिदिक् दमन-प्रयोगांचे उपकरण.

दुसऱ्या प्रकारच्या प्रयोग-मालिकेत आपण झडप *झ* उघडी ठेवू. अशा प्रयोगांत प्रत्येक वेळी रंध्रजलदाब जवळजवळ शून्यावर असताना व नमुन्यातील ओलावा स्थिरमूल्याप्रत आल्यावरच विकृती मोजतात. या प्रयोगांतून रंध्रजलदाब शून्य असताना मिळणाऱ्या प्रतिबल, विकृती व कार्तनिक विरोध यांतील अन्योन्य संबंधाची माहिती देणारा दुसरा संच आपल्याला मिळतो.

दोन्ही प्रकारच्या प्रयोगमालिका (झडप बंद ठेवून आणि उघडी ठेवून केलेल्या) पुनः पुनः करण्यात आल्या आहेत. गाळयुक्त चिकण मृत्तिकेवर केलेल्या, अशा दोन प्रयोग-मालिकांतून मिळालेली माहिती एकत्र अभ्यासून रेंडूलिकने पुढील निष्कर्ष काढले (१९३७). नमुन्यातील उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थिती आणि त्याच्या घनफळातील बदल या दोन्ही गोष्टी पूर्णतः कार्यसाधक प्रतिबलांच्या महत्त्वेवर अवलंबून असतात. म्हणजेच विशिष्ट मूल्याचा एकूण दाब प्रस्थापित केला असता होणारे प्राकृतिक परिणाम हे केवळ एकूण दाब आणि रंध्रजलदाब यांतील फरकावर अवलंबून असतात. संपृक्तावस्थेतील वालुकेवर किंवा इतर कोणत्याही मृत्तिकेवर असे प्रयोग केले असता वरीलप्रमाणेच निष्कर्ष निघतात. मृत्तिकेच्या पोकळीतील वायूच्या बुडबुड्यांचे अस्तित्व केवळ विरूपणाच्या वेगावर परिणाम करते. प्रयोगाच्या अंतिम निष्कर्षावर त्याचा परिणाम होत नाही. म्हणून हे मान्य करणे भाग आहे की, मृत्तिकांतील विकृती आणि उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थिती या दोन्ही गोष्टी केवळ खालील कार्यसाधक प्रतिबलांवरच अवलंबून असतात.

$$\begin{aligned} \bar{\text{ए}}_{१} &= \text{ए}_{१} - \text{उ}_{\text{ज}} \\ \bar{\text{ए}}_{२} &= \text{ए}_{२} - \text{उ}_{\text{ज}} \\ \bar{\text{ए}}_{३} &= \text{ए}_{३} - \text{उ}_{\text{ज}} \end{aligned} \qquad [४]$$

$उ_{ज}$ या रंध्रजलदाबाचा उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणारा प्रभाव असा निर्णायक असल्यामुळे ५(१) आणि ५(२) या समीकरणांनी निर्दिष्ट होणाऱ्या उच्छेद-लक्षणांचा विचार करतानाही या दाबाची दखल घेणे आवश्यकच ठरते.

वालुकेसारख्या समाकर्षणहीन मृत्तिकांचा कार्तनिक विरोध ५ (२) या समीकरणाने व्यक्त होतो. परि. ५ मध्ये या समीकरणाचे विवेचन करीत असता एका गोष्टीवर भर देण्यात आला होता. ती म्हणजे या समीकरणातील ७ हे लंबरूप प्रतिबल कणांकणांतून व्यतीत होणारे प्रतिबल आहे, ही होय. असे प्रतिबल म्हणजेच कार्यसाधक लंबरूप प्रतिबल होय. म्हणून ते समीकरण पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$क = \bar{७}\ स्प\ \phi$$

येथे ϕ हा अंतर्गत घर्षणकोन आहे आणि $\bar{७}\ स्प\ \phi$ या पदाने व्यक्त होणारा विरोध हा शुद्ध घर्षणजन्य विरोध आहे. असा घर्षणजन्य विरोध कार्तनिक पृष्ठावरील कार्यसाधक लंबरूप प्रतिबलावरच केवळ अवलंबून असतो: तेव्हा एकूण लंबदिक् प्रतिबल ७ असेल व रंध्रजलदाब $उ_{ज}$ असेल, तर वालुकेचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने ठरविता येतो.

$$क = (७ - उ_{ज})\ स्प\ \phi \qquad [५]$$

समाकर्षणयुक्त पदार्थावर विलंबित कार्तनिक प्रयोग केला असता, आपल्याला कूलोम-प्रणीत पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$क = स + \bar{७}\ स्प\ \phi \qquad [६]$$

निसर्गतः गच्च झालेल्या वालुकांच्या आणि तत्सम पदार्थांच्या बाबतीत $\bar{७}\ स्प\ \phi$ या पदाने शुद्ध घर्षणजन्य विरोध दर्शविला जातो. तेव्हा $\bar{७}$ ऐवजी $७ - उ_{ज}$ लिहिण्यास काहीच प्रत्यवाय नाही. तसे करून पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$क = स + (७ - उ_{ज})\ स्प\ \phi \qquad [७]$$

या उलट, चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत $\bar{७}\ स्प\ \phi$ या पदात घर्षणजन्य विरोध आणि ओलाव्यावर अवलंबून असणारा त्यांच्या बाबतीतील दुसरा एक विरोध या दोहोंचा अंतर्भाव होतो. (परिच्छेद ५ पाहा.) हा दुसरा विरोध सरळपणे घसरपृष्ठावरील लंबरूप प्रतिबलावर अवलंबून नसल्यामुळे समीकरण ७ प्राप्त होण्यासाठी केलेले, $\bar{७}$ चे ठिकाणी $७ - उ_{ज}$ हे पदांतर चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत समर्थनीय ठरत नाही. चिक्कण मृत्तिकेवर केलेल्या त्रिदिक् दमन-प्रयोगातील परिस्थितीसारख्या अतिशय मोजक्या प्रकरणात असे पदांतर फारतर लागू पडते. एवढेच नव्हे, तर चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत उच्छेदक्षण समीप येत असताना रंध्रजलात निर्माण होणारा दाब ठरविणे आपल्याला क्वचितच

शक्य असते. या कारणांस्तव चिक्कण मृत्तिकांचा संबंध आला असता, स्थैर्याचे गणित मांडताना लागणारी माहिती मिळविण्यासाठी सध्यातरी पुढे वर्णिलेली प्रायोगिक पद्धतच केवळ उपलब्ध आहे. क्षेत्रात दाब आणि निस्सारणविषयक ज्या अवस्थेचे पर्यवसान कार्तनिक उच्छेदात होणे संभाव्य असेल, तशी अवस्था निर्माण करून चिक्कण मृत्तिकेवर प्रयोग करणे आणि त्यातून प्राप्त होणारी स आणि ϕ यांची मूल्ये समीकरणात वापरणे ही ती पद्धत होय. क्षेत्रातील वस्तुस्थिती प्रयोगात निर्माण करण्याच्या बाबतीत ज्या प्रमाणात यश मिळेल त्यावर मुख्यतः या पद्धतीचे यश अवलंबून असणार, हे उघड आहे. समीकरण ५ (१) मधील स आणि ϕ यांच्या मूल्यांवर प्रयोगातील परिस्थितीचा कितपत परिणाम होतो, याचे विवेचन व्यावहारिक मृत्तिकाबलविज्ञानाच्या ग्रंथात केले जाईल.

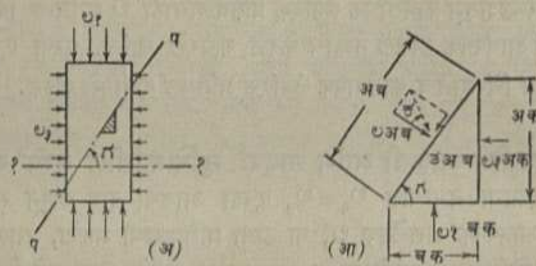
पुढील परिच्छेदांतून कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबलासाठी $\bar{\sigma}$ हे चिन्ह विपरीत समज टाळण्यासाठी आवश्यक असेल तेव्हाच केवळ वापरले जाईल. एरवी एकूण प्रतिबल निर्देशक σ या चिन्हानेच कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल दर्शविले जाईल.

७. मोह्रप्रणीत आकृती आणि आदर्श मृत्तिकांतील नम्य समतोलाची लक्षणे : एखाद्या नमुन्यास $\sigma_2 = \sigma_3$ एवढा आडवा दाब लावून त्याचा उच्छेद करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या σ_1 या उभ्या प्रतिबलाची महत्ता, आकृती २ मध्ये दाखविलेल्या त्रिदिक् दमनप्रयोगावरून आपल्याला कळते. हा उच्छेद एका तिरकस घसरपृष्ठावर होत असल्यामुळे या नमुन्यातून जाणाऱ्या तिरकस पृष्ठावरील प्रतिबल-परिस्थिती जाणून घेण्यात आपल्याला स्वारस्य असते. आकृती ३ मध्ये एक नमुना दाखविला आहे. या नमुन्यातून जाणाऱ्या *१-१* सारख्या प्रत्येक आडव्या छेदावर σ_1 मूल्याचे लंबदिक् प्रतिबल कारक आहे आणि कार्तनिक प्रतिबल शून्य आहे. व्यावहारिक बलविज्ञानातील प्रचलित परिभाषेनुसार ज्या छेदावर कार्तनिक प्रतिबलाचा अभाव असतो, त्यावरील लंबदिक् प्रतिबलास **प्रधान प्रतिबल** असे म्हणतात. असा छेद म्हणजे एक **प्रधान पृष्ठ** होय. उपरोक्त नमुन्याच्या उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य $\sigma_2 = \sigma_3$ असे आहे. अर्थातच त्यावर कार्तनिक प्रतिबलाचे मूल्य शून्यच असले पाहिजे. अन्यथा, नमुन्याच्या समतोलासाठी आवश्यक अटींची पूर्तता होणार नाही; म्हणून $\sigma_2 = \sigma_3$ हे प्रतिबलसुद्धा प्रधान प्रतिबल आहे, असे ओघानेच येते.

σ_2 आणि σ_3 यांची मूल्ये भिन्न असल्यास, समतोल साधण्यासाठी σ_1, σ_2 आणि σ_3 यांच्या दिशा परस्परांना काटकोनात छेदतील, अशाच असल्या पाहिजेत. प्रतिबल-परिस्थिती कोणतीही असो, ज्यावर केवळ प्रधान प्रतिबलेच कारक आहेत, असे तीन प्रधानछेद कोणत्याही वस्तूच्या प्रत्येक बिंदूतून घेणे नेहमीच शक्य असते. साध्या लंबरूप प्रतिबलांपासून प्रधान लंबदिक् प्रतिबलांचे वेगळेपण दर्शविण्याची आवश्यकता असेल, तेथे प्रधान प्रतिबलांचा निर्देश करण्यासाठी σ हे अक्षर अंकासह वापरले जाईल. यापैकी σ_1 या चिन्हाने ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल दाखवून σ_2 हे अक्षर σ_1 आणि

$\sigma_{३}$ यांच्या दरम्यानच्या मूल्याचे प्रधान प्रतिबल दर्शविण्यासाठी राखून ठेवले जाईल.

ज्यांच्या छेदांचे क्षेत्रफळ स्थिर मूल्याचे आहे व त्या छेदांच्या बाह्य सीमा एकमेव क्षितिजलंब पातळीशी लंबरूप आहेत, अशा एकसंध मृत्तिकाराशींचाच विचार मुख्यत्वेकरून मृत्तिकाबल-विज्ञानात केला जातो. या पातळीला समांतर दिशेत कापलेल्या प्रत्येक मृत्तिकाशकलावर कारक होणारी आंतरिक आणि बाह्य बले मूळ मृत्तिकाराशीवरील बलांसारखीच असतात. शकलाच्या प्रतिबल-परिस्थितीत बदल घडून आला, तरीही शकलाची जाडी तीच राहते. व्यावहारिक बलविज्ञानात अशा तऱ्हेच्या विरूपत्वास **पृष्ठीय विरूपत्व** असे म्हणतात. पृष्ठीय विरूपत्वविषयक समस्यांचा विचार करताना एका शकलाच्या बाजूंना समांतरपणे कारक असणाऱ्या प्रतिबलांचे संशोधन केले तरी पुरे होते.



आकृती ३ : त्रिदिक् दमनप्रयोगातील मृत्तिकेची प्रतिबल-परिस्थिती

आ० ३ अ मधील नमुन्याच्या *पप* या कोणत्याही एका तिरकस छेदावरील प्रतिबले ठरविण्यासाठी एका लहान समपार्श्व खंडाच्या (रेखांकित) समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचा आपण विचार करू. मात्र अशा समपार्श्व खंडाची एक बाजू या तिरकस छेदावर असली पाहिजे आणि उर्वरित दोन बाजू $\sigma_{१}$ आणि $\sigma_{३}$ या प्रधान प्रतिबलांच्या दिशांना समांतर असल्या पाहिजेत. तिरकस पृष्ठाचा उतार α या कोनाने व्यक्त होतो. $\sigma_{१}$ ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल ज्यावर कारक आहे, त्या *१-१* या प्रधान छेदापासून अपसव्य दिशेने α कोन मोजला जातो. आपण असेही ठरवू की, दमनकारी प्रतिबले धन आहेत. आ० ३ आ मध्ये उपरोक्त समपार्श्व खंड मोठ्या आकारात दाखविला आहे. या समपार्श्व खंडाच्या समतोलासाठी पुढील गोष्टी आवश्यक आहेत.

$$\Sigma \text{ आडवी } \textit{बले} = \sigma_{३} \text{ ज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} - \sigma \text{ ज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} + \tau \text{ कोज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} = ०$$

आणि—

$$\Sigma \text{ उभी } \textit{बले} = \sigma_{१} \text{ कोज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} - \sigma \text{ कोज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} - \tau \text{ ज्या}\,\alpha .\ \textit{अब} = ०$$

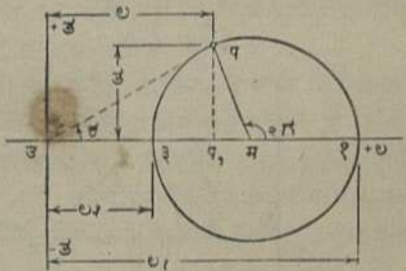
ही दोन्ही समीकरणे सोडवून आपल्याला σ आणि τ ची पुढील मूल्ये मिळतात.

$$\sigma = \frac{१}{२}(\sigma_{१} + \sigma_{३}) + \frac{१}{२}(\sigma_{१} - \sigma_{३}) \text{ कोज्या } २\alpha \qquad [१]$$

$$ड = \frac{१}{२}(ए_१ - ए_३) \text{ ज्या२}ñ \qquad [२]$$

आकृती ३मध्ये ñ हा कोन ९०° पेक्षा लहान आहे. अशा उदाहरणात समीकरण २ मधील ड हे कार्तनिक प्रतिबल धन मिळते. तदनुषंगिक फलरूप प्रतिबल, ए या लंबदिक् प्रतिबलाच्या संदर्भात सव्य दिशेने विचलित होते. ड हे कार्तनिक प्रतिबल धन असल्यामुळे तदनुषंगिक लंबदिक् आणि फलरूप प्रतिबल यांतील ढ या कोनासही धन मूल्य देतात.

समीकरण १ आणि २ मध्ये $ए_१$, $ए_३$ आणि ñ यांना अंकात्मक मूल्ये देऊन ए आणि ड या प्रतिबलांची मूल्ये ठरविता येतात. तथापि आ० ४ मध्ये दर्शविलेल्या आलेखपद्धतीनेही ही मूल्ये ठरविता येतात. या रेखाकृतीत उ या उगमबिंदूतून निघणाऱ्या आडव्या अक्षावर उजव्या बाजूस दमनकारी प्रतिबले (धन) मांडतात, त्यामुळे ढ या कोनाची धनमूल्ये आडव्या अक्षाच्या वरील बाजूस येतात. आडवा अक्ष प्रधान प्रतिबलासाठी राखून ठेवला जातो, कारण तदनुषंगिक कार्तनिक प्रतिबल शून्य असते. आ० ३ अ मधील प्रधान पातळी १-१ शी ñ कोन करणाऱ्या तिरकस पातळीवरील ए (समी. १) आणि ड (समी. २) यांची मूल्ये ठरविण्यासाठी आ० ४ मध्ये दाखविलेली पुढील कृती करू.

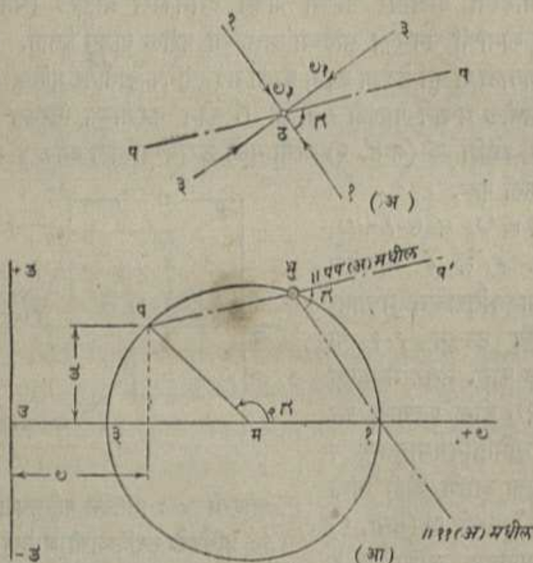


आकृती ४ : प्रतिबल वर्तुळाच्या साहाय्याने प्रतिबले ठरविण्याची आलेख पद्धत.

प्रथम उ-३ = $ए_३$ व उ-१ = $ए_१$ स्थापित करू. १ ते ३ म्हणजेच $ए_१ - ए_३$ या अंतराच्या मध्यावर म हा केंद्रबिंदू ठरवून १-३ या व्यासाचे वर्तुळ काढू. नंतर म पासून म-१ रेषेशी २ñ कोन करणारी पम रेषा काढू. भूमितिनियमानुसार प या बिंदूच्या भुजा आणि कोटी यांची मूल्ये म्हणजेच अनुक्रमे ए (समी. १) हे लंबदिक् प्रतिबल आणि ड हे कार्तनिक प्रतिबल (समी. २) यांची मूल्ये होत. तसेच उप हे अंतर म्हणजे तिरकस छेदावरील (आ. ३) फलरूप प्रतिबलाचे मूल्य होय.

उपरोक्त वर्तुळाच्या अर्ध-परिघावरील कोणत्याही बिंदूचे सहनिर्देशक १-१ (आ. ३ अ) या प्रधान दिशेशी ९०° पेक्षा लहान मूल्याचा ñ कोन करणाऱ्या विशिष्ट छेदाच्या संदर्भातील दोन प्रतिबल-घटक दर्शवितात. याच पद्धतीने खालच्या अर्धपरिघावरील बिंदूचे सहनिर्देशक १-१ या प्रधान दिशेशी ९०° पेक्षा अधिक मूल्याचा ñ कोन करणाऱ्या छेदाच्या संदर्भातील दोन प्रतिबल-घटक दर्शवितात. अर्थातच आ. ४ मधील १-३ व्यासाचे वर्तुळ म्हणजे समीकरणे १ व २ यांनी निश्चित होणाऱ्या सर्व बिंदूंचा पथ होय. म्हणून त्यास प्रतिबल-वर्तुळ हे नामाभिधान रूढ आहे.

एखाद्या विस्तीर्ण मृत्तिकाराशीतील (आ. ५ अ) ठ ह्या बिंदुस्थानाच्या σ_1 व σ_3 या प्रधान प्रतिबलांच्या महत्ता आणि दिशा ज्ञात असल्यास, त्या बिंदूतून जाणाऱ्या व यदृच्छया निवडलेल्या *पप* या पृष्ठावरील प्रतिबल-परिस्थिती जाणून घेण्यासाठी आ. ४ मध्ये विशद केलेली पद्धत वापरता येते. *प प* पृष्ठ *१-१* या प्रधान पृष्ठास (आ. ५ अ) θ कोन करून छेदीत असेल, तर आ. ५ आ. मध्ये दाखविलेल्या प्रतिबल-वर्तुळावरील *प* या बिंदूच्या सहनिर्देशकांनी पृष्ठ *पप* वरील प्रतिबलांची मूल्ये ठरविता येतात. *म-१* या रेषेशी अपसव्य दिशेने २θ कोन करून काढलेल्या रेषेचा आणि परिघाचा छेदनबिंदू म्हणजे *प* होय. तथापि θ किंवा २θ हे कोन आकृतीत स्थित न करताही खालील कृतीचा अवलंब करून *प* बिंदूचे स्थान निश्चित करता येते.



आकृती ५ : ध्रुव-पद्धतीने प्रतिबले ठरविण्याची आलेखकृती.

आ. ५ मधील *१-१* या प्रधान छेदाला समांतर अशी रेषा *१* मधून (आ. ५ आ) काढा. ही रेषा वर्तुळाला *ध्रु* बिंदूत छेदील. नंतर *ध्रु* या बिंदूतून आ. ५ अ मधील *पप* या रेषेला समांतर रेषा काढा. ती *ध्रु-१* या रेषेशी θ कोन करील. भूमितीच्या नियमानुसार *प-म-१* या कोनाचे मूल्य θ च्या दुप्पट असते. अर्थातच ही रेषा प्रतिबल-वर्तुळास *प* या बिंदूमध्येच छेदील. या बिंदूच्या सहनिर्देशकांद्वारे आ. ५ अ मधील *प-प* या तिरकस पृष्ठावरील प्रतिबलमूल्ये मिळतील. यदृच्छया घेतलेल्या कोणत्याही पृष्ठावरील प्रतिबलांची मूल्ये, स्वतःच्या सहनिर्देशकांनी व्यक्त करणाऱ्या बिंदूचे, या वर्तुळावरील स्थान या

साध्या भूमितीसिद्ध संबंधामुळे निश्चित करणे शक्य होते. ध्रु या बिंदूतून काढलेली व विचाराधीन पृष्ठाला समांतर असलेली रेषा वर्तुळास जेथे छेदते, तेच या बिंदूचे स्थान होय. ध्रु या बिंदूला रेखाकृतीचा ध्रुव असे म्हणतात आणि तो दाखविण्यासाठी लहान दुहेरी वर्तुळाचे चिन्ह वापरतात.

या कृतीचे तत्त्व साररूपात खालील विधानाने सांगता येईल. आ. ५ आ मधील प्रतिबल वर्तुळावरील प सारखा प्रत्येक बिंदू आ. ५ अ मधील ठ बिंदूतून जाणाऱ्या एका विशिष्ट पृष्ठावरील प्रतिबल-परिस्थिती दर्शवितो. उदा० प हा बिंदू प-प या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थिती दर्शवितो. प्रतिबल-वर्तुळावर असे अनेक बिंदू घेऊन त्या प्रत्येकातून आ. ५ अ मधील तदनुषंगिक पृष्ठाला समांतर रेषा काढली असता, अशा प्रकारे प्राप्त झालेल्या सर्व रेषा या वर्तुळाला ध्रु या एकाच ध्रुवबिंदूत छेदतात. म्हणून प्रतिबल-वर्तुळावरील कोणत्याही एका बिंदूला अनुषंगिक असलेल्या पृष्ठाची दिशा जर माहीत असेल, तर त्या बिंदूतून या पृष्ठाला समांतर रेषा काढून ध्रुवस्थानाची निश्चिती करता येते.

विचाराधीन पदार्थांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांविषयीचे कोणतेच गृहीत वरील विवेचनात समाविष्ट झालेले नसल्यामुळे आकृती ४ आणि ५ यांच्या साहाय्याने विशद केलेली आलेख-पद्धत कोणत्याही पदार्थाचे बाबतीत लागू होते, मग ७$_१$ आणि ७$_३$ या प्रतिबलांमध्ये उ$_{ज्ञ}$ या रंध्रजलदाबाचा समावेश झालेला असो वा नसो.

आ. ४ व ५ मध्ये विशद केलेल्या प्रतिबल-वर्तुळ पद्धतीच्या वापराचे मृत्तिकाबल-विज्ञानातील सर्वांत महत्त्वाचे उदाहरण म्हणजे पुढील समस्या सोडविण्यासाठी केलेला उपयोग हे होय. ही समस्या अशी : आपल्याला परम मूल्याच्या प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा व त्यांपैकी एकाची महत्ता माहीत आहे. तसेच कार्तनिक प्रयोगांच्या फलितांवरून हेही ज्ञात आहे की, कोणत्याही एका छेदावरील कार्तनिक प्रतिबलांच्या मूल्यांनी कूलोमप्रणीत

क = स + ७ स्प φ   ५ (१)

या समीकरणाची पूर्ती करताच मृत्तिकेचा कार्तनिक उच्छेद होतो.

परम मूल्याच्या दुसऱ्या प्रधान प्रतिबलाची महत्ता आता आपल्याला ठरवायची आहे.

समीकरण ५ (१) चा अवलंब केल्यामुळे या सर्व विवेचनात प्रथमच एका प्रयोगसिद्ध भागाचा आपण समावेश करीत आहोत. तेव्हा या समीकरणाशी निगडित असलेली गृहीते फार काळजीपूर्वक तपासली पाहिजेत. सर्वप्रथम या ठिकाणी हे गृहीत धरले आहे की, आकृतीच्या पातळीशी लंबरूप असणाऱ्या ७$_२$ या मध्यम प्रधान प्रतिबलाच्या कोणत्याही मूल्यास वरील समीकरण लागू पडते (आ. ६ अ). हे विधान प्रत्यक्ष अनुभवाशी बऱ्याच प्रमाणात सुसंगत आहे. तसेच पुढील विवरणात हेही गृहीत धरणे आपल्याला भाग पडते की, समीकरण ५ (१) मधील स आणि φ या पदांची मूल्ये ठ या बिंदूतून जाणाऱ्या प्रत्येक पृष्ठावर तीच आहेत. या महत्त्वपूर्ण गृहीताच्या बाबतीत वालुकेसारखा समाकर्षणहीन पदार्थ आणि चिकण मृत्तिकेसारखा समाकर्षणयुक्त पदार्थ

यांत भेद केला पाहिजे. वालुकेचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

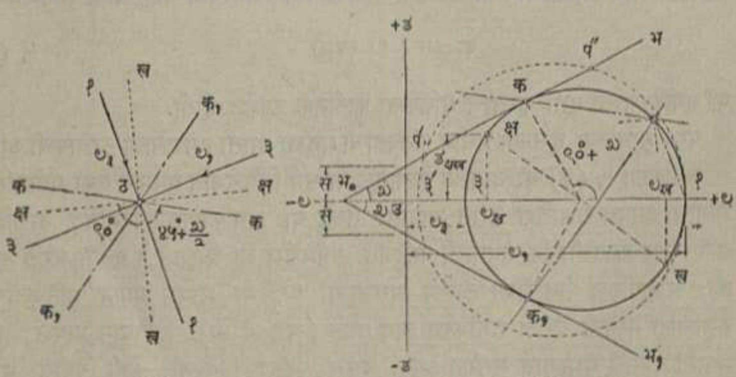
$$क = \sigma\ स्प\ \phi \qquad ५ (२)$$

येथे σ हे कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल आणि ϕ हा अंतर्गत घर्षणकोन आहे. वरील समीकरण आणि वस्तुस्थिती यात सुसंवाद असतो, असा आपला अनुभव असल्यामुळे उपरोक्त गृहीत केव्हाही सयुक्तिक आहे. त्यामुळे समीकरण ५(२) वर आधारलेल्या सैद्धांतिक ऊहापोहातून काढलेले निष्कर्ष कोणत्याही व्यावहारिक उद्दिष्टासाठी पुरेसे अचूक ठरतात.

चिक्कण मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध खालील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = स + \sigma\ स्प\ \phi \qquad ५ (१)$$

येथे σ हे कार्यसाधक किंवा एकूण लंबदिक् प्रतिबल आहे; आणि ϕ हा कार्तनिक विरोधाचा कोन आहे. σ स्प ϕ या पदात दोन घटक असतात, हे परि० ५ मध्ये दाखविले आहेच. केवळ σ या लंबदिक् प्रतिबलाच्या मूल्यावर अवलंबून असणारा घर्षणजन्य विरोध हा एक घटक. विवक्षित बिंदूतून जाणाऱ्या भिन्न भिन्न पृष्ठांवर त्याची मूल्ये भिन्न असतात. σ स्प ϕ या पदाच्या ओलाव्यावर अवलंबून असणारा असा जो दुसरा घटक असतो, तो मात्र या सर्व पृष्ठांवर सारखाच असतो. त्यामुळे समीकरण ५(१) मधील स्प ϕ या पदाचे मूल्य विवक्षित बिंदूतून जाणाऱ्या पृष्ठाच्या दिशेवर अवलंबून नाही, हे गृहीत चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत स्थूल मानानेसुद्धा ग्राह्य मानता येत नाही. तरीही विषयाची मांडणी सोपी करावयाची असेल, तर ते टाळता येत नाही. या गृहीतामुळे उद्‌भवणाऱ्या दोषांचे स्वरूप आणि महत्त्व यांची चर्चा या परिच्छेदाच्या शेवटी थोडक्यात केली जाईल.



(अ) (आ)

आकृती ६ : आदर्श नम्य पदार्थांच्या बाबतीतील मोहर्‌च्या भंजन-सिद्धांताची आलेखात्मक मांडणी (मोहर्‌ची रेखाकृती).

या विवेचनाच्या प्रारंभीच असे गृहीत धरले होते की, σ_1 आणि σ_3 या परम मूल्यांच्या प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा आणि त्यांपैकी एकाचे मूल्य ज्ञात आहे व विशिष्ट बिंदुस्थानी (आकृती ६ अ मधील ठ) कार्तनिक उच्छेदाची लक्षणे उद्‌भवण्यासाठी आवश्यक असे दुसऱ्या प्रधान प्रतिबलाचे मूल्य आणि तदनुरूप घसरपृष्ठांची दिशा या दोन गोष्टी ठरविणे, ही आपल्या पुढची समस्या आहे. आकृती ६ अ मध्ये प्रधान पृष्ठे *१-१* आणि *३-३* या रेषांनी दाखविली आहेत. या रेषा नेहमी एकमेकींस काटकोनात छेदतात. प्रतिबल-निर्देशक रेखाकृतीतील (आ. ६ आ) *भ₀भ* आणि *भ₀भ₁* या सरळ रेषांनी समीकरण ५(१) दर्शविले जाते. या दोन रेषांना **भंजन-रेषा** असे सामान्यतः म्हटले जाते. या रेषा *क्ष* अक्षाशी ϕ कोन करून निघतात व *य* अक्षाला उगमबिंदू उ पासून *स* अंतरावर छेदतात.

उपरोक्त समस्या सोडविण्यासाठी एवढे लक्षात ठेवले तरी पुरेसे आहे की, σ_1 चे मूल्य ज्ञात असल्यास आकृती ६ अ मधील ठ बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याही पृष्ठावरील प्रतिबलांची मूल्ये, आकृती ६ आ मधील प्रतिबल-निर्देशक रेखाकृतीत *१* या बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याही एका प्रतिबल-वर्तुळावरील तदनुषंगिक बिंदूच्या सहनिर्देशकांनी दर्शविली जातात. त्यासाठी अर्थातच उ-*१* = σ_1 असले पाहिजे. अज्ञात प्रतिबल σ_3 हे कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल आहे, असे गृहीत धरल्यामुळे तदनुषंगिक प्रतिबल-वर्तुळ *१* या बिंदूच्या डाव्या बाजूस स्थित असणार. आकृती ६ अ मधील ठ या बिंदुस्थानाच्या प्रतिबलांची मूल्ये दाखविणारे प्रतिबल-वर्तुळ *भ₀भ* आणि *भ₀भ₁* (आ. ६ आ) या भंजनरेषांना छेदत नसेल, तर या रेषांनी दर्शविलेली उच्छेदकारी प्रतिबल-मूल्ये ज्यास लागू होतील, असे कोणतेच पृष्ठ ठ या बिंदूतून जाणार नाही. उलटपक्षी, आकृती ६ आ मधील *१-३'* या व्यासावरील वर्तुळाप्रमाणे एखादे वर्तुळ भंजनरेषांना छेदून गेल्यास त्याच्या *प' प"* या परिघखंडांवरील बिंदूंना अनुषंगिक असणाऱ्या कोणत्याही पृष्ठावर समतोलाची अवस्था असू शकणार नाही. म्हणून ठ या बिंदुस्थानी कार्तनिक उच्छेदक्षणी अस्तित्वात असणारी प्रतिबल-मूल्ये दर्शवील असे वर्तुळ एकच असेल. ते म्हणजे ज्याचे बाबतीत भंजनरेषा या स्पर्शरेषा असतील. असे वर्तुळ आडव्या अक्षावर उगमबिंदूपासून σ_3 अंतरावर असणाऱ्या *३* या बिंदूतून जाईल. अशा वर्तुळास **भंजनवर्तुळ** आणि रेखाकृतीस **मोहरची रेखाकृती** असे म्हणतात (मोहर १८७१). आकृती ६ अ मधील प्रधान पृष्ठांना अनुषंगिक अशा उच्छेदपृष्ठांची दिशा ठरविण्यासाठी *१*-ध्रु₃(आ. ६ आ)‖ *१-१* (आ. ६ अ) काढू म्हणजे रेखाकृतीतील ध्रु₃ हा ध्रुव मिळेल. उच्छेद एकाचवेळी ज्या दोन पृष्ठांवर होतो, ती अशी—क क (आ. ६ अ)‖ ध्रु₃ क (आ. ६ आ) आणि क₁ क₁ (आ. ६ अ)‖ ध्रु₃ क₁ (आ. ६ आ). आ. ६ अ मधील *१-१* या प्रधान पृष्ठाला उपरोक्त पृष्ठे ४५° + ϕ/२ या कोनात छेदतात. तेव्हा कार्तनिक पृष्ठांची दिशा *स* (समी. ५ (१)) या मूल्यावर अवलंबून नाही. कार्तनिक पृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबलांची मूल्ये आकृती ६ आ मधील क

(किंवा क_1) या बिंदूच्या कोटिमूल्याइतकी असतात.

आकृती ६ आ च्या साहाय्याने कार्तनिक पृष्ठावरील फलरूप प्रतिबलांची दिशा ठरविली असता, आपल्याला असे आढळते की, या पृष्ठांपैकी प्रत्येक पृष्ठावरील फलरूप प्रतिबलाची दिशा दुसऱ्या पृष्ठाला समांतर असते. परंतु त्यासाठी $\text{स} = 0$ असावे लागते (समाकर्षणहीन पदार्थ). एवंच, $\text{स} = 0$ असेल, तर आकृती ६ अ मधील कक वरील फलरूप प्रतिबल $\text{क}_1\text{क}_1$ ला समांतर असेल आणि $\text{क}_1\text{क}_1$ वरील प्रतिबल कक ला समांतर असेल. या लक्षणांनी युक्त असणाऱ्या कोणत्याही दोन पृष्ठांना व्यावहारिक बलविज्ञानात **पृष्ठ-युग्म** म्हणतात. तेव्हा समाकर्षणहीन पदार्थांतील कार्तनिक पृष्ठे म्हणजे पृष्ठ-युग्म असते.

मोहरच्या रेखाकृतीत दाखविलेल्या भौमितिक संबंधावरून असे स्पष्ट होते की, प्रधान प्रतिबलांची महत्ता पुढील समीकरणाने निश्चित होणाऱ्या मूल्याची होताच उच्छेद घडून येतो.

$$\sigma_1 = 2\text{स}\,\text{स्प}(45^\circ + \phi/2) + \sigma_3\,\text{स्प}^2(45^\circ + \phi/2) = 2\text{स}\sqrt{\text{ण}} + \sigma_3\,\text{ण} \quad [3]$$

येथील

$$\text{ण} = \text{स्प}^2(45^\circ + \phi/2) \quad [4]$$

हे पद मृत्तिकेच्या नम्य समतोलविषयक कित्येक समीकरणांत येते. त्यास संक्षिप्तपणे **विसर्पण-मूल्य** असे म्हटले जाईल.

वालुकेचा ($\text{स} = 0$) विचार करताना फक्त कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबलेच कारक मानली जातात. समीकरण ३ मध्ये स चे ठिकाणी शून्य मानल्यास आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\sigma_1 = \sigma_3\,\text{स्प}^2(45^\circ + \phi/2) = \text{ण}.\sigma_3 \quad [5]$$

येथे ϕ हा अंतर्गत घर्षणकोन आहे. तेव्हा नम्य समतोल अवस्थेत असलेल्या समाकर्षणहीन मृत्तिकाराशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानी, कार्यसाधक ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल आणि कार्यसाधक कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल यांमधील गुणोत्तर, ण या विसर्पणमूल्याइतकेच असले पाहिजे. हे मूल्य पदार्थाच्या अंतर्गत घर्षणकोनाच्या मूल्यावरच केवळ अवलंबून असते.

समीकरण ३ पुढील स्वरूपातही मांडता येते.

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\,\text{ज्या}\,\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \text{स}\,\text{कोज्या}\,\phi \quad [6]$$

आकृती ६ अ मधील क्षक्ष आणि खख रेषांनी दर्शविलेल्या व एकमेकांस काटकोनात छेदणाऱ्या कोणत्याही दोन पृष्ठांवरील $\sigma_{\text{क्ष}}$ आणि $\sigma_{\text{ख}}$ ही लंबदिक् प्रतिबले आकृती ६

आ मधील क्ष आणि ख या बिंदूंनी दाखविली आहेत. त्यांचे बाबतीत मोहूरच्या रेखाकृतीवरून उच्छेदसमीप अवस्थेसाठी आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{ख} - \sigma_{क्ष}}{२}\right)^{२} + \tau^{२}_{क्षख}} - \frac{\sigma_{ख} + \sigma_{क्ष}}{२} \text{ ज्या } \phi = स \text{ कोज्या } \phi \qquad [७]$$

आदर्श वालुकांत समाकर्षण $स = ०$ असते. तसेच अशा वालुकांचे बाबतीत ϕ हा कोन अंतर्गत घर्षणकोन असतो व लंबदिक् प्रतिबले ही कार्यसाधक प्रतिबले असतात. वरील समीकरणात $स = ०$ घालून पुढील समीकरणे प्राप्त होतात.

$$\frac{\sigma_{१} - \sigma_{३}}{\sigma_{१} + \sigma_{३}} = \text{ज्या } \phi \qquad [८]$$

आणि

$$\sqrt{\frac{(\sigma_{ख} - \sigma_{क्ष})^{२} + ४\,\tau^{२}_{क्षख}}{\sigma_{ख} + \sigma_{क्ष}}} = \text{ज्या } \phi \qquad [९]$$

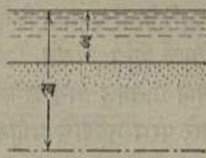
एखाद्या मृत्तिकाराशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानाच्या प्रतिबल-परिस्थितीला समीकरण ३, ६ किंवा ७ यांपैकी कोणतेही एक लागू होत असेल, तर अशी मृत्तिका **नम्य समतोल अवस्थेत** आहे, असे म्हटले जाते. यापूर्वीची अवस्था **नम्य विसर्पण** किंवा **स्थितिस्थापक समतोल** यांपैकी कोणतीही असू शकेल. या दोन्ही अवस्थांत राशीतील प्रत्येक ठिकाणचे प्रतिबल-मूल्य, उच्छेदकारी प्रतिबल-मूल्याहून लहान असते. नम्य समतोल अवस्थेतील प्रतिबलांचे गणित ज्या सिद्धांतावर आधारित असते त्यास **नम्यता-सिद्धांत** म्हणतात. नम्य विसर्पणविषयक लक्षणांच्या बाबतीत भिन्न भिन्न गृहीते कल्पून त्यांवर आधारलेले कित्येक नम्यता-सिद्धांत प्रचलित आहेत (नादई १९३१). विचाराधीन पदार्थाच्या विसर्पी अवस्थेस कारणीभूत होणाऱ्या प्रत्यक्ष परिस्थितीला सोपे रूप देऊन ही गृहीते प्राप्त झालेली असतात. मृत्तिकांच्या बाबतीतील नम्यता-सिद्धांत मात्र मोहूरच्या भंजन-सिद्धांतावर आधारित आहे. कारण मृत्तिकेच्या नम्यता-गुण अधिक समाधानकारक रीतीने विशद करील, असा दुसरा पर्याय अद्याप उपलब्ध झालेला नाही. मोहूरच्या कल्पनेचा आधार घेऊन आपल्याला ३, ६ व ७ ही समीकरणे प्राप्त झाली. पुढील प्रकरणात ज्यांचा ऊहापोह करण्यात आला आहे, त्या आदर्श मृत्तिकांतील नम्य समतोलाच्या सिद्धांतातील मूलभूत समीकरणांची तीन भिन्न स्वरूपे या तीन समीकरणांनी व्यक्त केलेली आहेत. समीकरण ५ (१) हे केवळ कार्तनिक पृष्ठाच्या बाबतीतच यथार्थ नसून नम्य समतोल अवस्थेतील मृत्तिकाराशीमधील विवक्षित बिंदूतून जाणाऱ्या कोणत्याही अन्य छेदासही ते लागू पडते, या आरंभीच विदित केलेल्या गृहीताच्या आधारे वरील समीकरणे प्राप्त झालेली आहेत.

मोहूरप्रणीत उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थिती ग्राह्य मानून नम्यताविषयक काही समस्या आलेख-पद्धतीने सोडविण्याचे एक साधन म्हणजे मोहूरची रेखाकृती होय. या गृहीतात आणखी एक गोष्ट समाविष्ट झालेली आहे; ती ही की, समाकर्षण स हा विचाराधीन पदार्थाचे बाबतीतील एक स्थिरांक आहे.

समीकरण ५ (१) मधील स = ० (समाकर्षणहीन पदार्थ) असेल आणि त्याचप्रमाणे ϕ म्हणजे कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल असेल, तर उपरोक्त गृहीत सत्यसमीप आहे असे म्हणता येईल. हे गृहीत आणि प्रत्यक्षातील चिक्कण मृत्तिकांचे प्राकृतिक गुणधर्म यांतील विसंगतीचे वर्णन व्यावहारिक मृत्तिकाबलविज्ञानावरील ग्रंथात केले जाईल. मोहूरच्या रेखाकृतीची उपयुक्तता आणि चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीतील तदनुषंगिक समीकरणे यांवर पडणारा या विसंगतीचा प्रभाव, एतद्विषयक विश्लेषणातून पुढील निष्कर्ष प्राप्त होतात. विसंगती असूनही समी. ३ ते ७ नेहमीच चालवून घेता येतील इतकी विश्वासार्ह असतात. उलटपक्षी, प्रधान पृष्ठांच्या संदर्भातील घसरपृष्ठांची वास्तव दिशा आणि आकडेमोडीने प्राप्त झालेली दिशा यांतील फरक नेहमीच महत्त्वाचा असतो. सामान्यतः समीकरणातील किंवा रेखाकृतीतील प्रतिबले ही कार्यसाधक प्रतिबले असल्यास होणारी चूक, मिश्र प्रतिबलांच्या आधारे केलेल्या आकडेमोडीत अंतर्भूत होणाऱ्या चुकीपेक्षा कमी महत्त्वाची असण्याचा संभव असतो.

प्रतिबल-मूल्य स्थिर असूनही विरूपत्व अविरतपणे चालूच राहते, अशा लक्षणाचे नम्य विसर्पण, समीकरण ५ (१) मधील स आणि ϕ यांच्या मूल्यांवर काही प्रभाव पाडू शकत नाही, या वादातीत गृहीतावर पूर्वोक्त विवेचन आधारित आहे. एवंच, स आणि ϕ ची मूल्ये स्थिर राहून अनिश्चित कालापर्यंत विसर्पण होत राहण्याचा गुण आदर्श वालुका आणि आदर्श चिक्कण मृत्तिका या दोहोंत आहे, असे येथे मानले आहे. अर्थातच त्यांना नम्य पदार्थ म्हणणे समर्थनीय ठरते. प्रत्यक्षात मात्र हे गृहीत काटेकोरपणे लागू पडेल, अशा प्राकृतिक गुणधर्मांच्या मृत्तिकाच अस्तित्वात नाहीत. नम्यतागुणयुक्त आदर्श वर्तन आणि वास्तवातील मृत्तिकांचे वर्तन यांतील विसंवाद, विशेषतः मृत्कणांच्या स्वरूपावरच केवळ अवलंबून नसून मृत्तिकेच्या सच्छिद्रतेचाही त्यात भाग आहे. हा विसंवाद व त्याच्यामुळे सिद्धांतानुसारी विश्लेषणात येणाऱ्या दोषांचे महत्त्व, यांचेही विवेचन व्या. मृ. ब. वि. च्या ग्रंथात केले जाईल.

८. उद्धरण अर्थात स्थिरजलाचा उत्तोलन गुण : ज्यांची पोकळी जलयुक्त आहे, अशा मृत्तिकांचाच विचार आपण व्यवहारात मुख्यत्वेकरून करतो. अशा मृत्तिकांतील कार्यसाधक प्रतिबले ठरविण्यासाठी उदासीन प्रतिबले माहीत असलीच पाहिजेत. प्रवाही जलामुळे निर्माण होणाऱ्या रंध्रजलदाबाचे मूल्य ठरविण्याच्या पद्धती प्रकरण १२ मध्ये दिल्या जातील. तथापि पाणी स्तब्ध समतोल अवस्थेत असताना प्रतिबलविषयक समस्या सोडविण्यासाठी मांडावे लागणारे गणित इतके सोपे असते की,



आकृती ७ : निमज्जित वालुका-थराचा छेद.

मृत्तिका-जल-शास्त्राचा खोलात जाऊन विचार न करताही या समस्या सोडविता येतात. उदाहरण म्हणून पूर्णपणे निमज्जित असलेल्या गाळाच्या थरातील प्रतिबल-परिस्थितीचा आपण विचार करू. *आ*. ७ मध्ये अशा थराचा उभा छेद दाखविला आहे. जलपृष्ठापासून ख या खोलीवर मृत्तिकेत घेतलेल्या आडव्या छेदावरील एकूण दाब म्हणजे घनरूप मृत्कणांचे वजन आणि त्या छेदावर स्थित असलेल्या पाण्याचे वजन यांची बेरीज असते. समजा,

छ = थराची सच्छिद्रता,

$\text{घ}_{\text{घ}}$ = घन कणांची घनता,

$\text{घ}_{\text{ज}}$ = पाण्याची घनता,

इ = थराच्या पृष्ठभागावरील पाण्याची खोली.

आडव्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील मृत्कणांचे वजन $\text{घ}_{\text{घ}}\,(१-\text{छ})\times(\text{ख}-\text{इ})$ आहे आणि त्याच क्षेत्रावरील पाण्याचे वजन $\text{छ}\;\text{घ}_{\text{ज}}\,(\text{ख}-\text{इ})+\text{घ}_{\text{ज}}\,\text{इ}$ आहे. म्हणून आडव्या छेदावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल.

$$\text{ए}=\text{घ}_{\text{घ}}\,(१-\text{छ})\,(\text{ख}-\text{इ})+\text{छ}\;\text{घ}_{\text{ज}}\,(\text{ख}-\text{इ})+\text{घ}_{\text{ज}}\,\text{इ}$$

समीकरण ६ (१) नुसार मुक्तजल पृष्ठापासून $\text{च}_{\text{ज}}=\text{ख}$ खोलीवरील $\text{उ}_{\text{ज}}$ हे उदासीन प्रतिबल $\text{घ}_{\text{ज}}\,\text{ख}$ इतके होते आणि एकांक क्षेत्रावरील तदनुसारी कार्यसाधक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे होते.

$$\bar{\text{ए}}=\text{ए}-\text{घ}_{\text{ज}}\,\text{ख}=(\text{घ}_{\text{घ}}-\text{घ}_{\text{ज}})\,(१-\text{छ})\,(\text{ख}-\text{इ}) \qquad [१]$$

या समीकरणात $(\text{घ}_{\text{घ}}-\text{घ}_{\text{ज}})\,(१-\text{छ})$ या अवयवाने एकांक अवकाशातील घनकणांच्या वजनातून, त्या कणांमुळे विस्थापित झालेल्या पाण्याचे वजन उणे करून बाकी राहणारे वजन दर्शविले जाते. या वजनास मृत्तिकेची **निमज्जित घनता** असे म्हणतात. आणि $\text{घ}'$ या चिन्हाने ती दर्शवितात. वरील समीकरणातून आपणांस

$$\text{घ}'=(\text{घ}_{\text{घ}}-\text{घ}_{\text{ज}})\,(१-\text{छ}) \qquad [२]$$

मिळते. म्हणूनच आडव्या छेदावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल असे मांडले जाते :

$$\bar{\text{ए}}=\text{घ}'\,(\text{ख}-\text{इ}) \qquad [३]$$

हे पुन्हा एकदा आवर्जून सांगितले पाहिजे की, वरील समीकरणे मृत्तिकेच्या पोकळीतील पाणी पूर्णत्वाने समतोल अवस्थेत असल्याविना लागू पडत नाहीत.

मृत्तिकेचा पृष्ठभाग क्षितिजसमांतर असल्यामुळे कोणत्याही आडव्या छेदावरील कार्तनिक प्रतिबल शून्य असते. अर्थातच σ हे लंबदिक् प्रतिबल (समी. ३) ज्येष्ठ किंवा कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल असू शकेल. म्हणून उपरोक्त थर नम्य समतोल अवस्थेत असेल, तर दुसरे परम मूल्याचे प्रधान प्रतिबल समी. ७ (५) ने ठरविता येईल.

प्रकरण ३

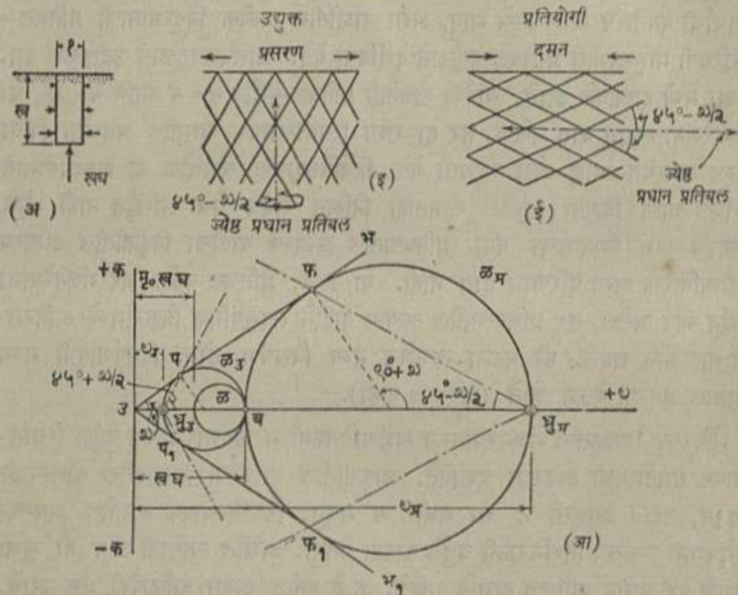
सरळ पृष्ठभागाच्या अपारप्राय राशीतील नम्य समतोल

९. **व्याख्या :** समतल पृष्ठभाग असलेल्या व अधस् दिशेत तसेच सर्व क्षितिजसमांतर दिशांत अपार पसरलेल्या समांग राशीस **अपारप्राय राशी** असे म्हणतात. या राशीतील पदार्थाची घनता γ आहे असे मानू. अशा राशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानाची प्रतिबल–परिस्थिती मोह्रप्रणीत प्रतिबल-वर्तुळाने दर्शविता येते. प्रतिबलवर्तुळाचे उदाहरण आ. ६ आ मध्ये दाखविले आहे. यांपैकी कोणतेही प्रतिबल-वर्तुळ भ० भ आणि भ० भ$_१$ या भंजनरेषांना स्पर्शून जात नसेल, तर हा राशी स्थितिस्थापक समतोल अवस्थेत किंवा स्तब्ध अवस्थेत आहे असे म्हणता येते. **स्थितिस्थापक समतोल** या शब्दप्रयोगात प्रतिबल आणि विकृती यांतील कोणताही निश्चित संबंध येथे अभिप्रेत नाही. येथे एवढाच अर्थ घ्यावयाचा की, प्रतिबलातील अत्यल्प वाढीचा विकृतीतील अत्यल्प वाढीव्यतिरिक्त अन्य परिणाम होत नाही. या उलट, प्रतिबल-वर्तुळ जर भंजनरेषांना स्पर्शून जात असेल, तर प्रतिबलातील अत्यल्प वाढीने तदनुषंगिक विकृतीमध्ये अविरतपणे वाढ होत राहते. ही घटना म्हणजेच नम्य विसर्पण होय. विसर्पणापूर्वी नम्य समतोल अवस्था येऊन जाते (परि० ७ पाहा).

मोह्रच्या रेखाकृतीत भंजनरेषांना न स्पर्शणारे किंवा न छेदणारे प्रत्येक वर्तुळ स्थितिस्थापक समतोलाची अवस्था दर्शविते. आकृतीतील आडव्या अक्षावरील कोणत्याही बिंदूतून, उदा० आकृती ८ आ मधील ब मधून, स्थितिस्थापक समतोल अवस्था दर्शविणारी असंख्य निरनिराळी वर्तुळे काढता येतात. अर्थात त्यासाठी उ ब ही भुजा म्हणजे एक प्रधान प्रतिबल असले पाहिजे. ळ हे वर्तुळ अशा वर्तुळांपैकी एक आहे. तथापि नम्य समतोलाच्या अटी पुरी करणारी आणि ब या बिंदूतून जाणारी केवळ दोनच वर्तुळे असतात. त्यांपैकी एक ब बिंदूच्या डाव्या बाजूस स्थित असते आणि दुसरे उजव्या बाजूस. या दोन वर्तुळांनी नम्य समतोलाच्या दोन अवस्था दर्शविल्या गेल्या, तरी स्थितिस्थापक समतोल किंवा स्तब्ध अवस्था मात्र स्थैतिक दृष्ट्या अनिर्णितच राहते. स्तब्ध मृत्तिकाराशीमधील कोणत्याही ठिकाणच्या क्षितिजसमांतर व क्षितिजलंब दिशेतील प्रधान प्रतिबलांच्या मूल्यांचे $\sigma_{आ०}/\sigma_{लं०}$ हे गुणोत्तर, मृत्तिकेचा प्रकार, तिची निर्मितीकारणे, तसेच तिच्यावर कारक झालेले अल्पकालीन भार इ० वर अवलंबून असते. त्याचे मूल्य खोलीवर अवलंबून असेल वा नसेल. जर मृत्तिकाराशीचा निर्मिती–इतिहास आणि गुणधर्म विचारात घेता, त्या राशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानी $\sigma_{आ०}/\sigma_{लं०}$ हे गुणोत्तर स्थूलमानाने एकाच मूल्याचे आहे, असे मानणे समर्थनीय ठरत असेल, तर

या गुणोत्तरास **स्तब्धावस्थेतील मृत्तिकादाबाचा गुणांक** असे म्हटले जाईल व मृ० या चिन्हाने तो दर्शविला जाईल.

पुढील विवेचनातील विषयाची व्याप्ती निश्चितपणे व्यक्त होण्यासाठी, समतल पृष्ठभाग असलेला समांग राशी आपण विचारात घेऊ. या राशीतील पदार्थांची घनता घ आहे. राशीच्या पृष्ठभागाशी काटकोन करणाऱ्या पातळीस समांतर असलेल्या दिशेत विरूपण क्रियेचा अवलंब करून राशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य उच्छेदास समीप असणारी अवस्था प्रस्थापित करण्याचा आपला मानस आहे. या विरूपतेस **पृष्ठीय विरूपत्व**



आकृती ८ : समतल पृष्ठाचा अपारप्राय समाकर्षणहीन राशी. (अ) समपार्श्वखंडाच्या बाजूंवरील प्रतिबले; (आ) उच्छेदक्षणाच्या प्रतिबल-परिस्थितीची आलेखात्मक मांडणी; (इ) उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा.

असे म्हणतात. या राशीचा प्रत्येक उभा छेद तिच्या संदर्भात सममात्रतेचे पृष्ठ दर्शवितो. त्यामुळे उभ्या तसेच आडव्या पातळ्यांवरील कार्तनिक प्रतिबले शून्य मूल्याची असतात. आ. ८ अ मध्ये अशा राशीतील एकांक रुंदीचा समपार्श्वखंड दाखविला आहे. राशीची विरूपता आकृतीच्या पातळीला समांतर दिशेत होते असे गृहीत धरले आहे. समपार्श्व खंडाच्या उभ्या बाजूंवरील कार्तनिक प्रतिबल शून्य मूल्याचे असल्यामुळे,

त्याच्या तळावरील $७_{\text{लं}}$ हे लंबदिक् प्रतिबल, प्रधान प्रतिबल ठरते व त्याचे मूल्य समपार्श्व खंडाच्या वजनाइतके असते.

$$७_{\text{लं}} = \text{खघ}$$

उपरोक्त समपार्श्व खंड ज्या राशीचा एक अंगभूत भाग आहे, त्याला त्याच्या स्थितिस्थापक समतोलाच्या मूळ अवस्थेतून दोन उपायांनी—ताण लावून आणि दाब लावून—नम्य समतोलाच्या अवस्थेप्रत नेता येते. हा ताण किंवा दाब आडव्या दिशेत समप्रमाणात लावला पाहिजे. ताण लावला असता, नम्य समतोलाची लक्षणे दिसेपर्यंत उभ्या बाजूवरील प्रतिबल कमी होत असते; परंतु तळावरील प्रतिबलाचे मूल्य मात्र तेच राहते. याहून अधिक ताणण्याचा प्रयत्न केल्यास, प्रतिबल-परिस्थितीत काहीच फरक न होता, तिचे पर्यवसान फक्त नम्य विसर्पणात होते. नम्य समतोलाचे नम्य विसर्पणात होणारे पर्यवसान याचाच अर्थ **उच्छेद** होणे असा आहे. मृत्तिकांना आदर्श रूप देताना, जे प्राकृतिक गुणधर्म चिकटविले जातात, त्यांमुळे राशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य समतोलावस्थेचा प्रादुर्भाव एकाच क्षणी झाला किंवा नाही, या गोष्टीस फारसे महत्त्व राहत नाही. आडव्या दिशेत विस्तरण होण्यास मृत्तिकेचे वजन साहाय्य करण्यास उद्युक्त होत असल्यामुळे तदनुसारी उच्छेदास **उद्युक्त उच्छेद** म्हणतात.

उलटपक्षी, मृत्तिकेस आडव्या दिशेत दाब लावला असता, समपार्श्व खंडाच्या उभ्या बाजूवरील प्रतिबल वाढत जाते; परंतु तळावरील प्रतिबल तेच राहते. या पार्श्वीय दमनास मृत्तिकेच्या वजनाने प्रतिकार केला जातो; म्हणून तदनंतर नम्य विसर्पणाने होणाऱ्या उच्छेदास **प्रतियोगी उच्छेद** म्हणतात. नम्य विसर्पणास प्रारंभ होण्यासाठी लागणारे प्रतिबल आणि विसर्पण अविरत चालू राहण्यासाठी लागणारे प्रतिबल, ही एकाच मूल्याची असल्यामुळे मृत्तिकेचे याहून अधिक दमन केल्यास त्याचा प्रतिबल-परिस्थितीवर काहीच परिणाम होत नाही.

तात्पर्य, मृत्तिकेचे स्थितिस्थापक समतोलातून नम्य समतोलात होणारे अवस्थांतर दोन भिन्न उपायांनी साध्य होऊ शकते; पहिला उपाय म्हणजे पार्श्वीय विस्तरण आणि दुसरा म्हणजे पार्श्वीय दमन. अशा दोन्ही अवस्थांतरांत, ज्यांच्यावर उच्छेद-समीपावस्था उद्भवते, असे घसरपृष्ठांचे दोन संच असतात. (आ. ८ इ आणि ८ ई पाहा.) घसरपृष्ठ व आकृती ज्यावर काढली आहे ते पृष्ठ, यांच्या छेदनरेषेला **कार्तनिक रेषा** म्हणतात. ही रेषा वक्र असेल, तर तिला **घसर-वक्र** असे म्हणतात. घसरपृष्ठांचे दोन संच दाखविणाऱ्या सरळ किंवा वक्र कार्तनिक रेषा यांच्याद्वारे **कार्तनिक प्रतिमा** सिद्ध होते.

अपारप्राय राशीतील नम्य समतोलविषयक प्रतिबल-लक्षणे तसेच घसरपृष्ठांची दिशा ठरविणे, ही समस्या आपल्याला आता विचारार्थ घ्यावयाची आहे. ही समस्या प्रथम रॅन्किन्ने (१८५७) सोडविली; म्हणून अपारप्राय मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागाला

समांतर दिशेत केलेल्या विस्तरणाने किंवा दमनाने निर्माण होणाऱ्या नम्य अवस्थांचा उल्लेख अनुक्रमे **रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त व प्रतियोगी अवस्था** असा केला जाईल. समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय राशीतील कार्तनिक प्रतिमा, समांतर रेषांच्या दोन संचांतून सिद्ध होते आणि या रेषा उभ्या दिशेच्या संदर्भात सममात्र पद्धतीने निघालेल्या असतात, हे पुढील परिच्छेदात दाखवावयाचे आहे. रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत पृष्ठभागापासून निघणारी घसरपृष्ठे क्षितिजाशी ४५°+ ॐ/२ अंशांचा कोन करतात (आ. ८ इ पाहा); आणि रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेत अशी घसरपृष्ठे क्षितिजाशी ४५°– ॐ/२ अंशांचा कोन करतात (आ. ८ ई पाहा).

समतल पृष्ठभाग असलेल्या अपारप्राय राशीतील एखाद्या भागातच रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त वा प्रतियोगी अवस्था अस्तित्वात असेल, तर त्या भागास **रॅन्किन् क्षेत्र** ही संज्ञा दिली जाईल. अशा रॅन्किन् क्षेत्रात आ. ८ इ व ८ ई मध्ये दाखविलेल्या दोन कार्तनिक प्रतिमांपैकी कोणतीतरी एक अस्तित्वात असते. उदा., आ. १५ अ मध्ये *ग* बिंदूच्या उजव्या बाजूस उद्युक्त रॅन्किन् क्षेत्र आणि डाव्या बाजूस प्रतियोगी रॅन्किन् क्षेत्र दाखविले आहे.

एखाद्या अपारप्राय राशीतील प्रत्येक भाग उच्छेदमर्यादेपर्यंत ताणणे किंवा दाबणे या क्रिया फक्त कल्पनेतच घडवून आणणे शक्य आहे, हे सहज ध्यानात यावे. या क्रियांशी थोडेही साम्य असलेला कोणताच व्यवहार स्थापत्य-कार्यांत अस्तित्वात नाही. तथापि प्रकरण ४ मध्ये वर्णिलेल्या बौद्धिक करामतीच्या साहाय्याने, पुढील परिच्छेदांतून करावयाच्या विवेचनांचे निष्कर्ष, स्थापत्यातील विशेष व्यावहारिक महत्त्वाच्या कित्येक समस्यांची उकल करण्यासाठी लागू करणे शक्य असते. उदा., आधारभिंतींवरील मृत्तिका दाबाचे मूल्य ठरविण्याची समस्या किंवा पट्टिका-पादकांची अंतिम भारधारणक्षमता ठरविण्याची समस्या.

१०. समाकर्षणहीन अपारप्राय राशीतील रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त आणि प्रतियोगी अवस्था : समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय व समाकर्षणहीन राशीतील एक समपार्श्व खंड आ० ८ अ मध्ये दाखविला आहे. राशीची घनता *घ* असून त्यातील उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थिती आ० ८ आ मधील *उभ* या भंजनरेषेने ठरविता येते. या रेषेचे समीकरण पुढे दिले आहे.

$$क = ए स्प ॐ \qquad ५ (२)$$

समपार्श्व खंडाच्या तळावरील लंबदिक् प्रतिबल, त्याच्या वजनाइतके म्हणजे *घख* आहे. आडव्या छेदांवरील कार्तनिक प्रतिबल शून्य असल्यामुळे तळावरील लंबदिक् प्रतिबल, प्रधान प्रतिबल ठरते. मोहूरच्या रेखाकृतीतील *उब* (आ० ८ आ) म्हणजे हे प्रधान प्रतिबल होय.

राशीची स्थितिस्थापक समतोलाची मूळ अवस्था रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त आणि प्रतियोगी या दोन अवस्थांच्या मध्ये पडते. या अवस्थेत राशीतील उभ्या आणि आडव्या प्रधान प्रतिबलांचे प्रमाण मृ० या स्तब्धदाब-गुणांकाबरोबर असते. (परि० ९ पाहा.) अर्थातच आडव्या प्रधान प्रतिबलाचे मूल्य

$$\text{ए}_{\text{आ}_0} = \text{मृ}_0\ \text{घ}\ \text{ख} \qquad [१]$$

या समीकरणाने व्यक्त होते.

रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्था निर्माण करण्यासाठी, नम्य समतोलाची प्रतिबल-परिस्थिती उद्भवेल अशा मर्यादेपर्यंत आडव्या दिशेने मृत्तिका ताणली पाहिजे. रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत रूपांतर होताना उभ्या प्रतिबलाचे मूल्य तेच राहून आडव्या प्रतिबलात घट होते. अर्थातच *ख* या खोलीवरील रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्था दर्शविणारे भंजन-वर्तुळ *ब* बिंदूच्या डाव्या बाजूस स्थित असते. तसेच *उभ* या भंजन-रेषेस ते *प* बिंदूत स्पर्श करते. तदनुषंगिक ध्रुवबिंदूस **उद्युक्त ध्रुवबिंदू** $\text{ध्रु}_{\text{उ}}$ म्हटले जाईल. परि. ७ आणि आ. ५ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे *घख* प्रतिबल ज्या पृष्ठावर कारक असते, त्यास *ब* बिंदूतून काढलेली समांतर रेषा व हे वर्तुळ जेथे एकमेकांस छेदतात, तो बिंदू हेच या ध्रुवाचे स्थान असते. उपरोक्त पृष्ठ आडवे आहे, तसेच *ब* हा बिंदूही आडव्या अक्षावरच आहे. अर्थातच मोहूरच्या रेखाकृतीतील वर्तुळ आणि आडवा अक्ष यांच्या छेदनबिंदुस्थानी हा उद्युक्त ध्रुव असणार. आ० ८ इ मधील कार्तनिक उच्छेदाची पृष्ठे आ० ८ आ मधील $\text{ध्रु}_{\text{उ}}\text{प}$ आणि $\text{ध्रु}_{\text{उ}}\text{प}$, या रेषांना समांतर असतात. या पृष्ठांचे दोन्ही संच क्षितिजाशी ४५° + ञ/२ एवढा कोन करतात. आ० ८ आ मधील कोन, अंतरे इ. लक्षात घेऊन उभ्या पृष्ठावर *ख* या खोलीवर कारक होणाऱ्या $\text{ए}_{\text{उ}}$ या लंबरूप प्रतिबलाचे (उद्युक्त दाब) मूल्य आपल्याला खालीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{ए}_{\text{उ}} = \text{घ}\ \text{ख}\ \text{स्प}^{२}\ (४५^\circ - \text{ञ}/२) = \text{घ}\ \text{ख}\ \frac{१}{\text{ण}} \qquad [२]$$

येथे *ण* म्हणजे समीकरण ७ (४) मधील विसर्पण-मूल्य आहे.

त्याच खोलीवरील आडव्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील दाब *घ·ख* इतका असतो.

$$\frac{\text{ए}_{\text{उ}}}{\text{घख}} = \text{स्प}^{२}\ (४५^\circ - \text{ञ}/२) = \frac{१}{\text{ण}} \qquad [३]$$

वर दिलेले गुणोत्तर खोलीच्या मूल्यावर अवलंबून नाही. तेव्हा उभ्या पृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबल, स्थिरजल-दाबाप्रमाणे खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढत जाईल. तिरकस पृष्ठा-वरील $\text{ए}_{\text{उ}}$ चे मूल्यही मोहूरच्या रेखाकृतीवरून त्वरित काढता येते. त्याची कृती परि० ७ मध्ये विशद केली आहे. हे प्रतिबलसुद्धा स्थिरजलदाबाप्रमाणे खोलीच्या मूल्याच्या सरळ प्रमाणात वाढते.

पार्श्वीय दमनानंतर मृत्तिकेचा उच्छेद झाला असेल, तर प्रधान प्रतिबलात वाढ होते. या उच्छेदाच्या क्षणाची प्रतिबल-परिस्थिती आ० ८ आ मधील उभ या भंजनरेषेला फ बिंदूत स्पर्शणाऱ्या आणि ब मधून जाणाऱ्या वर्तुळाने दाखविली जाते. तदनुषंगिक कार्तनिक पृष्ठे (आ० ८ ई) धु$_{\text{प्र}}$फ आणि धु$_{\text{प्र}}$फ, या रेषांना (आ० ८ आ) समांतर असतात. उभ्या दिशेशी ही पृष्ठे $४५^\circ + \omega/२$ एवढा कोन करतात आ० ८ आ मध्ये दाखविलेले कोन आणि प्रतिबले यांवरून आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येते;

$$\text{℧}_{\text{प्र}} = \text{घ ख स्प}^{२}(४५^\circ + \omega/२) = \text{घ ख ण} \qquad [४]$$

आणि उभ्या व आडव्या दाबांतील गुणोत्तर पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$\frac{\text{℧}_{\text{प्र}}}{\text{घ ख}} = \text{स्प}^{२}(४५^\circ + \omega/२) = \text{ण} \qquad [५]$$

तिरकस पृष्ठांवरील प्रतिबलेही मोहूरच्या रेखाकृतीने ठरविता येतात. $\text{℧}_{\text{प्र}}/\text{घख}$ हे गुणोत्तर खोलीच्या मूल्यावर अवलंबून नसल्यामुळे उद्युक्त दाबाप्रमाणेच सरळ पृष्ठावरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबही खोलीच्या मूल्यानुसार सरळ प्रमाणात वाढत जातो. समीकरणे ३ व ५ यांवरून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

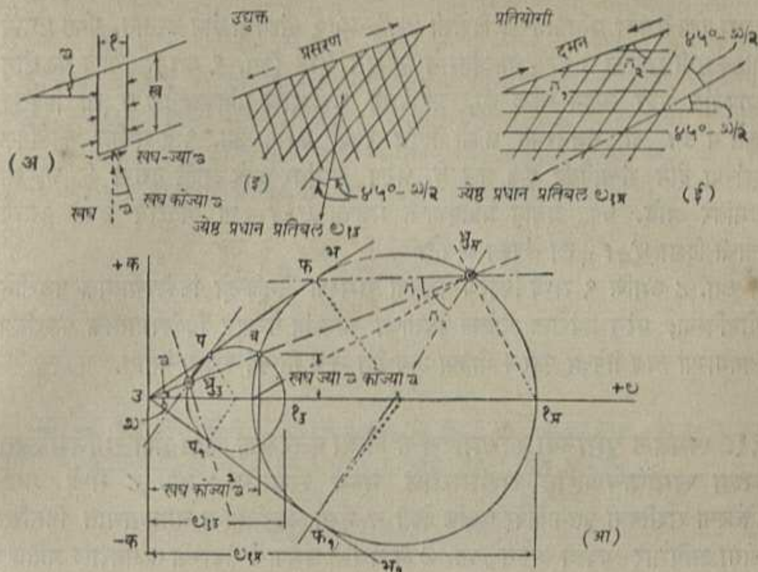
$$\sqrt{\text{℧}_{\text{उ}}\,\text{℧}_{\text{प्र}}} = \text{घ ख} \qquad [६]$$

ज्याचा पृष्ठभाग क्षितिजाशी $\vartheta < \omega$ एवढा कोन करतो, अशा अपारप्राय राशीतील रॅन्‌किन्‌प्रणीत अवस्था आता अभ्यासावयाची आहे. त्यासाठी आ० ९ अ मध्ये दाखविलेल्या समपार्श्व खंडाच्या समतोलास आवश्यक असणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीचा विचार केला पाहिजे. या समपार्श्व खंडाच्या बाजू उभ्या असून तळ मात्र राशीच्या तिरक्या पृष्ठभागाला समांतर आहे. उभ्या छेदावरील प्रतिबलांची परिस्थिती छेदाच्या स्थानावर अवलंबून नसल्यामुळे समपार्श्व खंडाच्या उभ्या बाजूंवरील प्रतिबले सममूल्य आणि विरुद्धदिक् असली पाहिजेत. त्याचप्रमाणे तळावर कारक असणारा दाब घ·ख या वजनाशी सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् असला पाहिजे. तळाच्याच दिशेत म्हणजे त्याच दिशेत किंवा तद्दिक् आणि तळाला लंबरूप असे या दाबाचे विघटन केले आणि तळाची रुंदी $१/\text{कोज्या}\,\vartheta$ आहे, हे लक्षात घेतले, तर आपल्याला लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{℧} = \text{घ ख कोज्या}^{२}\,\vartheta \qquad [७]$$

आणि तद्दिक् किंवा कार्तनिक प्रतिबलासाठी पुढील मूल्य प्राप्त होते.

$$\text{ड} = \text{ख घ ज्या}\,\vartheta\;\text{कोज्या}\,\vartheta \qquad [८]$$



आकृती ९ : तिरकस पृष्ठाचा अपारप्राय व समाकर्षणहीन राशी. (अ) समपार्श्व खंडाच्या बाजूंवरील प्रतिबले; (आ) उच्छेदक्षणाच्या प्रतिबलपरिस्थितीची आलेखात्मक मांडणी; (इ) उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा.

मोह्‌रच्या रेखाकृतीप्रमाणे (आ० ९ आ) उच्छेदकाळाची प्रतिबल-परिस्थिती उभ आणि उभ, या भंजनरेषांनी ठरते व समपार्श्व खंडाच्या ख या खोलीवरच्या तळावर कारक असणारी प्रतिबल-परिस्थिती ब या बिंदूने दाखविली जाते. या बिंदूची भुजा ए आहे. (समी० ७) आणि कोटी ड (समी० ८) आहे. समपार्श्वखंडाच्या तळावरील फलरूप प्रतिबल, त्यावरील लंबाशी ञ कोन करीत असल्यामुळे आ० ९ आ मधील ब हा बिंदू उ पासून निघणाऱ्या व क्षितिजाशी ञ कोन करणाऱ्या सरळरेषेवर स्थित असला पाहिजे. उद्युक्त उच्छेदाच्या क्षणाची प्रतिबल-परिस्थिती दर्शविणारे वर्तुळ ब मधून जाते आणि उभ या भंजनरेषेला प या बिंदूत स्पर्श करते.

ध्रुउ हा ध्रुव शोधण्यासाठी ब ने व्यक्त होणारे प्रतिबल ज्या पृष्ठावर कारक आहे, त्याला म्हणजेच समपार्श्व खंडाच्या तळाला, ब मधून समांतर रेषा काढू. (परि० ७ आणि आ० ५ पाहा.) हे पृष्ठ क्षितिजाशी ञ कोन करते आणि त्याचप्रमाणे उब ही रेषाही क्षितिजाशी ञ कोन करते. म्हणूनच प्रतिबलवर्तुळ आणि उब ही रेषा यांच्या छेदनबिंदूच्या स्थानी ध्रुउ हा ध्रुव स्थित आहे. आ० ९ इ मधील कार्तनिक पृष्ठांचा एक संच ध्रुउ प या रेषेला समांतर आहे; आणि दुसरा ध्रुउ प, ला समांतर आहे (आ० ९ आ). त्यांच्या

दिशा ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबलाच्या दिशेशी $४५^\circ - \omega/२$ अंशांचा कोन करतात. ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबलाची महत्ता $उ - ए_{उ}$ या अंतराने निश्चित होते (आ. ९ आ). याच पद्धतीने आपणांस हेही कळून येईल की, प्रतियोगी उच्छेदाचे प्रतिबलवर्तुळ ब या बिंदूतून जाते व उभ या भंजनरेषेस फ या बिंदूत स्पर्श करते. आ. ९ ई मधील कार्तनिक पृष्ठांच्या दोन संचांपैकी एक संच $ध्रु_{प्र}फ$ला समांतर आहे आणि दुसरा $ध्रु_{प्र}फ_१$ ला समांतर आहे. ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबलाची महत्ता $उ - ए_{प्र}$ या अंतराने ठरते आणि त्याची दिशा $ध्रु_{प्र}ए_{प्र}$ला लंबरूप असते.

आ. ८ आणि ९ मध्ये विवरण केलेल्या समस्या रॅन्किन्ने विश्लेषणात्मक पद्धतीने सोडविल्या; परंतु उपरोक्त आलेख-पद्धतीचा अवलंब केल्यास विश्लेषणात्मक पद्धतीला लागणाऱ्या अवधीपेक्षा फारच थोड्या अवधीत तेच निष्कर्ष काढता येतात.

११. समतल पृष्ठाच्या अधिभारयुक्त किंवा स्तरयुक्त किंवा अंशतः निमज्जित अशा समाकर्षणहीन राशीमधील नम्य समतोल : आ. ८ मध्ये दाखविलेल्या राशीच्या पृष्ठभागावर एकांक क्षेत्री भ मूल्य असलेला व समप्रमाणात वितरित असा अधिभार लावला असता, आ. ८ अ मधील समपार्श्व खंडाच्या तळावरील प्रतिबल पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$\sigma_{लं} = भ + खघ = घ\,(भ/घ + ख) \qquad [१]$$

$\sigma_{लं}$ हे प्रधान प्रतिबल आहे. उद्युक्त अवस्थेत उभ्या पृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबल, समी. ७ (५) चा अवलंब करून आपल्याला पुढीलप्रमाणे प्राप्त होते.

$$\sigma_{उ} = घ\,(भ/घ + ख)\,.\,\frac{१}{ण} \qquad [२]$$

आणि प्रतियोगी अवस्थेमध्ये पुढीलप्रमाणे.

$$\sigma_{प्र} = घ\,(भ/घ + ख)\,ण \qquad [३]$$

येथे
$$ण = स्प^{२}\,(४५^\circ + \omega/२)$$

हे विसर्पण-मूल्य आहे.

तिरकस पृष्ठावरील $\sigma_{उ}$ आणि $\sigma_{प्र}$ ही मृत्तिकादाबाची मूल्ये मोहरच्या रेखाकृतीचा (आ. ९ आ) अवलंब करून त्वरित ठरविता येतात.

आ. १० अ मध्ये समतल पृष्ठभागाच्या समाकर्षणहीन राशीचा छेद दाखविला आहे. या राशीत निरनिराळे थर आहेत. त्यांची जाडी $ड_१, ड_२ \ldots\ldots$इ., घनता $घ_१, घ_२ \ldots\ldots$इ. आणि अंतर्गत घर्षणकोन $\omega_१, \omega_२ \ldots$इ० आहेत. आडव्या छेदावर

कार्तेनिक प्रतिबलांचा अभाव असतो, तेव्हा आडव्या आणि उभ्या छेदांवरील लंबदिक प्रतिबले ही प्रधान प्रतिबले ठरतात; आणि त्यांची मूल्ये समीकरण ७ (५) च्या साहाय्याने ठरविता येतात. राशी उद्युक्त अवस्थेत असेल, तर आडव्या पृष्ठावरील $\sigma_{लं}$ हे लंबदिक् प्रतिबल म्हणजे समीकरण ७ (५) मधील σ_1 हे ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल होते. $ख < ड_1$ या मूल्याच्या कोणत्याही खोलीवर असे प्रधान प्रतिबल $\sigma_{लं_1} = घ_1 ख$ इतके असते व तदनुसारी आडवे प्रधान प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.

$$\sigma_{उ_1} = घ_1\, ख \frac{१}{ण_1} \qquad [४]$$

येथे $ण_1 = स्प^२ (४५^\circ + \phi_1/२)$ आहे.

आकृती १० अ मध्ये हे समीकरण *गम*$_1$ या सरळ रेषेने व्यक्त होते. $ख > ड_1$ या मूल्याच्या कोणत्याही खोलीवर उभे प्रधान प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते;

$$\sigma_{लं_2} = घ_1 ड_1 + घ_2\, (ख - ड_1)$$

आणि त्याच खोलीवरचे आडवे प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.

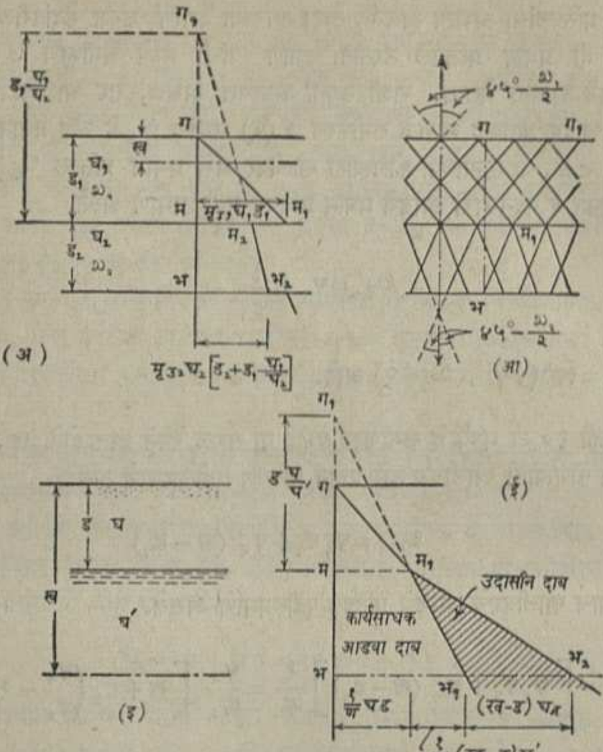
$$\sigma_{उ_2} = \left[घ_1 ड_1 + घ_2\, (ख - ड_1) \right] \frac{१}{ण_2} = \frac{घ_2}{ण_2} \left[ख + ड_1 \left(\frac{घ_1}{घ_2} - १ \right) \right] [५]$$

येथे $ण_2 = स्प^२\, (४५^\circ + \phi_2/२)$ आहे.

या समीकरणानुसार मिळणारे प्रतिबल-वितरण आ. १० अ मध्ये *म*$_2$*म*$_2$ या सरळ रेषेने दाखविले आहे. ही रेषा *भग* ह्या संदर्भरेषेला पृष्ठभागाचे वरील भागात $ड_1 (घ_1/घ_2 - १)$ या उंचीवर $ग_1$ बिंदूत छेदते. $ड_1 (घ_1/घ_2)$ या पदाने $घ_2$ घनतेच्या एका काल्पनिक थराची जाडी दाखविली जाते. या जाडीच्या थराने खालील थराच्या पृष्ठभागावर प्रत्यक्षात असलेल्या थरामुळे निर्माण होणाऱ्या दाबाइतकाच दाब पडतो.

आकृती ८ इ मध्ये घसरपृष्ठे क्षितिजाशी $४५^\circ + \phi/२$ एवढा कोन करतात. आ. १० अ मध्ये दाखविलेल्या थरांतील प्रत्येक थर दुसऱ्यापासून स्वतंत्र असल्यामुळे घसर-पृष्ठांच्या दिशा आ. १० आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असतात.

आकृती १० इ मध्ये एका समाकर्षणहीन राशीचा छेद दाखविला आहे. या राशीचा समतल पृष्ठभाग आणि भूगर्भातील जलपातळी यांमध्ये ड अंतर आहे. वालुकेसारख्या समाकर्षणहीन पदार्थांचा विचार करताना आपल्या आकडेमोडीत कार्यसाधक प्रतिबलेच



आकृती १० : (अ) रॅनकिन्प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत असलेल्या अपारप्राय समाकर्षणहीन व स्तरयुक्त राशीच्या उभ्या छेदावर कारक असणारा आडवा दाब; (आ) तदनुषंगिक कार्तनिक प्रतिमा; (इ) रॅनकिन्प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत असलेल्या अंशतः निमज्जित अपारप्राय व समाकर्षणहीन राशीचा उभा छेद; (ई) या राशीच्या उभ्या छेदावरील आडवा दाब.

अभिप्रेत असतात. साहजिकच या पदार्थांचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने व्यक्त करताना

$$क = ए \tan ω$$

ए हे कार्यसाधक प्रतिबल व ω हा अंतर्गत घर्षणकोन आहे. अनुभवाशी सुसंगत म्हणून आपण असे गृहीत धरू की, वालुकेच्या पोकळीतील पाण्याचा अंतर्गत घर्षणकोनावर प्रभाव पडत नाही. जलपातळीवरील भागात वालुकेची घनता घ आणि उदासीन प्रतिबल शून्य आहे. समी. ८ (२) मध्ये अभिप्रेत असलेल्या व्याख्येनुसार निमज्जित वाळूची घनता घ' आहे. घ'च्या आधारे काढलेली प्रतिबले कार्यसाधक प्रतिबले

असतात. आडव्या छेदांवर कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव असल्यामुळे उभ्या आणि आडव्या छेदांवर कारक असणारी प्रतिबले प्रधान प्रतिबले ठरतात व त्यांतील अन्योन्य संबंध समी. ७ (५) ने पुढीलप्रमाणे दिला जातो.

$$ও_{३} = ও_{१}\frac{१}{ण}$$

येथे $ও_{१}$ हे ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल आणि $ও_{३}$ हे कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल असून $ण = स्प^{२}(४५^{\circ} + ঠ/२)$ आहे. जर हा राशी उद्युक्त अवस्थेत असेल, तर ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल $ও_{१}$ म्हणजे उभे प्रधान प्रतिबल असते.

पृष्ठभाग आणि जलपातळी यांच्या मध्ये असलेल्या भागात उदासीन प्रतिबल शून्य असून उभे प्रधान प्रतिबल *घख* आहे आणि आडवे प्रधान प्रतिबल

$$ও_{उ} = घ\ ख\frac{१}{ण} \qquad [६]$$

आहे.

जलपातळीखालील उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे आहे.

$$उ_{ज} = (ख - ह)\ घ_{ज} \qquad [७]$$

येथे $घ_{ज}$ ही पाण्याची घनता आहे. कार्यसाधक उभे प्रधान प्रतिबल पुढीलप्रमाणे

$$घ\ ह + घ'\ (ख - ह)$$

आणि कार्यसाधक आडवे प्रधान प्रतिबल पुढीलप्रमाणे आहे.

$$ও_{उ} = [घह + घ'\ (ख - ह)]\frac{१}{ण} = \frac{घ'}{ण}[ख + (\frac{घ'}{घ} - १)\ ह] \qquad [८]$$

आ. १० ई मध्ये $गम_{१}भ_{१}$ या संधित रेषेवरील बिंदूच्या भुजांनी $ও_{उ}$ हे आडवे कार्यसाधक प्रतिबल दाखविले आहे. *ख* या कोणत्याही खोलीवरील $उ_{ज}$ हा उदासीन दाब $म_{१}भ_{१}$ आणि $म_{१}भ_{२}$ या दोन रेषांतील तदनुषंगिक आडव्या अंतराइतका असतो. *गभ* या उभ्या छेदावरील एकूण आडव्या दाबाची महत्ता आणि त्याचे वितरण $गभभ_{२}म_{१}$ या दाबाकृतीवरून मिळतात.

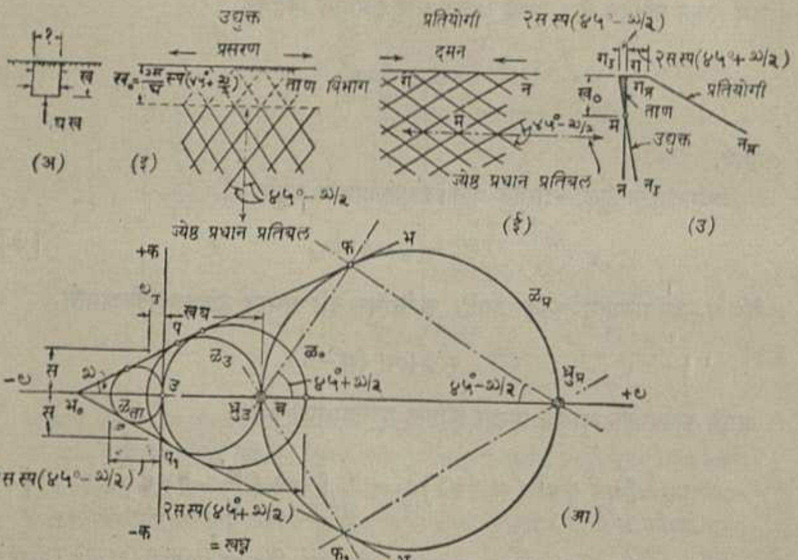
१२. समाकर्षणयुक्त अपारप्राय राशींतील रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त आणि प्रतियोगी अवस्था : समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय अशा समाकर्षणयुक्त मृत्तिका राशींतील समपार्श्व खंडाचा छेद आ. ११ अ मध्ये दाखविला आहे. मृत्तिकेची घनता

घ असून उच्छेद-पर्यवसायी प्रतिबल-परिस्थिती भ०भ या भंजनरेषेद्वारे (आ. ११ आ) मिळते. या रेषेचे समीकरण पुढे दिले आहे.

$$क = स + ए \, स्प \, ळ \qquad ५(१)$$

उपरोक्त वर्णनाच्या समांग पदार्थयुक्त राशीचा प्रत्येक उभा छेद हा सममात्रता पृष्ठ असल्यामुळे अशा छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले शून्य असतात आणि या खंडाच्या दोन्ही उभ्या बाजू व तळ यांवरील लंबदिक् प्रतिबले ही प्रधान प्रतिबले ठरतात. तळावरील लंबदिक् प्रतिबल समपार्श्व खंडाच्या वजनाइतके आहे.

$$ए_{लं} = घख$$



आकृती ११ : समतल पृष्ठाचा अपारप्राय, समाकर्षणयुक्त राशी. (अ) समपार्श्व खंडाच्या बाजूंवरील प्रतिबले; (आ) उच्छेदक्षणाच्या प्रतिबल-परिस्थितीची आलेखात्मक मांडणी; (इ) उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (उ) राशीच्या उभ्या छेदावरील प्रतिबले.

मोहूरच्या रेखाकृतीत (आ. ११ आ) हे प्रतिबल उब या अंतराने दाखविले आहे भ०भ आणि भ०भ१ या भंजनरेषा रेखाकृतीतील उभ्या अक्षाला उगमबिंदूपासून स अंतरावर छेदतात. तदनुषंगिक रॅन्किनप्रणीत उद्युक्त अवस्था ळउ वर्तुळाने

दाखविली आहे. हे वर्तुळ ब या बिंदूच्या डाव्या बाजूस असून भंजनरेषांना स्पर्श करते. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे हे वर्तुळ आडव्या अक्षास उ या उगम बिंदूच्या डाव्या बाजूस छेदत असल्यास ख खोलीवरील आडवे प्रधान प्रतिबल ताणकारी असते. ख = ० असल्यास आपल्याला $ळ_{ता}$ हे वर्तुळ मिळते. त्याचा व्यास मृत्तिकेचे साधे ताणसामर्थ्य देतो. ख चे मूल्य वाढेल त्याप्रमाणे तदनुषंगिक ताणप्रतिबल घटते आणि $ख_{०}$ ह्या विशिष्ट खोलीवर हे ताणप्रतिबल शून्य होते. उगमबिंदूतून जाणाऱ्या आणि भंजनरेषांना स्पर्शणाऱ्या $ळ_{०}$ या वर्तुळाने $ख_{०}$ या खोलीवर विसर्पण निर्माण करणारी प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली जाते. आ. ११ आ मधील भौमितिक संबंध आणि त्रिकोणमिती यांच्या साहाय्याने पुढील समीकरण मांडता येईल.

$$ख_{०} = \frac{२स}{घ}\, स्प\,(४५^{\circ} + ϑ/२) = \frac{२स}{घ}\sqrt{ण} \qquad [१]$$

रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत राशीच्या पृष्ठभागापासून $ख_{०}$ खोलीपर्यंतचा भाग आडव्या दिशेतील ताणाच्या प्रभावाखाली असतो. विचाराधीन आदर्श नम्य पदार्थात ताणयुक्त अवस्था चिरस्थायी असू शकते आणि अशा ताणप्रभावित भागात मृत्तिकेच्या ताणसामर्थ्याचा क्षय न होताही नम्य विसर्पण उद्भवू शकते, असे मानले जाते; परंतु प्रत्यक्षातील मृत्तिकांत ताण-प्रतिबलांचे पर्यवसान लवकरच तडे पडण्यात होते. राशीतील प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणाऱ्या अशा भेगांच्या प्रभावाचा विचार प्रस्तुत सिद्धांताच्या कक्षेत येत नाही. अशा भेगांच्या व्यवहारातील परिणामांचे विवेचन परिच्छेद ५७ व ६२ मध्ये केले जाईल.

जर $ख_{०}$ पेक्षा ख जास्त असेल, तर भंजनवर्तुळ पूर्णतया उगमबिंदूच्या उजव्या बाजूस स्थित असते. ख या विवक्षित खोलीस अनुषंगिक असलेला $ध्रु_{उ}$ हा ध्रुव म्हणजे आडवा अक्ष आणि वर्तुळ यांचा डावीकडील छेदनबिंदू होय. आ. ११ इ मध्ये ख > $ख_{०}$ या परिस्थितीतील कार्तनिक पृष्ठांचे दोन संच दाखविले आहेत. आ. ११ आ मधील $ध्रु_{उ}$फ आणि $ध्रु_{उ}$फ, या रेषांना ते समांतर आहेत. या रेषांनी प्रतिबल-वर्तुळ आणि भंजनरेषा यांचे स्पर्शबिंदू ध्रुवाशी जोडले जातात. तसेच या रेषा क्षितिजलंबाशी $४५^{\circ} - ϑ/२$ एवढा कोन करतात.

मृत्तिकेच्या पार्श्वीय दमनामुळे निर्माण होणाऱ्या रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेत उच्छेदसमीप अवस्था दाखविणारी सर्व प्रतिबल-वर्तुळे पूर्णपणे उ बिंदूच्या उजव्या बाजूस स्थित असतात. कारण या अवस्थेत घ ख हे वजननिर्मित प्रतिबल, कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल असते. परिणामी खोलीच्या प्रत्येक मूल्यावर मृत्तिकेचा कार्तनिक उच्छेद होतो. $ळ_{प्र}$ वर्तुळाने ख या यदृच्छया घेतलेल्या खोलीवरील उच्छेदक्षणाची प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली जाते. भंजनरेषा या वर्तुळास फ आणि फ, बिंदूंत स्पर्शतात आणि कार्तनिक पृष्ठांचे दोन संच (आ. ११ ई) $ध्रु_{प्र}$फ आणि $ध्रु_{प्र}$फ, या रेषांना (आ. ११ आ)

समांतर असतात. या रेषा क्षितिजसमांतर दिशेशी $४५° - ञ/२$ अंशांचा कोन करतात.

तिरक्या छेदावरील मृत्तिकादाब मोहरप्रणीत रेखाकृतीच्या साहाय्याने ठरविणे शक्य असते. उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबले ही प्रधान प्रतिबले असतात. त्यामुळे ती समीकरण ७ (३) च्या साहाय्याने ठरविणे शक्य असते. समीकरण ७ (३) मध्ये $ϖ_३$ या कनिष्ठ प्रधान प्रतिबलाच्या ऐवजी $ϖ_उ$ आणि $ϖ_१$ ऐवजी घख नियुक्त करून आपल्याला उभ्या छेदाच्या ख या खोलीवरील एकांक क्षेत्रावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब मिळतो, तो असा—

$$ϖ_उ = -२स \frac{१}{\sqrt{ण}} + घ\cdot ख \frac{१}{ण} \qquad [२]$$

येथे $ण = स्प^२(४५° + ञ/२)$ या पदाने विसर्पणमूल्य दाखविले जाते. समीकरण ७ (३) मध्ये $ϖ_१$ या ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबलाऐवजी $ϖ_प्र$ आणि $ϖ_३$ या कनिष्ठ प्रधान प्रतिबलाऐवजी घख नियोजून प्रतियोगी मृत्तिकादाब मिळतो, तो असा—

$$ϖ_प्र = २स\sqrt{ण} + घ ख ण \qquad [३]$$

या समीकरणांनुसार उद्युक्त आणि प्रतियोगी दाबांचे दोन भाग पाडता येतील. एक खोलीवर अवलंबून नसणारा आणि दुसरा स्थिरजलदाबाप्रमाणे खोलीनुसार सरळ प्रमाणात वाढणारा. $ϖ_उ$ मधील घख/ण हा दुसरा भाग (समी. २) आणि ज्याची घनता घ आणि कार्तनिक विरोधाचा कोन ञ आहे, अशा समाकर्षणहीन राशीतील उभ्या छेदावरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे मूल्य ही दोन्ही सारखीच आहेत. $ϖ_प्र$ या प्रतियोगी प्रतिबलाचा (समी. ३) घखण हा दुसरा भागही वर वर्णिलेल्या समाकर्षणहीन राशीच्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाइतका आहे. आकृती ११ उ मध्ये उद्युक्त अवस्थेतील $ϖ_उ$ या आडव्या एकांक दाबाची मूल्ये $ग_उ न_उ$ या सरळ रेषेवरील बिंदूंच्या भुजांनी दाखविली जातात; आणि प्रतियोगी अवस्थेतील आडव्या एकांक दाबाची मूल्ये $ग_प्र न_प्र$ या रेषेवरील बिंदूंच्या भुजांनी दाखविली जातात.

राशीच्या पृष्ठभागाच्या एकांक क्षेत्रावर भ मूल्याचा समप्रमाणात वितरित असा अधिभार असेल, तर आपणांस समीकरण ७(३) वरून राशीतील उभ्या छेदाच्या बाबतीत खालील समीकरणे मिळतात.

$$ϖ_उ = -२स \frac{१}{\sqrt{ण}} + घ \left(ख + भ/घ\right) \frac{१}{ण} \qquad [४]$$

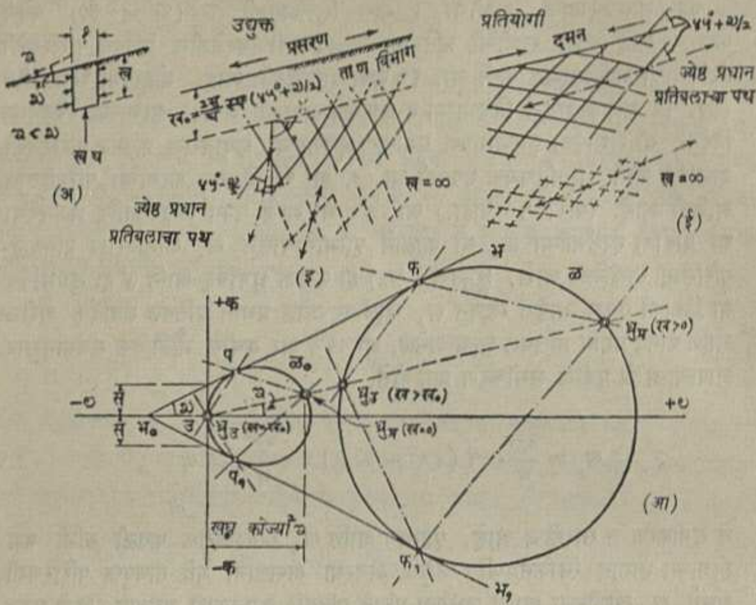
$$ϖ_प्र = २स\sqrt{ण} + घ\left(ख + भ/घ\right) ण \qquad [५]$$

ज्या समाकर्षणयुक्त राशीचा पृष्ठभाग क्षितिजाशी ऋ (ऋ < ऌ) कोन करणारा आहे अशा राशीची प्रतियोगी उच्छेद-समीपावस्थेतील प्रतिबल-परिस्थिती ठरविण्याची आलेखात्मक कृती आ. १२ मध्ये दाखविली आहे. मोह्रच्या रेखाकृतीत (आ. १२ आ) उ मधून निघणाऱ्या व आडव्या अक्षाशी ऋ कोन करणाऱ्या रेषेवरील बिंदूंनी, या राशीच्या पृष्ठभागाला समांतर असणाऱ्या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली जाते. एतद्विषयक उपपत्ती आ. ९ आ चे विवरण करणाऱ्या परिच्छेदात आलेली आहे. (परि. १० पाहा.) आ. १२ आ मध्ये उभा अक्ष आणि भंजनरेषा या दोहोंना स्पर्शणाऱ्या $ळ_०$ या वर्तुळाने पृष्ठभागापासून $ख_०$ खोलीवरील प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली जाते. $ध्रु_{उ}$ ($ख = ख_०$) हा उद्युक्त ध्रुवबिंदू आणि उ हा उगमबिंदू या ठिकाणी एकच आहेत म्हणून $ख_०$ खोलीवर ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल लंबदिक् असेल आणि कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल शून्य असेल. आ. १२ आ मधील भौमितिक संबंधानुसार आपल्याला जे पुढील समीकरण प्राप्त होते,

$$ख_० = \frac{२स}{घ} \cdot स्प\,(४५^\circ + ऌ/२) = \frac{२स}{घ} \sqrt{ण}$$

ते समीकरण १ सारखेच आहे. पृष्ठभाग आणि $ख_०$ खोलीवरील पातळी यांनी बद्ध होणाऱ्या भागात रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त अवस्था असताना येथे ताणयुक्त परिस्थिती असते. $ख_०$ खोलीच्या खाली उभयता प्रधान प्रतिबले दमनकारी असतात. ख चे मूल्य जसे वाढते तसा ध्रुवबिंदु उ पासून ऋ कोन करून निघणाऱ्या रेषेवर सरकतो. त्यामुळे वाढत्या खोलीनुसार घसरपृष्ठांच्या क्षितिजलंबाच्या संदर्भातील दिशेत बदल होतो. $ख = \infty$ झाल्यास क्षितिजाशी ऋ कोन करणारा पृष्ठभाग असलेल्या व अंतर्गत घर्षणकोन ऌ असणाऱ्या समाकर्षणहीन राशीतील घसरपृष्ठांची दिशा आणि त्याच प्रकारच्या, परंतु समाकर्षणयुक्त अशा उपरोक्त राशीतील घसरपृष्ठांची दिशा एकच होतात. कारण अशा अगाध खोलीवर समाकर्षणजन्य विरोध अंतर्गत घर्षणजन्य विरोधाच्या तुलनेत फारच क्षुल्लक ठरतो. या स्थित्यंतराचा परिणाम म्हणून आ. १२ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे घसरपृष्ठे किंचित् वक्र होतात. त्याच आकृतीच्या खालच्या भागात बिंदुयुक्त रेषांनी $ख = \infty$ खोलीवरील घसरपृष्ठांची दिशा दाखविली आहे. रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेतही घसरपृष्ठे वक्र असतात; परंतु ती राशीच्या पृष्ठभागाशी $४५^\circ - ऌ/२$ अंशांचा कोन करतात. खोली वाढेल त्याप्रमाणे या राशीतील घसरपृष्ठांच्या दिशा अशाच बाह्यरूपाच्या परंतु समाकर्षणहीन राशीतील घसरपृष्ठांच्या दिशांसारख्या होऊ लागतात.

समाकर्षणयुक्त राशीचा पृष्ठभाग ऋ > ऌ कोन करीत असेल, तर अशा राशीचे विश्लेषण केले असता आ. १३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे रेखाकृती प्राप्त होते. पृष्ठभागाला समांतर असणाऱ्या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थिती दर्शविणारे सर्व बिंदू उन या रेषेवर स्थित असतात. ही रेषा उ मधून निघून क्ष अक्षाशी ऋ कोन करते. तसेच ती $भ_०$ भ या भंजनरेषेला फ या बिंदूत छेदते. आ. १३ आ मधील भूमिती-संबंधानुसार हे दाखविता येईल की फ बिंदूच्या भुजेने दाखविलेले लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.



आकृती १२ ऊ < ञ कोन करून चढणाऱ्या तिरकस पृष्ठाचा समाकर्षणयुक्त राशी. (अ) समपार्श्व खंडाच्या बाजूंवरील प्रतिबले; (आ) उच्छेदक्षणाच्या प्रतिबल-परिस्थितीची आलेखात्मक मांडणी; (इ) उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा.

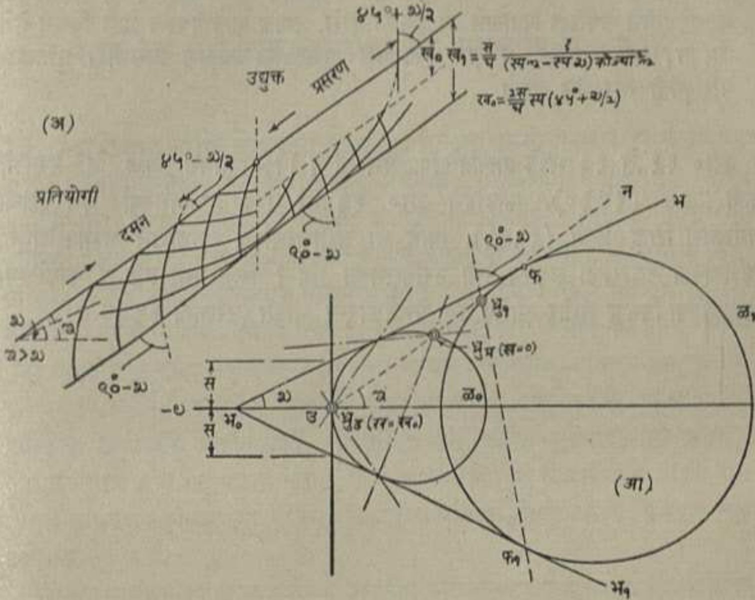
$$ए = \frac{स}{स्प\ ञ - स्प\ ऊ} \qquad [६]$$

आणि तदनुषंगिक खोली पुढीलप्रमाणे असते.

$$ख_1 = \frac{स}{ब}\frac{1}{(स्प\ ञ - स्प\ ऊ)\ कोज्या^2\ ञ} \qquad [७]$$

फ बिंदूतून जाणारे ळ₁ हे भंजन-वर्तुळ उन रेषेला ध्रु₁ या बिंदूत छेदते. आ. ५ आ मध्ये सिद्ध केलेल्या प्रमेयानुसार हा बिंदू ळ₁ वर्तुळाचा ध्रुवबिंदू होय. फ आणि फ₁ हे स्पर्शबिंदू आणि वरील ध्रुवबिंदू जोडणाऱ्या रेषांनी तदनुषंगिक घसर-पृष्ठांची दिशा मिळते. यांपैकी एका पृष्ठाचा कल तीव्र असतो आणि दुसऱ्याची दिशा मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागाला समांतर असते. फ बिंदूच्या उजव्या बाजूच्या प्रांतात उन ही रेषा उभ या भंजनरेषेच्या वर आहे. तेव्हा ख₁ खालीखाली मृत्तिका नम्य प्रवाहाच्या अवस्थेत असली पाहिजे. कारण फ च्या उजव्या बाजूकडील उन रेषेने

दाखविलेली प्रतिबल-परिस्थिती समतोलास आवश्यक असणाऱ्या परिस्थितीशी विसंगत आहे.



आकृती १३ : ब > ञ कोन करून चढणाऱ्या पृष्ठाचा अपारप्राय समाकर्षणयुक्त राशी. (अ) उजव्या बाजूच्या छेदात उद्युक्त अवस्थेतील व डाव्या बाजूच्या छेदात प्रतियोगी अवस्थेतील उच्छेदाची कार्तनिक प्रतिमा दाखविली आहे. ख, खोलीच्या खाली राशीमध्ये समतोल अवस्था नसते. (आ) उच्छेदक्षणाच्या प्रतिबल-परिस्थितीची आलेखात्मक मांडणी.

रॅन्किनप्रणीत उद्युक्त अवस्थेत पृष्ठभाग आणि ख$_{०}$ खोलीवरील पातळी यांमधील भाग ताणभारामुळे उच्छेदिला जातो. आ. १३ आ मधील भौमितिक संबंधाच्या आधारे आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$\text{ख}_{\circ} = \frac{\text{२स}}{\text{घ}}\, \text{स्प}\,(\text{४५}^{\circ} + \text{ञ}/\text{२}) = \frac{\text{२स}}{\text{घ}} \sqrt{\text{ण}}$$

हे समीकरण आणि समी. १ सारखीच आहेत. ख$_{०}$ या खोलीच्या खाली ताण नसतो आणि मृत्तिकेचा कार्तनिक उच्छेद होतो. ळ$_{०}$ वर्तुळाने ख$_{०}$ खोलीवरील प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली जाते. तदनुसारी घसरपृष्ठे आ० १३ अ च्या उजव्या भागात दाखविली आहेत. प्रतियोगी रॅन्किन् अवस्थेत सर्व राशीचे दमन होत

असते. तदनुसारी घसरपृष्ठे आ० १३ अ च्या डाव्या बाजूस दाखविली आहेत. ख, खोलीवर उद्युक्त आणि प्रतियोगी उच्छेदाची घसरपृष्ठे सारखीच असतात. आ० १३ आ मध्ये भंजनरेषेला फ बिंदूत स्पर्शणारे भंजनवर्तुळ एकच आहे. या वस्तुस्थितीने उपरोक्त विधानाचे स्पष्टीकरण होते. त्याच आकृतीवरून हेही दिसून येते की, ख, या खोलीवर या दोन प्रकारच्या उच्छेदांना अनुरूप असणारी प्रतिबल-परिस्थिती सारखीच असते.

आ० ११ ते १३ मध्ये दाखविलेल्या समस्यांची विश्लेषणात्मक उकल जे. रेसलने केली आहे (१९१०). फ्रॉंटार्डने आ० १३ अ मध्ये दाखविलेल्या घसरपृष्ठांची समीकरणे सिद्ध केली (१९२२). त्याने या समीकरणांच्या आधाराने समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांच्या उतारांची लक्ष्मण उंची ठरविण्याचा प्रयत्न केला; परंतु त्यांतून काढलेल्या निष्कर्षांच्या विरुद्ध गंभीर आक्षेप घेता येण्यासारखे आहेत (टेरझागी १९३६ अ).

प्रकरण ४

सार्वत्रिक सिद्धांतांचा व्यावहारिक समस्यांमध्ये उपयोग

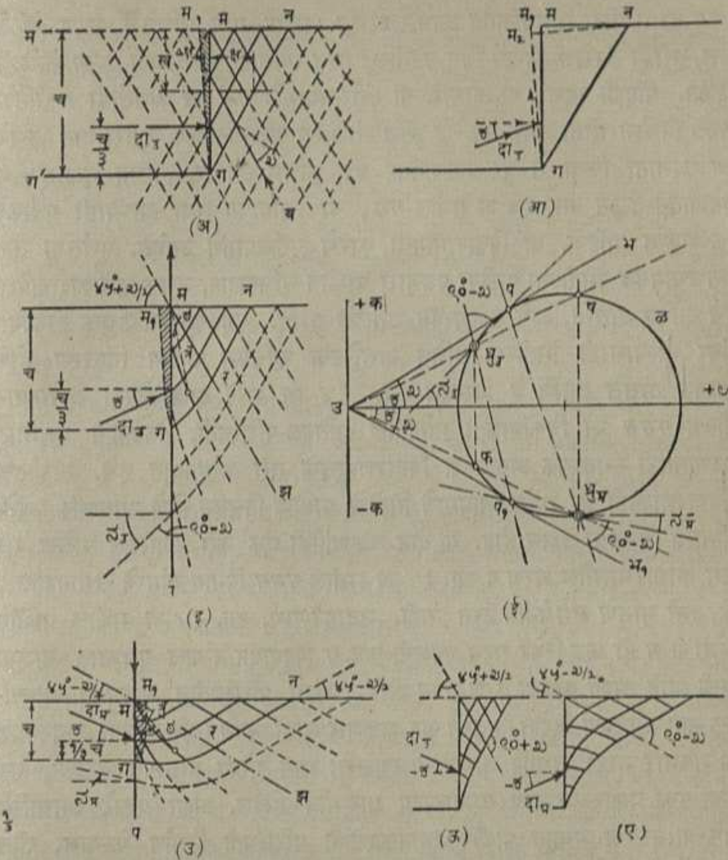
१३. **प्रतिबल आणि विरूपत्व लक्षणे :** एखाद्या समस्येची उकल, स्थितिस्थापकत्व किंवा नम्यत्वविषयक सिद्धांतासारख्या एखाद्या सार्वत्रिक सिद्धांतातील मूलभूत समीकरणांचा प्रत्यय आणून देत असेल, तर एक गोष्ट ओघानेच येते की, विचाराधीन वस्तूच्या अंतरंगातील गणितप्राप्त प्रतिबल आणि विकृती यांविषयीची परिस्थिती व सिद्धांत प्रतिपादनासाठी त्या वस्तूच्या प्राकृतिक गुणधर्मांच्या बाबतीत स्वीकारलेली गृहीते, यांत सुसंवाद असला पाहिजे. तथापि एखाद्या विशिष्ट समस्येचा विचार करताना आणखी एका बाबतीत सुसंवाद आवश्यक ठरतो, तो म्हणजे गणितप्राप्त प्रतिबल-विकृतीविषयक परिस्थिती आणि विचाराधीन वस्तूच्या सीमांवरील ज्या परिस्थितीचे किंवा लक्षणांचे अस्तित्व अगोदरच माहीत होते, ती सीमालक्षणे यांतील सुसंवाद, हा होय. या सीमालक्षणांचे दोन गट पाडता येतात, एक **प्रतिबलविषयक सीमालक्षणे** आणि दुसरा **विरूपत्वविषयक सीमालक्षणे.** संक्षिप्तरीत्या त्यांना **प्रतिबल-लक्षणे** आणि **विरूपत्व-लक्षणे** असे म्हटले जाते.

स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्यांच्या बाबतीत प्रतिबललक्षणांच्या स्वरूपाविषयी शंकेला क्वचितच अवसर असतो. तसेच विरूपत्व-लक्षणांविषयीही शंका नसते. उदाहरणार्थ, ज्याचा तळ कठीण आधारावर स्थित आहे व ज्याच्या पृष्ठाच्या एका लहान भागावर, दर एकांक क्षेत्री *भ* मूल्याचा अधिभार ठेवला आहे, अशा स्थितिस्थापक थरात निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती, आपण विचारात घेऊ. या स्थितिस्थापक थराच्या तळाचे उभ्या दिशेतील विस्थापन प्रत्येक ठिकाणी शून्यच असले पाहिजे व या अटीची पूर्ती होईल, अशाच प्रकारचे उत्तर या उदाहरणात प्राप्त झाले पाहिजे, यात शंका नाही.

मृत्तिकाबलविज्ञानातील नम्यत्वविषयक समस्यांच्या बाबतीतील परिस्थिती उलट आहे. तेथे विरूपत्व-लक्षणांकडे आवश्यक तेवढे लक्ष क्वचितच दिले गेले आहे, असे म्हणावे लागते. घसरणसमीप अवस्थेत मृत्तिकाराशीतील प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणाऱ्या विरूपत्व-लक्षणांच्या प्रभावाचे ज्ञान होण्यासाठी अपारप्राय आणि समाकर्षणहीन राशीतील नम्य समतोल सिद्धांताच्या व्यावहारिक वापराची उदाहरणे आपण विचारात घेऊ. (त्यांचे वर्णन परि. १० मध्ये केले आहे.) जिचे प्रत्यक्षात उदाहरण देता येणार नाही, अशा एका ताण आणि दाब लावण्याच्या काल्पनिक क्रियेनेच केवळ अपारप्राय राशींचे स्थितिस्थापक समतोलातून नम्य समतोलात करावयाचे अवस्थांतर साध्य होते, हे त्या ठिकाणी विशेष भर देऊन सांगितलेले आहेच. स्थापत्यकर्मामुळे मृत्तिकांत निर्माण

होणाऱ्या नम्य समतोल अवस्था अतिशय लहान क्षेत्रांपुरत्याच मर्यादित असतात. अपारप्राय राशीतील नम्य समतोलाचा सिद्धांत, स्थापत्य व्यवहारात लागू करण्याच्या उद्देशाने आपण रँनूकिन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेतील एका अपारप्राय राशीचा *गमन* हा त्रिकोणाकार खंड (आ० १४ अ) विचारात घेऊ. *गन* हे घसरपृष्ठ असून *गम* ही उभी बाजू आहे. मृत्तिकाराशी मूळ अवस्थेतून रँनूकिन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत जात असताना या त्रिकोणाकृती खंडातील मृत्तिकेचे विस्तरण आडव्या दिशेत होत असते. या विस्तरणाचे प्रमाण *मम*$_1$*ग* या रेखांकित क्षेत्राच्या रुंदीने दाखविले आहे (आ. १४ अ). समजा, त्रिकोणाची *ख* खोलीवरील रुंदी *क्ष* आहे, तसेच त्या खोलीवरील मृत्तिकेचे, स्थितिस्थापक ते नम्य, असे अवस्थांतर होण्यासाठी लागणारे, दर एकांक रुंदीचे आडव्या दिशेतील विस्तरण σ आहे. अर्थातच रेखांकित त्रिकोणाची *ख* खोलीवरील $\triangle$*क्ष* ही रुंदी $\sigma\times$*क्ष* इतकी असेल. σचे मूल्य मृत्तिकेच्या प्रकार, तिची घनता व खोली *ख* यांवरच केवळ अवलंबून नसून राशीच्या मूळ प्रतिबल-परिस्थितीवरही अवलंबून असते. म्हणून रेखांकित भागाविषयी सर्वसाधारण विधान केवळ एवढेच करता येईल की, त्याची रुंदी *ग* बिंदूजवळ शून्य असते व तेथून वाढत जाऊन *म* बिंदूजवळ महत्तम होते. σचे मूल्य *ख* वर अवलंबून नाही, असे फार तर सर्वत्र सारखी घनता असलेल्या वालुकेच्या बाबतीत आणि तेही फार स्थूलमानाने म्हणता येईल. या गृहीताचा अवलंब करूनच, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे रेखांकित क्षेत्र त्रिकोणाकृती मानता येते. मूळ अवस्थेतील विवक्षित प्रतिबल-परिस्थिती तीच असेल, तर वालुका-राशीची घनता जितकी अधिक, तितके σचे मूल्य लहान असते. उद्युक्त अवस्था येताच *गन* पृष्ठावरील प्रतिबलांचे *ब* हे फलरूप बल *गन* वरील लंबाशी ϕ कोन करते (आ. १४ अ). *गम* वरील प्रतिबल आडवे असते आणि ते खोलीच्या मूल्यानुसार सरळ प्रमाणात वाढत जाते. या प्रतिबलांचा *दा*$_3$ हा फलरूप दाब, *गम* च्या तळाकडील तृतीयांश बिंदूच्या ठिकाणी कारक होतो. त्रिकोणातील मृत्तिकेचे वजन *व* आहे. *ब*, *व* आणि *दा*$_3$ ही तीन बले म्हणजे समतोल साधणाऱ्या संप्रतिपन्न बलांचा संच होय.

गमन विभागातील प्रतिबलविरूपत्वादिविषयक परिस्थिती तीच ठेवून *गन* च्या खाली व उजव्या बाजूस असलेली भाराक्रांत मृत्तिका काढून त्या ठिकाणी स्थितिस्थापक अवस्थेतील मृत्तिकाराशी आणून ठेवला, तरी *ब* या बलाची दिशा व मूल्य तीच राहतील. *गमन* विभागातील मृत्तिकेचे वजन तेच आहे. तेव्हा *गम* च्या डाव्या बाजूकडील मृत्तिका काढून त्या ठिकाणी *गमन* विभागातील प्रतिबल-विरूपत्वादि-विषयक परिस्थिती तीच राहील अशा प्रकारे एखादा बाह्य आधार आणून उभा केला, तर उपरोक्त एकंदर रचनेचा समतोल टिकवून धरण्यासाठी *दा*$_3$ याच मूल्याचे प्रक्रितियात्मक बल या आधाराकडून प्राप्त झाले पाहिजे. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे, तर हे सर्व स्थित्यंतर *गमन* विभागातील प्रतिबल-विरूपत्वविषयक परिस्थिती बदलू न देता केले असल्यामुळे, अशा स्थित्यंतरानंतरची *ब*, *व* आणि *दा*$_3$ ही बले म्हणजे प्रथम वर्णिलेली बलेच होत.



आकृती १४ : आदर्श वालुकेतील नम्य समतोलाच्या स्थानिक अवस्थांविषयीच्या रेखाकृती. विशिष्ट अवस्था निर्माण करण्यासाठी मुळात उभी असलेली पातळी कमीत कमी किती प्रमाणात विचलित किंवा विरूपित झाली पाहिजे, हे (अ), (इ) आणि (उ) मध्ये रेखांकित क्षेत्राने दाखविले आहे. तदनुषंगिक नम्य समतोलाचा प्रकार त्यांतील कार्तनिक प्रतिमांनी दाखविला आहे. (अ) उभ्या घर्षणरहित पृष्ठामागील उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (आ) घर्षणयुक्त पृष्ठ कलले असता धनचिन्हयुक्त भिंतघर्षण निर्मिले जाते, हे दाखविणारी आकृती; (इ) भिंतघर्षण धन असताना मिळणारी घर्षणयुक्त पृष्ठामागील उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) घर्षणयुक्त पृष्ठ आणि घसरपृष्ठे यांच्या छेदनबिंदूजवळ होणारा कोन ठरविण्याची आलेखात्मक पद्धत; (उ) भिंतघर्षण धन असतांना मिळणारी घर्षणयुक्त पृष्ठामागील प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ऊ) भिंतघर्षण ऋण असताना मिळणारी घर्षणयुक्त पृष्ठामागील उद्युक्त अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ए) तशीच प्रतियोगी अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा.

गम हा एखादा मानवनिर्मित आधार असून त्याच्या मागे मृत्तिकेचे भरण केलेले असेल, तरीही उपरोक्त निष्कर्ष लागू पडतील; परंतु त्यासाठी पुढील अटी पुऱ्या झालेल्या पाहिजेत. पहिली म्हणजे या आधाराच्या अस्तित्वामुळे *गम* वर कोणतीही कार्तनिक-प्रतिबले निर्माण होता कामा नये. हे झाले सीमास्थ प्रतिबल-लक्षण. दुसरी अट म्हणजे भरण करताना किंवा ते पुरे झाल्यानंतर हा कृत्रिम आधार, त्याच्या मूळ *गम* या स्थानापासून ढळून आ. १४ अ मधील *गम*, या स्थानाप्रत किंवा त्याच्याही पलीकडे सरकू शकला पाहिजे. या विधानामागची कारणे पुढीलप्रमाणे आहेत. पूर्णतया ताठ आणि स्थानबद्ध भिंतीच्या पाठीवर पडणारा पार्श्वीय मृत्तिकादाब, उद्युक्त मृत्तिकादाबापेक्षा बराच अधिक असतो, असे दृष्टोत्पत्तीस आलेले आहे. रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत रूपांतर होण्यासाठी भिंतीच्या सन्निध असलेल्या मृत्तिकेत पार्श्वीय विस्तरण होणे आवश्यक असते आणि हे विस्तरण आ. १४ अ मध्ये दाखविलेल्या अपारप्राय राशीच्या *गमन* या त्रिकोणाकृती भागातील प्रतिबल-परिस्थिती, तेवढ्याच प्रमाणात पालटण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या विस्तरणाइतके तरी असावयास हवे. अर्थातच या विस्तरणासाठी वर सांगितल्याप्रमाणे भिंतीचे पार्श्वीय विचलन होणे आवश्यक ठरते. हे सीमास्थ विरूपता-लक्षण होय. या दोन लक्षणांपैकी एक जरी उपस्थित नसेल तर कृत्रिम आधारामागील भरण व आ. १४ अ मधील *गमन* विभाग यांमध्ये समानशीलत्व आहे, असे मानणे समर्थनीय ठरत नाही. उदाहरणार्थ, आ. १४ अ मधील पार्श्वीय आधाराची *म* ही कड स्थिर राहून खालची कड *ग* बिंदूपासून बऱ्याच प्रमाणात बाजूला सरकली आहे अशी कल्पना करणे शक्य आहे. अशा परिस्थितीत भरणाचा माथ्या-कडील भाग आडव्या दिशेत विस्तरण पावू शकणार नाही आणि रॅन्‌किन्‌प्रणीत अवस्थेप्रत जाऊ शकणार नाही. तथापि आधाराचा खालचा भाग पुरेशा प्रमाणात ढळला, तर दुसऱ्या एका प्रकारच्या नम्य समतोलाचा प्रादुर्भाव होईल. अशा प्रकारे आधारित मृत्तिकेच्या वरच्या भागात पार्श्वीय स्थानबद्धतेची परिस्थिती निर्माण केल्यास, तीत छत्रक्रियेचा प्रादुर्भाव होऊन आधाराच्या वरच्या भागावरील पार्श्वीय दाब वाढतो व खालच्या भागावरील दाब कमी होतो. प्रकरण ५ मध्ये या विषयाचे विवरण केले जाईल. अशा ठिकाणी आधाराच्या तळातून जाणारे घसरपृष्ठ प्रकर्षाने वक्र झालेले असते व ते मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागास काटकोनात छेदून जाते. म्हणून पार्श्वीय आधाराची कड आ० १४ अ मधील *म*, ने निर्दिष्ट केलेल्या स्थानाप्रत सरकणे शक्य नसेल, तर पूर्वोक्त उपपत्तीच्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असणाऱ्या इतर अटी – उदा., *गम* (आ. १४ अ) वरील कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव इत्यादी – पुऱ्या झाल्या, तरी घसरणाऱ्या खंडाचा आकार किंवा त्यावर कारक असणाऱ्या बलांच्या दिशा इ. चे आ. १४ अ मधील तत्सम गोष्टीशी कोणतेच साम्य राहत नाही.

शेवटी सांगायचे म्हणजे *गम* आणि *गम*, (आ. १४ अ) या दोन स्थानांच्या मध्ये पडणाऱ्या स्थानापर्यंत भिंत सरकू शकली, तर मृत्तिकेच्या कोणत्याच भागात उच्छेदास

आवश्यक असणाऱ्या अटी पुऱ्या होणार नाहीत आणि *ग म* वरील एकांक दाबाचे मूल्य स्तब्ध मृत्तिकादाब

$$\text{ए}_{\text{आ}^{\circ}} = \text{मृ}_{\circ}\ \text{घ}\ \text{ख} \qquad १०(१)$$

आणि उद्युक्त मृत्तिकादाब

$$\text{ए}_{\text{उ}} = \text{घ}\ \text{ख}\ \text{स्प}^{२}\ (४५^{\circ} - \text{ञ}/२) = \text{ख}\ \text{घ}\ \frac{१}{\text{ण}} \qquad १०(२)$$

या दोहोंच्या मध्ये कुठेतरी असेल; तसेच कोणत्याही भागात नम्य समतोल अवस्था असणार नाही.

सीमा-विरूपत्व-लक्षणांच्या व्यावहारिक महत्त्वावर याहून अधिक भर देण्याची आवश्यकता भासू नये. या लक्षणांच्या व्यावहारिक महत्त्वाची जाणीव असती, तर खोदाईमध्ये वापरली जाणारी आधारकाष्ठे किंवा बोगद्यांच्या आधारनलिका यांवरील मृत्तिकादाब ठरविण्यासाठी, आधारभिंतींवरील मृत्तिकादाबाचे रॅन्किन् किंवा कूलोमप्रणीत सिद्धांत लागू करण्याचा मोह, स्थापत्य-विशारदांना झाला नसता. खरे पाहता, आधार-काष्ठांवरील मृत्तिकादाबाचे वितरण निश्चित करणारी परिस्थिती आणि रॅन्किन्प्रणीत किंवा तत्सम सिद्धांतांच्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असणारी मूलभूत परिस्थिती, यांत कोणतेच साम्य नाही. म्हणून या अथवा अशा अन्य सिद्धांतांचा गर्हणीय स्वैर वापर होऊ नये, या उद्देशाने पुढील प्रकरणांतून करावयाच्या प्रत्येक सैद्धांतिक विवेचनाच्या प्रारंभीच, त्याला आधारभूत असणारी गृहीते आणि आवश्यक असणारी लक्षणे, यांचा संपूर्णपणे निर्देश केला जाईल. व्यावहारिक समस्यांच्या बाबतीत उपयोग केला असता, पुरेशी अचूक उत्तरे मिळण्याच्या दृष्टीने, या ग्रंथातील पुढील प्रकरणांतून दिलेल्या प्रत्येक सिद्धांतावर विसंबता येईल; परंतु त्यासाठी क्षेत्रातील परिस्थिती आणि निर्दिष्ट केलेली गृहीते व लक्षणे यांच्यात निदान स्थूल मानाने तरी सुसंवाद असला पाहिजे. अन्यथा, एखादा सिद्धांत त्याच्या सयुक्तिकतेच्या कक्षेत कितीही भरवशाचा ठरलेला असो, तो अशा उदाहरणांत लागू करता येणार नाही.

१४. आधारभिंतीवरील मृत्तिकादाबाचा रॅन्किन्प्रणीत सिद्धांत : वरील परिच्छेदात विशद केलेल्या तत्त्वाचे निदर्शक असे उत्तम उदाहरण म्हणजे आधारभिंतीवरील मृत्तिकादाबाचा रॅन्किन्प्रणीत सिद्धांत हे होय. आधारभिंत कलल्यास तिच्यामागील भरणात आडव्या दिशेने विस्तरण होते व त्यामुळे आधारभिंतीच्या पाठीवर पडणारा मृत्तिकादाब हळूहळू घटत जाऊन एका लघुतम मूल्याप्रत पोचतो. या मूल्यासच **उद्युक्त मृत्तिकादाब** असे म्हणतात. याऐवजी भिंत आडव्या दिशेने भरणाकडे रेटल्यास मृत्तिका आडव्या दिशेत दाबली जाऊन तिचा विरोध वाढत जातो व एका

महत्तम मर्यादेला पोचतो. या मर्यादेच्या मूल्यास **प्रतियोगी मृत्तिकादाब** म्हणतात. भिंतीच्या हालचालीमुळे यांपैकी कोणत्याही एका मर्यादेप्रत मृत्तिका पोचली, तर तिचा नम्य विसर्पणाने उच्छेद होतो. रॅन्किन्‌च्या सिद्धांताची वैशिष्ट्ये आणि त्यातील उणिवा दाखविण्यासाठी एखाद्या समाकर्षणहीन भरणाचे उदाहरण आपण विचारार्थ घेऊ. या भरणाचा पृष्ठभाग समतल असून बाहेरून दिलेल्या कृत्रिम आधाराची उंची च आहे. आधाराच्या पाठीवरील मृत्तिकादाबाचे गणित आपणास आता मांडावयाचे आहे. भरणातील मृत्तिकेची घनता घ आहे आणि तिचा कार्तनिक विरोध खालील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = \text{ए} \; स्प \; \phi \qquad ५(२)$$

रॅनकिन्‌च्या सिद्धांतानुसार, *गम* वरील पार्श्वीय दाब (आ. १४ अ) आणि समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय राशीतून घेतलेल्या उभ्या छेदावरील रॅनकिन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेतील दाब या दोहोंचे मूल्य सारखेच असते. अशा छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले नेहमीच शून्य मूल्याची असतात. तेव्हा उभ्या छेदावर केवळ लंबदिक् प्रतिबलेच कारक असतील.

उद्युक्त उच्छेदाच्या वेळी उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबल खालीलप्रमाणे असते.

$$\text{ए}_{उ} = घ \; ख \; स्प^{२}(४५^\circ - \phi/२) = घ \; ख \; \frac{१}{ण} \qquad १०(२)$$

येथे $ण = स्प^{२}(४५^\circ + \phi/२)$ हे विसर्पणमूल्य आहे. भिंतीची उंची च आहे. तेव्हा एकांक लांबीच्या भिंतीच्या पाठीवरील एकूण दाब पुढीलप्रमाणे मिळेल.

$$दा_{उ} = \int_{०}^{च} \text{ए}_{उ} \, dख = \frac{१}{२} \, घ \, च^{२} \, \frac{१}{ण} \qquad [१]$$

जर उच्छेद पार्श्वीय रेटा लावून झालेला (प्रतियोगी उच्छेद) असेल, तर आपल्याला पुढील समीकरणे मिळतात.

$$\text{ए}_{प्र} = घ . ख . ण \qquad १०(४)$$

आणि

$$दा_{प्र} = \int_{०}^{च} \text{ए}_{प्र} \, dख = \frac{१}{२} \, घ \, च^{२} \, ण \qquad [२]$$

दोन्ही वेळेस *गम* या पृष्ठावरील दाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाच्या वितरणाप्रमाणे असते व तो दाब छेदाच्या तळापासून च / ३ उंचीवर कारक होतो.

भरणातील मृत्तिका समाकर्षणयुक्त असेल, तर तिचा कार्तेनिक विरोध पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = स + ϑ \ स्प \ ϕ$$

उद्युक्त उच्छेदाच्या क्षणी तिच्या उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबल आणि एकूण दाब पुढीलप्रमाणे असतात.

$$ϑ_{उ} = -२ स \frac{१}{\sqrt{ण}} + घ ख \frac{१}{ण} \qquad १२(२)$$

आणि

$$दा_{उ} = \int_{०}^{च} ϑ_{उ} d ख = -२ स च \frac{१}{\sqrt{ण}} + \frac{१}{२} घ च^{२} \frac{१}{ण} \qquad [३]$$

गम या उभ्या पृष्ठावरील उद्युक्त दाबाचे वितरण आ० ११ उ मधील $ग_{उ} न_{उ}$ या दाबरेषेने दाखविले जाते व दाबाचा कारक-बिंदू छेदाच्या तळापासून $\frac{१}{३}$ च पेक्षा कमी अंतरावर असतो. जर

$$च = च_{ल} = \frac{४स}{घ} \sqrt{ण}$$

असेल तर *गम* वरील एकूण पार्श्वीय दाब शून्य होतो. परिच्छेद १२ मध्ये विशद केल्याप्रमाणे पुढील मूल्याच्या खोलीपर्यंत मृत्तिकेत ताण-प्रतिबलयुक्त अवस्था असते.

$$ख_{०} = \frac{२स}{घ} \sqrt{ण} \qquad १२(१)$$

हे समीकरण आणि त्याच्या आधीचे समीकरण यांचा संयोग करून आपणास पुढील समीकरण मिळते.

$$च_{ल} = \frac{४स}{घ} \sqrt{ण} = २ख_{०} \qquad [४]$$

मृत्तिकेच्या उच्छेद पार्श्वीय दमनामुळे (प्रतियोगी उच्छेद) झालेला असेल, तर उभ्या छेदाच्या ख खोलीवरील प्रतिबल आणि एकूण दाब पुढीलप्रमाणे असतात.

$$ϑ_{प्र} = २ स \sqrt{ण} + घ ख ण \qquad १२(३)$$

आणि

$$दा_{प्र} = \int_0^{च} ए_{प्र}\, d\, ख = २\, स\, च\, \sqrt{ण} + \frac{१}{२}\, घ\, च^{२}\, ण$$

प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे *गम* या उभ्या छेदावरील वितरण आ० ११ उ मधील $ग_{प्र}\, न_{प्र}$ या दाबरेषेने दाखविले जाते व दाबाचा कारक-बिंदू च या उंचीच्या मधल्या तृतीयांशात पडतो; कारण आ० ११ उ मधील $गग_{प्र}न_{प्र}न$ या दाबक्षेत्राचा आकार समलंब चौकोनाकृती आहे.

मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागावर *भ* मूल्याचा समप्रमाण वितरित असा अधिभार ठेवलेला असेल, तर *ख* खोलीवर पुढीलप्रमाणे आडवा दाब असतो.

$$ए_{प्र} = २ स \sqrt{ण} + घ \cdot \left(ख + \frac{भ}{घ} \right) ण \qquad १२(५)$$

आणि एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाब पुढीलप्रमाणे असतो.

$$दा_{प्र} = २\, स\, च \sqrt{ण} + \frac{१}{२}\, घ\, च^{२} \left(\frac{२भ}{चघ} + १ \right) ण \qquad [६]$$

तिरक्या पाठीच्या भिंतीमागे उतरत्या पृष्ठभागाचा मृत्तिकाराशी असल्यास त्या तिरक्या पाठीवर येणारा दाब व्यक्तविणारी समीकरणेही रॅन्किन्‌ने शोधली आहेत. ही समीकरणे काहीशी क्लिष्ट असल्यामुळे, अशा परिस्थितीतील रॅन्किन्‌प्रणीत दाबाचे मूल्य व त्याची दिशा ठरविण्यासाठी मोहूर-रेखाकृतीवर आधारित असलेल्या आलेख-पद्धतीचा उपयोग करणे खचित श्रेयस्कर असते. ही पद्धत प्रकरण ३ मध्ये वर्णिली आहे.

१५. भिंतघर्षणाचा घसरपृष्ठाच्या आकारावर पडणारा प्रभाव : आधार-भिंतीच्या बाबतीत १४ (१) व १४ (२) या समीकरणांच्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असलेले एक सीमा-लक्षण प्रत्यक्षात कधीच आढळत नाही; कारण जिचे पृष्ठ संपूर्णपणे घर्षणविहीन आहे अशी भिंतच प्रत्यक्षात असत नाही. भिंतीच्या पृष्ठाच्या खडबडीत-पणाचा उद्युक्त मृत्तिकादाबावर होणारा परिणाम आ० १४ आ वरून दिसून येतो. तीत एका समाकर्षणहीन राशीचा छेद दाखविला आहे. तेथे *गम* हे आधारपृष्ठ आहे. भिंतीच्या पार्श्वीय विचलनामुळे *गमन* या खंडाचा माथ्याचा पृष्ठभाग खचेल. $नम_{२}$ रेषेच्या उताराने हे अधोगमन दाखविले आहे (आ० १४ आ). *गम* या घर्षणयुक्त पृष्ठभागावरून मृत्तिकेला खाली सरकावयाचे आहे; त्यामुळे मृत्तिकादाबाची दिशा, तिच्या मूळ आडव्या, म्हणजेच पृष्ठाशी लंबरूप, दिशेऐवजी आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे *गम* वरील लंबाशी ॡ कोन करते. ॡ म्हणजे **भिंतघर्षणाचा कोन** होय. उद्युक्त दाबाच्या

बाबतीत δ जेव्हा लंबापासून *अपसव्य* दिशेने मोजला जातो, तेव्हा त्याचे मूल्य आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे धन समजले जाते.

हा संकेत आणि मोह्रच्या रेखाकृतीतील कार्तनिक प्रतिबलांच्या चिन्हांविषयीचा प्रघात यांचा काही संबंध नाही. मोह्रच्या आकृतीत जेव्हा फलरूप प्रतिबल त्याच्या लंबदिक् घटकापासून अपसव्य दिशेने विचलन पावते तेव्हा कार्तनिक प्रतिबल धन असते. आधारभिंतीवरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाच्या बाबतीत ऊर्ध्व दिशेने कारक असणारे घर्षण धन समजले जाते. आ. १४ आ मध्ये दाखविलेले धन भिंतघर्षण म्हणजे मोह्रच्या रेखाकृतीतील ऋण कार्तनिक प्रतिबल आहे; तथापि मृत्तिका भिंतीच्या डाव्या बाजूस आहे, असे कल्पिले, तर तेच घर्षण मोह्रच्या आकृतीतील धन कार्तनिक प्रतिबल होते. भिंत-घर्षणाचा कोन ऋणही असू शकतो. भिंतीच्या माथ्यावर मोठा अधिभार ठेवल्यामुळे किंवा अन्य कारणांमुळे, ती राशीच्या खचण्यापेक्षा अधिक प्रमाणात खचल्यास भिंतघर्षण ऋण होते. रॅन्किन्प्रणीत समीकरण १४ (१) $\delta = 0$ या गृहीतावर आधारित असल्यामुळे त्यास भिंतघर्षणाच्या अस्तित्वाने बाध येतो; मग ते धन किंवा ऋण, कसेही असो.

δचे मूल्य शून्य नसल्यास घसरपृष्ठाचा खरा आकार ठरविणे फार कठीण असते. मृत्तिका समाकर्षणहीन आहे, असे गृहीत धरूनच केवळ ही समस्या काटेकोरपणे सोडविलेली आहे. तथापि तदनुषंगिक समीकरणे व्यावहारिक उपयोगाच्या दृष्टीने फारच क्लिष्ट आहेत. रैसनेर आणि इतर संशोधकांच्या या विषयाच्या संशोधनातून काढलेल्या निष्कर्षांचे सार पुढील परिच्छेदांतून ग्रंथित केले आहे. विषयाची मांडणी प्राथमिक स्वरूपात केलेली असल्यामुळे काही गोष्टी काटेकोर उपोद्बलक विधानाविना मान्य केल्या पाहिजेत.

आ० १४ इ म्हणजे आदर्श वालुकेच्या अपारप्राय राशीचा उभा छेद आहे. या राशीला आडव्या दिशेने समप्रमाणात ओढून विरूपत्व आणले असता, ती रॅन्किन्-प्रणीत उद्युक्त अवस्थेप्रत जाऊन नंतर तिचा उच्छेद होईल. हा उच्छेद *मझ* या रेषेच्या उजव्या बाजूस दाखविलेल्या दोन संचांतील घसरपृष्ठांवरून होईल. या राशीमध्ये *मप* हा घर्षणयुक्त पृष्ठाचा पडदा शिरविला आणि नंतर ओढून घेतला, तर वालुकेतील प्रतिबल-परिस्थितीत बदल होतो; परंतु हा बदल पडदा व पडद्याच्या *म* या माथ्याच्या कडेतून निघणारे *मझ* हे रॅन्किन् घसरपृष्ठ यांनी मर्यादित केलेल्या *झमप* या त्रिकोणाकृती क्षेत्रापुरताच केवळ असतो.

नम्य समतोलाच्या अवस्थेच्या ह्या महत्त्वपूर्ण अंगाच्या प्राकृतिक कारणांची कल्पना येण्यासाठी वालुकाराशीची नम्य समतोलाची अवस्था तशीच ठेवून भिंतघर्षण कोन ० पासून δ या अंतिम मूल्यापर्यंत हळूहळू वाढविला आहे, असे आपण समजू. *म* मधून निघणाऱ्या आणि उपरोक्त पडदा आणि *मझ* यांमध्ये स्थित असलेल्या प्रत्येक सरळ

छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले या प्रक्रियेमध्ये वाढत राहतील; परंतु *मझ* या घसरपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबलात मात्र काही बदल होणार नाही. कारण *मझ* पृष्ठाच्या वरील भागात स्थित असलेली वालुका अगदी प्रारंभापासून त्या पृष्ठावरून खालच्या दिशेने घसरण्याच्या बेतात होती.

पडद्याच्या कोणत्याही भागावरील पार्श्वीय दाबाचा $दा_उ$ हा फलरूप दाब आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे क्षितिजदिशेशी δ कोन करतो.

घसरपृष्ठे पडद्याच्या पृष्ठाशी कोणता कोन करतील हे मोहूरप्रणीत रेखाकृतीच्या साहाय्याने (आ. १४ ई) चटकन दाखविता येते. या आकृतीतील *ळ* हे वर्तुळ पडद्याच्या उजव्या अंगालगतच्या विवक्षित बिंदूच्या ठिकाणी असलेली प्रतिबल-परिस्थिती दाखविते. आ० १४ इ मधील *गम* पृष्ठावरील फलरूप दाब *गम* वरील लंबाशी सव्य दिशेने δ कोन करतो. त्याअर्थी मोहूरच्या रेखाकृतीतील (आ० १४ ई) तदनुषंगिक कार्तनिक प्रतिबल ऋण चिन्हाने दाखविले पाहिजे (परि० ७ पाहा). पडद्याच्या या अंगाची प्रतिबल-परिस्थिती दर्शविणारा फ हा बिंदू उ मधून जाणाऱ्या व क्षितिजाशी δ कोन करून उजव्या बाजूने खाली उतरणाऱ्या सरळ रेषेवर स्थित असतो. ही रेषा वर्तुळाला दोन ठिकाणी छेदते. पडद्यावर उद्युक्त भार कारक असल्यामुळे फ हा डाव्या बाजूचा छेदनबिंदू ठरतो. उद्युक्त दाबाला अनुषंगिक $ध्रु_उ$ हा ध्रुव $फध्रु_उ$ या रेषेवर (आ. १४ ई) स्थित असेल. ही रेषा *मप* ला (आ. १४ इ) समांतर आहे. *उभ* आणि $उभ_१$ ह्या भंजनरेषांचे *ळ* वर्तुळाशी होणारे *प* आणि $प_१$ हे स्पर्शबिंदू $ध्रु_उ$ या ध्रुवास जोडले असता $ध्रु_उ प$ आणि $ध्रु_उ प_१$ या दोन रेषा मिळतात. या दोन रेषांनी पडद्याच्या उजव्या पृष्ठाच्या अगदी लगत असलेल्या घसरपृष्ठांच्या दिशा ठरतात.

गमझ या त्रिकोणी भागातील घसरपृष्ठांच्या दोन्ही संचांतील प्रत्येक पृष्ठ वक्रच असले पाहिजे, असे रैसनेरने दाखवून दिले आहे (१९२४). घर्षणयुक्त पडद्यावरील वालुकादाबाच्या संशोधनाच्या बाबतीत कारमान (१९२६), याकी (१९३८) आणि ओहूदे (१९३८) यांची नावे कालानुक्रमाने घेता येतात. त्यातून प्राप्त झालेली मृत्तिका-दाबविषयक समीकरणे उपयोगाच्या दृष्टीने फार क्लिष्ट आहेत; परंतु पुढील सार्वत्रिक निष्कर्ष मात्र व्यावहारिक दृष्ट्या महत्त्वाचे आहेत. ते निष्कर्ष असे : घर्षणयुक्त पडद्याच्या सान्निध्यातील अपारप्राय वालुकाराशीच्या प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य समतोल अस्तित्वात असेल, तर *पमझ* या विभागातील घसरपृष्ठांच्या संचांतील प्रत्येकाचा आकार $त्र = त्र_० फ(\theta)$ या एका समीकरणाने व्यक्तविता येतो. येथे *त्र* हे पृष्ठावरील बिंदूचे *म* पासूनचे अंतर (आ. १४ इ) आहे आणि θ हा तदनुषंगिक केंद्रीय कोन आहे. $त्र_०$ म्हणजे $\theta = ०$ असतानाचे *त्र* चे मूल्य आहे. घसरपृष्ठाच्या या व्यवच्छेदक लक्षणामुळे मृत्तिकादाब खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढतो. म्हणून पडद्याच्या एकांक क्षेत्रावरील मृत्तिकादाबाचा लंबदिशेतील घटक $द_{उल}$ पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$द_{उल} = घ\ ख\ मृ_{उ} \qquad [१]$$

येथे घ ही मृत्तिकेची घनता असून ख ही पृष्ठभागापासूनची खोली व $मृ_{उ}$ हा एक मितीहीन गुणांक आहे. त्याला **उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा गुणांक** म्हणतात. त्याचे मूल्य ॐ व ॅ या कोनांवरच केवळ अवलंबून असते. ॅ हा भिंत-घर्षण कोन शून्य असेल तर वरील समीकरणाने मिळणारे मृत्तिकादाबाचे मूल्य आणि समीकरण १० (२) ने मिळणारे रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त दाबाचे मूल्य, हीं एकच असतात. तसेच

$$मृ_{उ} = \frac{१}{ण} = स्प^{२}\left(४५^{\circ} - \frac{ॐ}{२}\right) \qquad [२]$$

असतो. येथे ण हे विसर्पणमूल्य $स्प^{२}(४५^{\circ} + ॐ/२)$ इतके आहे.

घसरपृष्ठांचा आकार आ. १४ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असतो. ॅ चे मूल्य जसे कमी होईल, त्यानुसार पृष्ठांची वक्रता कमी होते. ॅ = ० होताच आ. १४ अ मधील पृष्ठांप्रमाणे ती पूर्णत्वाने सरळ होतात.

रॅन्‌किन्‌प्रणीत मृत्तिकादाबाचा सिद्धांत (परि० १३ पाहा) ज्या उपपत्तीने सिद्ध केला तिची पुनरुक्ती करून आ. १४ इ च्या आधारे पुढील निष्कर्ष काढणे समर्थनीय ठरते. आ. १४ इ मधील *गमन* विभागातील वालुकेच्या विरूपत्वाइतकेच विरूपत्व भिंती-लगतच्या त्रिकोणाकार भागात होईल, अशा तऱ्हेने एखाद्या खरखरीत पृष्ठाच्या भिंतीचे विचलन झाले, तर अशा ठिकाणी उच्छेदाची घसरपृष्ठे *गन* प्रमाणे असतात (आ. १४ इ). तसेच भिंतीच्या पृष्ठावरील मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिरजलदाबासारखे असते. एखाद्या अपारप्राय राशीचे त्याच्या मूळ अवस्थेतून उद्युक्त नम्य समतोल अवस्थेत रूपांतर व्हावयाचे असेल, तर अशा राशीच्या प्रत्येक बिंदूच्या स्थानी आडव्या दिशेतील प्रसरणाचे प्रमाण एका लघुतम मर्यादेपेक्षा अधिक असावे लागते. हे प्रमाण, म्हणजेच दर एकांक लांबीचे प्रसरण, वालुकेचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म व तिची मूळ प्रतिबल-परिस्थिती यांवर अवलंबून असते. *गमन* विभागातील (आ. १४ इ) वालुकेचे आडव्या दिशेतील विरूपत्व रेखांकित क्षेत्राने दाखविले आहे. या रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेल्या विरूपत्वापेक्षा अधिक विरूपत्व आले तरीही वालुकेतील प्रतिबल-परिस्थि-तीत काही बदल होत नाही. म्हणून *म*, *ग* या स्थानापलीकडे भिंतीचे विचलन झाल्यास *गन* पृष्ठावर वालुका घसरून उच्छेद होतो (आ. १४ इ). तसेच *गम* वरील मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिर-जल-दाब-वितरणासारखेच राहते. याऐवजी *म* ही माथ्याची कड स्थिर राहून भिंतीचे विचलन झाले, तर घसरपृष्ठाचा आकार *गन* पेक्षा नक्कीच निराळा असेल आणि विचलनाच्या प्रकारावर दाबाचे वितरण अवलंबून राहील.

वरील विवेचन कोणताही फेरफार न करता, ज्या ठिकाणी भिंतघर्षण ऋण चिन्हांकित आहे, अशा राशीच्या उदाहरणास तसेच प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या उदाहरणासही

लागू पडते. भिंतघर्षण ऋण आहे अशा ठिकाणच्या उद्युक्त नम्य समतोल अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा आ. १४ ऊ मध्ये दाखविली आहे.

स्थिर असलेल्या खरखरीत पडद्याच्या दोन्ही अंगांस स्थित असलेल्या अपारप्राय राशीमध्ये आडव्या दमनामुळे प्रतियोगी नम्य समतोल अवस्था निर्माण झाली असता आ. १४ उ मध्ये दाखविलेली कार्तनिक प्रतिमा मिळते. पार्श्वीय दमनाचा परिणाम म्हणून पडदा स्थिर राहून वालुका ऊर्ध्व दिशेने चढण्यास प्रवृत्त होत असल्यामुळे, त्यातून निर्माण होणारा प्रतियोगी मृत्तिकादाब लंबरूप दिशेपासून ऊर्ध्व दिशेकडे विचलित होतो. तदनुषंगिक भिंतघर्षण कोन धन मानला जातो. वालुकेतील प्रतिबल-परिस्थितीवर होणारा भिंतघर्षणाचा परिणाम, पडद्याच्या माथ्याच्या कडेतून निघणाऱ्या *मझ* या रॅन्किन् पृष्ठापलीकडे जात नाही, कारण δ चे मूल्य कोणतेही असले तरी *मझ* पृष्ठाच्या वरच्या भागातील वालुका त्या पृष्ठावरून ऊर्ध्व दिशेने घसरण्याच्या बेतातच असते. *मपझ* या त्रिकोणाकार विभागात असणाऱ्या दोन्ही संचांतील घसरपृष्ठ वक्राकार असतात. याकी (१९३८) आणि ओहृदे (१९३८) या उभयतांनी या आकाराबाबत संशोधन केले आहे. प्रत्येक संचासाठी त्र = त्र$_{\circ}$ फ (θ) या पद्धतीचे समीकरण मांडता येते. त्र हे बिंदूचे *म* पासूनचे अंतर असून θ हा तदनुषंगिक केंद्रीय कोन आहे. पृष्ठभागापासून *ख* या विवक्षित खोलीवरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या लंब दिशेतील घटकाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$\text{द}_{\text{प्रल}} = \text{घ ख मृ}_{\text{प्र}} \qquad [३]$$

येथील मृ$_{\text{प्र}}$ या पदास **प्रतियोगी मृत्तिकादाब-गुणांक** म्हणतात व त्याचे मूल्य केवळ ϕ आणि δ यांवर अवलंबून असते. जर पडदा वाळूतून बाहेर ओढला, तर भिंतघर्षणकोन ऋण होतो व आ० १४ ए मध्ये दाखविल्याप्रमाणे कार्तनिक प्रतिमा प्राप्त होते. घसरपृष्ठे पडद्यास छेदताना होणारा कोन मोहरप्रणीत रेखाकृतीच्या (आ. १४ ई) साहाय्याने ठरविता येतो. $\delta = \circ$ असेल, तर पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{मृ}_{\text{प्र}} = \text{ण} = \text{स्प}^{२} \,(४५^{\circ} + \phi/२) \qquad [४]$$

प बिंदूच्या (आ. १४ ई) कोटीचे मूल्य *गम* (आ. १४ उ) वरील कार्तनिक प्रतिबल देते. हा बिंदू δ कोन करून निघणाऱ्या *उप* रेषेवर स्थित असतो. तदनुषंगिक ध्रुव *प*ध्रु$_{\text{प्र}}$ या रेषेवर स्थित असतो. ही रेषा आ. १४ उ मधील *मप* या रेषेस समांतर असते. फलकाच्या उजव्या बाजूकडील घसरपृष्ठांचा एक संच आ. १४ ई मधील ध्रु$_{\text{प्र}}$*प* ला आणि दुसरा ध्रु$_{\text{प्र}}$*प*$_{१}$ ला समांतर असतो.

आ. १४ उ मधील कार्तनिक प्रतिमेला अनुषंगिक असलेली नम्य समतोल अवस्था निर्माण करण्यासाठी आवश्यक असलेले *गम* चे पार्श्वीय विचलन *मम*$_{१}$*ग* या रेखांकित

क्षेत्राने दाखविले आहे. *गम* हे पृष्ठ *गम*, या स्थानाच्याही पलीकडे परंतु मृत्तिकाराशीमध्ये रेटल्याने निर्माण होणारे घसरपृष्ठ *गन* सारखेच असेल व समी० ३ ने दाखविल्याप्रमाणे प्रतियोगी दाबाचे *गम* वरील वितरण स्थिरजलदाबवितरणाप्रमाणेच असेल. याऐवजी *गम* हे पृष्ठ *म* जवळ स्थिर ठेवून खालच्या अंगाने रेटून *म*,*ग* रेषेला छेदणाऱ्या स्थानाप्रत नेले तर घसरपृष्ठांचा आकार *गन* पेक्षा निराळा असेल व प्रतियोगी दाबाचे *गम* वरील वितरण विचलनाच्या पद्धतीवर अवलंबून राहील.

वरील विधाने फक्त समाकर्षणहीन राशींना लागू पडतात. जड व समाकर्षणयुक्त अपारप्राय राशींतील नम्य समतोलाला काटेकोरपणे लागू होणाऱ्या सिद्धांताची प्रगती अद्याप प्राथमिक अवस्थेपलीकडे झालेली नाही. व्यवहारात मात्र आपल्याला अशा राशींच्या प्रतियोगी दाबाच्या मूल्याचीच गरज मुख्यतः भासते. या अनुषंगात हे ध्यानात ठेवले पाहिजे की, समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय राशीतील रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेमध्ये मिळणारी कार्तनिक प्रतिमा समाकर्षणगुणावर अवलंबून असत नाही. (परि० १२ आणि आ. ११ ई पाहा.)

मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागावर दर एकांक क्षेत्री *भ* मूल्याचा समप्रमाणात वितरित असा अधिभार असेल, तर उभ्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी दाबाचे *ख* या खोलीवरील मूल्य पुढीलप्रमाणे असते.

$$ए_{प्र} = २\,स\,\sqrt{ण} + भ\,ण + ख\,घ\,ण \qquad १२\,(५)$$

येथे $ण = स्प^{२}(४५^{\circ} + \varnothing/२)$ हे विसर्पण-मूल्य आहे. वरील समीकरणाची उजव्या बाजूची $२\,स\,\sqrt{ण}$ आणि *भण* ही पहिली दोन पदे, खोली किंवा मृत्तिकेची घनता यांवर अवलंबून नाहीत. *घ ख ण* या तिसऱ्या पदात *घ* ही घनता समाविष्ट झालेली आहे आणि त्याचे मूल्य स्थिरजलदाबाप्रमाणे खोलीच्या प्रमाणात वाढते.

पडद्याच्या खरखरीत पृष्ठावरील विषमाकर्षण आणि घर्षण ही दोन्ही बले नम्य प्रतियोगी अवस्थेतील समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेच्या अपारप्राय राशीवर कारक होत असतील, तर पडद्यावरील या कार्तनिक प्रतिबलांचा मृत्तिकेच्या अवस्थेवर पडणारा प्रभाव पडद्याच्या माथ्याच्या कडेतून निघणाऱ्या आ. १४ उ मधील *मझ* या रॅन्किन् घसरपृष्ठांच्या पलीकडे जात नाही. या घसरपृष्ठांच्या वरच्या भागातील कार्तनिक प्रतिमा आ. १४ उ मध्ये दाखविलेल्या समाकर्षणहीन राशीच्या कार्तनिक प्रतिमेसारखीच असते. त्रिकोणाकार विभाग *मझप* मध्ये अस्तित्वात असलेल्या प्रतिबल-परिस्थितीचे शास्त्रपूत काटेकोर विश्लेषण अद्याप झालेले नाही; परंतु समीकरण १२ (५) ने व्यक्त केलेल्या अन्योन्य संबंधाशी तुलना केली असता, पुढील गृहीत ग्राह्य ठरेल असे वाटते. खरखरीत पृष्ठाच्या सान्निध्यामुळे घर्षण आणि विषमाकर्षण ज्याच्यावर कारक आहेत, अशा समाकर्षणयुक्त व अपारप्राय मृत्तिकाराशीतील प्रत्येक बिंदूच्या स्थानी नम्य समतोलाची अवस्था असेल, तर पृष्ठाच्या एकांक क्षेत्रावर पडणाऱ्या प्रतियोगी

मृत्तिकादाबाचा लंबदिशेतील घटक पुढील समीकरणाने स्थूलमानाने का होईना, व्यक्त करणे शक्य होईल.

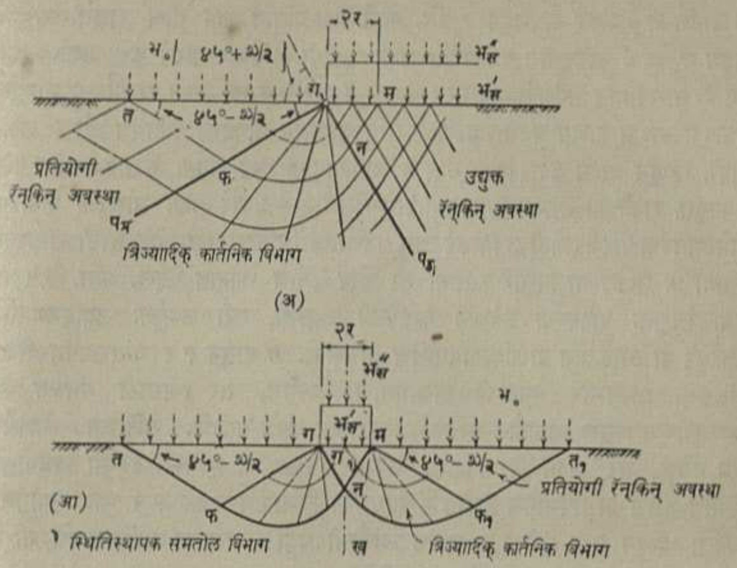
$$द_{प्रलं} = स \cdot मृ_{प्रस} + भ \cdot मृ_{प्रभ} + घ \cdot ख \cdot मृ_{प्रघ} \qquad [५]$$

येथे $मृ_{प्रस}$, $मृ_{प्रभ}$, $मृ_{प्रघ}$ हे शुद्ध अंक असून त्यांची मूल्ये *ख* च्या मूल्यावर अवलंबून नाहीत. भिंतघर्षण ऋण किंवा धन असेल, त्यानुसार घसरपृष्ठांचा आकार अनुक्रमे आ. १४ उ आणि १४ ए मधील पृष्ठांप्रमाणे असेल, अशीही अपेक्षा करता येईल.

समीकरण ५ च्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असलेली विरूपत्व-लक्षणे व समीकरण ३ च्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असलेली विरूपत्व-लक्षणे सारखीच असतात. ही लक्षणे अस्तित्वात नसतील, तर घसरपृष्ठांचा आकार *गन* पेक्षा वेगळा असतो आणि प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे *गम* या पृष्ठावरील वितरण त्या पृष्ठाच्या विचलनाच्या पद्धतीवर अवलंबून राहते.

१६. अपारप्राय राशीच्या पृष्ठाच्या काही भागावर भार ठेवण्यामुळे निर्माण होणारा नम्य समतोल : आ. १४ इ आणि १४ उ मध्ये दाखविलेल्या राशींचे स्थितिस्थापक समतोलातून नम्य समतोलात रूपांतर घडवून आणण्यासाठी आडव्या दिशेत ताणणे आणि दाबणे या काल्पनिक क्रियांचे साहाय्य घ्यावे लागले. परंतु असेच रूपांतर राशीच्या पृष्ठभागावर एक सरळ रेषा काढून व तिच्या एका बाजूस एक लांबपर्यंत पसरलेला सलग अधिभार ठेवूनही घडविता येणे शक्य असते. अपारप्राय राशीत स्थानिक अधिभारामुळे निर्माण होणारी नम्य समतोलाची अवस्था ठरविणारी समीकरणे सोडविणे फार कठीण आहे. मृत्तिका वजनरहित मानूनच केवळ ही समीकरणे सोडविता आली आहेत (प्राण्ड्ट्ल १९२०). अधिभार-निर्मित नम्य समतोलाच्या अवस्थेवर पडणाऱ्या मृत्तिकेच्या घनतेच्या प्रभावाविषयीचे संशोधन, तद्विषयक समीकरणे प्रस्थापित करण्याच्या अवस्थेपलीकडे गेलेले नाही (रैसनर १९२४). तथापि अशा प्राथमिक अवस्थेतही त्यातून निघणारे निष्कर्ष सार्वत्रिक स्वरूपाची मौलिक माहिती देतात. या निष्कर्षांचे शास्त्रपूत मंडन करण्याचा खटाटोप न करता तात्कालिक व्यावहारिक महत्त्वाच्या निष्कर्षांचे सार खालील परिच्छेदांतून दिले आहे.

आ. १५ अ मध्ये वजनरहित पदार्थाचा अपारप्राय राशी दाखविला आहे. हा पदार्थ समाकर्षणयुक्त असून त्याचा अंतर्गत घर्षणकोन ϕ आहे. या राशीतील प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य समतोल अवस्था प्रस्थापित झालेली आहे. ही अवस्था निर्माण करण्यासाठी आवश्यक असलेला $भ'_{स}$ या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा अधिभार *ग* ने दाखविलेल्या रेषेच्या एका बाजूस ठेवलेला असून तो समप्रमाणात वितरित आहे. *ग* मधून निघणाऱ्या दोन पृष्ठांनी या राशीचे तीन विभाग पाडता येतात आणि यांपैकी प्रत्येक विभागातील कार्तेनिक प्रतिमा वेगळी असते. यांपैकी $गप_{प्र}$ हे एक पृष्ठ क्षितिजाशी



आकृती १५ : अपारप्राय आणि समाकर्षणयुक्त परंतु वजनरहित घनपदार्थात समप्रमाणवितरित अधिभारामुळे होणारे नम्य विसर्पण. (अ) संपूर्ण पृष्ठाचा अर्धा भाग अधिभाराने व्याप्त आहे आणि (आ) अनंत लांबीची पट्टिका अधिभाराने व्याप्त आहे (आधार–प्राण्ड्ट्ल १९२०).

$४५° - \phi/२$ कोन करीत *ग* मधून डाव्या बाजूने उतरते व *गप*$_{उ}$ हे दुसरे पृष्ठ $४५° + \phi/२$ एवढा कोन करीत उजवीकडे उतरते. *गप*$_{उ}$ या पृष्ठाच्या वरच्या अंगास असलेली कार्तनिक प्रतिमा रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त अवस्थेतील प्रतिमेसारखी (आ. ११ इ) असते आणि *गप*$_{प्र}$ या पृष्ठाच्या वरील भागातील प्रतिमा रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेतील (आ. ११ ई) प्रतिमेप्रमाणे असते. म्हणून *गप*$_{प्र}$ च्या वरील भागात ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल प्रत्येक ठिकाणी आडवे असेल आणि *गप*$_{उ}$ वरील भागात ते प्रतिबल प्रत्येक ठिकाणी उभ्या दिशेत असेल. या दोन रॅन्किन् विभागांना अलग करणारा *प*$_{उ}$ *गप*$_{प्र}$ हा भाग म्हणजे **त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभाग** आहे. आ. १५ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे या विभागात घसरपृष्ठांचा एक संच म्हणजे *ग* बिंदूतून निघणाऱ्या सरळ रेषांचा संच आहे. दुसरा संच आहे लघुगणकीय सर्पिलाकार वक्र रेषांचा. या वक्ररेषा सरळरेषांना $९०° - \phi$ कोनात छेदतात (प्राण्ड्ट्ल १९२०). या अपारप्राय राशीच्या पृष्ठभागावर *ग* च्या डाव्या बाजूस दर एकांक क्षेत्री $भ_{०}$ मूल्य असणारा अधिभार ठेवला व नम्य समतोल अवस्था साधली, तर तीसाठी उजव्या बाजूचा भार $भ'_{स}$ पासून $भ'_{स} + भ''_{स}$ पावेतो वाढवावा लागतो. या ठिकाणी $भ''_{स}$ चे मूल्य केवळ

ϕ आणि $भ_०$ यांवर अवलंबून असते. कार्तनिक प्रतिमा मात्र तीच राहते. $स = ०$ आणि $भ_० = ०$ असल्यास वजनरहित राशी एकांगी अधिभार धारण करू शकत नाही; मग ϕ या अंतर्गत घर्षणकोनाचे मूल्य कोणतेही असो. कारण अशा राशीमध्ये भारयुक्त क्षेत्राच्या डाव्या बाजूस घडणाऱ्या पार्श्वीय विस्थापनास कोणताच प्रतिबंध होऊ शकत नाही. म्हणून अशा उदाहरणात $भ'_स$ हे लक्षणमूल्य शून्य असते. समाकर्षणहीन परंतु वजनयुक्त राशीच्या समतल पृष्ठावर भार ठेवलेला असेल, तर अशा भारयुक्त क्षेत्राच्या सीमेलगतच्या परिसरातही हा निष्कर्ष लागू पडतो. अधिभाराच्या समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचा विचार करताना ही गोष्ट सहज ध्यानात येईल. आ. १५ अ समाकर्षणयुक्त राशीच्या संबंधात काढलेली असली, तरी उपर्युक्त उदाहरणातील घसरपृष्ठे या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणेच असतात. $ग$ पासून $१\,र$ अंतरापर्यंत स्थित असलेला अधिभार भूमीमध्ये खचावयाचा असेल, तर त्यासाठी $मनफत$ या घसरपृष्ठाच्या वरील भागातील मृत्तिकेचे विस्थापन झाले पाहिजे. मृत्तिकेत समाकर्षण गुण नसेल, तर अशा विस्थापनाला केवळ $मनफत$ या मृत्तिकाखंडाच्या वजनामुळे निर्माण होणाऱ्या घर्षणानेच विरोध होईल. या विभागाचे वजन $१\,र$ च्या वर्गानुसार वाढते; म्हणून $१\,र$ रुंदीची व एकांक लांबीची पट्टी व्यापणाऱ्या अधिभाराचे $भा$ हे महत्तम मूल्य पुढील समीकरणाने व्यक्त होते.

$$भा = अ \cdot र^{२}$$

येथे $अ$ या गुणकाचे मूल्य र वर अवलंबून नसते. ही पट्टी तिच्या एकांक क्षेत्रावर धारण करू शकणाऱ्या महत्तम अधिभाराचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते.

$$भ = \frac{dभा}{dर} = २\,अ . र$$

भारयुक्त क्षेत्राच्या $ग$ या सीमेपासून मोजलेल्या अंतराच्या सरळ प्रमाणात या अधिभाराचे मूल्य वाढत जाते. $ग$ या सीमेजवळ ते शून्य असते.

आ. १५ अ मधील अपारप्राय राशीच्या नम्य समतोलाच्या अटी त्याच राशीच्या कोणत्याही मर्यादित विभागालाही लागू पडतात. परंतु त्यासाठी या विभागाची सीमा-लक्षणे तीच राहिली पाहिजेत. उदा., $म$ या बिंदूच्या (आ. १५ अ) उजव्या बाजूकडील अधिभार आपण काढून घेतला, तर $मनफत$ या घसरपृष्ठाच्या खालचा पदार्थ नम्य समतोल अवस्थेतून स्थितिस्थापक समतोलावस्थेत जातो. तथापि या पृष्ठाच्या वरचा पदार्थ नम्य समतोल अवस्थेतच राहतो. ज्या उपपत्तीचा अवलंब करून मृत्तिकादाबाचा रॅन्‌किन्‌प्रणीत सिद्धांत प्राप्त झाला, त्याच प्रकारची ही उपपत्ती आहे. या उपपत्तीच्या साह्याने, आ. १५ आ मध्ये उदाहरणादाखल घेतलेल्या पट्टीसारख्या भारयुक्त व निश्चित रुंदीच्या पट्टीखाली नम्य समतोल अवस्था साधण्यासाठी आवश्यक असलेली लक्षणे

करू शकतात. या आकृतीतील *मनफत* ही रेषा आ. १५ अ मधील *मनफत* रेषेसारखी मानता येईल. $\text{भ}'_{\text{स}}+\text{भ}''_{\text{स}}$ या अधिभारात थोडीशीही वाढ झाली, तर तिच्यामुळे या रेषेने दाखविलेल्या पृष्ठावरील पदार्थात विसर्पणाची अवस्था निर्माण होते. तथापि या ठिकाणी हे लक्षात घेतले पाहिजे की, भारयुक्त पदार्थावर कारक असणाऱ्या अंतर्गत आणि बाह्य बलांचा व्यूह *ग,स* या उभ्या पृष्ठाच्या दोन्ही अंगांस पूर्णपणे सममात्र आहे. तेव्हा नम्य समतोल अवस्थेतील विभागाची व्याप्तीही या भूपृष्ठाच्या दोन्ही अंगांस सारखीच असली पाहिजे. म्हणून नम्य समतोल विभागाची खालची सीमा आकृतीतील $\text{तफनफ}_1\text{त}_1$ या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे असेल.

भारयुक्त पदार्थ वजनरहित आहे या गृहीतावर वरील विवेचन आधारित होते. प्रत्यक्षात वजनरहित पदार्थ असतच नाही. पदार्थांच्या वजनामुळे परिस्थिती फारच बिकट होते. *स* आणि ϕ यांची विवक्षित मूल्ये असलेला एखादा पदार्थ घेतला, तर त्याच्या घनतेमुळे लक्ष्मण भाराचे मूल्य वाढते व घसरपृष्ठांचा आकारही पालटतो. हा पालट उद्युक्त रॅन्किन् विभागात तसेच त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभागातही घडून येतो. उदा०, त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभागातील त्रिज्यात्मक रेषा आ. १५ अ मधील रेषांप्रमाणे सरळ न राहता वक्र होतात (रैसनेर १९२४).

$\text{घ} > ०$ गृहीत धरून लक्ष्मण भार ठरविण्याची समस्या केवळ स्थूल पद्धतींचा अवलंब करूनच सोडविण्यात आली आहे. तथापि व्यावहारिक उपयोगाच्या दृष्टीने या पद्धती पुरेशा प्रमाणात अचूक आहेत. या पद्धतींचे प्रतिपादन प्रकरण ८ मध्ये केले जाईल.

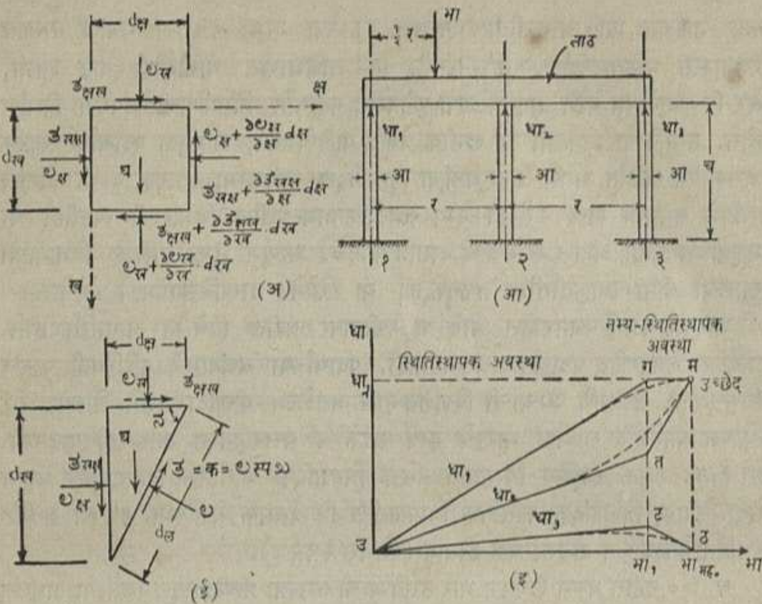
१७. व्यावहारिक समस्या सोडविण्याच्या काटेकोरपणे शास्त्रपूत तशाच सोप्या पद्धती : समतोलास आवश्यक असलेली लक्षणे, सीमा-लक्षणे आणि विचाराधीन पदार्थाचे गृहीत धरलेले प्राकृतिक गुणधर्म या सर्वांशी गणितसिद्ध प्रतिबलमूल्ये काटेकोरपणे सुसंगत असतील, तरच एखाद्या समस्येची काटेकोर उकल झाली असे म्हणता येते.

वस्तूच्या अंतरंगांतील प्रतिबल-परिस्थिती आ. १६ अ मध्ये एका समपार्श्व खंडाच्या साहाय्याने दाखविली आहे. या खंडाच्या दोन बाजू गुरुत्वाकर्षणाच्या दिशेशी समांतर आहेत व त्याच्या बाजूंवर आकृतीत दाखविलेली प्रतिबले कारक आहेत. $\text{घ}\cdot d\text{क्ष}\cdot d\text{ख}$ या स्वतःच्या वजनाव्यतिरिक्त त्यावर दुसरे कोणतेही आंगिक बल कारक नाही. या खंडाच्या समतोलाची लक्षणे खालील समीकरणांनी व्यक्त करता येतात.

$$\frac{\partial \sigma_{\text{ख}}}{\partial \text{ख}}+\frac{\partial \tau_{\text{खक्ष}}}{\partial \text{क्ष}}=\text{घ} \qquad [१]$$

आणि

$$\frac{\partial \sigma_{\text{क्ष}}}{\partial \text{क्ष}}+\frac{\partial \tau_{\text{खक्ष}}}{\partial \text{ख}}=० \qquad [२]$$



आकृती १६ : समतोलाची आणि संवादित्वाची लक्षणे दाखविणाऱ्या रेखाकृती.

या समीकरणाच्या पूर्तीसाठी पुढील गोष्टी आवश्यक आहेत.

$$\sigma_{\text{क्ष}} = \frac{\partial^2 \text{फ}}{\partial \text{ख}^2} \qquad [\text{३अ}]$$

$$\sigma_{\text{ख}} = \frac{\partial^2 \text{फ}}{\partial \text{क्ष}^2} \qquad [\text{३आ}]$$

आणि

$$\text{ड}_{\text{क्षख}} = -\frac{\partial^2 \text{फ}}{\partial \text{क्ष}\, \partial \text{ख}} + \text{घ क्ष} + \text{थ} \qquad [\text{३इ}]$$

येथे फ हे क्ष आणि ख यांचे कोणतेही एक फलन आहे व थ हा चलानयनामधील स्थिरांक आहे. समीकरण ३ वरून हे दिसून येते की, समीकरणे १ व २ यांची पूर्ती करणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीचे अनंत प्रकार असू शकतील; परंतु त्यांतील केवळ एकच वस्तुस्थितीला लागू पडणारा असतो. विचाराधीन समस्येची उकल होण्यासाठी समी. १ व २ यांच्या जोडीस आणखी काही समीकरणे मांडली पाहिजेत. अशा पूरक समीकरणांचा एक गट सीमा-लक्षणे निश्चित केली असता मिळतो. उदा०, बाह्य बले

ज्यावर कारक नाहीत, असा एखादा मुक्त पृष्ठभाग या वस्तूच्या बाबतीत अस्तित्वात असेल, तर त्यावरील लंबदिक् आणि कार्तनिक अशी दोन्ही प्रतिबले शून्य मूल्याची असली पाहिजेत.

प्रतिबल-परिस्थिती पदार्थाच्या प्राकृतिक गुणधर्मांशी सुसंगत असली पाहिजे, या अटीची पूर्तता केली असता समीकरणांचा दुसरा गट प्राप्त होतो. पदार्थ जर पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असेल, तर त्याच्या बाबतीत प्रतिबल व विकृती यांतील संबंध हूकच्या नियमानुसार ठरतात. हूकचा नियम लागू होत असेल, तर प्रतिबलांनी समीकरणे १ व २ प्रमाणेच खालील समीकरणाचीही पूर्ती केली पाहिजे.

$$\left(\frac{\partial^{२}}{\partial क्ष^{२}} + \frac{\partial^{२}}{\partial ख^{२}} \right) (\sigma_{क्ष} + \sigma_{ख}) = ० \qquad [४]$$

अर्थात त्यासाठी वस्तूवर स्वतःच्या वजनाव्यतिरिक्त दुसरे कोणतेही आंगिक बल कारक नसले पाहिजे. (उदा., टिमोशेंको १९३४ पाहा.) पदार्थाच्या स्थितिस्थापकत्वाविषयीचा कोणताही स्थिरांक या समीकरणात समाविष्ट झालेला नाही, हे ध्यानात घेतले पाहिजे. समीकरणे ३ आणि ४ यांचा संयोग करून आपल्याला पुढील प्रमाणभूत कलन समीकरण प्राप्त होते. जेथे स्वतःचे वजन हेच केवळ कारक बल असते, अशा स्थितीत असणाऱ्या स्थितिस्थापक वस्तूची द्विमितीतील प्रतिबल-परिस्थिती या समीकरणाने व्यक्त होते.

$$\frac{\partial^{४} फ}{\partial क्ष^{४}} + २ \frac{\partial^{४} फ}{\partial क्ष^{२} \partial ख^{२}} + \frac{\partial^{४} फ}{\partial ख^{४}} = ० \qquad [५]$$

फलन फ हे **एरीचे प्रतिबल-फलन** (एरी १८६२) म्हणून विख्यात आहे. समीकरण (५) आणि समस्येतील सीमा-लक्षणे यांची पूर्तता करील, असे फ चे मूल्य शोधून काढणे हा या समस्येतील गणितात्मक भाग आहे. काही पाठ्य पुस्तकांतून समीकरण ५ पुढील रूपात दिले जाते.

$$\nabla^{४} फ = \nabla^{२} \nabla^{२} फ = ०$$

$\nabla^{२}$ हे चिन्ह **लाप्लासचा कारक** दर्शविते.

$$\nabla^{२} = \left(\frac{\partial^{२}}{\partial क्ष^{२}} + \frac{\partial^{२}}{\partial ख^{२}} \right)$$

वस्तूचे विरूपत्व निरपवादपणे स्थितिस्थापकत्व-गुणानुसार आलेले असेल, तरच समीकरण ५ च्या साहाय्याने मिळविलेले उत्तर लागू पडते. उलटपक्षी, वस्तूच्या एका भागात प्रतिबलाची मूल्ये वश्यता-बिंदूहून अधिक असतील, तर तिच्यात तीन वेगळे विभाग अस्तित्वात असल्याचे दिसले पाहिजे. यांपैकी एका विभागातील परिस्थिती

स्थितिस्थापक समतोलाची असेल व तेथील प्रतिबले समीकरण ५ ने मिळणारी असतील. दुसऱ्या विभागातील प्रतिबल-परिस्थिती नम्य समतोलाच्या अटींची पूर्ती करणारी असेल आणि तिसरा विभाग स्थितिस्थापक अवस्थेपासून नम्य अवस्थेप्रत होणारे संक्रमण दाखविणारा असेल. या संक्रमण-विभागाच्या अस्तित्वामुळे प्रतिबले गणितसिद्ध करण्याची समस्या अति बिकट होते. म्हणून गणितात्मक विश्लेषण सोपे होण्यासाठी या विभागाचे अस्तित्व नेहमी दुर्लक्षावे लागते. तसे करून स्थितिस्थापक विभागातील प्रतिबले समीकरण ५ च्या साहाय्याने मिळवितात; आणि प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य समतोल असल्याची निश्चिती होईल, अशा पद्धतीने नम्य विभागातील प्रतिबले मिळविली जातात. मृत्तिकांच्या बाबतीतील मोहूरप्रणीत भंजनप्रमेय व्यक्त करणाऱ्या समीकरण ७(७)चा अवलंब करून हे पुरेशा अचूकपणे करता येते; ते समीकरण असे :

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{क्ष}}-\sigma_{\text{ख}}}{२}\right)^{२}+\text{ड}^{२}_{\text{क्षख}}}-\frac{\sigma_{\text{क्ष}}+\sigma_{\text{ख}}}{२}\,\text{ज्या}\,\phi=\text{स}\,\text{कोज्या}\,\phi \qquad ७(७)$$

ज्या सुकरतादायी गृहीतांवर हे विश्लेषण आधारित आहे, त्यांनुसार या दोन विभागांतील सीमा म्हणजे एक भिन्नत्वदर्शी पृष्ठ ठरते. हे भिन्नत्व प्रत्येक दिशेतील प्रतिबलांच्या मूल्यांतराच्या प्रमाणाच्या बाबतीतील असते; अपवाद असतो तो केवळ या सीमेला स्पर्शरेषात्मक असणाऱ्या दिशेचा.

शेवटी सांगायचे म्हणजे, समस्येत जर पूर्णतया नम्य समतोलातील वस्तूचाच विचार प्रस्तुत असेल, तर तिच्या उत्तरात फक्त पुढील गोष्टींचा प्रत्यय आला पाहिजे. त्या गोष्टी अशा :—समीकरण ३ ने व्यक्त होणारे सर्वसामान्य समतोलाचे लक्षण, समीकरण ७ (७) ने व्यक्त होणारे नम्य समतोलाचे लक्षण आणि सीमालक्षणे. अपारप्राय मृत्तिकाराशीतील रॅन्किन्प्रणीत प्रतिबल-परिस्थितीचे गणित या पद्धतीने मांडता येते.

उपरोक्त समीकरणांच्या प्रत्यक्षातील अर्थाची कल्पना येण्यासाठी दुसऱ्या एका प्रकारच्या समीकरणांशी त्यांची आपल्याला तुलना करता येईल. ही समीकरणे म्हणजे पूर्णतया ताठ अशा सलग तुळईमुळे अदृढ आधारांवर पडणारा भारांश ठरविणारी समीकरणे होत. आ. १६ आ मध्ये अशी तुळई दाखविली आहे. च या समान उंचीच्या तीन स्तंभांवर ती आधारित आहे. सर्व स्तंभांच्या आडव्या छेदाचे क्षेत्र *आ* असून त्यांचे स्थितिस्थापकत्वाचे गुण समान आहेत. आधार १ पासून $\frac{३}{२}$ र अंतरावर *भा* हा भार तुळईवर कारक असून त्यामुळे स्तंभ १, २ आणि ३ यांवर पडणारे भारांश अनुक्रमे $\text{भा}_{१}$, $\text{भा}_{२}$, $\text{भा}_{३}$ असे असतील. हे स्तंभ काढून त्या ठिकाणी या भारांशांच्या मूल्यांइतक्याच परंतु विरुद्ध दिशेतील प्रतिक्रियाही कल्पिता येतील. या व्यूहाच्या समतोलासाठी तुळईवर कारक असलेल्या सर्व बलांची बेरीज, तसेच सर्व परिबलांची बेरीज शून्य असणे आवश्यक आहे. कोणत्याही बिंदूभोवतीची—उदा., आधार १ च्या माथ्याभोवतीची—परिबले

विचारासाठी घेऊन या दोन अटींची पूर्तता करणारी समीकरणे खालीलप्रमाणे मांडता येतील.

$$-भा + धा_१ + धा_२ + धा_३ = ० \qquad [६ अ]$$

$$\frac{१}{२} भा र - धा_२ र - २ धा_३ र = ० \qquad [६ आ]$$

या दोन समीकरणांत $धा_१$, $धा_२$, आणि $धा_३$ या तीन अज्ञात संख्या आहेत. यांपैकी एका संख्येस—उदा., $धा_१$ या प्रतिक्रियेस—कोणतेही एक मूल्य नेमित केले, तर समतोलाच्या अटी पुऱ्या होतात. या मूल्यास स्थैतिक दृष्ट्या अनिश्चेय प्रतिक्रिया म्हणतात. त्याप्रमाणे समी० (३) या सार्वत्रिक समीकरणाची पूर्तता करणारी फलने निरनिराळी आणि असंख्य असू शकतात. याचाच अर्थ असा की, ही समस्या अनिश्चेय आहे. तथापि, आपल्या समस्येचे अचूक उत्तर देऊ शकेल, असे एकच मूल्य $धा_१$ ला असू शकते किंवा फ हे एकच फलन असू शकते. हे एकमेव मूल्य आधारांच्या प्राकृतिक गुणांवर अवलंबून असते. हे एकमेव मूल्य किंवा एकमेव फलन, गणितसिद्ध करण्यासाठी हे गुणधर्म व्यक्त करणारे एक पूरक समीकरण आपण प्रस्थापित केले पाहिजे.

ज्यांच्या बाबतीत नम्य विसर्पणाची शक्यता आहे, अशा बांधकाम-पदार्थांच्या गुणधर्मांविषयीच्या रूढ गृहीतांना अनुरूप असे हे पूरक समीकरण प्रस्थापित करण्यासाठी आपल्याला पुढील गृहीते स्वीकारावी लागतात. *धा* चे मूल्य $धा_न$ या लक्ष्मण मूल्यापेक्षा लहान असल्यास स्तंभांचे वर्तन काटेकोरपणे हूकप्रणीत नियमानुसार होते. एका स्तंभावरील भारांशाचे मूल्य $धा_न$ या मर्यादेला गेल्यानंतर तुळईवर कारक असणाऱ्या *भा* या भारात वाढ केल्यास, भारांशाचे मूल्य न वाढताही त्या स्तंभामध्ये नम्य विसर्पणाची अवस्था निर्माण होते. या विसर्पणामुळे स्तंभावरील भारांशाचा काही परिहार न झाल्यास व्यूहाचा उच्छेद होतो. यावरून असे म्हणता येईल की, तुळईवरील *भा* हा भार वाढवीत गेल्यास व्यूहरचनेत एकामागोमाग तीन अवस्था निर्माण होतात. पहिल्या अवस्थेत प्रत्येक स्तंभावरील भारांश $धा_न$ पेक्षा कमी असतो. या अवस्थेत भारातील वाढीमुळे स्तंभांमध्ये केवळ स्थितिस्थापकत्वानुसार ऱ्हस्वत्व येते आणि संपूर्ण व्यूह स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असतो. स्तंभांपैकी एकावरील भारांशाचे मूल्य $धा_न$ इतके होताच दुसऱ्या अवस्थेला प्रारंभ होतो. *भा* चे मूल्य अजूनही वाढत राहिले, तर या स्तंभावरील भारांश $धा_न$ या मूल्याला स्थिर राहून, उरलेल्या दोन स्तंभांनी ही वाढ स्थितिस्थापकत्वानुसार पेलली पाहिजे. ही अवस्था म्हणजे नम्यतेसह साधलेला स्थितिस्थापक समतोल होय. दुसऱ्या स्तंभावरील भारांश $धा_न$ इतका होईपर्यंत ही अवस्था टिकते. *भा* मधील यानंतरच्या वाढीने या दोन स्तंभांवरील भारांश न वाढताही त्यांच्यामध्ये नम्यता-गुणानुसारी ऱ्हस्वत्व अविरतपणे येत राहते. ही अवस्था म्हणजे उच्छेद होय. तेव्हा दोन स्तंभांवर $धा_न$ इतके भारांश

टाकणारा भार हाच या व्यूहाने पेलला जाणारा महत्तम भार म्हणजे $भा_{महत्तम}$ होय. $भा = भा_{महत्तम}$ या परिस्थितीत हा व्यूह नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असतो.

$प = धा/आ$ आणि $ठ = \dfrac{\text{स्तंभाच्या लांबीतील एकूण ऱ्हस्वत्व}}{\text{मूळ लांबी}}$ असल्यास $\dfrac{प}{ठ}$ हे स्थितिस्थापक दशेतील गुणोत्तर म्हणजे **यंगचा मापांक** *यं* होय. म्हणून या अवस्थेत *भा* या भारामुळे निर्माण झालेले प्रत्येक स्तंभातील एकूण ऱ्हस्वत्व पुढीलप्रमाणे असते.

$$ह_१ = \frac{धा_१ च}{आ\,यं};\quad ह_२ = \frac{धा_२ च}{आ\,यं} \text{ आणि } ह_३ = \frac{धा_३ च}{आ\,यं}$$

तुळई पूर्णत्वाने ताठ असल्यामुळे स्तंभांचे माथे एका सरळ रेषेत असले पाहिजेत त्यासाठी—

$$ह_३ = ह_१ - २\,(ह_१ - ह_२) = २ह_२ - ह_१$$

किंवा

$$धा_३ = २\,धा_२ - धा_१$$

हे समीकरण व समीकरण ६ यांचा संयोग करून आपल्या समस्येचे उत्तर म्हणून पुढील मूल्ये मिळतील.

$$धा_१ = \frac{७}{१२}भा,\; धा_२ = \frac{४}{१२}भा \text{ आणि } धा_३ = \frac{१}{१२}भा \qquad [७]$$

या उत्तरामुळे व्यूहाच्या समतोलाच्या अटी, सीमालक्षणे आणि हूकचा नियम या सर्वांचे पालन होते. म्हणून हे उत्तर व सार्वत्रिक समीकरण ५ चे उत्तर ही समधर्मी उत्तरे आहेत.

भा आणि $धा_१$, $धा_२$, $धा_३$ या प्रतिक्रिया यांतील समीकरण ७ ने निश्चित केलेला संबंध आ. १६ इ मधील आलेखात उ या उगमबिंदूतून निघणाऱ्या तीन सरळ रेषांनी दाखविला आहे. $धा_१$ प्रतिक्रिया $धा_न$ पर्यंत वाढविण्यास लागणारा $भा_१$ हा भार नम्य विसर्पणाच्या अवस्थेचा प्रारंभ निश्चित करतो. या अवस्थेत विचाराधीन समस्येच्या उत्तरासाठी पुढील पूरक समीकरण लागते.

$$धा_१ = धा_न \qquad [८]$$

हे समीकरण व समीकरण ६ चा संयोग करून आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$धा_२ = \tfrac{३}{२}\,भा - २\,धा_न \text{ आणि } धा_३ = धा_न - \tfrac{१}{२}\,भा \qquad [९]$$

भा चे मूल्य *भा*, पेक्षा अधिक, परंतु *भा*$_{मह}$. पेक्षा लहान असेल, अशा वेळी वरील मूल्ये मिळतात. आ० १६ इ मध्ये हा संबंध *गम*, *तम* आणि टठ या तीन रेषांनी दाखविला आहे. यांपैकी एकही रेषा आलेख-अक्षांच्या उगमातून निघत नाही.

विचाराधीन व्यूहाच्या (आकृती १६ आ) नम्य समतोल अवस्थेसाठी पुढील लक्षणे आवश्यक ठरतात.

$$धा_१ = धा_२ = धा_न \text{ आणि } भा = भा_{मह}.$$

तदनुषंगिक उत्तर पुढीलप्रमाणे असते.

$$भा_{मह}. = २\, धा_न,\; धा_१ = धा_२ = धा_न \text{ आणि } धा_३ = ०$$

घसरपृष्ठावरून सरकून घडणाऱ्या एखाद्या मृत्तिकाराशीच्या उच्छेदासाठी आवश्यक असलेले बळ, भार किंवा बलांचा व्यूह यांचे गणित आणि या समस्येतील *भा*$_{मह}$. साठी मांडलेले गणित ही दोन्ही सारखीच म्हणता येतील. त्यानुसार असे म्हणता येईल की, घसरण होण्याच्या किंचित अगोदर घसरपृष्ठाच्या वरील भागात स्थित असलेला मृत्तिकाराशी नम्यतेसह स्थितिस्थापक समतोलाच्या किंवा पूर्णतया नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असू शकेल. घसरपृष्ठावरील प्रत्येक बिंदुस्थानाची प्रतिबल-परिस्थिती कूलोमच्या पुढील समीकरणाने व्यक्त होणारी असली पाहिजे.

$$क = स + ७\, स्प\, ϑ$$

येथे ७ हे घसरपृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबल असून क हा एकांक क्षेत्रावरील कार्तनिक विरोध आहे. त्याचप्रमाणे समीकरणे १ आणि २ यांनी व्यक्तविलेल्या समतोलाच्या अटीही पुऱ्या झाल्या पाहिजेत. उदाहरण म्हणून आ. १६ ई मध्ये $dल$ हा घसरपृष्ठाचा एक तुकडा व त्यालगतच्या मृत्तिकेचा समपार्श्व खंड दाखविले आहेत. समाकर्षणहीन वालुकांच्या बाबतीतील कूलोमच्या

$$क = ७\, स्प\, ϑ$$

या समीकरणाशी समीकरणे १ व २ यांचा संयोग करून कोटरने (१८८८) पुढील समीकरण मिळविले.

$$\frac{d७}{dल} - २\, ७\, स्प\, ϑ\, \frac{dट}{dल} = घ\, ज्या\,(ट - ϑ)\, कोज्या\, ϑ \qquad [१०]$$

येथे ट म्हणजे $dल$ हा घसरपृष्ठाचा तुकडा आणि क्षितिजदिशा यांतील कोन आहे. समीकरण १० **कोटरचे समीकरण** म्हणून प्रसिद्ध आहे. वालुकाराशीतील घसरपृष्ठाचा आकार आणि वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन ज्ञात असतील, तर या समीकरणाच्या

साहाय्याने उपरोक्त पृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण आणि फलरूप दाबाची कारकदिशा या गोष्टी ठरविता येतात. परंतु त्यासाठी उदासीन प्रतिबलांचे मूल्य शून्य असावे लागते. याकीने (१९३६) असे दाखवून दिले की, समीकरण १० समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांनाही लागू पडते. वालुकेतील प्रतिबलांत कार्यसाधक आणि उदासीन अशा दोन्ही प्रतिबलांचा अंतर्भाव होत असेल, तर कोटरच्या समीकरणाऐवजी अशा समीकरणाचा उपयोग केला पाहिजे की, ज्यांत उच्छेदकारी प्रतिबल-परिस्थितीवरील उदासीन प्रतिबलांच्या परिणामाची दखल घेतली जाईल (कॅरिलो १९४२ अ).

माथ्याची कड स्थिर राहून उभा आधार कलला असता त्यावर येणाऱ्या आडव्या वालुका-दाबाचे वितरण ठरविण्यासाठी ओह्‌देने (१९३८) कोटरच्या समीकरणाचा उपयोग केला आहे. (परि० २० पाहा.) प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ आणि गृहीत धरलेले घसरपृष्ठ यांत किती फरक पडतो, ह्यावर अशा प्रयत्नांतून मिळणाऱ्या फलितांतील चूक अवलंबून असते. मृत्तिकादाबसिद्धांत या विषयात कोटरने केलेले महत्त्वाचे कार्य सारांशरूपाने रैसनेरने प्रसिद्धिले आहे (१९०९).

वरील परिच्छेदात दिलेली समीकरणे म्हणजे द्विमितीतील प्रतिबल-समस्यांची शास्त्रपूत उत्तरे, कार्टेशियन सहनिर्देशकांच्या परिभाषेत देणारी मूलभूत समीकरणे होत. काही विशिष्ट परिस्थितीत त्रिज्यात्मक किंवा द्वित्रिज्यात्मक सहनिर्देशकांचा वापर करणे अधिक सुकर असते. तसे केल्यास मूलभूत समीकरणे सोयीस्कररीत्या बदलून घ्यावी लागतात.

वस्तुस्थिती आणि समीकरणांना आधारभूत मानलेली तद्विषयक गृहीते यांमध्ये जेवढी एकवाक्यता असेल, तीपेक्षा अधिक एकवाक्यता, या मूलभूत समीकरणांतून मिळणाऱ्या शास्त्रपूत उत्तरांतून अपेक्षिता येणार नाही. कारण पोलादाचा अपवाद वगळता प्रत्यक्षातील कोणतीही बांधकामयोग्य सामग्री, तसेच कोणतीही मृत्तिका यांचे प्राकृतिक गुणधर्म, गृहीत धरलेल्या गुणधर्मांशी तंतोतंत जुळणारे असतात, असे म्हणता येणार नाही.

गृहीते आणि वस्तुस्थिती यांतील एकवाक्यतेच्या अभावांचे व्यावहारिक परिणाम जाणून घेण्यासाठी आ. १६ आ मधील उदाहरणाकडे पुन्हा वळले पाहिजे. त्या ठिकाणी स्तंभांच्या स्थितिस्थापक वर्तनाचा नम्य वर्तनात होणारा बदल अकस्मात घडून येतो, असे गृहीत धरले आहे. असे करणे स्थितिस्थापकता आणि नम्यताविषयक सिद्धांतांतील मूलभूत गृहीतांशी सुसंगतच आहे. परिणामी *भा* हा भार आणि स्तंभांवरील भारांशांचा अन्योन्य संबंध दाखविणाऱ्या रेषांमध्ये *भा* = *भा*, हे मूल्य येताच एकदम खंड पडतो. प्रत्यक्षात मात्र वर्तनातील उपरोक्त बदल सावकाश होतो. अर्थातच जसाजसा वश्यताबिंदू जवळ येतो, तसतशी *धा* / ह या भारजन्य ऱ्हस्वत्वदर्शक गुणोत्तराच्या

मूल्यात घट होते. अर्थातच *भा* आणि *धा*, ते $धा_3$ या प्रतिक्रिया यांच्यामधील संबंधांचे सत्य स्वरूप तुटक रेषांनी (आ. १६ इ) दाखविल्याप्रमाणे असते. तरीही तुटक रेषांऐवजी सलग रेषांनी दाखविलेल्या संबंधालाच समस्येचे काटेकोर उत्तर समजण्याचा साधारणपणे प्रघात आहे. सलग आणि तुटक रेषांच्या कोटीमूल्यांतील फरक म्हणजे सलग रेषेने व्यक्त केलेल्या शास्त्रपूत उत्तरात समाविष्ट झालेली चूक होय.

मूलतःच सुकरतादायी गृहीतांचा अवलंब करून शास्त्रपूत उत्तरे प्राप्त होत असली, तरीही व्यावहारिक दृष्ट्या उल्लेखनीय महत्त्वाच्या असलेल्या कित्येक समस्यांची शास्त्रपूत उत्तरे मिळण्याचा संभव अद्यापही अल्पच आहे. अन्य काही समस्या शास्त्रपूत रीतीने सोडविल्या असल्या, तरी त्यांतून शेवटी मिळणारी समीकरणे इतकी क्लिष्ट आहेत की, दैनंदिन उपयोगाच्या दृष्टीने ती निरुपयोगी ठरतात. म्हणून व्यवहारात आपल्याला बऱ्याच प्रमाणात सुगम गणितकृतींवरच विसंबावे लागते.

स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्यांची सुगम उत्तरे शोधण्याच्या प्रयत्नांतूनच निम्नस्तराच्या प्रतिक्रियेचा गुणांक देणाऱ्या सिद्धांतांसारखे सिद्धांत प्राप्त झाले आहेत (प्रकरण १६). भारयुक्त मृत्तिकेचे वर्तन, समान ताठपणाच्या व समान अंतरावर स्थित असलेल्या सर्पिलांच्या गादीच्या वर्तनासारखे असते, अशी कल्पना स्तर-प्रतिक्रियेत केलेली आहे. अशा गृहीतात अंतर्भूत होणारी चूक फार गंभीर असू शकते. संभाव्य घसरपृष्ठाच्या वर असलेल्या मृत्तिकाराशीच्या समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचा ऊहापोह करणारे सुगम सिद्धांत—उदा., नेहमीच्या उल्लेखातले मृत्तिकादाबविषयक आणि उतारस्थैर्यविषयक सिद्धांत—त्या मानाने फारच अचूक म्हणावे लागतील.

या वर्गातील बऱ्याचशा समस्यांची शास्त्रपूत उत्तरे अतिक्लिष्ट असतात. त्यामुळे सुबोध गणितकृतींची विशेष निकड भासते. या कृतींमध्ये प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठाऐवजी सोप्या समीकरणाने व्यक्त करता येईल असे काल्पनिक पृष्ठ विचारात घेतले जाते. मृत्तिकेत घसरपृष्ठाचे स्थान असेच असावे लागते की, त्यावरून होणाऱ्या घसरणीच्या प्रतिकारासाठी निर्माण होणारे बल महत्तम असावे. अशा पद्धतीने काढलेली उत्तरे आणि शास्त्रपूत उत्तरे यांची तुलना केली असता, असे दिसून आले आहे की, घसरपृष्ठाच्या आकाराला सोपे रूप देण्याने होणारी चूक बऱ्याच वेळा क्षुल्लक असते. वक्रपृष्ठाऐवजी सरळ घसरपृष्ठ गृहीत धरून बसविलेला आधारभिंतीवरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा कूलोमप्रणीत सिद्धांत, हे या प्रकाराचे प्रख्यात उदाहरण आहे. या गृहीतामुळे होणारी संभाव्य चूक ५% पेक्षा अधिक असत नाही. (परि. २३ पाहा.) शास्त्रपूत उत्तर आणि सुगम पद्धतीने मिळालेले उत्तर यांत असणारा कित्येक टक्के फरक हा साधारणतः यांपैकी कोणतेही उत्तर व सत्यस्थिती यांतील फरकाशी तुलना करता फारच अल्प असतो असे आढळते. सुगम समीकरणांमुळे प्राप्त होणारा लाभ बघता, तो अधिकच क्षुल्लक भासतो.

शास्त्रपूत उत्तर प्राप्त होईपर्यंत सैद्धांतिक चुकांचे गांभीर्य कळून न येण्याचा दोष बऱ्याचशा जुन्या सत्यसमीप सिद्धांतांत आहे. प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा कूलोमचा सिद्धांत हे त्याचे एक उदाहरण आहे. या सिद्धांतानुसार मिळणारा प्रतियोगी मृत्तिका-दाब प्रत्यक्षातील दाबापेक्षा ३० टक्क्यांहून अधिक असू शकतो. या वस्तुस्थितीचा किंचितही संशय न येता हा सिद्धांत शतकाहून अधिक काळ वापरला गेला. व्यावहारिक बलविज्ञानाच्या इतर क्षेत्रांत अशा प्रकारचा धोका **शैथिल्य-पद्धती** या सामान्य संज्ञेने ज्ञात असलेल्या पद्धतींचा वापर करून टाळता येतो. त्यांना क्रमशः सत्यसमीपगामी पद्धती असेही म्हणता येईल (साऊथवेल १९४०). अशा पद्धतीचा अवलंब स्थापत्यसमस्या सोडविण्यासाठी केल्याचे पहिले आणि प्रख्यात उदाहरण म्हणजे सलग चौकटींच्या विश्लेषणासाठी वापरलेली हार्डीक्रॉसप्रणीत **परिबल-वितरण पद्धत** हे होय (क्रॉस १९३२). एखाद्या व्यूहाच्या समतोलाची प्रत्येक अवस्था आणि त्याची संभाव्य कार्यशक्ती लघुतम असण्याची अवस्था या एकच असतात, या तत्त्वावर ही पद्धत आधारलेली आहे.

शैथिल्य पद्धतींचा वापर केल्यामुळे सापेक्षतः सुबोध समीकरणे प्राप्त होतात. तसेच त्यांतील उणिवांच्या मर्यादांची स्पष्ट जाणीव राहते. त्यामुळे मृत्तिकाबलविषयक समस्यांच्या बाबतीत त्या अत्यंत सोयीस्कर वाटतात; कारण मृ. ब. विज्ञानाचे स्वरूपच असे आहे की, काटेकोर उत्तरांची शक्यता किंवा आवश्यकता तेथे वर्ज्य मानावी लागते. या पद्धतींचा आणखी एक उपयुक्त विशेष असा आहे की, त्यांतील रीतींचा वापर करीत असताना, आकडेमोडीच्या प्रत्येक पायरीला आपण काय करीत आहोत याचे सुस्पष्ट चित्र मनश्चक्षूंपुढे असणे आवश्यक असते. मृ. ब. वि. तील सिद्धांतांचा बराचसा दोषपूर्ण वापर गणिती कृतीच्या प्रत्यक्षातील अर्थाच्या बाबतीतील चुकीच्या कल्पनांमुळे झालेला असल्यामुळे, या पद्धतींतील हे वैशिष्ट्य फार महत्त्वाचे ठरते.

मृत्तिकाबलविज्ञानातील समस्यांच्या बाबतीत शैथिल्य पद्धतींचा प्रत्यक्ष वापर करण्याचा प्रयत्न अद्याप झालेला नाही; परंतु तशी चिन्हे मात्र दिसत आहेत.

मृ. ब. वि. च्या व्यावहारिक उपयोगात सुबोधतेचे महत्त्व किती आहे ते अधिक आवर्जून सांगण्याची आवश्यकता नाही. अर्थातच ही सुबोधता प्राणभूत घटकांचा प्रभाव दुर्लक्षून प्राप्त झालेली नसावी. अशा सुबोधतेची आवश्यकता मृत्तिकेच्या प्रकृतिधर्माशीच निगडित आहे. पूर्णत्वाने समांग मृत्तिका अस्तित्वात नसल्यामुळे व मृत्तिकांचे वास्तवातील प्राकृतिक गुणधर्म क्लिष्ट असल्यामुळे मृ. ब. वि. तील सगळे सिद्धांत म्हणजे विचाराधीन क्लिष्ट समस्यांचे आकलन होण्याच्या दृष्टीने केलेली ईषत् वाटचाल आहे एवढेच. अर्थातच व्या. मृ. ब. वि. च्या प्रत्येक क्षेत्रात काटेकोर उत्तर मिळविण्यापेक्षासुद्धा, गृहीत धरलेली परिस्थिती आणि प्रत्यक्ष परिस्थिती यांतील अनेक संभाव्य भिन्नत्वांचा प्रभाव निश्चित करण्यावरच भर असतो.

एखाद्या समस्येत अंतर्भूत असणाऱ्या भिन्नभिन्न घटकांचे सापेक्ष महत्त्व एका दृष्टिक्षेपात डोळ्यापुढे उभे करणाऱ्या सुबोध समीकरणांच्या आधारेच ते करणे शक्य होते. या उलट, बहुतांश शास्त्रपूत उत्तरे फारच क्लिष्ट असल्यामुळे हा महत्त्वाचा उद्देश, ती सफल करू शकत नाहीत. परंतु अशा उत्तरांचे खरे मोल, सुबोध विश्लेषणातून मिळणाऱ्या फलितांतील सैद्धान्तिक चुकांचे महत्त्व दाखविण्याच्या त्यांच्या पात्रतेत असते. या दृष्टीने पाहता अशा शास्त्रपूत उत्तरांचे महत्त्व अनमोल आहे. तथापि कोष्टके आणि आलेख अशा स्वरूपांत ही उत्तरे मांडली नाहीत, तर उपरोक्त कार्यापलीकडे या क्लिष्ट शास्त्रपूत उत्तरांना काहीच कार्य उरत नाही. मृ. ब. वि. तील समस्यांची शास्त्रपूत उत्तरे मिळविता येण्याची पात्रता, त्या क्षेत्रात यशस्वीपणे कार्य करता येण्यासाठी आवश्यकच आहे असे नाही. संशोधनकार्यातील व्यक्ती किंवा प्रत्यक्ष काम करणारे स्थापत्यविशारद या दोहोंना शास्त्रपूत उत्तरे प्राप्त करून घेण्याच्या विषयाचे सर्वसामान्य ज्ञान पुरेसे होते. शास्त्रपूत उत्तरे शोधून काढण्याचा विषय गणितज्ज्ञांकडे सोपविणेच इष्ट. याच कारणास्तव या ग्रंथात केवळ सुबोध पद्धतींचाच ऊहापोह केला जाईल. जेथे जेथे शास्त्रपूत उत्तरांचा उल्लेख करणे आवश्यक किंवा उपयुक्त असेल तेथे फक्त त्यांतील फलिते दिली जातील.

सुकरतादायी गृहीतांमुळे निर्माण होणाऱ्या दोषांशी तुलना केली असता प्रमाणाबाहेर वाटावा इतका गणिती काटेकोरपणा मृ. ब. वि. विषयक अनेक प्रगत प्रबंधांतून आढळतो. ही गृहीते स्पष्टपणे आणि पूर्णपणे उद्धृत केलेली असतील, तर असे प्रबंध हे प्रामाणिक बौद्धिक प्रयत्न आहेत असे तरी मानता येते व असा प्रयत्न कितपत यशस्वी झाला आहे त्याविषयी वाचक स्वतः निर्णय घेऊ शकतो. परंतु अशा प्रबंधांतून महत्त्वाच्या सर्व गृहीतांचे निवेदन केलेले आहे, असे अपवादरूपानेच आढळते. गृहीतांच्या संचातील त्रुटी जाणण्याइतके विषयाचे ज्ञान असणारे वाचक विरळा असल्यामुळे, गृहीते पूर्णपणे न देता लिहिलेल्या अशा सैद्धांतिक प्रबंधांनी हिताऐवजी अहितच होण्याचा संभव अधिक.

क्वचित असेही घडते की, संशोधकांना स्वतःलासुद्धा संशय न येता, ज्यांचा गंभीर परिणाम होईल अशी गृहीते, त्यांच्या लेखनात समाविष्ट झालेली असतात. त्यांच्या प्रबंधांची कठोर छाननी केली असता असेही आढळून येण्याचा संभव असतो की, जुन्याच समस्या, नवीन आणि वरवर अधिक शास्त्रशुद्ध वाटणाऱ्या पद्धतींनी सोडविण्याच्या खटाटोपात, त्यापासून मिळणाऱ्या उत्तरांतील दोषात्मकताच वाढलेली आहे. स्पष्ट परंतु चालवून घेता येतील, अशा गृहीतांऐवजी अस्पष्ट आणि अतिशय घातुक गृहीतांचा अवलंब या नादात केलेला असतो हे त्याचे कारण आहे. अशा चुकीच्या मार्गाने केलेल्या खटाटोपाची उद्बोधक उदाहरणे म्हणून उतारांचे स्थैर्य आणि एका स्थूणेची किंवा स्थूणासमूहाची भारधारणक्षमता यांचे विवेचन करणाऱ्या प्रगत सिद्धांतांची देता येतील.

उपरोक्त एक किंवा अनेक उणिवांनी युक्त अशा अनेक प्रबंधांच्या अस्तित्वामुळे आपल्या मृत्तिकाविषयक कल्पनांची बैठक पक्की करू पाहणाऱ्या नव्या अभ्यासकाला मार्गदर्शन नसेल, तर फारच अडचणी येतात. अशा प्रकारच्या प्रबंधांचा उल्लेख पुढील प्रकरणांतून केलाच, तर त्यांतील उणिवांचाही निर्देश केला जाईल.

द्वितीय खंड

आदर्श मृत्तिकांतील कार्तनिक उच्छेदाची लक्षणे

प्रकरण ५

आदर्श मृत्तिकांतील छत्रक्रिया

१८. **व्याख्या :** मृत्तिकाराशीच्या आधाराचा इतर सर्व भाग स्वस्थानी राहून एखादाच भाग विचलित झाल्यास अशा भागालगतची मृत्तिका, आजूबाजूच्या स्थिर भागांच्या संदर्भातील, स्वतःच्या मूळ स्थानापासून बाहेर सरकते. स्थिर भाग आणि सरकलेला भाग ह्या दोहोंच्या संपर्कात असणाऱ्या भागातील कार्तनिक विरोधाने अशा तऱ्हेच्या सापेक्ष हालचालीला प्रतिबंध होतो. सरकलेल्या भागाला मूळ स्थानीच ठेवण्याकडे या विरोधाची प्रवृत्ती असल्यामुळे विचलित झालेल्या आधारावरील दाब उणावतो आणि बाजूच्या स्थिर भागावरील दाब वाढतो. सरकणाऱ्या मृत्तिकाराशीकडून आसपासच्या स्थिर भागावर अशा प्रकारे दाब संक्रमित होण्याच्या क्रियेस **छत्रक्रिया** अशी संज्ञा प्रचलित आहे. तसेच विचलित होणाऱ्या भागावर मृत्तिकेने **छत्र धरले** किंवा तिने **छत्ररूप धारण** केले असेही म्हणण्याचा प्रघात आहे. विचलित झालेल्या आधाराचाच एक भाग जवळच्या इतर भागांपेक्षा अधिक प्रमाणात विचलित झाला तरीही छत्रक्रिया घडून येते.

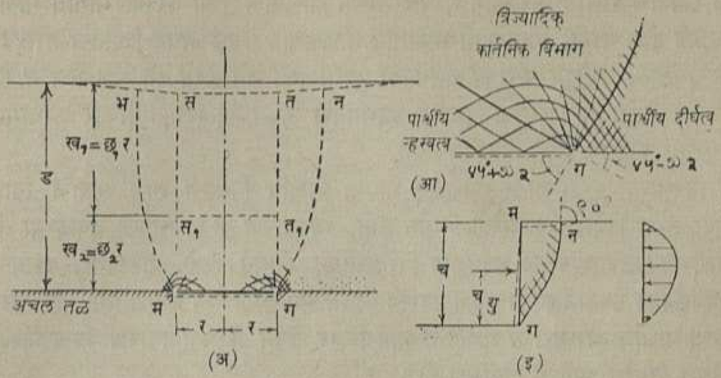
छत्रक्रिया ही क्षेत्रात तसेच प्रयोगशाळेत अनुभवास येणारी एक नित्याची घटना आहे. मृत्तिकेतील छत्रक्रिया सर्वस्वी कार्तनिक प्रतिबलांच्या द्वारे टिकवून धरली जाते; म्हणून कार्तनिक प्रतिबलांच्या अस्तित्वावर अवलंबून असणाऱ्या इतर प्रतिबल-परिस्थितीं-इतकीच ती स्थायी स्वरूपाची असते. स्तंभपादकाखालील प्रतिबल-परिस्थितीचे उदाहरण या संदर्भात सांगता येईल. वालुकेमध्ये स्थायी स्वरूपाची कार्तनिक प्रतिबले असणे शक्य नसते, तर वालुकेवरील पादक अनिश्चित कालापर्यंत खचत राहिले असते. याउलट, स्थैतिक बले तीच ठेवून एखाद्या पादकाचे अधिक अवसीदन किंवा आधार-भिंतीचे बाह्य दिशेतील अधिक विचलन घडवून आणणाऱ्या प्रत्येक बाह्य प्रभावामुळे, आधीच अस्तित्वात असलेल्या छत्रक्रियेच्या व्याप्तीमध्ये घट होईल असेही अपेक्षिले पाहिजे. कंपन हा अशा प्रकारचा एक महत्त्वाचा प्रभाव आहे.

पुढील परिच्छेदात दोन प्रातिनिधिक उदाहरणांचे विवरण केले जाईल: (१) क्षितिज-समांतर आधाराच्या स्थानिक विचलनामुळे निर्माण होणारी आदर्श वालुकेतील छत्रक्रिया आणि (२) क्षितिजलंब आधाराच्या तळाकडचा भाग बाहेरच्या बाजूस विचलित झाला असता लगतच्या वाळूत निर्माण होणारी छत्रक्रिया.

१९. **छत्ररूप विभागातील प्रतिबल-परिस्थिती :** आकृती १७ *अ* मध्ये तळाला आधार दिलेला एक वालुकाथर दाखविला आहे. या आधारातील *गम* हा

पट्टीच्या आकाराचा भाग हळूहळू खाली सरकवीत नेऊन आधारामध्ये स्थानिक विचलन घडवून आणता येते. या पट्टीच्या विचलनास प्रारंभ होण्यापूर्वी तळाच्या आधारावर सगळीकडे उभ्या दिशेतील दाब सारखाच असतो आणि त्याचे मूल्य वालुकेची घनता × थराची उंची इतके असते. पट्टीचे अधोगमन तिच्यावरील वालुकेच्या अधोगमनास कारणीभूत होते. वालुकाराशीचा विचलित भाग आणि स्थिर भाग यांच्या सीमांवर निर्माण होणाऱ्या घर्षणात्मक विरोधाने या विचलनाला प्रतिबंध केला जातो. परिणामी, विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील एकूण दाब जेवढा उणावतो, तेवढ्याच प्रमाणात आधाराच्या उर्वरित स्थिर भागावरील दाब वाढतो. एका ठिकाणी घटलेल्या व दुसऱ्या ठिकाणी वाढलेल्या दाबाचे मूल्य दोहोंच्या सीमांवर कारक होणाऱ्या कार्तनिक विरोधाच्या उभ्या दिशेतील घटकाएवढे असते. विचलनाला प्रारंभ होण्यापूर्वी पट्टीच्या अगदी लगत वरच्या भागात प्रत्येक ठिकाणी, उभ्या प्रधान प्रतिबलाचे जे मूल्य असते, त्याच्याशी तुलना करता विचलनानंतरचे त्याचे मूल्य फारच लहान असते. वालुकाथराच्या तळावरील एकूण भार मात्र तोच राहतो; कारण तो नेहमीच एकूण वालुकेच्या वजनाइतका असतो. तेव्हा विचलित झालेल्या पट्टीवरील उभ्या दाबात झालेल्या घटीमुळे, पट्टीजवळच्या स्थिर आधारावरील उभ्या दाबात वाढ झालेली दिसून आली पाहिजे. या घटनेचा परिणाम म्हणून पट्टीच्या कडांजवळील उभ्या दाबाची तीव्रता एकदम वाढलेली दिसते. या विक्षेपामुळे आकृती १५ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभागांच्या अस्तित्वाची आवश्यकता निर्माण होते. याचप्रमाणे पट्टीच्या दोन्ही बाजूंकडील तीव्र दाबाखाली असलेल्या या विभागांतील वालुकेचे पार्श्वीय विस्तरणही त्रिज्यादिक् कार्तनिक बलामागोमाग येतेच. हे विस्तरण पट्टीच्या दोन्ही बाजूंकडून तिच्यावर स्थित असलेल्या व ज्यातील दाब उणावला आहे त्या भागाच्या दिशेने होते. वालुकाथराखालचा तळ पूर्णत्वाने गुळगुळीत असेल, तर या विस्तरणाची कार्तनिक प्रतिमा आकृती १७ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते. तीच प्रतिमा आकृती १७ आ मध्ये मोठ्या आकारमानात काढली आहे.

उपरोक्त पट्टीचे अधस् दिशेने पुरेसे विचलन होताक्षणीच दोन पृष्ठांवरून कार्तनिक उच्छेद घडून येतो. ही घसरपृष्ठे पट्टीच्या कडांपासून निघून वालुकेच्या पृष्ठभागापर्यंत पोचतात. पृष्ठभागाच्या आसमंतात सर्व वालुकाकण अधस् दिशेने सरकत असतात. ही गोष्ट दीर्घकालीन प्रकाशलेखाने पुनः पुनः दाखवून दिलेली आहे. घसरपृष्ठे वालुकेच्या पृष्ठभागाला काटकोनात छेदत असतील, तरच अशी हालचाल कल्पिता येते. उच्छेद घडत असताना आकृती १७ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वालुकेच्या पृष्ठभागावर परातीच्या आकाराचा खळगा दिसतो. अशा खळग्याच्या बाजू घसरपृष्ठांना जेथे छेदतात, त्या ठिकाणी त्यांचा उतार तीव्रतर असतो. खळग्याच्या बाजूंमधील अंतर मोजले असता विचलित झालेल्या पट्टीच्या रुंदीपेक्षा ते नेहमीच अधिक असल्याचे आढळते. अर्थातच घसरपृष्ठांचा आकार आकृती १७ अ मध्ये *गन* आणि *मभ* या



आकृती १७ : समाकर्षणहीन वालुकेतील उच्छेदपूर्व छत्रक्रिया. (अ) वालुकाथरांपैकी एका लांब व अरुंद भागाच्या अधस् दिशेतील विचलनामुळे होणारा उच्छेद; (आ) रेखाकृती (अ) मधील तपशील, मोठ्या आकारमानात; (इ) माथ्याची कड स्थिर राहून पार्श्वीय आधार कलल्यामुळे होणारा वालुकेतील कार्तनिक उच्छेद.

रेषांनी दाखविल्याप्रमाणे असला पाहिजे. *गन* आणि *मभ* या घसरपृष्ठांचा आकार व्यक्त करणारी समीकरणे शोधून काढण्याची समस्या अद्याप सोडविली गेलेली नाही; परंतु या बाबतीत केलेल्या प्रयोगांवरून (व्हॉल्मी १९३७) असे दिसते की, ड/२र या पदाचे मूल्य लहान असताना या पृष्ठांच्या उताराचा सरासरी कोन जवळजवळ ९०° असतो. परंतु ड/२र या पदाचे मूल्य अतिशय वाढल्यास हाच कोन ४५° + ळ/२ पर्यंत खाली येतो.

आकृती १७ अ मधील *गन* आणि *मभ* या दोन घसरपृष्ठांनी सीमित झालेल्या वालुकाखंडाच्या तळाकडच्या भागातील उभा दाब ठरविण्यासाठी, उपरस्थ वाळूच्या वजनातून जवळच्या घसरपृष्ठांवरील घर्षणजन्य विरोधाचा उभ्या दिशेतील घटक उणे करावा लागतो. विचलित झालेल्या पट्टीवरील वालुकेच्या वजनाचे बाजूच्या राशीवर होणारे हे प्रक्षेपण म्हणजेच छत्रक्रिया होय.

उभ्या आधाराचा तळाजवळील भाग पार्श्वीय दिशेने विचलित झाला असता, वालुकाराशीत उद्भवणाऱ्या छत्रक्रियेचे विश्लेषणही अशाच उपपत्तीच्या साहाय्याने करणे शक्य आहे. आकृती १७ इ मधील *गम* हा अशा प्रकारचा पार्श्वीय आधार आहे. वालुकेचा पृष्ठभाग समतल आहे आणि माथ्याची कड स्थिर राहून आधाराचे विचलन झालेले आहे. आधार पुरेशा प्रमाणात विचलित झाल्यानंतर वालुकेमध्ये *गन* या घसरपृष्ठावर कार्तनिक उच्छेद घडून येतो. हे घसरपृष्ठ आधाराच्या *ग* या तळापासून निघून वाळूच्या पृष्ठभागापर्यंत पोहोचलेले असते. पार्श्वीय आधाराची माथ्याची कड

मूळ स्थानीच राहात असल्यामुळे, घसरणाऱ्या वालुकाखंडाच्या वरच्या भागात पार्श्वीय विस्तरण होत नाही. त्यामुळे या भागातील वालुकाकण केवळ अधस् दिशेतच हालचाल करू शकतात. म्हणून घसरपृष्ठ वालुकेच्या पृष्ठभागाला जेथे छेदते तेथे म्हणजेच न येथे काटकोन होतो. घसरणाऱ्या खंडाच्या पृष्ठभागाचे अशा उदाहरणात होणारे अधोगमन आकृतीमध्ये तुटक रेषेने दाखविले आहे.

घसरणाऱ्या खंडाच्या तळाजवळील भागात पार्श्वीय विस्तरण झाले म्हणजे त्याचबरोबर उभ्या दिशेने ऱ्हस्वत्वही निर्माण होते. माथ्याच्या या खचण्याला जवळच्या तीव्र उताराच्या घसरपृष्ठावरील घर्षणजन्य विरोधामुळे प्रतिबंध होतो. परिणामी, खंडाच्या तळाजवळचा उभ्या दिशेतील दाब उपरस्थ वालुकेच्या वजनापेक्षा कमी होतो. ही घटना म्हणजे पार्श्वीय आधाराचा माथ्याचा भाग स्थिर ठेवून केलेल्या त्याच्या विचलनामुळे वालुकेत निर्माण झालेली छत्रक्रिया होय.

२०. **छत्रक्रियाविषयक सिद्धांत** : छत्रक्रियाविषयक प्रचलित सिद्धांतांपैकी बहुतेक सिद्धांतांतून विचलन पावणाऱ्या पट्टीवरील शुष्क वालुकेच्या दाबाचा ऊहापोह केलेला आहे. अशा सिद्धांतांचे तीन वर्ग करता येतात. पहिल्या वर्गातील सिद्धांतांच्या प्रवर्तकांनी भारयुक्त पट्टीवरील अगदी लगतच्या भागात असलेल्या वालुकेच्या समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचाच केवळ विचार केला. असे करताना पट्टीपासून दूर असलेल्या वालुकेच्या समतोलाची लक्षणे आणि उपरिनिर्दिष्ट कृतीतून निघणारे निष्कर्ष यांच्यात सुसंवाद राहतो की नाही, याचा शोध घेण्याचा त्यांनी प्रयत्नच केला नाही. दुसऱ्या वर्गातील सिद्धांतांत विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील वालुकेचा सर्वच भाग नम्य समतोल अवस्थेत असतो, असे असमर्थनीय गृहीत आधारभूत मानलेले आहे.

तिसऱ्या वर्गाच्या सिद्धांतांत *मस* आणि *गत* (आकृती १७ अ) ही पट्टीच्या कडांतून निघणारी उभी पृष्ठे हीच घसरपृष्ठे आहेत, असे गृहीत धरलेले आहे; आणि विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील दाब हा उपरस्थ वालुकेचे वजन उणे उभ्या पृष्ठांवरील संपूर्ण घर्षणजन्य विरोध या वजाबाकीइतका असतो, असे अनुमान काढलेले आहे (केन १९१६ आणि इतर). *गन* आणि *मभ* ही प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठे वक्र असतात आणि पृष्ठभागाजवळ त्यांतील अंतर पट्टीच्या रुंदीपेक्षा बरेच अधिक असते. त्यामुळे *मस* आणि *गत* या उभ्या छेदांवरील घर्षण पूर्णपणे कारक होऊ शकत नाही. या वस्तुस्थितीकडे दुर्लक्ष केल्याने उद्भवणारी चूक घातक ठरते.

पहिल्या दोन वर्गांच्या सिद्धांतांतील मूलभूत गृहीतांविषयी सर्वसामान्य ज्ञान व्हावे, या उद्देशाने पुढील भाष्य केलेले आहे. एंगेसेरने (१८८२) विचलित होणाऱ्या पट्टीवर अगदी लगतच्या भागात स्थित असलेल्या वालुकेऐवजी एक काल्पनिक छत्र गृहीत

धरले आणि त्याच्या समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांच्या आधारे पट्टीवरील दाब ठरविला. बीरबॉमरने (१९१३) पट्टीलगतच्या भागात असलेल्या वालुकेची तुलना कमानीतील संयोग-दगडाशी केली. पट्टीचा पृष्ठभाग हा या दगडाचा तळ आहे आणि त्याची बाजूची पृष्ठे सपाट असून ती पट्टीच्या कडांपासून मध्याच्या दिशेने वर जातात, असे त्याने मानले. हा संयोग-दगड स्वस्थानी धरून ठेवण्यासाठी लागणाऱ्या बलाशी सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् असलेला दाब म्हणजे पट्टीवरील दाब होय, असे त्याने उत्तर काढले. काकोने (१९३४) पट्टीवरील संपूर्ण वालुकाराशीऐवजी त्या ठिकाणी एक कमानींचा व्यूह आहे असे मानले. पट्टीच्या मध्यरेषेच्या वर स्थित असलेल्या कमानीमधील आडव्या दिशेतील लंबरूप प्रतिबल आणि समीकरण ७ (४) मधील *ण* हे विसर्पण-मूल्य गुणिले उभ्या दिशेतील लंबरूप प्रतिबल ही दोन्ही सममूल्य आहेत, असेही त्याने मानले, आणि कमानींच्या समतोलासाठी आवश्यक असलेल्या लक्षणांच्या आधाराने पट्टीवरील दाब ठरविला. व्हॉल्मीने (१९३७) *गन* आणि *मभ* (आकृती १७ अ) या वक्र घसरपृष्ठांच्या ठिकाणी तिरकस पृष्ठे गृहीत धरली. तसेच या पृष्ठांवरील लंबदिक् प्रतिबले आणि एखाद्या अपारप्राय आणि रॅन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत असलेल्या वालुकाराशीमधील तशाच प्रकारच्या तिरकस छेदावरील लंबदिक् प्रतिबले ही एकच असतात, असेही गृहीत धरले; आणि विचलित होणाऱ्या पट्टीवरचा दाब महत्तम होईल, अशा रीतीने घसरपृष्ठांच्या उताराची निवड केली. वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणकोनाच्या मूल्यात वाढ झाली, तर विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील दाबातही वाढ झाली पाहिजे, असे अनुमान त्याच्या काही संशोधनांतील फलितांवरून काढता येते. इतर सर्व सिद्धांतांनुसार आणि उपलब्ध असलेल्या प्रायोगिक फलितांनुसार असे दिसते की, अंतर्गत घर्षणकोनाचे मूल्य वाढल्यास त्याचा परिणाम नेमका उलटा होतो. रस्त्याखालच्या मोऱ्यांच्या ताठ तसेच लवचिक छपरांवर येणाऱ्या मृत्तिका-दाबाचे संशोधनही व्हॉल्मीने केले (१९३७); आणि त्यातून काढलेल्या फलितांची तुलना आधीच्या संशोधकांनी काढलेल्या फलितांशी केली. तथापि मोऱ्यांची किंवा बोगद्यांची छप्परे यांसारख्या विचलित होऊ शकणाऱ्या आडव्या आधारांवर प्रत्यक्षात येणारा मृत्तिकादाब ज्या अनेक गोष्टींवर अवलंबून असतो, त्या गोष्टी, सैद्धांतिक संशोधनात आजवर ज्यांचा विचार झालेला आहे, त्यांहून निराळ्याच आहेत.

वर उद्धृत केलेले सर्व सिद्धांत एका बाबतीत अनुभवाशी सुसंगत आहेत. म्हणजे असे की, विवक्षित रुंदीच्या व विचलित होणाऱ्या आडव्या पट्टीवरील वालुकाराशीचे वजन वाढत गेल्यास त्या वाढीपेक्षा तिच्यावर येणाऱ्या दाबातील वाढ कमी प्रमाणात होते आणि या दाबाचे मूल्य असंपातपद्धतीने एका निश्चित मूल्याप्रत जात असते. परंतु पट्टीवरील दाबाची निरनिराळ्या सिद्धांतांनुसार प्राप्त होणारी मूल्ये अगदीच वेगळी असतात. या सिद्धांतांपैकी कोणता अधिक ग्राह्य मानावयाचा, हे ठरविण्यासाठी विचलन पावणाऱ्या पट्टीवर केलेल्या प्रयोगांचा आधार घेतला पाहिजे व पट्टीवरील प्रतिबल-परिस्थितीबाबतची अशा प्रयोगांतून प्राप्त होणारी फलिते आणि सिद्धांतांतील मूलभूत गृहीते यांची तुलना केली पाहिजे. अद्याप तरी असे परिपूर्ण संशोधन झालेले नाही.

अर्थातच या भिन्नभिन्न सिद्धांतांचे तौलनिक गुणावगुणही अज्ञातच आहेत. घसरपृष्ठे उभी असतात, या गृहीतावर आधारित असलेले तिसऱ्या वर्गातील सिद्धांत हे सर्वांत सोपे सिद्धांत आहेत. सुदैवाने या गृहीतांतील दोषांची कारणे स्पष्टपणे दृष्टोत्पत्तीस आलेली आहेत. असे दोष असूनही या सिद्धांतांतून प्राप्त होणारी अंतिम फलिते आणि उपलब्ध असलेली प्रायोगिक माहिती यांत बरीच सुसंगती आढळते. म्हणून पुढील विवेचनात या वर्गातील सिद्धांतांमागील मूलभूत गृहीतांचाच फक्त आधार घेतला जाईल. या विषयाच्या शास्त्रशुद्ध अभ्यासासाठी व्हॉल्मीच्या प्रकाशित वाङ्मयाचा अभ्यास केला पाहिजे (व्हॉल्मी १९३७).

मस आणि *गत* (आकृती १७ अ) या रेषांनी दाखविल्याप्रमाणे घसरपृष्ठे उभी असतात, असे आपण गृहीत धरले, तर विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील दाब ठरविण्याची समस्या आणि समपार्श्वकारी कणगीच्या विचलित होणाऱ्या तळावरील दाब ठरविण्याची समस्या एकाच प्रकारच्या ठरतात.

समाकर्षणहीन पदार्थांच्या बाबतीत कोटरने ही समस्या शास्त्रपूत रीतीने सोडविली आहे (१८९९). भिन्नभिन्न प्रमाणांत सत्यसमीपता साधून हीच समस्या इतर संशोधकांनीही सोडविली आहे. भरणातील कोणत्याही आडव्या छेदावरील उभा दाब समप्रमाणात वितरित असतो, या गृहीताचा आधार घेऊन या समस्येचे सर्वांत सोपे उत्तर मिळविलेले आहे (जानसेन १८९५, कोएनेन १८९६). मृत्तिकेतील उभ्या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थितीशी हे गृहीत विसंगत आहे; परंतु स्थूल आडाखा बांधण्यासाठीसुद्धा आधार म्हणून घेऊ नये, इतकी मोठी चूक काही या गृहीतामुळे घडून येत नाही.

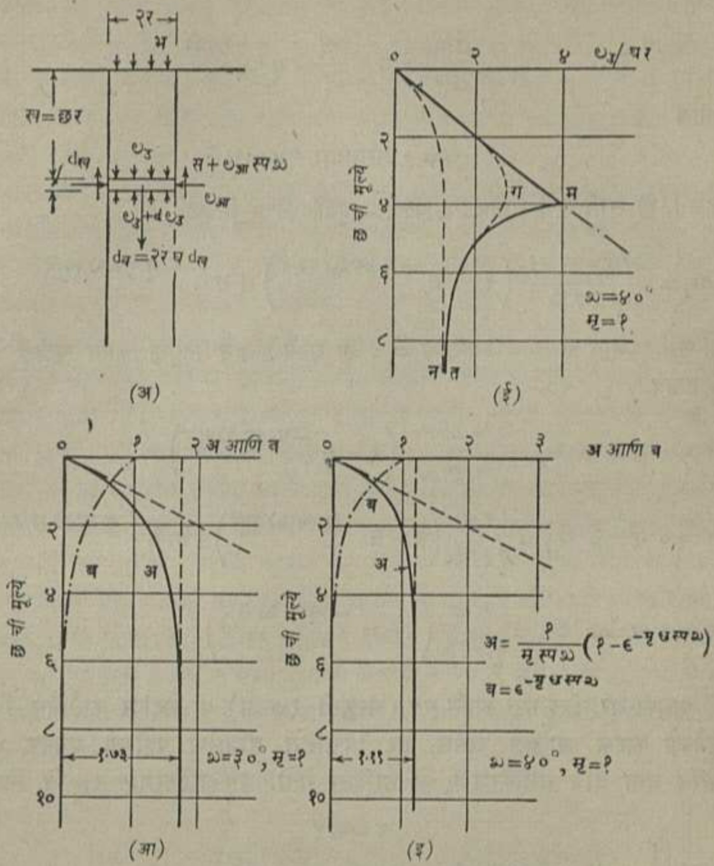
आकृती १८ अ म्हणजे दोन उभ्या घसरपृष्ठांनी सीमित झालेल्या राशीचा एक छेद आहे. येथील मृत्तिकेच्या कार्तनिक विरोधाचे समीकरण खाली दिले आहे.

$$\text{क} = \text{स} + \text{७}\,\text{स्प}\,\varpi$$

मृत्तिकेची घनता *घ* असून तिच्या पृष्ठभागावर *भ* हा समप्रमाणवितरित अधिभार आहे. मृत्तिकेतील प्रत्येक बिंदुस्थानी उभ्या आणि आडव्या दाबांतील गुणोत्तराचे मूल्य *मृ* या अनुभवाधिष्ठित गुणांकाइतके गृहीत धरलेले आहे. त्यानुसार पृष्ठभागापासून *ख* या खोलीवर असणाऱ्या आडव्या छेदावरील उभे प्रतिबल $\text{७}_{\text{उ}}$ असेल, तर उभ्या घसर-पृष्ठावरील लंबदिक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल.

$$\text{७}_{\text{आ}} = \text{मृ}\cdot\text{७}_{\text{उ}} \qquad [१]$$

पृष्ठभागापासून *ख* या खोलीवरील *d*ख जाडीचे एक शकल विचारात घेऊ. प्रस्तुत



आकृती १८ : (अ) दोन उभ्या घसरपृष्ठांमध्ये स्थित असलेल्या मृत्तिकेतील दाब ठरविण्याच्या गणितामधील गृहीते दर्शविणारी रेखाकृती; (आ, इ आणि ई) : आकडेमोडीच्या फलितांचे आलेख.

आकृतीच्या पातळीला लंबरूप असणाऱ्या दिशेत त्याची लांबी एकांक मूल्याची आहे व त्याचे वजन २र $\times$ घ $\times$ dख इतके आहे. या शकलावर कारक होणारी बले आकृतीत दाखविली आहेत. शकलावर कारक असणाऱ्या बलांच्या उभ्या दिशेतील घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. हे लक्षण पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$२र.घ.d\text{ख} = २र(\text{ए}_{\text{उ}} + d\text{ए}_{\text{उ}}) - २र.\text{ए}_{\text{उ}} + २\text{स}\, d\text{ख} + २\,\text{मृ}\,\text{ए}_{\text{उ}}\, d\text{ख}\,\text{स्प}\,\text{ऊ}$$

किंवा

$$\frac{d ए_उ}{d ख} = घ - \frac{स}{र} - मृ\, ए_उ \frac{स्प ळ}{र}$$

आणि

$$ख = ० \text{ असताना } ए_उ = भ$$

असते. ही समीकरणे सोडवून आपल्याला पुढील उत्तर मिळते.

$$ए_उ = \frac{र(घ - स/र)}{मृ\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र}\right) + भ \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र} \qquad [२]$$

या समीकरणात $स = ०$ आणि $भ = ०$ ही मूल्ये क्रमाने नियुक्त करून पुढील उत्तरे मिळतात.

$$स > ० \quad भ = ० \quad ए_उ = \frac{र(घ - स/र)}{मृ.\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ.\ स्प ळ\ ख/र}\right) \qquad [३]$$

$$स = ० \quad भ > ० \quad ए_उ = \frac{र घ}{मृ\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र}\right) + भ. \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र} \qquad [४]$$

$$स = ० \quad भ = ० \quad ए_उ = \frac{र.\ घ}{मृ.\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र}\right) \qquad [५]$$

वालुका-थरातील *मस* आणि *गत* (आकृती १७ अ) या छेदांवर कार्तनिक विरोध पूर्णपणे कारक झालेला असेल, तर विचलित होणाऱ्या पट्टीच्या एकांक क्षेत्रावरील उभा दाब समीकरण ५ ने ठरविता येतो. या समीकरणात *ख* चे ठिकाणी

$$ख = छ र$$

घातले, तर पुढील उत्तर मिळते.

$$ए_उ = घ.\ अ.\ र \qquad [६अ]$$

येथे

$$अ = \frac{१}{मृ\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ\ स्प ळ\ ख/र}\right) = \frac{१}{मृ\ स्प ळ}\left(१ - \in^{-मृ\ स्प ळ\ छ}\right) \qquad [६आ]$$

$ख = \infty$ असल्यास $अ = \frac{१}{मृ\ स्प ळ}$ असे उत्तर मिळते; म्हणून

$$ए_उ = ए_{उ\infty} = \frac{घ.\ र}{मृ\ स्प ळ} \qquad [७]$$

$ऋ = ३०^\circ$ आणि $मृ = १$ म्हणजेच $मृ\ स्पऋ = ०\cdot५८$ आहे, अशा गृहीतानुसार मिळणारा आलेख, $अ$, आकृती १८ आ मध्ये दाखविला आहे. या आलेखाच्या भुजांनी $अ$ ची मूल्ये व कोटींनी $छ = ख/र$ ही मूल्ये मिळतात. आकृती १८ इ मध्ये असाच आलेख, $ऋ = ४०^\circ$ व $मृ = १$ म्हणजेच $मृ\ स्पऋ = ०\cdot८४$ ही मूल्ये गृहीत धरून काढलेला आहे.

विचलित होणाऱ्या पट्टीवर स्थित असलेल्या वालुकेमधील प्रतिबल-परिस्थिती समजावून घेण्यासाठी केलेल्या (टेरझागी १९३६ इ.) प्रयोगांवरून दोन गोष्टी दिसून येतात; त्या अशा : (१) विचलित होणाऱ्या पट्टीच्या मध्यरेषेच्या वर, लगतच्या भागात $मृ$ चे मूल्य एक असते आणि वाढत वाढत मध्यरेषेच्या वर, स्थूल मानाने २र उंचीवर ते सुमारे १·५ या महत्तम मूल्याप्रत जाते. (२) ५र पेक्षा अधिक उंचीवर असणाऱ्या वालुकेतील प्रतिबल-परिस्थितीवर पट्टीच्या अधोगमनाचा काहीच परिणाम होत नाही. तेव्हा आकृती १७ अ मधील $गम$ या विचलित होणाऱ्या पट्टीवर स्थित असलेल्या समपार्श्व खंडाच्या $मस$ आणि $गत$ या उभ्या बाजूंच्या केवळ तळाजवळील भागातच वालुकेतील कार्तनिक विरोध कार्यशील होतो, असे मानणे भाग आहे. या गृहीतानुसार समपार्श्व खंडाचा वरचा भाग, खालच्या भागावर $भ$ मूल्याचा अधिभार असल्याप्रमाणे कारक होईल, असे मानता येते; आणि म्हणून विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील दाब समीकरण ४ ने ठरविता येतो. आकृती १७ अ मधील $गमसत$ या समपार्श्व खंडाच्या उभ्या बाजूंवर $ख_१ = छ_१ र$ या खोलीपर्यंत कार्तनिक प्रतिबले नाहीत असे मानले, तर $ख_१$ खोलीवरील $स_१ त_१$ या आडव्या छेदावरील उभा दाब $भ = घख_१ = घछ_१ र$ एवढा होतो. $भ$ चे हे मूल्य आणि $ख = ख_२ = छ_२ र$ हे मूल्य समीकरण ४ मध्ये वापरून पुढील उत्तर मिळते.

$$ए_उ = घ.\ र\ अ_२ + घर\ छ_१ ब_२ = घर\ (अ_२ + छ_१ \times ब_२) \qquad [८\ अ]$$

येथे

$$अ_२ = \frac{१}{मृ\ स्पऋ}\left(१ - \epsilon^{-मृ छ_२ स्पऋ}\ आणि\ ब_२ = \epsilon^{-मृ छ_२ स्पऋ}\right) \qquad [८\ आ]$$

आहेत.

$छ_२ = \infty$ असल्यास $अ_२$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$अ_\infty = \frac{१}{मृ\ स्पऋ}$$

आणि $ब_२ = ०$ होते, या परिस्थितीतील $ए_उ$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते.

$$ए_{उ\infty} = घर\ अ_\infty = \frac{घर}{मृ\ स्पऋ}$$

हे मूल्य आणि समीकरण ७ ने मिळालेले मूल्य एकच आहेत. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे, तर $\sigma_{\text{उ}\infty}$ चे मूल्य आकृती १७ अ मधील ख_1 वर अवलंबून नाही, असे म्हणता येईल.

छ_2 आणि अ_2 यांतील संबंध आणि समीकरण ६ आ ने मिळणारा छ आणि अ मधील संबंध सारखेच आहेत. हाच संबंध आकृती १८ आ आणि १८ इ मधील सलग आलेखांनी दाखविला आहे. छ ची मूल्ये आणि तदनुषंगिक

$$\text{ब} = e^{-\text{मृ छ स्प}\,\phi}$$

ची मूल्ये यांतील संबंध आकृती १८ आ आणि १८ इ मधील तुटक आलेखांनी म्हणजेच ब या आलेखांनी दाखविला आहे.

आकृती १७ अ मधील *मस* आणि *गत* या छेदांच्या माथ्याकडील भागात कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव असतो. या गोष्टीचा प्रभाव अंकात्मक मूल्ये घातलेल्या उदाहरणाने दाखविण्यासाठी आपण पुढील गृहीते स्वीकारू : $\phi = ४०^\circ$, $\text{मृ} = १$ आणि $\text{छ}_1 = ४$. पृष्ठभाग ते $\text{ख}_1 = \text{छ}_1 \text{ र} = ४\text{र}$ ही खोली, एवढ्या भागात घेतलेल्या आडव्या छेदांवरील उभा दाब स्थिरजलदाबाप्रमाणे खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढतो. आकृती १८ ई मध्ये हा संबंध ०म या रेषेने दाखविला आहे. ख_1 पेक्षा अधिक खोलीवरील उभा दाब समीकरण ८ ने ठरविता येतो. *मत* आलेखाने दाखविल्याप्रमाणे हा दाब खोली वाढेल तसा घटत जातो आणि असंपात पद्धतीने $\sigma_{\text{उ}\infty}$ या मूल्याप्रत जात राहतो.

$\text{छ}_1 = ०$ गृहीत धरून आकृती १८ ई मधील ०*न* ही तुटक रेषा काढली आहे. समीकरण ६ ने या आलेखावरील बिंदूंच्या भुजा मिळतात. खोली वाढत जाते तेव्हा या भुजांचे मूल्यही $\sigma_{\text{उ}\infty}$ (समीकरण ७) या मूल्याप्रत पोचते. वालुकास्तराच्या माथ्याकडील भागात असणाऱ्या छत्रक्रियेच्या अभावाचा विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील $\sigma_{\text{उ}}$ या दाबावर पडणारा प्रभाव खोलीचे मूल्य सुमारे ८ र पेक्षा अधिक झाल्यावर व्यवहारतः नाहीसा होतो असे या आकृतीवरून दिसते. ϕ आणि छ_1 यांची भिन्नभिन्न मूल्ये गृहीत धरून केलेल्या संशोधनावरून असा निष्कर्ष निघतो की, विचलित होणाऱ्या पट्टीवरील दाब तिच्यापासून ४ र ते ६ र (पट्टीच्या रुंदीच्या २ पट किंवा ३ पट) उंचीवर असणाऱ्या वालुकेतील प्रतिबल-परिस्थितीवर अवलंबून नसतो.

आकृती १७ अ मधील *गस* आणि *मत* या उभ्या छेदांच्या तळाकडील भागात अस्तित्वात असणारी, कार्तनिक विरोध संपूर्णतया कार्यान्वित झाल्याची परिस्थिती, हळूहळू पालटत जाऊन या छेदांच्या वरच्या भागात असणारी कार्तनिक प्रतिबलांच्या अभावाची परिस्थिती जेव्हा निर्माण होते, तेव्हा उभ्या लंबरूप प्रतिबलात खोलीनुसार होणारा पालट आकृती १८ ई मधील ०*गत* या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे असला पाहिजे. विचलित होणाऱ्या पट्टीच्या मध्यरेषेच्या वर असणाऱ्या वालुकेतील प्रतिबले मोजली असता मिळणारा दाब-आलेख आणि ही रेषा सारखी असतात (टेरझागी १९३६ इ).

आकृती १७ इ मध्ये दाखवलेल्या उभ्या आधारावरील मृत्तिकादाबावर छत्रक्रियेचा

जो परिणाम होतो त्याचे संशोधन तर अधिकच कठीण आहे. हा परिणाम शोधण्याचा पहिला प्रयत्न केला गेला तो घसरपृष्ठ सरळ असते या सुकरतादायी गृहीताचा आधार घेऊन (टेरझागी १९३६ इ). या संशोधनातून फलिते मिळाली, ती अशी : च उंचीच्या पार्श्वीय आधारामागील वालुकेत छत्रक्रियेचा प्रादुर्भाव झाला असता दाबाचे स्थिरजल-दाबासारखे असणारे वितरण नाहीसे होते. तसेच आधाराचा तळ आणि पार्श्वीय दाबाचा कारक-बिंदू यांतील $च_{बु}$ हे अंतर वाढते. छत्रक्रियेची तीव्रता आणि तिचा $च_{बु}/च$ या गुणोत्तराच्या मूल्यावर पडणारा प्रभाव या दोन्ही गोष्टी आधारविचलनाच्या पद्धतीवर अवलंबून असतात. तळाची कड स्थिर राहून आधाराचे विचलन झाले, तर छत्रक्रियेचा प्रादुर्भावच होत नाही, मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाच्या वितरणासारखे असते; आणि $च_{बु}/च$ या गुणोत्तराचे मूल्य १/३ असते. माथ्याची कड स्थिर राहून विचलन झाले, तर दाबाचे वितरण स्थूलमानाने परिवलयाकृती असते; आणि पार्श्वीय दाबाचा कारक-बिंदू १/२ उंचीजवळ असतो. शेवटचा निष्कर्ष असा की, मूळ स्थानाला समांतर अशा ठिकाणी आधार विस्थापित झाला, तर दाबाचा कारक-बिंदू हळूहळू उंचीच्या मध्यबिंदूपासून तृतीयांश बिंदूपर्यंत खाली सरकेल, अशी अपेक्षा करता येते. निरनिराळ्या घटकांच्या प्रभावाची सर्वसामान्य कल्पना पुरेशा प्रमाणात येण्याच्या दृष्टीने हे संशोधन उपयुक्त झाले खरे; परंतु घसरपृष्ठ सरळ असते या गृहीताचा आधार घेतलेला असल्यामुळे, पार्श्वीय दाबाच्या तीव्रतेवर होणारा छत्रक्रियेचा परिणाम या विषयाची काहीच माहिती त्यातून मिळाली नाही.

ही उणीव नाहीशी करण्यासाठी घसरपृष्ठाच्या खऱ्या आकाराविषयीची परिस्थिती विचारात घ्यावयास हवी होती. ती म्हणजे पार्श्वीय आधाराची माथ्याची कड स्थिर राहात असल्यामुळे घसरपृष्ठ मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागास काटकोनात छेदन गेले पाहिजे (परिच्छेद १९ पाहा) ही होय.

मृत्तिकादाबाच्या तीव्रतेवर होणाऱ्या या परिस्थितीच्या परिणामांचे संशोधन ओह्‌देने केले. त्यासाठी घसरपृष्ठाचा आकार वर्तुळखंडासारखा असतो व हे वर्तुळ मृत्तिका-राशीच्या पृष्ठभागास काटकोनात छेदते असे त्याने गृहीत धरले (ओह्‌दे १९३८). या गृहीतानुसार मिळणारा पार्श्वीय दाब आणि त्याच्या कारक-बिंदूचे स्थान या दोन गोष्टी, जिचा अंतर्गत घर्षणकोन $\text{ॐ}=३१^\circ$ आहे, अशा आदर्श वालुकेच्या बाबतीत तीन निरनिराळ्या पद्धतींनी गणितसिद्ध केलेल्या आहेत.

यांपैकी एका पद्धतीत घसरपृष्ठावरील प्रतिबले कोटरप्रणीत १७ (१०) या समीकरणाची पूर्ती करतील, अशा प्रकारे, दाबाच्या गुरुत्वमध्याचे स्थान निश्चित केले आहे. दुसऱ्या पद्धतीत, भिंतीची पाठ आणि घसरपृष्ठ यांवरील कोणत्याही बिंदुस्थानाच्या लंबरूप प्रतिबलांची मूल्ये, वालुकाराशीच्या पृष्ठभागापासून अनुषंगिक पृष्ठाच्या दिशेने मोजलेल्या त्यांच्या अंतरांच्या वर्गाच्या प्रमाणात असतात असे गृहीत धरले आहे. घसरणाऱ्या मृत्तिकाखंडाच्या समतोलासाठी आवश्यक असलेल्या अटी पुऱ्या होतील, अशा प्रकारे

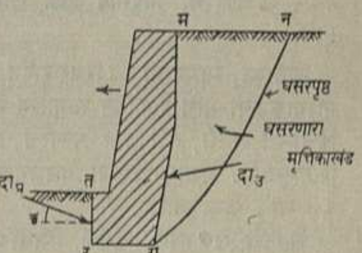
तद्विषयक समीकरणातील गुणकांची मूल्ये ठरविली आहेत. तिसऱ्या पद्धतीत, घसरणाऱ्या मृत्तिकाखंडाच्या सीमांवरील लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण स्थूलमानाने व्यक्तविणारे समीकरण निवडले आहे. मूलभूत गृहीतांमध्ये भिन्नता असूनही या पद्धतींच्या द्वारे मिळणारी मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूची तळापासूनची उंची आणि भिंतीची उंची यांच्या गुणोत्तरांची मूल्ये ०·४८ ते ०·५६ एवढ्या अत्यल्प मर्यादेतच पडतात. त्यासाठी भिंतघर्षण कोन δ मात्र शून्य मूल्याचा असावा लागतो. तथापि दाबाच्या गुरुत्व-मध्याच्या स्थानावर भिंत-घर्षणाचा फारसा परिणाम होत नाही असेही आढळून आले आहे. म्हणून दाबाचा कारकबिंदू स्थूलमानाने आधाराच्या उंचीच्या मध्यावर स्थित असतो व त्याचे वितरण आकृती १७ इ मध्ये उजव्या बाजूस दाखविल्याप्रमाणे स्थूल-मानाने परिवलयाकृती असते, या दोन गोष्टी आपण गृहीत धरू शकतो. छत्रक्रियेमुळे $च_{य}/च$ या गुणोत्तराच्या मूल्यात वाढ झाल्यास तीनुसार आधारावर येणाऱ्या आडव्या दाबातही वाढ होते, असेही या संशोधनावरून दिसून आले आहे. पार्श्वीय दाबाची महत्ता ठरविण्याची एक सोपी पद्धत परिच्छेद ६७ मध्ये वर्णिली आहे. घसरपृष्ठाचा आकार लघुगणकीय वक्राप्रमाणे असतो; आणि ते पृष्ठभागास काटकोनात छेदते, या गृहीतावर ही पद्धत आधारलेली आहे.

मृत्तिकादाबावर भिंतीच्या विचलनाच्या प्रभाव या विषयाची सर्वसामान्य गणितात्मक चर्चा याकीने (१९३८) प्रसिद्धिली आहे.

प्रकरण ६

आधारभिंतविषयक समस्या

२१. **व्याख्या :** मृत्तिकाराशींना पार्श्वीय आधार देण्यासाठी आधार-भिंतींचा उपयोग केला जातो. आधार दिलेल्या राशीला **भरण** असे म्हणतात. आधारभिंतींच्या दोन प्रमुख प्रकारांचे छेद आकृती १९ आणि २७ मध्ये दाखविले आहेत. आकृती १९ मध्ये दाखविलेल्या भिंतीला **गुरुत्वाधारी भिंत** म्हणतात; कारण पार्श्वीय मृत्तिकादाबामुळे निर्माण होणाऱ्या व आडव्या दिशेत येणाऱ्या रेट्याला तोंड देऊन स्थिर राहण्यासाठी ही भिंत स्वतःच्या वजनावर अवलंबून असते. याउलट, आकृती २७ मधील **वितानकरूपी आधारभिंत**, स्थैर्यासाठी काही प्रमाणात तिच्या मागे पादकावर स्थित असलेल्या मृत्तिकेच्या वजनावर अवलंबून असते. आधारभिंतीच्या ज्या बाजूस भरण केले जाते, तीस **भिंतीची पाठ** असे म्हणतात. ही पाठ सलग एकपृष्ठी, तशीच दोन किंवा अधिक पृष्ठांचीही बनलेली असते; त्याचप्रमाणे ती उभी तशीच तिरकसही (**उतरत्या पृष्ठाची**) असते. आधारभिंतीचा उच्छेद कलंडण्याच्या प्रकाराने (**कलंडून होणारा उच्छेद**) होतो, किंवा मूळ स्थानास समांतर असलेल्या ठिकाणी तळापासून सरकल्यामुळेही होतो (**स्थानांतर पद्धतीचा उच्छेद**). उच्छेद कोणत्याही प्रकारचा असो, त्यात भिंतीच्या पाठीलगतचा त्रिकोणाकृती मृत्तिकाखंड (आकृती १९ मधील *गमन*) खाली सरकतो. या खंडाला **घसरू पाहणारा खंड** म्हणतात.



आकृती १९ : आधारभिंतीवर उच्छेदक्षणी कारक असणारे मृत्तिकादाब

२२. **गृहीते आणि लक्षणे :** मृत्तिकादाबविषयक बरेचसे सिद्धांत पुढील गृहीतांवर आधारित असतात : भिंतीमागील भरण समदैशिक आणि समांग आहे; भरणाचे विरूपत्व भिंतीच्या पाठीला लंबदिशेत असणाऱ्या उभ्या पातळीला समांतर पद्धतीनेच निरपवादपणे घडून येते आणि भरणातील उदासीन प्रतिबले नगण्य आहेत. ज्यावेळी या मूलभूत गृहीतांऐवजी अन्य गृहीतांचा अवलंब करावा लागेल, तेव्हा तसे स्पष्टपणे

उल्लेखिले जाईल. या प्रकरणात आणखी एक गृहीत स्वीकारले आहे. भिंतीचे विचलनानंतरचे स्थान आकृती १४ इ मधील $म_1ग$ ने मर्यादित झालेल्या रेखांकित भागाच्या पलीकडे असेल, हे ते गृहीत होय. ही परिस्थिती म्हणजे एक विरूपत्व-लक्षण आहे.

मूळ प्रतिबल-परिस्थितीतून नम्य समतोल अवस्थेत जाताना *गमन* या मृत्तिका-खंडाची आडव्या दिशेतील व्याप्ती किती वाढते, ते आकृती १४ इ मधील $मम_1ग$ या रेखांकित भागाच्या रुंदीने दाखविले जाते. तळाची कड स्थिर राहून पार्श्वीय आधार विचलित होतो, तेव्हा भिंतीच्या पाठीचा प्रत्येक भाग जवळजवळ एकाच वेळी, रेखांकित भागाच्या $म_1ग$ या मर्यादेपलीकडे जातो. त्यामुळे घसरू पाहणाऱ्या खंडात प्रत्येक ठिकाणी उच्छेद होऊ लागतो. अर्थातच अशा प्रकारे उच्छेदाचा प्रादुर्भाव होऊ लागताच विरूपत्वलक्षणाची उपरोक्त अट पुरी होते.

याउलट, माथ्याची कड स्थिर राहून पार्श्वीय आधार विचलित झाला, तर पाठीच्या माथ्याकडचा भाग रेखांकित भागातच राहतो; आणि तळाची कड कितीही अंतरापर्यंत विचलित झाली, तरी अशा प्रकारचे विचलन उपरोक्त विरूपत्वलक्षणाशी जुळणारे असत नाही. अशा प्रकारच्या विचलनाच्या प्राकृतिक परिणामांचा ऊहापोह परिच्छेद ६७ मध्ये केला जाईल.

शेवटचे उदाहरण म्हणजे, पार्श्वीय आधार मूळस्थानाला समांतर असणाऱ्या स्थानाप्रत सरकण्याचे. त्यात तर घसरू पाहणाऱ्या खंडात एकीमागून एक, दोन अवस्था निर्माण होतात. पहिल्या अवस्थेत भिंतीच्या माथ्याकडचा भाग आकृती १४ इ मधील $मम_1ग$ या रेखांकित भागात असतो, तर तळाकडचा भाग आधीच त्यापलीकडे गेलेला असतो. या अवस्थेत घसरण होते, परंतु घसरणाऱ्या मृत्तिकेपैकी भिंतीपाठीच्या माथ्यालगतच्या भागात स्थितिस्थापक समतोलाचीच अवस्था असते (प्रथम अवस्था). नंतर आधार जसजसा बाहेर सरकू लागतो, तशी नम्य समतोलाची अवस्था मृत्तिकाखंडाच्या सर्व भागात पसरू लागते. आधाराचा माथा रेखांकित भागापलीकडे जाताच संपूर्ण खंडामध्ये नम्य समतोलावस्था प्रस्थापित होते. खाली वर्णिलेल्या गोष्टींच्या प्रत्ययासाठी आवश्यक असलेल्या विरूपत्वलक्षणांची पूर्ती एव्हाना झालेली असते (अंतिमावस्था). या दोन्हीही अवस्थांचे संशोधन प्रयोगांद्वारे झालेले आहे (टेरझागी १९३४). एकीमागून एक येणाऱ्या उपरोक्त दोन्ही अवस्था या संशोधनात स्पष्टपणे दिसून आल्या. प्रथमावस्थेत घसरण होताच मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू आधाराच्या जवळजवळ अर्ध्या उंचीवर होता. नंतर केलेल्या संशोधनानुसार हा कारक-बिंदू १/३ उंचीवर स्थिर असावयास हवा होता. अर्थातच भिंत पुढे सरकत राहिली तसा हा बिंदू खाली सरकत गेला व शेवटी १/३ उंचीवर स्थिर झाला (अंतिमावस्था). ही अंतिम अवस्था प्रस्थापित करण्यासाठी आवश्यक असणारेविचलन फारच थोडे असते. म्हणून आधार-भिंतींचा ऊहापोह करताना प्रथमावस्थेकडे दुर्लक्ष करण्यास प्रत्यवाय नसतो. येथेही तेच केले जाईल (टेरझागी १९३६ ब).

२३. आदर्श वालुकेतील उद्युक्त मृत्तिकादाबविषयक कूलोमचा सिद्धान्त : या वालुकेची घनता *घ* असून तिचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो, असे समजू.

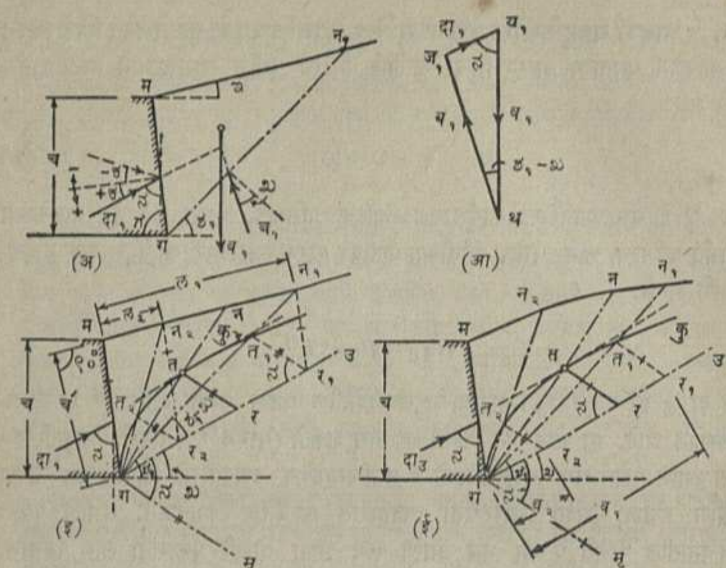
$$\text{क} = \sigma\,\text{स्प}\,\phi \qquad ५\ (२)$$

येथे σ हे घसरपृष्ठावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल असून ϕ हा वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणाचा कोन आहे. भिंतीच्या पाठीवर कारक असणारे कार्तनिक बल पुढील-प्रमाणे असते.

$$\text{दा}_{\text{उत}} = \text{दा}_{\text{उल}}\,\text{स्प}\,\delta$$

येथे $\text{दा}_{\text{उल}}$ हा एकूण मृत्तिकादाबाचा लंबदिशेतील घटक आहे आणि δ हा भिंत-घर्षणकोन आहे. हा कोन धन किंवा ऋण असू शकतो (परि० १५ पाहा). आकृती २० मध्ये आणि पुढील सर्व आकृतींमध्ये δ धनचिन्हांकित दाखविला आहे. ऋण घर्षण निर्माण होईल, अशी परिस्थिती व्यवहारात क्वचितच आढळते. तथापि पुढील विवेचनातील फलिते δच्या धन आणि ऋण अशा दोन्ही प्रकारांना लागू पडतात. कोणत्याही परिस्थितीत δचे मूल्य ϕ या अंतर्गत घर्षणकोनाच्या मूल्यापेक्षा अधिक असत नाही.

मागील परिच्छेदात उल्लेखिलेल्या विरूपत्व-लक्षणाची पूर्तता झाली आणि भिंतीची पाठ आणि भरणाचा पृष्ठभाग सरळ असतील, तर घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाखंडाची तिरपी बाजू वरच्या भागात सरळ असते; आणि खालच्या भागात किंचित वक्र असते. भिंतघर्षणकोनाचे मूल्य धन असताना निर्माण होणारे वक्रपृष्ठ आकृती १४ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे; आणि ऋण असतानाचे पृष्ठ आकृती १४ ऊ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते. कारमान (१९२६), याकी (१९३८) आणि ओहूदे (१९३८) यांनी शोधलेल्या पद्धतींपैकी कोणत्याही एकीचा अवलंब करून उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे काटेकोरपणे शास्त्रपूत असलेले मूल्य ठरविता येते; परंतु तद्विषयक अंतिम समीकरणे व्यावहारिक उपयोगाच्या दृष्टीने अतिशय क्लिष्ट आहेत. त्याऐवजी घसरणाऱ्या मृत्तिकाखंडाची तिरपी बाजू म्हणजे एक सरळरेषा आहे, असे सुकरतादायी गृहीत मान्य केले तरीही पुरेसे अचूक निष्कर्ष मिळू शकतात. हे गृहीत मृत्तिकादाबाच्या सिद्धांतात कूलोमने (१७७६) प्रविष्ट केले. या गृहीतावर आधारित असलेल्या त्याच्या सिद्धांताला **कूलोमप्रणीत सिद्धांत** असे म्हणतात. आकृती २० अ मध्ये त्याचे स्वरूप स्पष्ट केले आहे. या आकृतीत गन_1 हे भिंतपाठीच्या तळातून काढलेले कोणतेही एक सरळ पृष्ठ आहे. भरणाच्या गमन_1 या खंडाचे वजन व_1 आहे आणि त्यावर आणखी पुढील बले कारक आहेत : (१) गन_1 पृष्ठावरील च_1 ही प्रतिक्रिया, त्यावरील लंबाशी ϕ कोन करणारी; आणि (२) दा_1 ही भिंतपाठीवरील प्रतिक्रिया, तीवरील लंबाशी δ कोन करणारी. समजा,



आकृती २० : (अ आणि आ) कूलोमप्रणीत मृत्तिकादाबाच्या सिद्धांताला आधारभूत असणारी गृहीते दाखविणारी रेखाकृती. (इ आणि ई) वालुकेतील मृत्तिकादाब ठरविण्याची कुलमानप्रणीत आलेखात्मक कृती.

ग़ = भिंतपाठीने क्षितिजाशी केलेला कोन,

ॡ = भरणाच्या पृष्ठभागाने क्षितिजाशी केलेला कोन,

$ठ_1$ = *गमन*$_1$ या खंडाच्या *गन*$_1$ या तिरकस बाजूने क्षितिजाशी केलेला कोन आणि

ऴ = समीकरण ५(२) मधील अंतर्गत घर्षणकोन

आहेत. खंड समतोलावस्थेत असल्यामुळे आकृती २० आ मध्ये दाखविलेली बल-प्रतिमा बंदिस्त असली पाहिजे. *दा*$_1$ या प्रतिक्रियेची महत्ता *गन*$_1$ पृष्ठाने केलेल्या $ठ_1$ या उतार कोनावर अवलंबून असते. $ठ_1 = १८०^\circ -$ ग़ असल्यास *दा*$_1$ चे मूल्य शून्य असते. $ठ_1$ चे मूल्य घटत गेल्यास *दा*$_1$ चे मूल्य वाढत जाते आणि एका महत्तम मूल्याप्रत जाऊन खाली येते. $ठ_1 =$ ऴ असल्यास ते पुनः शून्य होते. महत्तम दाब $दा_{मह} = दा_{उ}$ = उद्युक्त मृत्तिकादाब पेलला जाईल एवढे भिंतीचे वजन असणे आवश्यक असते. अर्थातच *दा* चे महत्तम मूल्य ठरविणे हीच खरी समस्या आहे. कूलोमने ही समस्या विश्लेषणात्मक पद्धतीने सोडविली व तीतून पुढील मूल्य प्राप्त झाले.

$$दा_{उ} = \frac{१}{२} व\ च^{२} \frac{मृ_{उ}}{ज्या\,ग़\ कोज्या\,ठ} \qquad [१अ]$$

येथे

$$\text{मृ}_{\text{उ}} = \frac{\text{ज्या}^{२}(\text{ट} + \text{श})\ \text{कोज्या}\ \text{ड}}{\text{ज्या}\ \text{ट}\ \text{ज्या}(\text{ट} - \text{ड})\left[१ + \sqrt{\dfrac{\text{ज्या}(\text{श} + \text{ड})\ \text{ज्या}(\text{श} - \text{ञ})}{\text{ज्या}(\text{ट} - \text{ड})\ \text{ज्या}(\text{ट} + \text{ञ})}}\right]^{२}} \qquad [१\text{आ}]$$

आहे. भिंतपाटीवर येणाऱ्या एकूण मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक $\text{दा}_{\text{उल}}$ पुढीलप्रमाणे आहे.

$$\text{दा}_{\text{उल}} = \text{दा}_{\text{उ}}\ \text{कोज्या}\ \text{ड} = \frac{१}{२}\ \text{घ}\ \text{च}^{२}\ \frac{\text{मृ}_{\text{उ}}}{\text{ज्या}\ \text{ट}} \qquad [२]$$

$\text{मृ}_{\text{उ}}$चे मूल्य पूर्णतया ड, श, ट आणि ञ यांच्या मूल्यांवर अवलंबून असते. $\text{ट} = ९०^{\circ}$, $\text{ञ} = ०$ आणि $\text{श} = \text{ड} = ३०^{\circ}$ असल्यास आकृती १४ इ मध्ये अभिप्रेत असलेले मृत्तिकादाबाचे अचूक मूल्य आणि कूलोम सिद्धान्ताने दिलेले मूल्य यांतील फरक .५ टक्क्यांपेक्षाही कमी असतो. व्यावहारिक समस्यांच्या संबंधात ही चूक क्षुल्लक मानता येईल. ड चे मूल्य जसे कमी होईल, तशी ही चूकही कमी होत जाते; आणि $\text{ड} = ०$ असल्यास मृत्तिकादाबाचे कूलोम-मूल्य रॅन्‌किन्‌-मूल्याइतकेच असते.

$$\text{दा}_{\text{उ}} = \tfrac{१}{२}\ \text{घ}\cdot\text{च}^{२}\cdot\text{स्प}^{२}(४५^{\circ} - \text{श}/२) = \tfrac{१}{२}\ \text{घ}\ \text{च}^{२}\ \frac{१}{\text{ण}} \qquad १४\ (१)$$

तसे पाहता, आकृती २० मधील उदाहरण फारच साधे आहे, पण ते सोडविण्याच्या कृतीतील समीकरणे १ अ आणि १ आ मात्र काहीशी अवघडच आहेत. अर्थातच भिंतीची पाठ किंवा भरणाचा पृष्ठभाग एकाहून अधिक पृष्ठांचा बनलेला असेल, तर या गणितात्मक पद्धतीने उत्तर मिळविण्यासाठी लागणारा वेळ अव्यवहार्य वाटावा इतका मोठा असतो; म्हणून गेल्या शतकात उपलब्ध झालेल्या अनेक आलेखात्मक पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करूनच अशी समस्या सोडविणे श्रेयस्कर ठरते (पोंसले १८४०, रेबहान १८७१, कुलमान १८६६, एंगेसर, १८८०). पोंसलेची पद्धत इतर कोणत्याही पद्धतींपेक्षा अधिक माहीत असली, तरी व्यावहारिक उपयोगाच्या दृष्टीने कुलमान आणि एंगेसर यांच्या पद्धती अधिक स्वीकार्य ठरतात; कारण काही विशेष सूत्रे लक्षात ठेवण्याचा खटाटोप या पद्धतींत करावा लागत नाही.

२४. कुलमानप्रणीत आलेखात्मक पद्धत : आकृती २० इ मध्ये *गम* या रेषेने भिंतीची पाठ दाखविली आहे. *गन*, हे एक घसरपृष्ठ आहे, असे आपण तात्पुरते गृहीत धरू व क्षितिजाशी श कोन (अंतर्गत घर्षणकोन) करून *गउ* ही **उतारदर्शक रेषा**

काढ. त्याचप्रमाणे या उतारदर्शक रेषेशी $\angle$ कोन ($दा_१$ दाबाने क्षितिजलंब दिशेशी केलेला कोन) करून $गमृ$ ही मृत्तिकादाब रेषा काढ. नंतर $न_१ र_१ \parallel गम$ आणि $र_१ त_१ \parallel गमृ$ या रेषाही काढ. अशा प्रकारे आपल्याला $ग र_१ त_१$ हा त्रिकोण मिळतो (आकृती २० इ). या त्रिकोणाच्या $ग$ आणि $र_१$ या शिरोबिंदूजवळील कोन बल-प्रतिमेतील (आकृती २० आ) $थ$ आणि $य_१$ या ठिकाणांच्या कोनांएवढेच आहेत; म्हणून $ग र_१ त_१$ हा त्रिकोण आणि बलप्रतिमा ही समरूप आहेत. आकृती २० इ मधील $ग म न_१$ या खंडाचे वजन पुढीलप्रमाणे आहे :

$$व_१ = \frac{१}{२} घ च' ल_१$$

आकृती २० इ मधील $ग र_१ त_१$ हा त्रिकोण आणि बलप्रतिमा $य_१ थ ज_१$ समरूप असल्यामुळे पुढील समीकरण मांडता येते :

$$दा_१ = व_१ \frac{\overline{र_१ त_१}}{ग र_१} = \frac{१}{२} घ च' ल_१ \frac{\overline{र_१ त_१}}{ग र_१} \qquad [१]$$

$ग न_२$ सारख्या स्वेच्छया निवडलेल्या अन्य घसरपृष्ठांवरील मृत्तिकाखंडांचा समतोल साधण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या $दा_२$ इत्यादी बलांची महत्ता अशाच रीतीने ठरविता येते. $न_१ र_१ \parallel न_२ र_२ \parallel$ इ० इ० असल्यामुळे $ल_१ = म न_१$, $ल_२ = म न_२$ इत्यादी अंतरांची खरी लांबी आणि त्यांना अनुषंगिक $गर_१$, $गर_२$ ही अंतरे यांच्यातील छ हे गुणोत्तर यांपैकी प्रत्येक पृष्ठाच्या बाबतीत सारखेच असते. म्हणजेच

$$छ = \frac{ल_१}{ग र_१} = \frac{ल_२}{ग र_२} = \ldots \qquad [२]$$

समीकरण १ मध्ये छ हे मूल्य प्रविष्ट करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$दा_१ = \frac{१}{२} घ छ च' \overline{र_१ त_१} = थ \times \overline{र_१ त_१} \qquad [३]$$

येथे $थ = \frac{१}{२} घ छ च'$ आहे. त्याचे मूल्य गृहीत धरलेल्या घसरपृष्ठाच्या उतारावर अवलंबून नाही.

याच गणितकृतीचा अवलंब करून आपल्याला पुढील व अशीच बाकीची समीकरणे मिळतात.

$$दा_२ = थ \times \overline{र_२ त_२}$$

$दा_1$, $दा_2$ इत्यादी बले आकृती २० इ मध्ये $र_1त_1$, $र_2त_2$ इत्यादी अंतरांनी दाखविली आहेत. त्यांवरून आपल्याला $त_1$, $त_2$ इत्यादी बिंदू प्राप्त होतात. हे सर्व बिंदू क या वक्ररेषेवर पडतात. या वक्ररेषेला **कुलमान रेषा** म्हणतात. पार्श्वीय दाबाचे $दा_3$ हे मूल्य प्राप्त करून घेण्यासाठी कु या वक्ररेषेस स्पर्शरेषा काढली पाहिजे. ही स्पर्शरेषा *गउ* या उतारदर्शक रेषेस समांतर असावी. *त* हा तिचा स्पर्शबिंदू आहे. *रत* ही रेषा *गमृ* या मृत्तिकादाबरेषेला समांतर काढली असता, *रत* या अंतराने आपल्याला भिंतीवरील $दा_3$ या उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे मूल्य आकृती काढण्यासाठी वापरलेल्या प्रमाणात मिळते. तदनुषंगिक *गन* हे घसरपृष्ठ स्पर्शबिंदू *त* मधून जाते. समीकरण ३ मध्ये $\overline{र_1त_1}$ ऐवजी $\overline{रत}$ नियुक्त करून आपल्याला उद्युक्त मृत्तिकादाबाची महत्ता देणारे पुढील समीकरण मिळते.

$$दा_3 = \tfrac{1}{2}\, घ\, छ\, च'\, \overline{रत} \qquad [४]$$

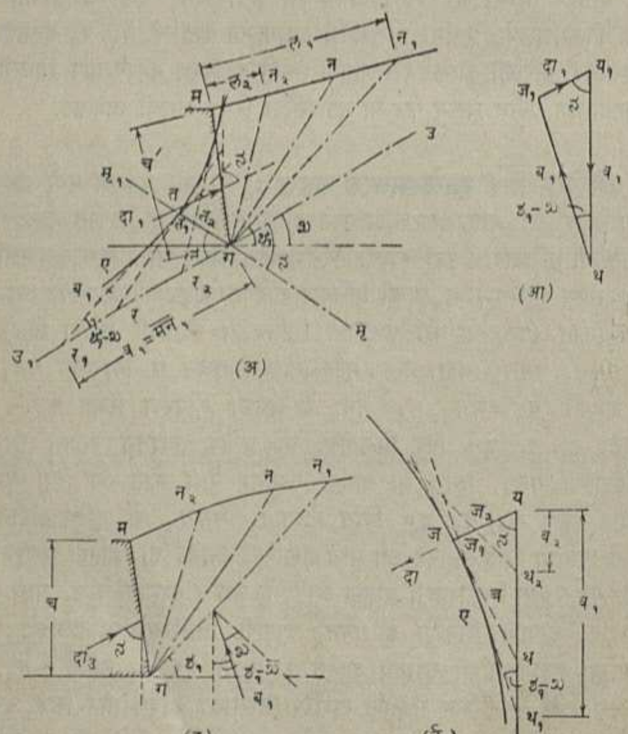
आकृती २० ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भरणाचा पृष्ठभाग अनेक पृष्ठांचा बनलेला किंवा वक्राकार असला तरीही ही पद्धत अवलंबिता येते; परंतु अशा उदाहरणात $गन_1$, $गन_2$ या निरनिराळ्या पृष्ठांना अनुषंगिक असणाऱ्या खंडांची $व_1$, $व_2$ इत्यादी वजने मिळविण्यासाठी निराळी आकडेमोड करावी लागते व अशा प्रकारे प्राप्त झालेली वजने सोयीस्कर प्रमाण गृहीत धरून *गउ* या उताररेषेवर स्थिर करावी लागतात.

२५. **एंगेसेरप्रणीत आलेखात्मक पद्धत :** आकृती २० अ मध्ये दाखविलेला भरणाचा छेदच पुनः आकृती २१ अ मध्ये दाखविला आहे. या भरणामुळे निर्माण होणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब ठरविण्याची एंगेसेरप्रणीत पद्धत आता अभ्यासावयाची आहे. त्यासाठी आपण *ग* मधून $मृ_1मृ$ ही मृत्तिकादाब रेषा काढू. ही रेषा *गउ* या उताररेषेशी ट कोन ($दा_1$ या मृत्तिकादाबाने क्षितिजलंब दिशेशी केलेला कोन) करते. त्यानंतर $गमन_1$, $गमन_2$ अशा प्रत्येक मृत्तिकाखंडाचे वजन *ग* बिंदूपासून $गउ_1$ रेषेवर डाव्या बाजूकडे $व_1 = \overline{मन}_1$, $व_2 = \overline{मन}_2$ हे प्रमाण वापरून स्थित करू. म्हणजे आपल्याला $र_1$, $र_2$ इ० बिंदू मिळतील. या प्रत्येक बिंदूतून आपण तदनुषंगिक मृत्तिकाखंडाच्या $गन_1$, $गन_2$ या बाजूंना समांतर रेषा काढू. या रेषा $मृमृ_1$ या मृत्तिकादाब रेषेला $त_1$, $त_2$ इ० बिंदूंत छेदतात. $गमन_1$ या मृत्तिकाखंडास लागू होणारी बलप्रतिमा आकृती २१ आ मध्ये दाखविली आहे. ही प्रतिमा आकृती २१ अ मधील $गर_1त_1$ या त्रिकोणाशी समरूप आहे, हे लगेच ध्यानात येईल. याच कारणास्तव $गर_2त_2$ इत्यादी त्रिकोण हे $गमन_2$ इत्यादी खंडांच्या समतोलांच्या अवस्था दाखविणाऱ्या बलप्रतिमांशी समरूप आहेत. आकृती २१ अ मधील $र_1त_1$, $र_2त_2$ इत्यादी रेषा ए या वक्ररेषेच्या संदर्भात स्पर्शरेषा ठरतात. अशा तीन किंवा चार रेषा प्राप्त झाल्या म्हणजे ए ही वक्ररेषा अचूकपणे काढणे सोपे होते. ही वक्ररेषा $मृमृ_1$ या मृत्तिकादाब रेषेला *त* बिंदूत छेदते. $गन_1$, $गन_2$ इत्यादी पृष्ठांवरून होणाऱ्या

घसरणींना प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असलेल्या $दा_1$, $दा_2$ या पार्श्वीय विरोधांची महत्ता $गत_1$, $गत_2$ या अंतरांनी दाखविली जात असल्यामुळे *गत* हे अंतर म्हणजे *ग* मधून निघणाऱ्या एका पृष्ठावरून होणारी घसरण रोखण्यासाठी आवश्यक असलेला महत्तम पार्श्वीय विरोध ठरतो. अर्थातच हा विरोध म्हणजे आकृतीच्या प्रमाणात दाखविलेला उद्युक्त मृत्तिकादाब $दा_3$ होय. ए या वक्ररेषेला त मधून काढलेल्या *रत* या स्पर्शरेषेला समांतर रेषा काढून या दाबास अनुषंगिक असलेले *गन* हे घसरपृष्ठ प्राप्त होते. आकृती २१ अ आणि २१ आ मधील रेखाकृतींवरून भूमितिनियमांच्या आधारे उद्युक्त मृत्तिकादाबाची महत्ता पुढील समीकरणाने मिळते.

$$दा_3 = \tfrac{1}{2} घ \cdot च' \cdot \overline{गत} \qquad [१]$$

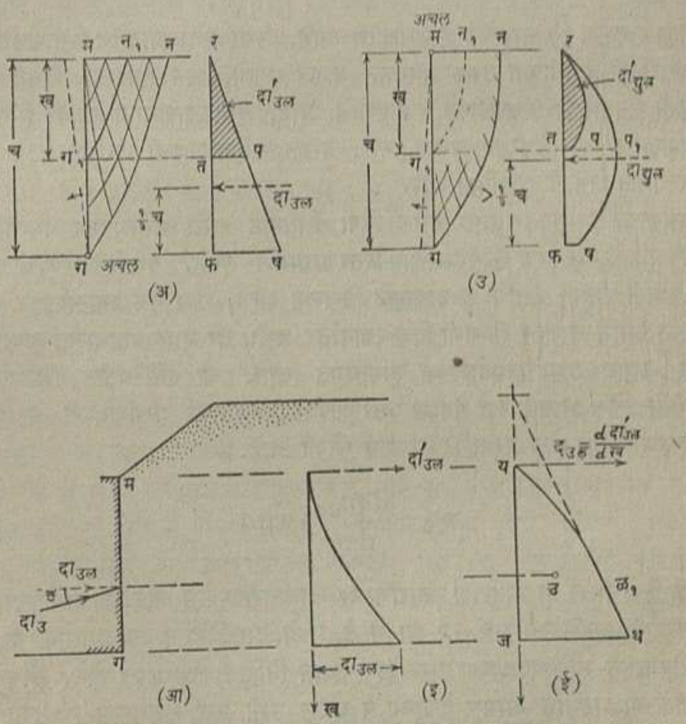
येथे $\overline{गत}$ म्हणजे *गत* या अंतराचे प्रत्यक्षातील मूल्य होय. ए या वक्ररेषेस **एंगेसेर-रेषा** म्हणतात.



आकृती २१ : वालुकेचा मृत्तिकादाब ठरविण्याची एंगेसेरप्रणीत आलेखात्मक कृती.

आकृती २१इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भरणाचा पृष्ठभाग वक्र असेल, तर मृत्तिका खंडाच्या $व_1$, $व_2$ या वजनांसाठी थोडी आकडेमोड करावी लागते. अशा उदाहरणात ही वजने य पासून अधस् दिशेत मोजून बलप्रतिमेत स्थित करणे (आकृती २१ई) आणि एंगेसेर रेषा या आकृतीतूनच प्राप्त करून घेणे सोईचे ठरते. उर्वरित कृती वर वर्णिल्याप्रमाणेच असते.

२६. उद्युक्त मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान : सरळ उभ्या परंतु खडबडीत पृष्ठाच्या भिंतीमागील घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाखंडाचा छेद आकृती २२ अ मध्ये दाखविला आहे. भरणाचा पृष्ठभाग समतल आहे. घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाखंडातील प्रत्येक बिंदुस्थानी नम्य समतोल अवस्था निर्माण होईल इतक्या प्रमाणात आधारभिंत विचलित झाल्यास, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कार्तनिक प्रतिमा मिळते. म बिंदूपासून मोजलेल्या कोणत्याही ख या खोलीवरील $ग_1$ हा बिंदू म्हणजे $ग_1न_1$



आकृती २२ : पार्श्वीय आधाराच्या निरनिराळ्या लक्षणांनुसार वालुकेतील मृत्तिका दाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान.

या घसरपृष्ठाची तळाची कड आहे. $ग_१न_१$ हे पृष्ठ $गन$ या घसरपृष्ठासारखेच एक पृष्ठ आहे. तेव्हा $मग_१$ या भिंतपाठीच्या विभागावरील पार्श्वीय दाब व $ख$ उंचीच्या आधारभिंतीवरील पार्श्वीय दाब हे दोन्ही सारख्याच मूल्याचे असतील. $ϑ = ९०°$ आणि $च = ख$ अशी योजना समीकरण २३(२) मध्ये केली असता, $मग_१$ वरील मृत्तिका-दाबाच्या लंबदिक् घटकाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$दा'_{उल} = \frac{१}{२} घ\, ख^{२} .\, मृ_{उ}$$

आणि $ख$ या खोलीवरील लंबदिक् दाब पुढीलप्रमाणे असतो.

$$द_{उल} = \frac{d\,दा'_{उल}}{d\,ख} = घ .\, ख .\, मृ_{उ} \qquad [१]$$

समीकरण १५ (१) सारखेच हे समीकरण आहे. स्थिरजलदाबाप्रमाणेच भिंतपाठीवरील मृत्तिकादाबही खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढत जातो, असे त्यावरून दिसून येते. आकृती २२ अ मध्ये उजवीकडे हे दाखविले आहे. मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू भिंतीच्या तळापासून च/३ उंचीवर असतो. $मग_१$ वरील मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक $रतप$ या रेखांकित क्षेत्राने दाखविला आहे.

भरणाचा पृष्ठभाग समतल नसेल किंवा भिंतपाठ सरळ नसेल, तर भिंतीवरील मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिरजल-दाब-वितरणाप्रमाणे नसते. तथापि तळाची कड मूळ स्थानी राहून भिंतीचे कलंडल्यामुळे विचलन झाले, किंवा मूळ स्थानापासून पुरेसे दूरपर्यंत आणि समांतर ठिकाणी तिचे स्थानांतर झाले, तर घसरू पाहणाऱ्या खंडातील संपूर्ण वालुका नम्य समतोलाच्या अवस्थेप्रत जाते. या परिस्थितीत भिंतपाठीवर काढलेली प्रत्येक आडवी रेषा संभाव्य घसरपृष्ठाच्या तळाची कड दाखविते. ही गोष्ट पुढील समीकरणाचे यथार्थत्व प्रस्थापित करण्यास पुरेशी आहे.

$$द_{उल} = \frac{d\,दा'_{उल}}{d\,ख} .\, ज्या\, ϑ \qquad [२]$$

या ठिकाणी $ϑ$ हा भिंतीच्या उताराचा $ख$ खोलीवरील कोन आहे. या समीकरणाच्या साहाय्याने आणि आकृती २२ आ ते ई मध्ये दाखविलेल्या आलेखात्मक कृतीचा अवलंब करून मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान निश्चित करणे शक्य होते. सांधलेल्या पृष्ठभागाच्या भरणास आधार देणाऱ्या व सरळ उभी पाठ असणाऱ्या भिंतीचा छेद आकृती २२ आ मध्ये दाखविला आहे. येथे पृष्ठभाग सांधलेला असल्यामुळे भिंतपाठी-वरील मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाप्रमाणे असत नाही. भिंतपाठीच्या माथ्यापासून $ख_१$, $ख_२$, इत्यादी निरनिराळ्या मूल्यांच्या खोलीच्या भागावर कारक असणारा एकूण

मृत्तिकादाब आपण पुढील परिच्छेदात वर्णिलेल्या पद्धतीचा अवलंब करून ठरवू. अशा रीतीने प्राप्त होणारी $दा'_{उल}$ ची मूल्ये खोलीच्या मूल्यासमोर स्थित करून आपल्याला आकृती २२ इ मध्ये दाखविलेली वक्र रेषा मिळते. या वक्र रेषेने $दा_{उल}$ आणि खोली $ख$ यांतील संबंध दाखविला जातो. एका सोप्या कृतीचा अवलंब करून या आलेखावरून $द्_{उल}$ ची मूल्ये (समीकरण २) आपल्याला मिळू शकतात. खोलीच्या मूल्यांसमोर $द्_{उल}$ ची मूल्ये स्थित करून आपल्याला आकृती २२ ई मध्ये दाखविलेला ळ, हा आलेख मिळतो. ळ, ही रेषा आणि उभा अक्ष यांनी सीमित केलेले *यथज* हे क्षेत्र म्हणजे पार्श्वीय दाबाचा एकूण लंबदिक् घटक होय. या दाबक्षेत्राच्या गुरुत्वमध्याच्या उंचीवर पार्श्वीय दाबाचा कारकबिंदू स्थित असतो. सांधलेली पाठ असणाऱ्या आधार-भिंतीवर येणाऱ्या मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू ठरविण्यासाठीही समीकरण २ वर आधारलेल्या अशाच कृती शोधलेल्या आहेत. (उदाहरणार्थ, क्रे १९३६ पाहा.) घसरपृष्ठे सरळ असतात, या सुकरतादायी गृहीतावरच या कृती आधारित असल्यामुळे काटेकोर कृती आणि या कृती यांत बराच फरक असतो. तरीही त्या कृती काहीशा क्लिष्टच आहेत. व्यावहारिक उपयोगासाठी अधिक सोप्या कृती शोधलेल्या आहेत आणि त्यांच्या साहाय्याने मिळणारी फलिते स्थूलमानाने उपरोक्त कृतीतून मिळणाऱ्या फलितांसारखीच असतात. मूलभूत गृहीतांचे स्वरूप लक्षात घेता, सोप्या कृतींपेक्षा या क्लिष्ट कृती अधिक विश्वासार्ह असू शकतील काय, याविषयीही शंका आहे.

घसरू पाहणाऱ्या खंडातील मृत्तिकेचा प्रत्येक भाग नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असलाच पाहिजे, या लक्षणामुळे समीकरण २ च्या प्रत्ययक्षेत्राला मर्यादा पडतात. घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या काही भागात स्थितिस्थापक समतोलाची अवस्था असतानाच घसरण घडून यावी, अशा प्रकारची विरूपत्व-लक्षणे असतील, तर समीकरण २ लागू पडत नाही; आणि वर वर्णिलेल्यांपैकी कोणतीच कृती मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू ठरविण्यासाठी उपयुक्त ठरत नाही. आकृती २२ उ वरून हे स्पष्ट होईल. या आकृतीत दाखविलेल्या भरणाचा पार्श्वीय आधार, त्याची माथ्याची *म* ही कड स्वस्थानी राहून विचलित झालेला आहे. *म* चे स्थान अविचलित राहिल्यामुळे घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाखंडाच्या वरच्या भागात नम्य समतोलाची अवस्था निर्माण होण्यास प्रतिबंध होतो. परिच्छेद २० मध्ये विशद केल्याप्रमाणे या उदाहरणातला उच्छेद भरणाच्या पृष्ठभागास काटकोनात छेदणाऱ्या *गन* या वक्र घसरपृष्ठावर घडून येतो; आणि आधारावर येणारा मृत्तिकादाब आकृती २२ अ मधील दाबासारखा नसून आकृती २२ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असतो. म्हणून त्यासाठी $दा_{उल}$ ऐवजी $दा_{घुल}$ हे वेगळे चिन्ह वापरले जाईल. $दा_{घुल}$ हा मृत्तिकादाब पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येतो, हे परिच्छेद ६७ मध्ये दाखविले जाईल.

$$दा_{घुल} = \frac{१}{२} घच^{२} मा_{घु}$$

या ठिकाणी $मा_{घु}$ हा एक गुणांक असून त्याचे मूल्य उंचीवर अवलंबून नसते. म्हणून आकृती २२ उ मध्ये दाखविलेल्या प्रकाराचाच पण ज्याची एकूण उंची ख आहे, अशा पार्श्वीय आधारावर येणारा मृत्तिकादाब पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$दा'_{घुल} = \frac{१}{२} घख^२ मा_{घु}$$

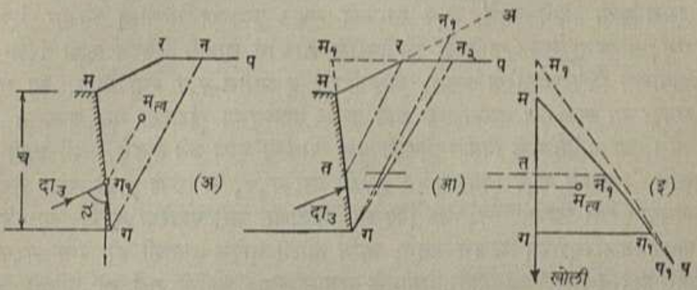
आकृती २२ उ मध्ये दाखविलेल्या पार्श्वीय आधाराच्या ख उंचीच्या वरच्या भागावरील $दा''_{घुल}$ हा मृत्तिकादाब आणि $दा'_{घुल}$ हा दाब हे सारखेच असते, तर आपल्याला पुढील समीकरण मांडता आले असते.

$$दा''_{घुल} = दा'_{घुल} = \frac{ख^२}{च^२} दा_{घुल} \qquad [३]$$

तसेच मृत्तिकादाबाचे वितरण पूर्णपणे स्थिरजलदाबाप्रमाणे मिळाले असते. तथापि $दा''_{घुल}$ चे मूल्य नेहमीच या समीकरणाने मिळणाऱ्या मूल्यापेक्षा बरेच अधिक असते, असा आपला अनुभव आहे. त्याची कारणे अशी आहेत: आकृती २२ उ मधील $ग_१$ म्हणजे एखाद्या पार्श्वीय आधाराची तळाची कड असेल, तर $ग_१न_१$ या पृष्ठावरून घसरण होईल. हे पृष्ठ $गन$ या पृष्ठासारखेच आहे आणि $मग_१$ वरील मृत्तिकादाब $दा'_{घुल}$ इतका असेल. $ग_१न_१$ वरील कार्तनिक प्रतिबले वालुकेच्या कार्तनिक विरोधाइतकी असतील. प्रत्यक्षात पार्श्वीय आधाराची खालची कड $ग$ या ठिकाणी आहे, $ग_१$ या ठिकाणी नव्हे. यामुळे $ग_१न_१$ ही रेषा घसरपृष्ठ दाखवीत नाही, कारण ते स्थितिस्थापक अवस्था असलेल्या विभागात स्थित आहे. या विभागातून जाणाऱ्या $ग_१न_१$ सारख्या कोणत्याही पृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले वालुकेच्या कार्तनिक विरोधापेक्षा कमी असतात. म्हणून $मग_१$ वरील मृत्तिकादाब $दा'_{घुल}$ पेक्षा अधिकच असला पाहिजे. या सर्व कारणांमुळे येथे समीकरण ३ लागू पडत नाही. मृत्तिकादाबाचे वितरणही स्थिरजलदाबासारखे असत नाही. आकृती २२ उ च्या उजव्या भागात दाखविल्याप्रमाणे ते स्थूलमानाने परिवलयाकृती असते व घसरणीपूर्वी झालेल्या आधाराच्या हालचालीच्या स्वरूपावर या दाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान अवलंबून असते; आणि ही गोष्ट विचारात घेतल्याविना ते ठरविता येत नाही. आकृतीतील रेखांकित क्षेत्र $रतप = दा'_{घुल}$ म्हणजे ज्याची एकूण उंची ख आहे अशा पार्श्वीय आधारावरील मृत्तिकादाब आहे. च उंचीच्या पार्श्वीय आधाराच्या $मग_१ = ख$ या भागावरील $रतप_१ = दा''_{घुल}$ या दाबापेक्षा उपरोक्त दाब खूपच कमी आहे.

मृत्तिकादाबाच्या वितरणावर पडणारा विरूपत्व-लक्षणांचा प्रभाव असा निर्णायक असल्यामुळे मृत्तिकादाबविषयक काही सोपी उदाहरणे सोडली, तर इतर प्रत्येक वेळी या लक्षणांचा शोध काळजीपूर्वक घेतला पाहिजे.

या प्रकरणात केवळ आधारभिंतींचा ऊहापोह केला आहे. आधारभिंतींच्या विचलनाचा प्रकार असा असतो की, घसरू पाहणाऱ्या खंडातील संपूर्ण मृत्तिका नम्य समतोलाच्या अवस्थेत जाते. म्हणून मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान ठरविण्यासाठी समीकरण २ चा आधार घेता येतो.



आकृती २३ : सांधलेल्या पृष्ठभागाच्या भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब.

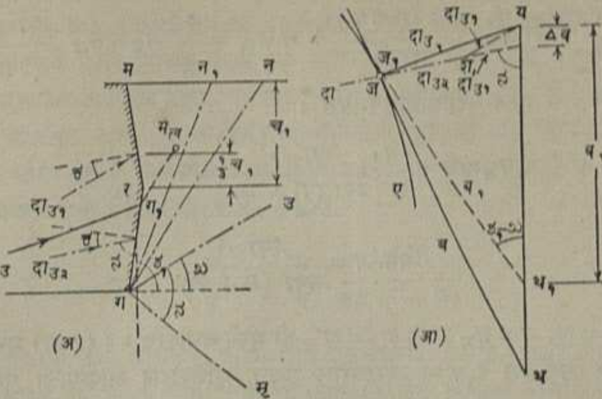
२७. सांधलेल्या पृष्ठभागाचे भरण : सांधलेल्या पृष्ठभागाच्या भरणाचा छेद आकृती २३ अ मध्ये दाखविला आहे. या उदाहरणात वर वर्णिलेल्या आलेखात्मक पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करून $दा_उ$ हा एकूण पार्श्वीय मृत्तिकादाब आणि तदनुषंगिक *ग न* या घसरपृष्ठाचे स्थान या गोष्टी ठरविता येतात; कारण भरणाच्या पृष्ठभागाचा आकार कसाही असला, तरी या पद्धती लागू पडतील अशा आहेत. या दाबाचा कारकबिंदू भिंतीची पाठ आणि $म_{त्व}ग_१$ ही रेषा यांच्या छेदनबिंदूच्या ठिकाणी स्थित असतो, असे स्थूलमानाने म्हणता येते. *गमरन* या घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्यातून *गन* या घसरपृष्ठाला समांतर काढलेली रेषा म्हणजे $म_{त्व}ग_१$ ही रेषा होय. ही समस्या सोडविण्याच्या, आकृती २२ आ ते ई मध्ये दाखविलेल्या, सापेक्षतः अधिक काटेकोर पद्धतीने मिळणारे फलित आणि उपरोक्त पद्धतीने मिळणारे फलित सारखीच असतात, असा अनुभव आहे; म्हणून त्यावर विसंबूनच केवळ उपरोक्त कृती सुचविलेली आहे.

आकृती २३ आ मध्ये आणखी तिसरी पद्धत दाखविली आहे. तीत प्रथम असे गृहीत धरले जाते की, भरणाच्या पृष्ठभागाची *मर* ही तिरकस रेषा *मअ* या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे अनंतापर्यंत लांबविलेली आहे. नेहमीच्या सर्वमान्य कृतीच्या साहाय्याने $गन_१$ या तदनुषंगिक घसरपृष्ठाचे स्थान ठरविता येते. $रत \parallel गन_१$ ही रेषा र या बिंदूमधून निघणारे घसरपृष्ठ दाखविते; कारण *मअ* सारख्या सरळ पृष्ठभागाच्या

भरणाला *गम* सारख्या सरळ पाठीच्या भिंतीने आधार दिला असेल, तर सर्वच घसरपृष्ठे समांतर असतात. *मतर* या घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या माथ्याचा पृष्ठभाग सरळ असल्यामुळे भिंतपाठीच्या *मत* या भागावरील पार्श्वीय दाबाचे वितरण $मन_1$ (आकृती २३ इ) या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे स्थिरजलदाबासारखे असते. नंतर भरणाच्या पृष्ठभागाचा *पर* हा भाग भिंतीच्या पाठीची *गम* ही रेषा वरच्या दिशेने लांबविली असता मिळणाऱ्या $म_1$ या बिंदूपर्यंत पोहोचलेला आहे, असे गृहीत धरून दुसरी कृती केली जाते. $म_1प$ सारख्या सरळ पृष्ठाच्या भरणाला आधार देणाऱ्या $गम_1$ सारख्या सरळ पाठीच्या भिंतीवरील पार्श्वीय दाबाचे वितरण सुद्धा स्थिरजल-दाबाच्या वितरणासारखे असते. आकृती २३ इ मधील $म_1प$ रेषा पाहा. या कृतीत $मम_1र$ या खंडाच्या वजनाइतकी वाढ घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या मूळ वजनात केली जाते. या गृहीतामुळे निर्माण होणारी चूक खोलीचे मूल्य जसे वाढते, तशी कमी होत जाते. त्यामुळे $म_1प$ (आकृती २३ इ) ही रेषा $न_1प_1$ या खऱ्या दाबरेषेच्या संदर्भात असंपात-रेषा ठरते. $न_1$ या बिंदूच्या ठिकाणी खरी दाबरेषा $मन_1$ या रेषेला जवळजवळ स्पर्शरेषेप्रमाणेच असते; आणि खोली वाढेल तसतशी ही रेषा $म_1प$ या असंपाती रेषेला मिळू पाहते. त्यामुळे हाताने सहज काढली तरी ती पुरेशी अचूक येते. $मगग_1न_1$ या दाबक्षेत्राच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्याच्या उंचीजवळ दाबाचा कारकबिंदू असतो.

२८. **सांधलेल्या पाठीची भिंत :** सांधलेली पाठ असलेली भिंत आणि तिच्या-मागचे समतल पृष्ठाचे वालुकाभरण यांचा छेद आकृती २४ अ मध्ये दाखविला आहे. सर्वप्रथम आपण भिंतीच्या *रम* या वरच्या भागावर येणारा $दा_{उ_1}$ हा मृत्तिकादाब ठरवू. या दाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाच्या वितरणाप्रमाणे आहे. तसेच या दाबाचा गुरुत्वमध्य या भागाच्या तळाकडील $च_1/३$ या उंचीवर आहे. *गर* या खालच्या भागावर कारक असणाऱ्या $दा_{उ_2}$ या बलाची केवळ दिशाच आपल्याला माहीत आहे. त्याची महत्ता व कारकबिंदू ठरवावयास हवेत.

मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या प्रचलित पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करून प्रस्तुत समस्या सोडविण्यासाठी आपण $गन_1$ हे कोणतेही एक घसरपृष्ठ विचारात घेऊ आणि तदनुषंगिक $यथ_1ज_1श$ ही बलप्रतिमा काढू (आकृती २४ आ पाहा). या बलप्रतिमेतील $दा_{उ_1}$ या ज्ञात बलाचे Δव आणि $दा'_{उ_1}$ हे दोन घटक तेथे दाखवू. असे केले असता, $दा_{उ_2}$ च्या दिशेत असलेल्या एकूण पार्श्वीय दाबाचे महत्तम मूल्य ठरविणे, एवढेच प्रस्तुत समस्येचे स्वरूप राहते. एंगेसेरप्रणीत कृतीचा अवलंब करून मिळालेले या समस्येचे उत्तर आकृती २४ आ मध्ये दाखविले आहे. घसरू पाहणाऱ्या भिन्नभिन्न खंडांची $व_1$, $व_2$ इत्यादी वजने (परिच्छेद २५ पाहा) *य* बिंदूपासून अधस् दिशेने स्थित केली आहेत. घसरण आकृती २४ अ मधील *नग* या पृष्ठावरून घडून येते.



आकृती २४ : सांधलेल्या पाठीच्या भिंतीमागील वालुकेचा मृत्तिकादाब.

सांधलेल्या पाठीच्या भिंतीवर येणाऱ्या $दा_{उ}$ या एकूण मृत्तिकादाबाची महत्ता आणि दिशा आकृती २४ आ मधील $यज$ या रेषेने ठरतात. ही रेषा म्हणजे मृत्तिकादाबाच्या $दा_{उ१} = \overline{यश}$ आणि $दा_{उ२} = \overline{जश}$ या दोन घटकांची भौमितिक बेरीज आहे. या दाबाचा कारकबिंदू, $मरगन$ या घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या गुरुत्वमध्यातून काढलेली व त्याच्या घसरपृष्ठाला समांतर असणारी $म_{रख}ग_{१}$ ही रेषा आणि भिंतीची पाठ यांच्या $ग_{१}$ या छेदनबिंदूच्या ठिकाणी असतो, असे स्थूलमानाने म्हणता येईल. परिच्छेद २६ मध्ये वर्णिलेल्या कृतीचा अवलंब केला असता, याहून अधिक चांगले सत्यसमीप उत्तर मिळते.

२९. समप्रमाण अधिभारांमुळे येणारा पार्श्वीय दाब : आकृती २५ अ मध्ये एका वालुकाभरणाचा छेद दाखविला आहे. त्याचा पृष्ठभाग तिरकस असून, ज्याचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य $भ$ आहे, असा समप्रमाणात वितरित अधिभार त्यावर ठेवलेला आहे. भिंतीच्या पाठीवर $ख$ खोलीवर $र_{१}$ हा बिंदू असून $र_{१}न_{२}$ हे एक यदृच्छया घेतलेले सरळ पृष्ठ आहे. त्यावरील $र_{१}मन_{२}$ या घसरू पाहणाऱ्या खंडाचे वजन, अधिभार वगळून, पुढीलप्रमाणे आहे.

$$व_{१} = \frac{१}{२} घ ख ल_{ख} \frac{ज्या\,(\text{ट} + \text{ढ})}{ज्या\,\text{ट}}$$

अधिभारामुळे या वजनात $भल_{ख}$ एवढी भर पडते. मृत्तिकाखंड आणि अधिभार मिळून होणारे वजन $व'_{१}$ हे खंडाचेच वजन मानले, तर $र_{१}मन_{२}$ या खंडाची घनता $घ_{भ} > घ$ मानल्यासारखे होईल; आणि ते पुढील स्वरूपात मांडता येईल :

$$व'_1 = \frac{१}{२}\, घ ख ल_ख \,\frac{ज्या\,(\theta+\omega)}{ज्या\,\theta} + भ ल_ख = \frac{१}{२}\, घ_भ ख ल_ख \,\frac{ज्या\,(\theta+\omega)}{ज्या\,\theta}$$

यावरून $घ_भ$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$घ_भ = घ + \frac{२भ}{ख}\,\frac{ज्या\,\theta}{ज्या\,(\theta+\omega)} = घ + \frac{२भ}{ख} अ \qquad [१ अ]$$

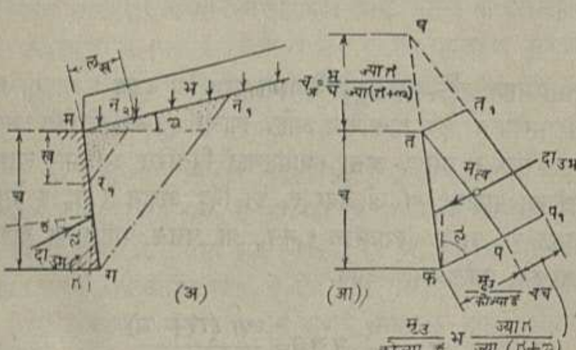
$$येथे\; अ = \frac{ज्या\,\theta}{ज्या\,(\theta+\omega)} \qquad [१ आ]$$

आहे. $च = ख$, $घ = घ_भ$ आणि $दा_उ = दा'_उ$ ही मूल्ये समीकरण २३ (१ अ) मध्ये नियुक्त केली, तर भिंतीच्या $र_1 म$ या भागावरील उद्युक्त मृत्तिकादाब आपल्याला पुढीलप्रमाणे मिळेल.

$$दा'_उ = \frac{१}{२}\, घ_भ ख^2 \,\frac{मृ_उ}{ज्या\,\theta\, कोज्या\, \delta} = \frac{१}{२}\left(घ + अ\,\frac{२भ}{ख}\right) ख^2 \,\frac{मृ_उ}{ज्या\,\theta\, कोज्या\, \delta} \quad [२]$$

या ठिकाणी $मृ_उ/ज्या\,\theta\, कोज्या\,\delta$ हा गुणक म्हणजे δ, ϕ, θ, आणि ω यांच्या विवक्षित मूल्यांच्या संदर्भात मिळणारा एक स्थिरमूल्याचा अंक आहे. या परिस्थितीत ख खोलीवरील पार्श्वीय दाबाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते.

$$द_उ = \frac{d\, दा'_उ}{d\, ख}\, ज्या\,\theta = \frac{मृ_उ}{कोज्या\,\delta}\, घ ख + \frac{मृ_उ}{कोज्या\,\delta} \cdot अ भ \qquad [३]$$



आकृती २५ : समप्रमाणवितरित अधिभाराचा वालुकेच्या मृत्तिकादाबावरील परिणाम.

या समीकरणाच्या उजव्या बाजूकडील पहिले पद म्हणजे मृत्तिकेच्या वजनामुळे ख खोलीवर उत्पन्न होणारा दाब आहे. या दाबाचे वितरण स्थिरजल-दाबाच्या

वितरणाप्रमाणे असते. आकृती २५ आ मध्ये *तपफ* या त्रिकोणाने हे दाखविले आहे. दुसरे पद म्हणजे अधिभाराच्या वजनामुळे उत्पन्न होणारा दाब आहे. त्याचे मूल्य खोलीच्या मूल्यावर अवलंबून नाही. मृत्तिकादाबाचा हा अंश $\text{तत}_1\text{प}_1\text{प}$ या समांतरभुज चौकोनाने दाखविला आहे. या समांतरभुज चौकोनाची $\text{प}_1\text{त}_1$ ही बाजू वरच्या अंगास लांबविली असता *फत* या संदर्भरेषेस *ष* या बिंदूत छेदते. या बिंदूची भितीच्या माथ्यापासून मोजलेली उंची पुढील समीकरणाने मिळते.

$$\text{च}_{\text{अ}} = \text{अ}\,\frac{\text{भ}}{\text{घ}} = \frac{\text{भ}}{\text{घ}}\;\frac{\text{ज्या}\,\text{ट}}{\text{ज्या}\,(\text{ट}+\text{ढ})} \qquad [४]$$

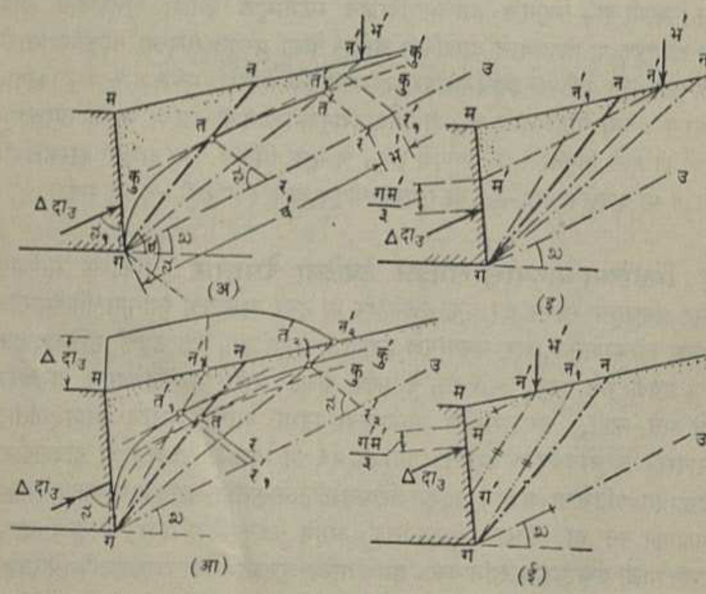
या उदाहरणातील भितीच्या पाठीवरील मृत्तिकादाब आणि अधिभारविरहित भरणास आधार देणाऱ्या $\text{च}+\text{च}_{\text{अ}}$ उंचीच्या एका काल्पनिक भितीवर येणारा मृत्तिकादाब हे सारखेच असतील असे आकृती २५ आ वरून दिसते. $\text{च}_{\text{अ}}$ (समी० ४) या उंचीस **अधिभारानुषंगिक उंची** असे म्हणतात. आकृती २५ आ वरून आपल्याला पुढे दिलेला सोपा भौमितिक संबंध प्राप्त होतो.

$$\text{दा}_{\text{उभ}} = \text{दा}_{\text{उ}}\left(\frac{\text{च}_{\text{अ}}+\text{च}}{\text{च}}\right)^{२} - \text{दा}_{\text{उ}}\left(\frac{\text{च}_{\text{अ}}}{\text{च}}\right)^{२} = \text{दा}_{\text{उ}}\left(१ + २\,\frac{\text{च}_{\text{अ}}}{\text{च}}\right) \qquad [५]$$

या ठिकाणी $\text{दा}_{\text{उ}}$ म्हणजे अधिभारविरहित भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब आहे आणि तो *तपफ* या त्रिकोणाने दाखविला आहे. तेव्हा प्रस्तुत समस्या सोडविण्यासाठी पुढील कृती केली पाहिजे. अधिभारविरहित भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब $\text{दा}_{\text{उ}}$ काढा, समीकरण ४ च्या साहाय्याने $\text{च}_{\text{अ}}$ ही अधिभारानुषंगिक उंची ठरवा आणि समीकरण ५ मध्ये ही मूल्ये नियुक्त करा, म्हणजे $\text{दा}_{\text{उभ}}$ चे मूल्य मिळेल. या दाबाची कारकदिशा $\text{फप}_1\text{त}_1\text{त}$ या दाबक्षेत्राच्या $\text{म}_{\text{त्व}}$ या गुरुत्वमध्यातून जाते (आकृती २५ आ पाहा).

३०. भितीच्या माथ्यास समांतर ठेवलेला रेषाभार : भितीच्या माथ्यास समांतर असणाऱ्या रेषेच्या दर एकांक लांबीवर $\text{भ}'$ मूल्य असलेला रेषा-भार भितीमागील भरणावर कारक असेल, तर भरणामुळे एरव्ही येणाऱ्या $\text{दा}_{\text{उ}}$ या उद्युक्त मृत्तिकादाबात $\Delta\text{दा}_{\text{उ}}$ एवढी भर पडते. $\Delta\text{दा}_{\text{उ}}$ चे मूल्य केवळ भाराच्या महत्तेवरच अवलंबून असते असे नाही, तर पार्श्वीय आधाराचा माथा आणि भाराचे स्थान यांतील अंतरावरही ते अवलंबून असते. आकृती २६ अ पाहा. $\Delta\text{दा}_{\text{उ}}$ या दाबवाढीवर पडणारा या अंतराचा प्रभाव जाणून घेण्यासाठी आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आपण माथ्यापासून $\text{मन}'$ या अंतरावर भार लावू; आणि तदनुषंगिक $\Delta\text{दा}_{\text{उ}}$ चे मूल्य ठरवू. हे ठरविण्याची एक पद्धत सांगायची, तर हे मूल्य कुलमानप्रणीत कृतीमध्ये (परिच्छेद २४ पाहा) किंचित सुधारणा करून मिळविता येते. भरणाच्या पृष्ठभागावर अधिभार

नसता, तर आपल्याला कु ही कुलमानरेषा मिळाली असती व *गन* या पृष्ठावरून घसरण घडून आली असती. *गन'* या कोणत्याही अन्य पृष्ठावर होणारी घसरण थांबविण्यासाठी आवश्यक असणारा पार्श्वीय विरोध *र'त'* या अंतराने मिळतो. आकृती काढण्यासाठी घेतलेल्या प्रमाणात *गर'* या अंतराने *गमन'* या खंडाचे वजन दाखविले जाते. एकांक लांबीवर *भ'* मूल्य असलेला रेषाभार आपण *न'* येथे लावू. ज्याचे घसरपृष्ठ *न'* च्या उजव्या बाजूस असेल, अशा प्रत्येक खंडाचे वजन *भ'* = *र'र'*, इतके वाढते. त्यामुळे ही रेषा आणि *गन'* यांच्या छेदनबिंदूजवळ कुलमानरेषेमध्ये सुस्पष्ट असा खंड पडतो. *त'त'*, या रेषेने हा खंड दाखविला आहे. *त'*, बिंदूच्या उजव्या अंगास कुलमानरेषा कु' या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे पुढे जाते. *गन'* या पृष्ठावरून होणारी घसरण थांबविण्यासाठी आवश्यक असणारा पार्श्वीय विरोध *र'*,*त'*, या अंतराने मिळतो. हे अंतर $\overline{\text{रत}}$ पेक्षा लहान असेल, म्हणजेच अधिभारविहीन भरणामुळे येणाऱ्या *दा*₃ या मृत्तिकादाबापेक्षा लहान असेल, तर पार्श्वीय दाबावर अधिभाराचा प्रभाव पडत नाही व घसरण *गन* या पृष्ठावरून होते. उलटपक्षी, $\overline{\text{रत}}$ पेक्षा $\overline{\text{र'}_1\text{त'}_1}$ ही लांबी मोठी असेल, तर घसरण *गन'* या पृष्ठावरून होते; कारण *गन'* च्या या किंवा त्या अंगास असणाऱ्या कोणत्याही छेदांच्या बाबतीत घसरणीस प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असलेला पार्श्वीय विरोध $\overline{\text{र'}_1\text{त'}_1}$ पेक्षा कमी असतो *भ'* या रेषाभाराने निर्माण केलेला Δ *दा*₃ हा पार्श्वीय दाब $\overline{\text{र'}_1\text{त'}_1} - \overline{\text{रत}}$ या फरकाने दाखविला जातो.



आकृती २६ : भरणावर रेषाभार ठेवला असता येणारा मृत्तिकादाब.

आकृती २६ अ मध्ये विशद केलेली आलेखात्मक कृती वापरून भितमाथ्यापासून निरनिराळ्या अंतरांवर कारक होणाऱ्या भारांमुळे येणारा $\Delta दा_3$ हा दाब ठरविता येतो. रेषाभार ज्या ठिकाणी कारक होतात त्या बिंदूंच्या वर तदनुषंगिक $\Delta दा_3$ ची मूल्ये स्थित केली असता, आपल्याला आकृती २६ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्रभावदर्शक रेषा मिळते. या परिस्थितीतील कुलमानरेषा *कु'* ही आहे. *गउ* या उताररेषेला समांतर काढलेली स्पर्शरेषा *कु'* या वक्ररेषेस $त'_1$ येथे स्पर्श करते आणि $र'_1त'_1$ हे अंतर म्हणजे *भ'* मूल्याचा अधिभार वाहणाऱ्या भरणामुळे येणाऱ्या पार्श्वीय दाबाचे संभाव्य महत्तम मूल्य ठरते. रेषाभार जर *म* आणि $न'_1$ या दोन बिंदूंच्या मध्ये ठेवलेला असेल, तर होणारी घसरण $गन'_1$ या पृष्ठावरून होते; आणि पार्श्वीय दाबावर रेषाभाराच्या स्थानाचा प्रभाव पडत नाही असे दिसते. $न'_1$ या स्थानापासून रेषाभार उजव्या बाजूस सरकविला, तर या स्थानांतराचा पार्श्वीय दाबावरील प्रभाव घटत जातो; आणि घसरणीचे पृष्ठ *ग* आणि या भाराचा कारकबिंदू यांना जोडणाऱ्या रेषेने दाखविले जाते. रेषाभाराच्या स्थानाचा पार्श्वीय दाबावर पडणारा प्रभाव कोणत्या स्थानानंतर नाहीसा होतो, हे ठरविण्यासाठी *गउ* या उताररेषेला समांतर असणारी व कुलमानरेषा कु (रेषाभार भरणावर नसताना मिळणारी) हीस स्पर्श करणारी रेषा आपण काढू. ही स्पर्शरेषा *कु'* या वक्ररेषेस $त'_2$ या बिंदूत छेदते. $गत'_2$ ही रेषा भरणाच्या पृष्ठभागास $न'_2$ या बिंदूशी मिळते. रेषाभार $न'_2$ या स्थानी लावलेला असेल, तर भरणातून जाणाऱ्या $गन'_2$ या पृष्ठावरून होणारी घसरण थांबविण्यासाठी आवश्यक असलेला पार्श्वीय विरोध, तसा भार नसताना भरणाचा समतोल साधण्यासाठी आवश्यक असलेल्या पार्श्वीय विरोधाइतकाच असतो. हा विरोध $\overline{रत}$ या लांबीने दाखविला जातो. म्हणजेच रेषाभार $न'_2$ या बिंदूच्या उजव्या बाजूकडे ठेवलेला असेल, तर मृत्तिकादाबावर त्याचा काहीही प्रभाव पडत नाही; आणि अशा परिस्थितीत घसरण *गन* या पृष्ठावरूनच होते.

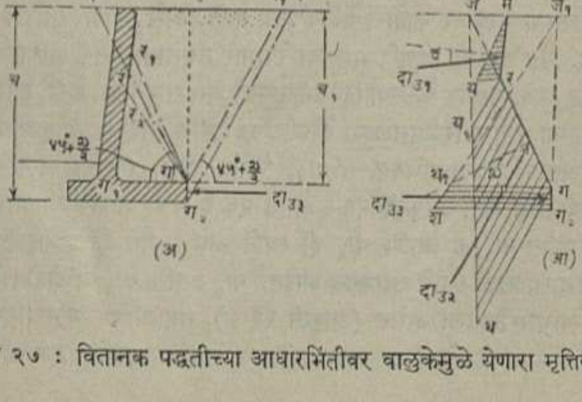
मन (आकृती २६ आ) या लांबीच्या आत जर रेषाभार ठेवलेला नसेल, तर त्याचा पार्श्वीय दाबाच्या मूल्यावर काहीच प्रभाव पडत नाही, असे काही स्थापत्य-विशारदांचे मत आहे. *मन* ही रेषा म्हणजे भरणावर रेषाभार नसताना घसरू पाहणाऱ्या खंडाची वरची बाजू आहे. येथवर केलेल्या विवेचनावरून हे मत समर्थनीय नाही, हे दिसून येईल.

भिंतमाथ्याला समांतर असलेल्या रेषेवरील दर एकांक लांबीवर *भ'* मूल्याचा अधिभार लावला असता जे दाबाधिक्य, $\Delta दा_3$, निर्माण होते, त्याच्या कारकबिंदूचे स्थान ठरविण्याची सोपी पद्धत आकृती २६ इ आणि २६ ई मध्ये दाखविलेली आहे. आकृती २६ आ मधील $न'_1$, न आणि $न'_2$ ही स्थाने आणि या दोन आकृतींमध्ये त्याच अक्षरांनी दाखविलेली स्थाने सारखीच आहेत. $न'_1$ आणि $न'_2$ या दोहोंमध्ये पडणाऱ्या *न'* येथे रेषाभार ठेवलेला असेल (आकृती २६ इ), तर आपण *म'न'* || *गउ* काढली पाहिजे. रेषाभारामुळे येणाऱ्या जादा पार्श्वीय दाबाचा कारकबिंदू *म'ग* वर असेल व

त्याचे म' पासूनचे अंतर स्थूलमानाने $\overline{म'ग}$/३ इतके असेल. रेषाभार जर म आणि न'$_१$ मध्ये असलेल्या न' या बिंदूवर असेल (आकृती २६ ई) तर म'न' ∥ गउ आणि ग'न' ∥ गन'$_१$ काढल्या पाहिजेत. येथे दाबाधिक्याचा कारकबिंदू ग'म' या रेषेवर म' पासून $\overline{म'ग'}$/ ३ एवढ्या अंतरावर स्थूलमानाने असेल. दोन्ही ठिकाणी होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते.

यापेक्षा अधिक अचूक उत्तर हवे असेल, तर भिंतमाथ्यापासून निरनिराळ्या उंचीवरील एकूण दाब ठरविला पाहिजे. असे केल्यास आलेखात्मक कलनाने भिंतपाठीवरील पार्श्वीय दाबाचे वितरण निश्चित करण्यासाठी आवश्यक असलेली माहिती मिळते. तथापि रेषाभाराचे अस्तित्व प्रत्यक्षात घसरपृष्ठाचे वक्रत्व वाढविण्यास नेहमीच कारणीभूत होते. परिणामी, घसरपृष्ठ सरळ गृहीत धरल्यामुळे होणारी चूक वाढते. म्हणून रेषाभारामुळे येणाऱ्या दाबाधिक्याचा कारकबिंदू निश्चित करण्यासाठी एवढा खटाटोप करणे त्यातून प्राप्त होणाऱ्या अचूकतेच्या मानाने निरर्थक असते.

३१. प्रबलित काँक्रीटच्या भिंतीवरील मृत्तिकादाब : प्रबलित काँक्रीटच्या भिंती नेहमी अवजड पादकावर बांधलेल्या असतात. आकृती २७ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे हे पादक भरणाखाली असते. अशी भिंत भरणात उच्छेद होण्याइतकी कलंडून किंवा सरकून विस्थापित झाली, तर भरणापैकी भिंतीलगतचा एक भाग जवळजवळ अविचलित राहतो आणि त्याचे वर्तन जणू तो भिंतीचाच एक भाग आहे असे घडते. आकृतीत हा भाग गग$_१$र या त्रिकोणाने दाखविला आहे. भिंत पुरेशी स्थिर नसेल, तर भरण ग$_२$न या घसरपृष्ठावरून उच्छेद पावते. आपल्या गृहीतानुसार घसरू पाहणाऱ्या खंडाचा प्रत्येक भाग नम्य समतोलाच्या अवस्थेत जावा अशा पद्धतीने भिंतीचे विचलन व्हावयास हवे. अर्थातच अशा खंडाच्या डावीकडील मरगग$_२$ ही सीमा म्हणजे संभाव्य घसरपृष्ठाची खालची बाजू ठरते. गन$_१$ ही रेषा ग मधून निघणारे घसरपृष्ठ दाखविते.



आकृती २७ : वितानक पद्धतीच्या आधारभिंतीवर वाळुकेमुळे येणारा मृत्तिकादाब.

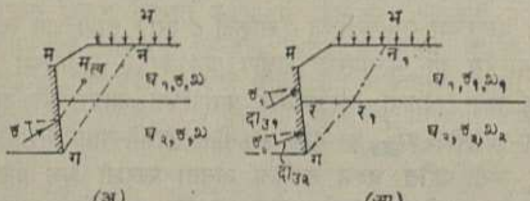
गर हे पृष्ठ भितमाथ्याच्या पातळीवर असलेल्या $म_१$ पर्यंत लांबविले, तर $गन_१म_१$ असा त्रिकोण मिळतो. या मृत्तिकाखंडाची सीमास्थ प्रतिबललक्षणे आणि विरूपल-लक्षणे आकृती ८ इ मध्ये दाखविलेल्या अपारप्राय राशीत घेतलेल्या व एकमेकांना छेदणाऱ्या दोन घसरपृष्ठांनी बनणाऱ्या खंडावरील तसल्याच लक्षणांसारखी असतात. तेव्हा सत्यसमीप असे उत्तर मिळविण्याचा पहिला प्रयत्न म्हणून परिच्छेद १० मधील विश्लेषणातून निघणारी फलिते प्रस्तुत समस्येला लागू करता येतील. या फलितांनुसार आकृती २७ अ मधील $गन_१$ आणि *गर* ही घसरपृष्ठे क्षितिजाशी $४५^\circ + ὠ/२$ कोन करतात. *गर* या पृष्ठावर कारक होणारा $दा_{उ_२}$ हा मृत्तिकादाब लंबाशी ὠ कोन करतो. त्याची महत्ता मोहरच्या रेखाकृतीच्या (आकृती ८ आ) साहाय्याने त्वरित ठरविता येते. भिंतीच्या *रम* या भागावरील पार्श्वीय दाब $दा_{उ_१}$ कूलोमच्या २३(१) या समीकरणांच्या किंवा त्यांच्या आलेखात्मक पर्यायांच्या साहाय्याने ठरविता येतो. $गग_२$ या उभ्या पृष्ठावरील $दा_{उ_३}$ हा दाब आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आडव्या दिशेत कारक होतो, असे गृहीत धरून ठरविला असता फारशी चूक होत नाही. या गृहीतानुसार व समीकरणे १५ (१) आणि १५ (२) यांच्या साहाय्याने आपल्याला त्याचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$दा_{उ_३} = \frac{१}{२} घ (च^२ - च_१^२). स्प^२ (४५^\circ - ὠ/२)$$

भिंतीच्या *रम* या भागावरील मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाप्रमाणे असते. आकृती २७ आ मधील *मय* या सरळ रेषेने हे दाखविले आहे. या दाबाचा कारकबिंदू र पासून मर/३ इतक्या अंतरावर असतो. $म_१न$ या समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय राशीतून घेतलेल्या $म_१ग$ या पृष्ठावरील (आकृती २७ अ) मृत्तिकादाबाचे वितरणसुद्धा स्थिरजलदाबासारखे असते. हे दाबवितरण आकृती २७ आ मध्ये *जथ* या सरळरेषेने दाखविले आहे. आकृती २७ अ मधील *गर* या घसरपृष्ठावरील दाब $गयय_१र$ या समलंब चौकोनी आकृतीने (आकृती २७ आ) दाखविला जातो, असे आपण गृहीत धरले, तर फारसे चूक ठरत नाही. $दा_{उ_३}$ हा मृत्तिकादाब $ग_२शथ_१ग$ या क्षेत्राने दाखविला जातो.

या समस्येचे अधिक अचूक उत्तर मिळवायचे असेल, तर परिच्छेद २८ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतीचा अवलंब करून, $मर_१ग$, $मर_२ग$ (आकृती २७ अ) या निरनिराळ्या सांधलेल्या पृष्ठावरील पार्श्वीय मृत्तिकादाब ठरवून ते मिळविता येते. येथेही पार्श्वीय दाबाच्या महत्तम मूल्यास अनुषंगिक असणाऱ्या छेदावरून घसरण घडून येईल. *ग* बिंदूतून भितपाठीकडे जाणाऱ्या घसरपृष्ठावरील मृत्तिकादाबाचे वितरण परिच्छेद २७ च्या शेवटी विशद केलेल्या पद्धतीचा अवलंब करून ठरविता येते.

३२ स्तरयुक्त भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब : आकृती २८ अ मध्ये दोन थर असलेल्या समाकर्षणहीन भरणाचा छेद दाखविला आहे. या थरांतील मृत्तिकांच्या घनता $घ_1$ आणि $घ_2$ आहेत; परंतु अंतर्गत घर्षणाचा कोन ϕ मात्र सारखाच आहे आणि भितघर्षणाचा ϕ' कोनही तोच आहे. अशा उदाहरणातील मृत्तिकादाब कुलमानप्रणीत कृतीने (परिच्छेद २४) सहज ठरविता येतो; कारण मृत्तिकाखंडातील भागाचे वजन कोठे कसे आहे, याविषयीचे कोणतेच गृहीत या कृतीत समाविष्ट झालेले नाही.



आकृती २८ : स्तरयुक्त समाकर्षणहीन भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब.

मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू शोधण्यासाठी *गमन* हा घसरू पाहणारा खंड आणि त्यावरील अधिभार यांचा $म_{त्व}$ हा गुरुत्वमध्य आपण निश्चित करू. $म_{त्व}$ मधून *गन* ला समांतर काढलेली रेषा भिंतपाठीला जेथे छेदते त्या ठिकाणी हा कारकबिंदू स्थित असतो, असे स्थूलमानाने म्हणता येईल.

आकृती २८ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे या दोन थरांतील मृत्तिकांचे अंतर्गत घर्षणाचे कोन आणि भितघर्षणाचे कोन भिन्नभिन्न असतील, तर ही समस्या आपल्याला दोन टप्प्यात सोडविणे भाग पडते. प्रथम भिंतीच्या *रम* या भागावरील $दा_{उ_1}$ हा पार्श्वीय दाब ठरवावयाचा—परिच्छेद २७ व २९ मध्ये वर्णिलेल्या कृतींचा अवलंब करून हे करता येते—आणि नंतर भिंतीच्या *गर* या खालच्या भागावर येणारा $दा_{उ_2}$ हा पार्श्वीय दाब ठरवावयाचा. $दा_{उ_2}$ ठरविताना आपल्याला दोन गोष्टींकडे दुर्लक्ष करावे लागते, त्या म्हणजे उपरोक्त दोन थरांना अलग करणाऱ्या सीमेवर कारक असणारी सर्व कार्तनिक प्रतिबले आणि या सीमेच्या वर असणाऱ्या कोणत्याही उभ्या छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले या होत. असे केले असता वरचा संपूर्ण थर म्हणजे साधा अधिभार आहे, असे मानता येते आणि खालच्या थरात घेतलेल्या कोणत्याही आडव्या छेदावरील उभा दाब, त्या छेदावरील मृत्तिकेचे वजन अधिक त्यावरील *भ* हा उपरोक्त अधिभार इतका होतो. समस्येला असे सोपे स्वरूप दिल्यामुळे भिंतीच्या *गर* या भागावरील $दा_{उ_2}$ हा पार्श्वीय मृत्तिकादाब कुलमानप्रणीत कृतीने ठरविता येतो. तदनुषंगिक घसरपृष्ठ $गर_1$ हे आहे. दाब ठरविण्याच्या या पद्धतीत समाविष्ट होणारी चूक असुरक्षिततेला कारणीभूत होते;

कारण जी कार्तनिक बले आपण दुर्लक्षितो, त्यांची प्रवृत्ती भिंतीच्या *गर* या भागावरील पार्श्वीय दाब वाढविण्याकडे असते.

३३. समाकर्षणगुणी भरणामुळे येणारा मृत्तिकादाब : आधारभिंतीमागील समाकर्षणगुणी भरणाचा छेद आकृती २९ अ मध्ये दाखविला आहे. या भिंतीची पाठ खडबडीत आहे आणि भरणातील मृत्तिकेच्या कार्तनिक विरोधाचे समीकरण असे आहे :

$$\text{क} = \text{स} + \text{७}\,\text{स्प}\,\text{ω} \qquad \text{५ (१)}$$

मृत्तिका आणि भिंतपाठ यांतील स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले पुढीलप्रमाणे आहेत :

$$\text{द}'_{\text{उत}} = \text{ष} + \text{द}'_{\text{उल}}\,\text{स्प}\,\text{ठ}'$$

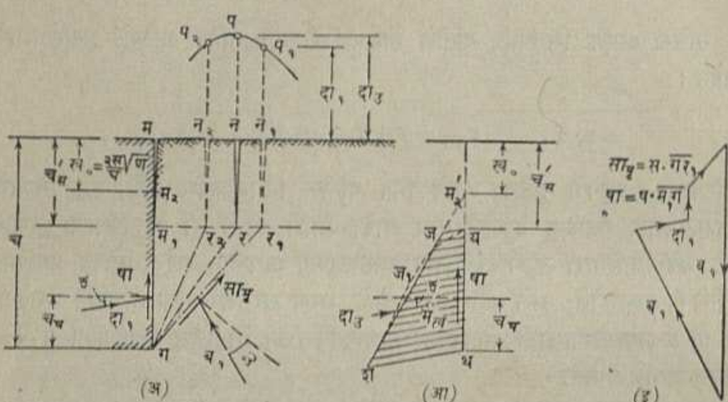
या ठिकाणी ष म्हणजे मृत्तिका आणि भिंत यांतील विषमाकर्षण आहे, $\text{द}'_{\text{उल}}$ म्हणजे भिंतपाठीवरील लंबदिक् दाबाचे मूल्य आहे; आणि स्प ठ॑ हा भिंतघर्षणाचा गुणांक आहे. घसरू पाहणारा संपूर्ण खंड नम्य समतोलाच्या अवस्थेत जाईल, एवढ्या प्रमाणात भिंतीचे विचलन होते, असे गृहीत धरले आहे. भरण समाकर्षणगुणी मृत्तिकेचे असल्यामुळे ही अवस्था येण्यासाठी आवश्यक असणारे विचलन भिंतीच्या उंचीच्या ५% पेक्षा अधिक असावे लागते.

या उदाहरणातील उद्युक्त मृत्तिकादाब ठरविण्याची खाली वर्णिलेली पद्धत समाकर्षणगुणी राशींमधील उद्युक्त रॅन्किन् दाब ठरविण्याच्या पद्धतीसारखीच आहे. अपारप्राय व समाकर्षणगुणी राशी उद्युक्त रॅन्किन् अवस्थेत असताना त्याचा अगदी वरचा भाग काही खोलीपर्यंत ताणयुक्त अवस्थेत असतो, हे परिच्छेद १२ मध्ये दाखविले आहेच. ही खोली अशी :

$$\text{ख}_{\circ} = \frac{\text{२स}}{\text{घ}}\,\text{स्प}(\text{४५}^{\circ} + \text{ω}/\text{२}) \qquad \text{१२ (१)}$$

या ठिकाणी ताण शून्य होऊन त्यानंतर खाली दाब निर्माण होतो व उभ्या पृष्ठावर येणाऱ्या या आडव्या दाबाचे मूल्य $\text{ख}_{\circ}$ या खोलीवरील शून्य मूल्यापासून खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढत जाते. आकृती ११ उ मध्ये ही गोष्ट गनन_{3} या क्षेत्राने दाखविली आहे. मृत्तिकाराशीतील एखाद्या पातळीच्या वर असलेली मृत्तिका आपण काढून घेतली व त्या ठिकाणी दर एकांक क्षेत्रावर तितक्याच वजनाचा अधिभार ठेवला, तर या पातळीखालच्या भागातील प्रतिबलांची तीव्रता आणि वितरण बदल न होता तशीच राहतात. या गोष्टीचाही आधार पुढील विवेचनात घेतला जाईल. राशीचा पृष्ठभाग ते $\text{२ख}_{\circ}$ खोलीवरील पातळी, एवढ्या उंचीच्या उभ्या पृष्ठावर येणाऱ्या एकूण बलांची (ताण + दाब)

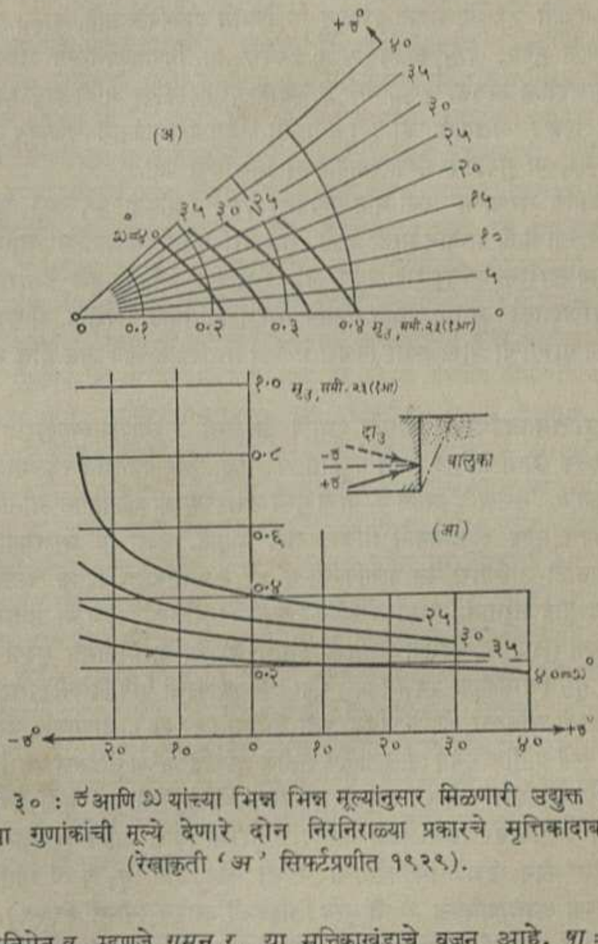
बेरीज शून्य होते; म्हणून शास्त्रापुरते म्हणावयाचे, तर $च_स = २ख_०$ एवढ्या उंचीचे भरण पार्श्वीय आधार न देताही उभे राहिले पाहिजे (परिच्छेद ५७ पाहा). परंतु प्रत्यक्षात ताणयुक्त अवस्थेमुळे वरच्या भागात लवकरच तडे पडतात, आणि त्यामुळे $च_स$ हे मूल्य $च'_स$ इतके कमी होते. तसेच आकृती २९ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे या खोलीपर्यंत मृत्तिका भितपाटीपासून अलग होते. पुढील गणित सोपे होण्यासाठी मृत्तिकेतील ताणजन्य तडे या खोलीपर्यंतच असतात, असे गृहीत धरले जाते. या गृहीतामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते.



आकृती २९ : समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेच्या भरणामुळे आधारभिंतीवर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब.

$च'_स$ ही उंची ठरविणाऱ्या गोष्टींचे विवेचन परिच्छेद ५७ मध्ये केले जाईल. पुढील विश्लेषणात $च'_स$ चे मूल्य माहीत आहे, असे गृहीत धरले आहे. वर उल्लेख केल्याप्रमाणे, पृष्ठभागापासून $च'_स$ पर्यंत असलेली मृत्तिका म्हणजे एकांक क्षेत्रावर $घ च'_स$ एवढे मूल्य असलेला अधिभार आहे, असेही आणखी गृहीत धरले आहे. घसरपृष्ठ तड्यांच्या तळापासून म्हणजे *ग र* असे (आकृती २९ अ) काढले, तर वरील गृहीताची पूर्तता होते. पूर्वी वर्णिलेल्या उद्युक्त रॅन्किन् अवस्थेसारखी अवस्था गृहीत धरल्यामुळे, पहिले सत्यसमीप उत्तर म्हणून शेवटी असेही गृहीत धरले आहे की, भिंतीवरील दाब $म_१$ या बिंदूपासून खाली खोलीनुसार वाढत जातो. आकृती २९ आ मध्ये हा दाब *जश* या रेषेने दाखविला आहे. या गृहीतानुसार भितपाठीवरील $दा_३$ हा दाब आकृती २९ आ मधील *यजशथ* या चौकोनी दाबक्षेत्राने दाखविला जातो. प्रत्यक्षात दाबाचे वितरण *यज१शथ* या क्षेत्राने दाखविल्याप्रमाणे असणेच अधिक संभवनीय असते. या क्षेत्राचा गुरुत्वमध्य *यजशथ* या क्षेत्राच्या गुरुत्वमध्याच्या थोडासा खाली स्थित असतो.

$\text{दा}_{\text{उ}}$ ($\text{दा}_{\text{उस}}$ या उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा $\text{दा}_{\text{उल}}$ हा लंबघटक आणि त्याचाच $\text{दा}_{\text{उल}}$ स्प ड हा घर्षण-घटक या दोहोंचा फलरूप दाब) ठरविण्यासाठी आपण भिंतीच्या ग या तळापासून निघणारे गर_{1} हे एक घसरपृष्ठ विचारात घेऊ. या पृष्ठावरून होणारी घसरण थांबविण्यासाठी लागणारे दा_{1} हे बल आकृती २९ इ मध्ये दाखविलेल्या बलप्रतिमेवरून मोजता येते.



आकृती ३० : ड आणि ω यांच्या भिन्न भिन्न मूल्यांनुसार मिळणारी उद्युक्त मृत्तिकादाबाच्या गुणांकांची मूल्ये देणारे दोन निरनिराळ्या प्रकारचे मृत्तिकादाब-आलेख (रेखाकृती 'अ' सिफर्टप्रणीत १९२९).

या प्रतिमेत व_{1} म्हणजे $\text{गमन}_{1}\text{र}_{1}$ या मृत्तिकाखंडाचे वजन आहे. $\text{भा} = \overline{\text{म}_{1}\text{ग}}$ भ आणि $\text{सा}_{\text{मृ}} = \text{स}\,\overline{\text{गर}_{1}}$ ही बले म्हणजे अनुक्रमे भिंत आणि मृत्तिका यांतील गम_{1} या स्पर्शपृष्ठावर कारक असणारे विषमाकर्षणजन्य बल आणि गर_{1} या पृष्ठावरील समाकर्षणजन्य बल आहेत.

$दा_उ$ ची महत्ता ठरविण्यासाठी आपण हीच कृती $ग$ पासून निरनिराळे कोन करून निघणाऱ्या आणि $र_1$ या बिंदूच्या उंचीपर्यंत जाणाऱ्या सरळ पृष्ठांचे बाबतीत करू. या पृष्ठांच्या बाबतीत मिळणारी $दा_1$, $दा_2$ इत्यादी मूल्ये आकृती २९ अ मध्ये दाखविल्या-प्रमाणे भरणपृष्ठाच्या वर कोटीमूल्यासारखी स्थित करू. $दा_उ$ या बलाचे मूल्य अशा प्रकारे मिळणाऱ्या आलेखाच्या महत्तम कोटीमूल्याइतके असते. $दा_उ$ चे भिंतपाठीवरील वितरण आकृती २९ आ मधील *यजशथ* या क्षेत्राने दाखविले आहे. $दा_{उस}$ या उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे मूल्य, $दा_उ$ आणि $था = \overline{थम_1ग}$ हा विप्रमाकर्षणजन्य घटक यांच्या फलरूप दाबाइतके असते. $दा_{उस}$ या मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू आणि $दा_उ$ या दाबाचा कारकबिंदू एकच असतात. हा बिंदू आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे *यजशथ* या दाब-क्षेत्राच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्याच्या स्थानावरून मिळविता येतो.

भिंत आणि भरणाचा वरचा भाग यांमधील $मम_1$ (आकृती २९ अ) हा पोकळ भाग पावसाच्या वेळी पाण्याने भरला जातो. या परिस्थितीत भिंतपाठीवर येणारा एकूण पार्श्वीय दाब उपरोक्त मृत्तिकादाब आणि $च_{स}$ उंचीच्या जलस्तंभामुळे येणारा जलदाब यांच्या बेरजेइतका असतो. भिंत आणि भरण यांमधील उपरोक्त मोकळा भाग व्यापणाऱ्या पाण्याचा योग्य प्रकारे निचरा केलेला असल्यास मात्र असे होत नाही.

३४. मृत्तिकादाबाची कोष्टके आणि आलेख : स्थापत्य-व्यवहारात आढळ-णाऱ्या बहुतेक भिंतींची पाठ आणि बहुतांश भरणांचा पृष्ठभाग निदान स्थूलमानाने तरी सरळ असतात. तसेच ϕ आणि δ यांची मूल्ये ठरविण्याच्या बाबतीतील अनिश्चिततेमुळे मृत्तिकादाबाचे मूल्य स्थूलमानाने मिळाले तरी भागते. तेव्हा या प्रकारच्या समस्या सोडविण्यासाठी लागणारा वेळ वाचविण्याच्या दृष्टीने मृत्तिकादाबविषयक कोष्टके आणि आलेख उपयुक्त ठरतात. अशा कोष्टकांतून आणि आलेखांतून β या उतारकोनाच्या निरनिराळ्या मूल्यांच्या संदर्भात आणि ϕ आणि δ यांच्या भिन्नभिन्न मूल्यांच्या वेळी मिळणारी $मृ_उ$ (समीकरण २३ (१ आ)) या दाबगुणांकाची मूल्ये दिलेली असतात. क्रेने मृत्तिकादाबाची सविस्तर कोष्टके प्रसिद्ध केली आहेत (१९३६). दाबगुणांक आणि ϕ व δ यांची मूल्ये यांतील संबंध आलेखात्मक रीतीने दाखविण्याच्या सोईस्कर पद्धती आकृती ३० मध्ये दाखविल्या आहेत. आकृती ३० अ मध्ये $मृ_उ$ ची मूल्ये एका उगमबिंदूतन निघणाऱ्या शलाकांवर स्थित केली आहेत. आडवा अक्ष आणि विवक्षित शलाका यांनी केलेला कोन म्हणजे भिंतघर्षणाचा ϕ हा कोन होय. $मृ_उ$ व ϕ यांतील संबंध दाखविणाऱ्या आलेखाजवळ δ ची मूल्ये लिहिलेली आहेत (सीफर्ट १९२९). आकृती ३० आ मध्ये $मृ_उ$ हा दाबगुणांक आणि भिंतघर्षणकोन ϕ यांचा संबंध दाखविला आहे. मृत्तिकादाबाच्या महत्तेवर भिंतघर्षण-कोनाचा केवढा प्रभाव पडतो, हे या दोन आकृतींवरून चटकन ध्यानात येते.

प्रकरण ७

प्रतियोगी मृत्तिकादाब

३५. स्थापत्य-व्यवहारातील प्रतियोगी मृत्तिकादाब : अतिशय व्यापक अर्थाने बघता, प्रतियोगी मृत्तिकादाब या संज्ञेने मृत्तिकेला विस्थापित करू पाहणाऱ्या बळांना तिच्याकडून केला जाणारा विरोध दाखविला जातो. स्थापत्य-व्यवहारांत अशा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा उपयोग बऱ्याच वेळा आधार देण्यासाठी केला जातो. उदाहरण म्हणून आडवी किंवा तिरकी बले ज्यांवर कारक आहेत, अशा आधारभिंती किंवा फलकभिंती यांचा उल्लेख करता येईल. आकृती १९ मध्ये *गर* हा तळ सरकून होणाऱ्या उच्छेदाला प्रतिबंध करण्यासाठी तेथे दाखविलेली आधारभिंत, *रत* या पृष्ठाच्या डाव्या अंगास असलेल्या मृत्तिकेकडून येणाऱ्या प्रतियोगी दाबावर काही अंशी अवलंबून असते. त्याचप्रमाणे आकृती ६३ मध्ये दाखविलेल्या फलकभिंतीचा समतोल *गम*$_1$ या पृष्ठाच्या डाव्या अंगास असलेल्या मृत्तिकेच्या पार्श्वीय विरोधानेच पूर्णतया सांभाळलेला आहे. मृत्तिका विस्थापित करू पाहणाऱ्या वस्तूला **रेट्याचे अधिष्ठान** म्हणतात. ही वस्तू आणि मृत्तिका जेथे एकमेकींस स्पर्श करतात, ते **स्पर्शपृष्ठ** होय.

एखादी इमारत पादकावर आधारित असते तेव्हाही मृत्तिकेकडून येणाऱ्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा उपयोग करून घेतलेला असतो. मृत्तिकेच्या अंतिम भार-धारण-क्षमतेहून पादकावरील भार अधिक झाल्यामुळे पादक खचत असेल, तर आकृती १५ आ मध्ये दाखविलेल्या *गमन* सारखा त्रिकोणाकृती मृत्तिकाखंड पादकासह खाली सरकतो. या खंडाची अवस्था नम्य समतोलाची अथवा स्थितिस्थापक समतोलाची असते. दोहोंपैकी कोणतीही अवस्था असो, *गमन* हा खंड विस्थापित न होता फक्त विरूपत्व पावतो. याउलट, त्याच्या *गन* आणि *मन* या तिरकस सीमांजवळची मृत्तिका भूमीतून बाहेर ढकलली जाते. *गन* आणि *मन* यांवर कारक असणारा दाब प्रतियोगी मृत्तिकादाबापेक्षा अधिक असल्याविना ही घटना घडणे शक्य नाही. या ठिकाणी *गमन* हा त्रिकोणाकृती मृत्तिकाखंड हे रेट्याचे अधिष्ठान आहे आणि मृत्तिकेतच पूर्णतया स्थित असलेली दोन घसरपृष्ठे ही स्पर्शपृष्ठे आहेत.

३६. गृहीते आणि लक्षणे : पुढे विशद केलेल्या गणितात्मक रीती ज्या गृहीतांवर आधारित आहेत, ती अशी : मृत्तिका समदैशिक आणि समांग आहे; स्पर्शपृष्ठास लंबरूप असलेल्या उभ्या पातळीला समांतर असणाऱ्या दिशेतच केवळ मृत्तिकेतील विरूपत्व घडून येते; आणि रेट्याच्या प्रभावामुळे मृत्तिकेत नम्य समतोलाची अवस्था

निर्माण झाली आहे; म्हणजेच स्पर्शपृष्ठ आकृती १४ उ मधील रेखांकित क्षेत्राच्या *म*,*ग* या सीमेच्या पूर्णतः पलीकडे असलेल्या स्थानाप्रत सरकलेले आहे. मूळ स्थिति-स्थापक समतोलाच्या अवस्थेतून नम्य समतोल अवस्थेत संक्रमण होण्यासाठी आवश्यक असलेले लघुतम पार्श्वीय दमन या क्षेत्राने दाखविले जाते. या नम्य समतोल अवस्थेतील कार्तनिक प्रतिमा आकृती १४ उ मध्ये दाखविली आहे.

मृत्तिकेची घनता *घ* आहे. समाकर्षणगुणी असल्यास तिच्या कार्तनिक विरोधाचे समीकरण पुढीलप्रमाणे असते.

$$\text{क} = \text{स} + \text{ʊ}\,\text{स्प}\,\text{ω} \qquad \text{५(१)}$$

येथे *स* हे समाकर्षण, ʊ हे घसरपृष्ठावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल व ω हा कार्तनिक विरोधाचा कोन आहे. स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.

$$\text{द}_{\text{प्रत}} = \text{ष} + \text{द}_{\text{प्रल}}\,\text{स्प}\,\text{ङ} \qquad [१]$$

येथे *ष* म्हणजे मृत्तिका आणि रेट्याचे अधिष्ठान यांतील विप्रमाकर्षण असून $\text{द}_{\text{प्रल}}$ म्हणजे प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक आहे; आणि ङ म्हणजे स्पर्शपृष्ठाच्या स्वरूपावर अवलंबून असणारा एक कोन आहे. स्पर्शपृष्ठ म्हणजे जर चिरेबंदी बांधकाम आणि मृत्तिका यांतील स्पर्शपृष्ठ असेल, तर *ष* आणि ङ यांची मूल्ये अनुक्रमे *स* आणि ω यांच्या मूल्यांइतकीच किंवा थोडी लहान असतात. येथे ङ म्हणजे भिंतघर्षणाचा कोन ठरतो. तथापि स्पर्शपृष्ठ जर मृत्तिकाराशीस छेदून जात असेल, तर *ष* = *स* आणि ङ = ω असे मानले जाते. दोहोंपैकी कोणतेही उदाहरण असो, त्यामध्ये ङ हा कोन धनचिन्हांकित अथवा ऋणचिन्हांकित असू शकतो (परिच्छेद १५ पाहा). या प्रकरणातील सर्व आकृतींत ङ धन दाखविला आहे. कारण ऋणचिन्हांकित भिंतघर्षणाने युक्त असा प्रतियोगी मृत्तिकादाब निर्माण होण्यास आवश्यक असणाऱ्या अटींची पूर्तता व्यवहारात क्वचितच होते. *ष* हे भिंतघर्षणाच्या दिशेनेच कार्य करते; म्हणून ङ ऋणचिन्हांकित असेल, तर विप्रमाकर्षणही तसेच असते.

समाकर्षणहीन मृत्तिकांच्या बाबतीत *स* आणि *ष* यांची मूल्ये शून्य असतात आणि कार्तनिक विरोध पुढीलप्रमाणे असतो.

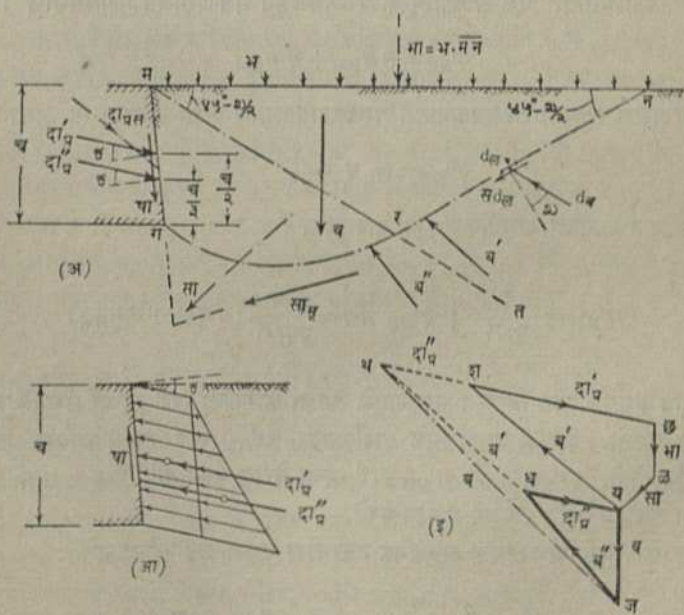
$$\text{क} = \text{ʊ}\,\text{स्प}\,\text{ω}$$

येथे ʊ हे घसरपृष्ठावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल आहे, आणि ω हा अंतर्गत घर्षणाचा कोन आहे. अशा उदाहरणात स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतात.

$$\text{द}_{\text{प्रत}} = \text{द}_{\text{प्रल}}\,\text{स्प}\,\text{ङ}$$

पुढील विवेचनात भूपृष्ठ समतल आहे व δ हा भिंतघर्षणाचा कोन धन आहे, असे गृहीत धरले जाईल. तथापि तेथे वर्णिलेल्या रीति कोणतेही मूलभूत बदल न करता, भूपृष्ठ तिरकस व δ ऋण असणाऱ्या उदाहरणांसाठीही वापरता येतील.

या परिच्छेदाच्या प्रारंभीच विदित केलेल्या लक्षणांची पूर्तता होत असल्यास व δ धनचिन्हांकित असल्यास मृत्तिकेचा उच्छेद आकृती १४ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे होतो; आणि δ ऋणचिन्हांकित असल्यास उच्छेद आकृती १४ ए मध्ये दाखविल्याप्रमाणे होतो. दोन्ही उदाहरणांतील नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असलेल्या विभागात, ज्याच्या तिरकस सीमा क्षितिजाशी ४५° − φ/२ कोन करणाऱ्या आहेत, असा प्रतियोगी रॅन्‌किन् विभाग समाविष्ट झालेला असतो. रॅन्‌किन् विभाग आणि स्पर्शपृष्ठ यांमध्ये स्थित असलेल्या त्रिकोणाकृती विभागाचा तळ वक्र असतो. म्हणून आकृती ३१ अ मधील *मगरन* या घसरू पाहणाऱ्या खंडाचा तळ, *गर* हा वक्रभाग आणि *रन* हा क्षितिजाशी ४५° − φ/२ कोन करणारा वरच्या अंगाकडील सरळ भाग, यांनी बनलेला असतो. या दोन भागांच्या सांध्यावरचा *र* हा बिंदू *म त* या सरळरेषेवर स्थित आहे. ही रेषा स्पर्शपृष्ठाच्या माथ्याकडील *म* या कडेतून निघते आणि क्षितिजाशी ४५° − φ/२ कोन करून खालच्या दिशेने उतरते. हे लक्षण समाकर्षणयुक्त आणि



आकृती ३१ : समाकर्षणगुणी मृत्तिकेच्या प्रतियोगी दाबाच्या कारकबिंदूचे आसन्नमानाने ठरविलेले स्थान.

समाकर्षणहीन अशा दोन्ही मृत्तिकांच्या बाबतीत दिसून येते. घसरपृष्ठाच्या वक्र भागाचा आकार, एक तर लघुगणकीय वलयाकृती आहे किंवा वर्तुळाच्या चापासारखा आहे, असे गृहीत धरणे बरोबर ठरते. भिंतीचा घर्षणकोन, δ, लहान असल्यास (परिच्छेद ३८ पाहा), समाकर्षणहीन मृत्तिकांच्या बाबतीत घसरू पाहणाऱ्या खंडाचा तळ सरळ-रेषात्मक आहे असे मानले, तरी फारशी चूक होत नाही.

३७. प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू : आकृती ३१ मधील उदाहरणात मागील परिच्छेदाच्या आरंभीच विदित केलेल्या विरूपत्वलक्षणांची पूर्तता झालेली आहे, असे गृहीत धरल्यास *मग* या स्पर्शपृष्ठावर येणाऱ्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या $द_{प्रल}$ या लंबदिक् घटकाचे *ख* खोलीवरील मूल्य पुढील सरळरेषादर्शक समीकरणाने स्थूलपणे व्यक्त करता येते.

$$द_{प्रल} = स \cdot मृ_{प्रस} + भ\ मृ_{प्रभ} + घ \cdot ख\ मृ_{प्रघ} \qquad १५\ (५)$$

येथे *भ* हे एकांक क्षेत्रावरील अधिभाराचे मूल्य असून $मृ_{प्रस}$, $मृ_{प्रभ}$ आणि $मृ_{प्रघ}$ हे शुद्ध अंक आहेत. त्यांची मूल्ये *ख* आणि *घ* यांवर अवलंबून नाहीत. $द_{प्रल}$ या दाबाचे दोन भाग पाडता येतात. एक *ख* च्या मूल्यावर अवलंबून नसणारा; तो पुढीलप्रमाणे :

$$द'_{प्रल} = स\ मृ_{प्रस} + भ\ मृ_{प्रभ}$$

आणि दुसरा *ख* च्या सरळप्रमाणात स्थिरजलदाबाप्रमाणे वाढत जाणारा; तो असा :

$$द''_{प्रल} = ख \cdot घ\ मृ_{प्रघ}$$

पहिल्या भागाला अनुषंगिक एकूण दाब असा :

$$दा'_{प्रल} = \frac{१}{ज्या\,\theta} \int_{0}^{च} द'_{प्रल}\, dख = \frac{च}{ज्या\,\theta} (स\ मृ_{प्रस} + भ\ मृ_{प्रभ}) \qquad [१]$$

हा दाब समप्रमाणात वितरित असल्यामुळे त्याचा कारकबिंदू स्पर्शपृष्ठाच्या मध्यबिंदूजवळ स्थित असतो. $दा'_{प्रल}$ या दाबामुळे स्पर्शपृष्ठावर $दा'_{प्रल}\ स्प\delta$ हा घर्षणात्मक विरोध निर्माण होतो. $दा'_{प्रल}$ आणि $दा'_{प्रल}\ स्प\delta$ यांची बेरीज करून $दा'_{प्र}$ हे बल प्राप्त होते. ते या स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी δ कोन करते.

उपरोक्त दुसऱ्या भागाला अनुषंगिक असणारा एकूण दाब पुढीलप्रमाणे :

$$दा''_{प्रल} = \frac{१}{ज्या\,\theta} \int_{0}^{च} द''_{प्रल}\, dख = \frac{१}{२} घच^{२} \frac{मृ_{प्रघ}}{ज्या\,\theta} \qquad [२]$$

याचा कारकबिंदू स्पर्शपृष्ठाच्या तळापासून च / ३ उंचीवर स्थित असतो; $दा''_{प्रल}$ आणि तज्जन्य घर्षणात्मक विरोध $दा''_{प्रल}$ स्पδ यांची बेरीज करून $दा''_{प्र}$ हे बल प्राप्त होते. तेही स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी δ कोन करते.

शेवटी, एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाब $दा_{प्रस}$ म्हणजे $दा'_{प्र}$, $दा''_{प्र}$ आणि विषमाकर्षण-जन्य बल :

$$षा = \frac{च}{ज्या \, \pi} ष \qquad [३]$$

या तीन बलांच्या फलरूप बलाइतका असतो.

म्हणजेच, एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे घटक पडतात ते असे : $दा'_{प्र}$, $दा''_{प्र}$ आणि $षा$. स्पर्शपृष्ठाच्या संदर्भात त्यांच्या दिशा व स्थाने आपणांस माहीत झाली आहेत. स्पर्शपृष्ठावरील त्यांची स्थाने आकृती ३१ अ मध्ये दाखविली आहेत. जिच्यावर अधिभार नाही, अशा समाकर्षणहीन मृत्तिकेच्या बाबतीत $दा'_{प्र}$ आणि $षा$ यांची मूल्ये शून्य होतात, आणि $दा''_{प्र}$ म्हणजेच एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाब $दा_{प्र}$ ठरतो.

$दा'_{प्र}$ आणि $षा$ या बलांची महत्ता स्पर्शपृष्ठाच्या उंचीच्या सरळ प्रमाणात वाढते, आणि $दा''_{प्र}$ चे मूल्य उंचीच्या वर्गाच्या प्रमाणात वाढते. आकृती ३१ आ पाहा. स्पर्श-पृष्ठाच्या तळाजवळील कडेतून निघणाऱ्या घसरपृष्ठावरून मृत्तिकेचा कार्तनिक उच्छेद होतो. $दा'_{प्र}$ च्या मूल्यामध्ये मृत्तिकेच्या घनतेचा समावेश झालेला नाही. तेव्हा समाकर्षणजन्य विरोध आणि अधिभाराच्या वजनामुळे उद्भवणारा घर्षणजन्य विरोध यांवर मात करण्या-साठी एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाबामधील जो भाग कारणी लागतो, तो म्हणजे हे बल होय. तेव्हा मृत्तिकेची घनता शून्यमूल्य झाल्यास विवक्षित घसरपृष्ठावरून घसरण घडवून आणण्यासाठी लागणाऱ्या $दा_{प्र}$ या बलाचे मूल्य $दा'_{प्र}$ असे होईल. याउलट, घनता = ष असून समाकर्षण आणि अधिभार नसतील, तर हेच बल $दा''_{प्र}$ इतके होईल.

एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक असा आहे :

$$दा_{प्रल} = दा'_{प्रल} + दा''_{प्रल} = \frac{च}{ज्या \, \pi} (सम्_{प्रस} + भम्_{प्रभ}) + \frac{१}{२} षच^{२} \; \frac{मृ_{प्रघ}}{ज्या \, \pi} \qquad [४]$$

आकृती ३१ अ मध्ये *गरन* या रेषेने घसरपृष्ठ दाखविले आहे. घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या माथ्याकडील *मन* या पृष्ठावर $भा = भ \cdot \overline{मन}$ हा समप्रमाणात वितरित असलेला अधिभार कारक आहे. $दा_{प्रस}$ या एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाबाची फोड $दा'_{प्र}$, $दा''_{प्र}$ आणि $षा$ या घटकांत करण्यासाठी *मगरन* या खंडाच्या समतोलासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे आपण विचारात घेऊ. त्याचे वजन *व* असून त्यावर पुढील बले कारक आहेत. (१) *भा* हा अधिभार (२) *गरन* वरील $सा_{मृ}$ हे समाकर्षणजन्य बल व भिंतीवरील $षा$ हे विषमाकर्षणजन्य बल या दोहोंचे फलरूप बल *सा* (३) $dव$ या

खंडशः मिळणाऱ्या प्रतिक्रियांचे फलरूप बल *ब*; (आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे *गरन* या घसरपृष्ठाच्या प्रत्येक बिंदुस्थानी d*ब* ही प्रतिक्रिया लंबाशी ꣹ कोन करते) आणि (४) स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी ꣸ कोन करणारी *दा'*$_{प्र}$ आणि *दा"*$_{प्र}$ ही बले. समतोल साधण्यासाठी या सर्व बलांची बलप्रतिमा (आकृती ३१ इ) बंदिस्त असणे आवश्यक आहे. बलप्रतिमेमध्ये दाखविलेल्या बलांपैकी *भा* आणि *सा* ही बले (एकेरी रेषा) स्पर्शपृष्ठाच्या उंचीच्या सरळ प्रमाणात वाढतात आणि *व* हे बल (दुहेरी रेषा) उंचीच्या वर्गाच्या प्रमाणात वाढते. *दा'*$_{प्र}$ आणि *दा"*$_{प्र}$ या बलांची बेरीज *छथ* या अंतराने दाखविली आहे. *दा'*$_{प्र}$ हे बल *भा* आणि *सा* या बलांसमवेत येणारे आहे आणि ते *च* च्या सरळ प्रमाणात वाढते. दुसरे बल, *दा"*$_{प्र}$ हे *व* समवेत येणारे आहे. पहिले बल ठरविण्यासाठी मृत्तिकेची घनता शून्य आहे म्हणजे *व* = ० आहे, असे गृहीत धरून आपण बलप्रतिमा काढू. d*ब* या खंडशः मिळणाऱ्या प्रतिक्रिया घसरपृष्ठाच्या लंबाशी प्रत्येक बिंदुस्थानी ꣹ कोन करतात, या लक्षणाशी सुसंगत राहून *ब'* या प्रतिक्रियेची दिशा मिळते. *य* मधून *ब'* च्या दिशेला समांतर रेषा काढून आपल्याला *छळयश* ही बलप्रतिमा मिळते. तेथील *छश* ही लांबी म्हणजे *दा'*$_{प्र}$ या बलाचे मूल्य होय. या बलाचा कारकबिंदू *गम* या स्पर्शपृष्ठाच्या मध्यबिंदूजवळ असतो. *दा"*$_{प्र}$ हे बल *थश* या लांबीने दाखविले आहे. हे बल स्वतंत्रपणे ठरविण्यासाठी, आपण *स*, *ष* आणि *भ* या सर्वांचे मूल्य शून्य आहे असे गृहीत धरून दुसरी बलप्रतिमा काढू. त्या प्रतिमेतील *ब"* ची दिशा *ब'* साठी केलेली कृती करून ठरविता येते. या दिशेला *जथ* ही रेषा समांतर काढून आणि *छथ* या रेषेला *यथ* ही रेषा समांतर काढून आपल्याला *यजथ* ही बलप्रतिमा प्राप्त होते. *दा"*$_{प्र}$ हे बल *यथ* या लांबीइतके आहे आणि ही लांबी *थश* इतकी आहे (आकृती पाहा). *ब'* आणि *ब"* या दोन बलांची भौमितिक बेरीज म्हणजेच *ब* ही एकूण प्रतिक्रिया होय.

या सर्व विश्लेषणातून पुढील निष्कर्ष निघतो. *स* किंवा *भ* यांपैकी कुणाचेही मूल्य शून्याहून अधिक असेल, तर प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्याची कृती दोन टप्प्यांत करावी लागते. पहिला टप्पा मृत्तिकेच्या *व* या घनतेचे मूल्य शून्य आहे या गृहीतावर आधारित आहे. या कृतीतून मृत्तिकादाबाचा *दा'*$_{प्र}$ हा घटक प्राप्त होतो. या घटकाचा कारकबिंदू स्पर्शपृष्ठाच्या मध्यबिंदूच्या ठिकाणी असतो. दुसऱ्या टप्प्यातील कृती *स*, *ष* आणि *भ* यांची मूल्ये शून्य आहेत, या गृहीतावर आधारित आहे; आणि तीतून प्राप्त झालेल्या *दा"*$_{प्र}$ या घटकाचा कारकबिंदू स्पर्शपृष्ठाच्या तळापासून च/३ या उंचीवर स्थित असतो.

समीकरण २६ (२) च्या आधारे प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान अधिक अचूकपणे निश्चित करता येते. घसरू पाहणारा संपूर्ण खंड नम्य समतोलाच्या अवस्थेत जाईल, अशी विरूपत्वलक्षणे असतील, तर समाकर्षण असो वा नसो, हे समीकरण उद्युक्त आणि प्रतियोगी अशा दोन्ही मृत्तिकादाबांच्या बाबतीत लागू पडते. तथापि आकृती

३१ मध्ये स्पष्ट केलेल्या कृतीत समाविष्ट होणारी चूक इतकी काही महत्त्वाची नसते की, तीमुळे अधिक अचूक उत्तर मिळविण्यासाठी करावा लागणारा खटाटोप समर्थनीय ठरावा.

पुढे येणाऱ्या ३८ ते ४० या परिच्छेदांत आदर्श समाकर्षणहीन मृत्तिकांवर अधिभार नसताना मिळणाऱ्या प्रतियोगी दाबाचा ऊहापोह केला आहे. प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्याचे तंत्र वाचकांस समजावे असा उद्देश त्यामागे आहे. समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेवर अधिभार ठेवला असता मिळणारा प्रतियोगी दाब, ही सार्वत्रिक समस्या परिच्छेद ४१ मध्ये मांडली जाईल.

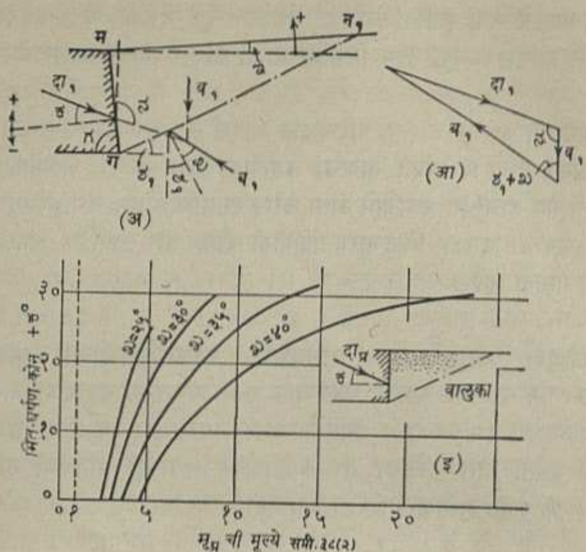
३८. आदर्श वालुकेच्या प्रतियोगी दाबाविषयीचा कूलोमप्रणीत सिद्धांत : *गम* या सरळपृष्ठाच्या सान्निध्यात असलेल्या सरळ भूपृष्ठाच्या वालुकाराशीचा उभा छेद आकृती ३२ अ मध्ये दाखविला आहे. परिच्छेद ३६ मध्ये विदित केलेल्या लक्षणांची पूर्तता होत असेल, तर *ख* खोलीवर येणाऱ्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक पुढील समीकरणाने ठरविता येतो.

$$\text{दँ}_{\text{प्रल}} = \text{घ}\ \text{ख}\ \text{मृ}_{\text{प्र}} \qquad १५\ (३)$$

येथे $\text{मृ}_{\text{प्र}}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. मृत्तिकादाब स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी ढ कोन करीत असल्यामुळे समीकरण १५ (३) चा अवलंब करून आपल्याला $\text{दा}_{\text{प्र}}$ हा एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाब पुढील समीकरणाने प्राप्त होतो.

$$\text{दा}_{\text{प्र}} = \frac{\text{दा}_{\text{प्रल}}}{\text{कोज्या ढ}} = \frac{१}{\text{कोज्या ढ}} \int_{०}^{\text{च}} \frac{\text{दँ}_{\text{प्रल}}}{\text{ज्या त}}\, d\text{ख} = \frac{१}{२}\, \text{घ}\, \text{च}^{२}\, \frac{\text{मृ}_{\text{प्र}}}{\text{ज्या त कोज्या ढ}} \qquad [१]$$

तदनुषंगिक घसरपृष्ठ म्हणजे स्पर्शपृष्ठाच्या तळाच्या कडेतून निघणारे एक सरळ पृष्ठ असते. आकृती ३२ अ पाहा. या सुकरतादायी गृहीताचा आधार घेऊन आदर्श वालुकेचा प्रतियोगी मृत्तिकादाब कूलोमने गणितसिद्ध केला (१७७६). तळाच्या कडेपासून घेतलेले एक घसरपृष्ठ $\text{गन}_{१}$ या रेषेने दाखविले आहे. $\text{गमन}_{१}$ या खंडावर पुढील बले कारक आहेत. स्वतःचे वजन $\text{व}_{१}$, $\text{गन}_{१}$ पृष्ठावरील लंबाशी ω कोन करणारी प्रतिक्रिया $\text{ब}_{१}$ आणि *गम* या स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी ढ कोन करणारे पार्श्वीय बल $\text{दा}_{१}$. आकृती ३२ आ मध्ये दाखविलेली तदनुषंगिक बलप्रतिमा बंदिस्त असली पाहिजे, या अटीची पूर्तता केली असता $\text{दा}_{१}$ या बलाची महत्ता मिळते. $\text{दा}_{१}$ हा पार्श्वीय दाब ज्यावेळी लघुतम म्हणजे $\text{दा}_{\text{प्र}}$ या मूल्याचा असतो, त्या वेळी *गन* (आकृतीत न दाखविलेल्या) या पृष्ठावरून घसरण होते. $\text{दा}_{\text{प्र}}$ चे मूल्य कूलोमने विश्लेषणात्मक पद्धतीने ठरविले. समीकरण १ मध्ये $\text{दा}_{\text{प्र}}$ ऐवजी कूलोमचे प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे समीकरण



आकृती ३२ : (अ आणि आ) वालुकेच्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा कूलोमप्रणीत सिद्धांत ज्यांवर आधारित आहे, ती गृहीते स्पष्ट करणाऱ्या रेखाकृती (इ) ड, ळ आणि कूलोमप्रणीत प्रतियोगी मृत्तिकादाबगुणांक मृप्र यांतील संबंध.

नियोजित केले आणि मृप्र या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या गुणांकासाठी ते सोडविले, तर पुढील मूल्य मिळते.

$$\text{मृ}_{\text{प्र}} = \frac{\text{ज्या}^{२}(\text{ग} - \text{ळ})\ \text{कोज्या}\ \text{ड}}{\text{ज्या}\,\text{ग}\ \text{ज्या}(\text{ग} + \text{ड})\left[१ - \sqrt{\dfrac{\text{ज्या}(\text{ड} + \text{ळ})\,\text{ज्या}(\text{ळ} + \text{ब})}{\text{ज्या}(\text{ड} + \text{ग})\,\text{ज्या}(\text{ग} + \text{ब})}}\right]^{२}} \qquad [२]$$

ब आणि ड यांची मूल्ये धन असोत किंवा ऋण असोत, दोन्ही उदाहरणांत हे समीकरण लागू पडते.

आकृती ३२ इ मधील आलेखांत भिंतघर्षणाचा कोन कोटीमूल्यांनी आणि मृप्र हा गुणांक भुजामूल्यांनी दाखविला आहे. मृप्र म्हणजे उभ्या स्पर्शपृष्ठामागील समतल भूपृष्ठाच्या वालुकाराशीच्या प्रतियोगी दाबाचा गुणांक आहे. ळ च्या निरनिराळ्या मूल्यांच्या संदर्भात मृप्र चे मूल्य + ड च्या मूल्यानुसार कसे बदलते ते या आलेखांनी दाखविले आहे. त्यांवरून असे दिसते की, ळ ला एक विवक्षित मूल्य ठेवून ड चे मूल्य वाढवीत नेले, तर त्यानुसार मृप्र च्या मूल्यात त्वरेने वाढ होते.

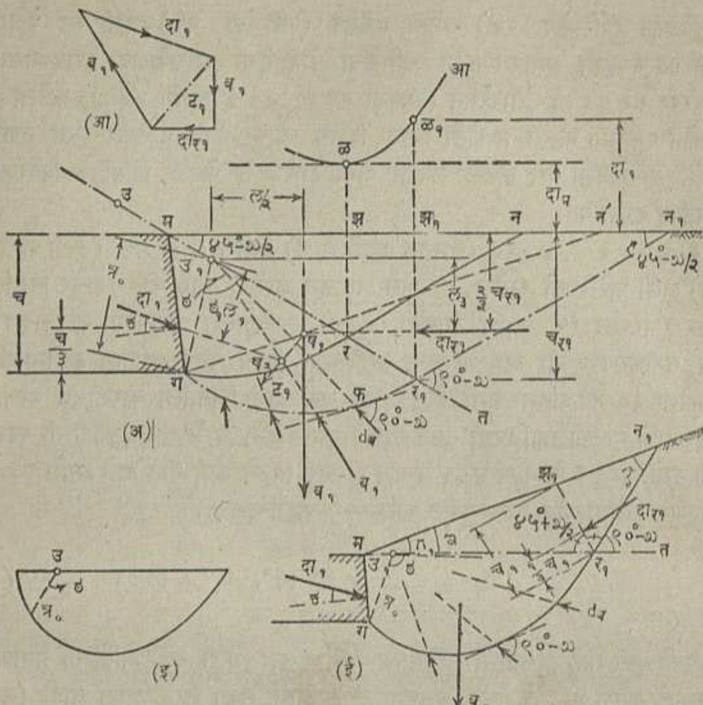
कुलमान (परिच्छेद २४) आणि एंगेसेर (परिच्छेद २५) यांनी रूढ केलेल्या आलेखात्मक कृती समाकर्षणहीन मृत्तिकेच्या प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्यासाठी वापरल्या, तर *गउ* या उतारेषेने (आकृती २० इ, २० ई आणि २१ अ) केलेला ϕ हा कोन *गम* च्या बाजूस न घेता विरुद्ध दिशेस घ्यावा लागतो. इतर कृती तशीच राहते. या कृतींचा येथे केलेला उपयोग योग्य आहे, हे केवळ भौमितिक विवरणाने प्रस्थापित करता येते.

$\phi = \delta = ३०^\circ$, $\beta = ०$ (समतल पृष्ठाचे भरण) आणि $\theta = ९०^\circ$ (उभ्या पाठीची भिंत) अशी परिस्थिती असेल, तर असे आढळून आलेले आहे की, काटेकोर सिद्धांतानुसार (परिच्छेद १५ आणि आकृती १४ उ) ठरविलेल्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे मूल्य, समीकरण २ चा अवलंब करून ठरविलेल्या त्याच परिस्थितीतील कूलोमप्रणीत मूल्यापेक्षा ३० टक्क्यांहून कमी असते. ही चूक असुरक्षिततेला कारणीभूत होणारी आहे आणि मृत्तिकादाबाविषयी नुसते स्थूल अनुमान करावयाचे झाले, तरीही ती फारच मोठी ठरते. परंतु δ चे मूल्य घटत गेल्यास ही चूक त्वरेने कमी होत जाते आणि $\delta = ०$ असल्यास कूलोमप्रणीत मूल्य पुढील काटेकोर मूल्याइतकेच होते.

$$\text{दा}_{\text{प्र}} = \frac{१}{२}\,\text{घ}\,\text{च}^{२}\,\text{ण} = \frac{१}{२}\,\text{घ}\,\text{च}^{२}\,\text{स्प}^{२}(४५^\circ + \phi/२) \qquad १४\ (२)$$

δ चे मूल्य मोठे असताना कूलोमच्या पद्धतीत उद्भवणारी चूक अतिरिक्त प्रमाणात असण्याचे कारण हे आहे की, घसरपृष्ठ स्थूलमानाने सुद्धा सरळ असत नाही (उदा. आकृती १४ उ मधील *गन*); परंतु δ चे मूल्य जसे कमी होत जाते, तशी *गन* ची वक्रता झपाट्याने कमी होते; आणि $\delta = ०$ झाल्यावर *गन* हे पृष्ठ पूर्णतः सरळ होते. δ चे मूल्य $\phi/३$ हून लहान असल्यास प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ आणि कूलोमप्रणीत सरळ पृष्ठ यांत फारच थोडा फरक असतो; आणि कूलोमच्या समीकरणाचा अवलंब करून त्या परिस्थितीतील प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविता येतो. याउलट, δ चे मूल्य जर $\phi/३$ पेक्षा मोठे असेल, तर घसरपृष्ठाची वक्रता विचारात घेणाऱ्या एखाद्या सुलभ कृतीचा अवलंब करून आदर्श वालुकेचा प्रतियोगी दाब ठरविणे आपल्याला भाग पडते. लघुगणकीय वक्रावर आधारलेली पद्धत (ओह्‌दे १९३८) आणि घर्षणवर्तुळावर आधारलेली पद्धत (क्रे १९३६) या अशा पद्धती होत. या दोन्ही पद्धती समाकर्षणगुणी मृत्तिकेच्या बाबतीतही लागू पडतात.

३९. लघुगणकीय वक्राची पद्धत : आकृती ३३ अ मध्ये समतल भूपृष्ठाच्या समाकर्षणहीन मृत्तिकाराशीला आधार देणाऱ्या चिरेबंदी भिंतीचा छेद दाखविला आहे. *गम* हे स्पर्शपृष्ठ सरळ आहे. भिंत मृत्तिकाराशीकडे रेटली जात आहे. परिच्छेद ३६ मध्ये विशद केल्याप्रमाणे *गन* हे घसरपृष्ठ, *गर* हा वक्र भाग आणि *रन* हा सरळ



आकृती ३३ : वालुकेचा प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्याची लघुगणकीय वक्राची पद्धत.

भाग यांनी सिद्ध होते. रन हा भाग क्षितिजाशी ४५° − ϖ/२ एवढा कोन करतो. र हा बिंदू क्षितिजाशी ४५° − ϖ/२ कोन करून खाली उतरणाऱ्या *मत* या रेषेवरही आहे. र चे निश्चित स्थान अद्याप ज्ञात नसल्यामुळे *मत* या रेषेवरील $र_1$ या कोणत्याही बिंदूतून जाणारे एक घसरपृष्ठ आपण तात्पुरते विचारात घेऊ. $मर_1न_1$ या त्रिकोणी मृत्तिकाखंडातील प्रतिबल-परिस्थिती रॅन्‌किन्‌प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेत असलेल्या एखाद्या अपारप्राय राशीतील परिस्थितीसारखी असेल. ह्या प्रतिबल-परिस्थितीचे वर्णन पूर्वीच केलेले आहे (परिच्छेद १० पाहा). तेथे उभ्या छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले शून्य मूल्याची असतात म्हणून $र_1झ_1$ या उभ्या छेदावरील $दा_{र_1}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाब आडवा असेल व तो $\frac{२च_{र_1}}{३}$ या खोलीवर कारक होईल. त्याचे मूल्य पुढील प्रमाणे असेल.

$$दा_{र_1} = \frac{१}{२}\, घच^२_{र_1}\, स्प^२(४५^\circ + \varpi/२) = \frac{१}{२}\, घच^२_{र_1}\, ण \qquad [१]$$

नंतर आपण असे गृहीत धरू की, घसरपृष्ठाचा $गर_१$ हा वक्र भाग म्हणजे लघुगणकीय वक्र असून त्याचे समीकरण पुढीलप्रमाणे आहे.

$$त्र = त्र_० \in^{ठस्प ø} \qquad [२]$$

त्याचा नाभिबिंदू $उ_१$ हा $मर_१$ या रेषेवर स्थित आहे. या समीकरणामध्ये त्र म्हणजे $उ_१ग$ या सदिशाशी ठ कोन (त्रिज्यकांमध्ये व्यक्तविलेले मूल्य) करणाऱ्या $उ_१फ$ या कोणत्याही सदिशाची लांबी आहे आणि $त्र_० = उ_१ग$ म्हणजे ठ = ० असताना मिळणारी सदिशाची लांबी आहे. लघुगणकीय वक्राच्या $उ_१$ या नाभिबिंदूतून निघणारा प्रत्येक सदिश वक्राला छेदताना तेथील स्पर्शरेषेशी $९०^\circ - ø$ एवढा कोन करतो (आकृती ३३ अ पाहा). नाभिबिंदू *मत* रेषेवर स्थित असल्यामुळे समीकरण २ ने व्यक्त होणारी वक्ररेषा कसलाही तुटकपणा न येता $र_१न_१$ या सरळ रेषेस जाऊन मिळते. त्याचप्रमाणे घसरपृष्ठाच्या वक्र विभागातील फ या कोणत्याही बिंदुस्थानी असणारी dब ही प्रतिक्रिया तेथील लंबाशी ø कोन करते; म्हणजेच वक्राच्या स्पर्शरेषेशी $९०^\circ - ø$ कोन करते. ही दिशा आणि $उ_१फ$ या सदिशाची दिशा एकच असतात. म्हणून $गर_१$ या वक्रविभागावरील $ब_१$ ही एकूण प्रतिक्रियासुद्धा $उ_१$ या नाभिबिंदूतून जाते.

राशीच्या भूपृष्ठावर अधिभार नसल्यामुळे आणि समाकर्षणाचे मूल्य शून्य गृहीत धरल्यामुळे *गम* या पृष्ठावरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू *ग* पासून च/३ उंचीवर स्थित असतो (परिच्छेद ३७ पाहा).

$गमर_१झ_१$ (आकृती ३३ अ) या मृत्तिकाखंडावर पुढील बले कारक आहेत स्वतःचे वजन $व_१$, आडवे बल $दा_{र१}$, चिरेबंदी भिंतीच्याद्वारे लावलेले बल $दा_१$ आणि वक्राच्या $उ_१$ या नाभिबिंदूतून जाणारी प्रतिक्रिया $ब_१$. या सर्व बलव्यूहाचा समतोल साधण्यासाठी वक्राच्या $उ_१$ या नाभिबिंदूभोवती घेतलेल्या सर्व परिबलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. ही परिबले खालीलप्रमाणे आहेत.

$दा_१ल_१ = दा_१$ चे $उ_१$ भोवतीचे परिबल आणि

$प_१, प_२ \ldots प_छ$ = इतर सर्व बलांची $उ_१$ भोवतीची परिबले. ज्याअर्थी $ब_१$ हे बल $उ_१$ मधून जाते, त्याअर्थी :

$$दा_१ ल_१ + \sum_{१}^{छ} प_छ = दा_१ ल_१ + व_१ ल_२ + दा_{र१} ल_३ = ०$$

म्हणून

$$दा_१ = -\frac{१}{ल_१} \sum_{१}^{छ} प_छ = -\frac{१}{ल_१}(व_१ ल_२ + दा_{र१} ल_३) \qquad [३]$$

आकृती ३३ आ मध्ये दाखविलेल्या बलप्रतिमेच्या साहाय्याने ही समस्या आलेख-पद्धतीने सुद्धा सोडविता येते. बलप्रतिमेतील *ब*$_1$ या बलाची दिशा निश्चित करण्यासाठी आपण आकृती ३३ आ मधील *व*$_1$ हे वजन आणि *दा*$_{र_1}$ हे बल यांचा संयोग करून फलरूप बल *ट*$_1$ मिळवू. आकृती ३३ अ मध्ये हे फलरूप बल *दा*$_{र_1}$ आणि *व*$_1$ यांच्या *ष*$_1$ या छेदनबिंदूतूनच गेले पाहिजे. ते *दा*$_1$ या बलास *ष*$_2$ या बिंदूत छेदते. समतोल साधण्यासाठी *ब*$_1$ हे बलही याच बिंदूतून जाणे आवश्यक आहे. वर विदित केल्याप्रमाणे ते वक्राच्या उ$_1$ या नाभिबिंदूतूनही गेले पाहिजे. म्हणजे आता *ब*$_1$ ची दिशा आपल्याला कळली, तेव्हा आकृती ३३ आ मध्ये दाखविलेली बलप्रतिमा आपल्याला *दा*$_1$ ‖ *दा*$_1$ (आकृती ३३ अ) आणि *ब*$_1$ ‖ *ब*$_1$ (आकृती ३३ अ) काढून पुरी करता येणे शक्य आहे. अशा प्रकारे *गर*$_1$*न*$_1$ या पृष्ठावर घसरण घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असलेल्या *दा*$_1$ या बलाची महत्ता आपल्याला प्राप्त होते.

यापुढील पायरी म्हणजे *ग* मधून जाणाऱ्या आणि *मत* या रेषेला र$_2$, र$_3$, इ० निरनिराळ्या बिंदूंत छेदणाऱ्या इतर वक्रांचे असेच गणित मांडणे ही होय. *दा*$_1$, *दा*$_2$, *दा*$_3$ इत्यादी, ही त्यांतून मिळणारी मूल्ये *झ*$_1$ इत्यादी बिंदूंच्या वर कोटी म्हणून *झ*$_1$*ळ*$_1$ इत्यादींप्रमाणे स्थित करून आकृती ३३ अ मध्ये दाखविलेला *आ* हा आलेख प्राप्त होतो. त्यातून मिळणाऱ्या *दा*$_{प्र}$ या लघुतम मूल्याशी संगत असलेल्या घसरपृष्ठावरून प्रत्यक्षात घसरण घडून येते. *दा*$_{प्र}$ हे लघुतम मूल्य *झळ* या अंतराने दाखविले आहे. हे घसरपृष्ठ आणि *मत* ही रेषा यांचा र हा संपात बिंदू *झ* मधून जाणाऱ्या उभ्या रेषेवर स्थित आहे. घसरपृष्ठाचा सरळ भाग भूपृष्ठाशी ४५°–ϕ/२ एवढा कोन करतो आहे.

वर वर्णिलेली कृती अवलंबिल्यामुळे होणारी चूक फार तर सुमारे ३ टक्के असते. अर्थातच ती क्षुल्लक मानता येईल. आकृतीतील *गन'* ही तुटक रेषा म्हणजे याच उदाहरणात कूलोम सिद्धांतानुसार मिळणारे घसरपृष्ठ आहे. कूलोमप्रणीत *गमन'* या खंडाच्या माथ्याची $\overline{मन'}$ ही रुंदी $\overline{मन}$ या अंतरापेक्षा काहीशी मोठी आहे.

कालपव्यय न करता अशा समस्या सोडवावयाच्या असतील, तर आकृती ३३ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे समीकरण २ ने व्यक्त होणारा लघुगणकीय वक्र एका पुठ्ठ्यावर काढा. त्यासाठी त्र० चे योग्य असे मूल्य निवडले पाहिजे. नंतर वक्रालेखानुसार कापून मिळणारा तुकडा एक साचा म्हणून वापरा. अशा वक्रालेखाच्या भौमितिक गुणधर्मांमुळे कोणताही सदिश उदाहरणार्थ, त्र० (आकृती ३३ इ) हा आरंभाचा सदिश मानता येतो. फक्त त्यासाठी ϕ हा कोन या सदिशापासून मोजलेला असावा. *ग* मधून जाणारा वक्रालेख काढण्यासाठी साच्याचा उ हा नाभिबिंदू *मत* (आकृती ३३ अ) रेषेच्या उ$_1$ या अशा एका बिंदूवर ठेवा की, उपरोक्त साचा उ$_1$ भोवती फिरविला असता त्याची वक्र कड *ग* मधून जाईल. नंतर या वक्र कडेला धरून *ग* पासून *मत* रेषेपर्यंत रेषा काढा म्हणजे र$_1$ हा बिंदू प्राप्त होईल. र$_1$न$_1$ ही रेषा वक्रास

र$_{१}$ येथे स्पर्शरेषेप्रमाणे असून ती क्षितिजाशी ४५° − ऊ/२ कोन करून वर जाईल. याच पद्धतीने *मत* या रेषेवर ज्यांचे उ$_{१}$, उ$_{२}$, उ$_{३}$ इत्यादी नाभिबिंदू निरनिराळ्या ठिकाणी स्थित आहेत, अशा अनेक वक्र रेषा आपल्याला काढता येतील. *गर$_{१}$न$_{१}$* या गृहीत धरलेल्या घसरपृष्ठाच्या *गर$_{१}$* या वक्र विभागाच्या वरच्या अंगास स्थित असलेल्या मृत्तिकेचे वजन म्हणजे *गमर$_{१}$झ$_{१}$* या आकृतीचे वजन होय. ही आकृती *मर$_{१}$झ$_{१}$* आणि उ$_{१}$*गम* हे दोन त्रिकोण व उ$_{१}$*गर$_{१}$* हा वक्र खंड मिळून सिद्ध होते. वक्र खंडाचे क्षेत्रफळ पुढील समीकरणाने मिळते.

$$\text{आ} = \int_{0}^{\text{ठ}_{१}} \tfrac{१}{२}\,\text{त्र}^{२}\, d\text{ठ} = \frac{\text{त्र}_{०}^{२}}{४\,\text{स्प}\,\text{ऊ}}\left(\in^{२\,\text{ठ}_{१}\,\text{स्प}\,\text{ऊ}} - १\right) \qquad [४]$$

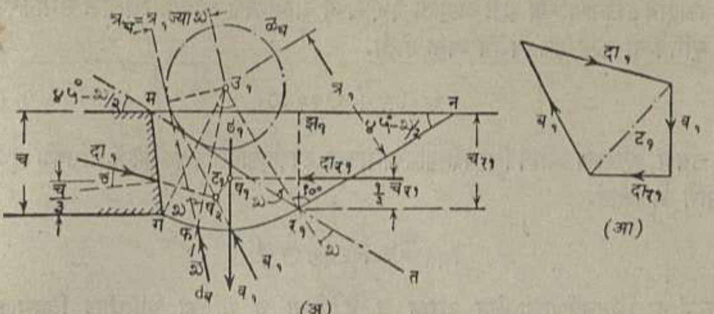
पार्श्वीय दाब ज्याच्यावर कारक आहे, अशा मृत्तिकाराशीचे पृष्ठ आकृती ३३ ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे क्षितिजाशी ७ कोन करीत असेल, तर *मत* ही रेषा व घसरपृष्ठाचा र$_{१}$न$_{१}$ हा सरळ भाग यांच्या भूपृष्ठसंदर्भातील दिशा, ज्याचा पृष्ठभाग क्षितिजाशी ७ कोन करणारा आहे, अशा अपारप्राय मृत्तिकाराशीतील घसरपृष्ठांच्या दिशांप्रमाणे असतात. या दिशा ठरविण्याची कृती परिच्छेद १० मध्ये वर्णिली आहे आणि आकृती ९ ई मध्ये दाखविली आहे. *मर$_{१}$न$_{१}$* या त्रिकोणाकारी क्षेत्रातील प्रतिबल-परिस्थिती, हा त्रिकोण म्हणजे आकृती ९ ई मध्ये दाखविलेल्या अपारप्राय राशीचाच जणू एक भाग आहे, अशी असते. बलविज्ञानातील नियमांनुसार कार्तनिक पृष्ठांतील कोन दुभागणाऱ्या र$_{१}$झ$_{१}$ सारख्या कोणत्याही छेदावरील कार्तनिक प्रतिबलांचे मूल्य शून्य असते. म्हणून *दा*$_{र१}$ हा मृत्तिकादाब (आकृती ३३ ई) *मर$_{१}$न$_{१}$* या कोनास दुभागणाऱ्या र$_{१}$झ$_{१}$ या पृष्ठावर लंबदिशेत कारक होतो. या दाबाची महत्ता परिच्छेद १० व आकृती ९ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे मोहरच्या रेखाकृतीच्या साहाय्याने ठरविता येते. उरलेली कृती मघाशी वर वर्णिलेल्या कृतीसारखीच असते.

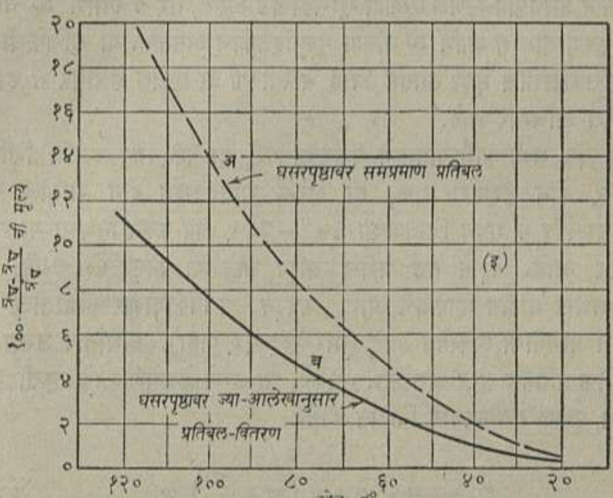
४०. घर्षणवर्तुळाची पद्धत : या पद्धतीचा अवलंब करताना आपण असे गृहीत धरतो की, घसरपृष्ठाचा वक्र भाग म्हणजे वर्तुळाचा चाप आहे. आकृती ३४ अ मध्ये *गन* या घसरपृष्ठापैकी त्र$_{१}$ त्रिज्येच्या वर्तुळाचा *गर$_{१}$* हा चाप तुटकपणा न येता, र$_{१}$न या सरळ भागाला मिळतो. या वर्तुळाचा मध्यबिंदू *मर$_{१}$* शी ऊ कोन करून काढलेल्या रेषेवर असून त्याचे र$_{१}$ पासूनचे अंतर उ$_{१}$र$_{१}$ = उ$_{१}$*ग* इतके आहे. वक्र भागाच्या फ या कोणत्याही बिंदुस्थानाची *ब* ही खंडशः प्रतिक्रिया ळ$_{घ}$ या वर्तुळास स्पर्शून जाते. ळ$_{घ}$ हे वर्तुळ आणि *गर$_{१}$* हा वक्र भाग, ज्या वर्तुळाचा चाप आहे ते, ही दोन्ही वर्तुळे समकेंद्र आहेत. ळ$_{घ}$ या वर्तुळाची त्र$_{घ}$ ही त्रिज्या त्र$_{१}$ ज्या ऊ इतकी आहे. या वर्तुळास **घर्षणवर्तुळ** म्हणतात. *ब*$_{१}$ ही फलरूप प्रतिक्रियादेखील या वर्तुळास स्पर्शरेषेसमान असते, असे स्थूलमानाने म्हणता येईल. या विधानाच्या यथार्थतेसाठी या पद्धतीत करावयाच्या सुधारणेचा विचार पुढे केलेला आहे. *दा*$_{१}$ हे बल ठरविण्यासाठी बलप्रतिमेत

दाखविल्याप्रमाणे (आकृती ३४ आ) $ब_1$ आणि $दा_{र1}$ या बलांची बेरीज करून आपण फलरूप बल $ट_1$ मिळवू. आकृती ३४ अ मध्ये हे फलरूप बल $दा_{र1}$ आणि $ब_1$ यांच्या $प_1$ या छेदनबिंदूतून जावयास हवे. पुढे ते बल $दा_1$ या बलास $प_2$ या बिंदूत छेदते. समतोल साधण्यासाठी $ब_1$ ही प्रतिक्रिया $प_2$ या छेदनबिंदूतूनच जावयास हवी. ज्याअर्थी $ळ_घ$ या घर्षणवर्तुळाला ही प्रतिक्रिया स्पर्शरेषेवत् असली पाहिजे असे गृहीत धरले आहे, त्याअर्थी तिचे स्थान आकृती ३४ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असले पाहिजे. $ब_1$ ची दिशा कळल्यामुळे $दा_1$ हे बल आकृती ३४ आ मधील बलप्रतिमेवरून ठरविता येते. घसरण घडवून आणण्यास आवश्यक असलेले पार्श्वीय दाबाचे $दा_प्र$ हे लघुतम मूल्य आकृती ३३ अ मधील *आ* या आलेखासारखा आलेख काढून निश्चित करता येते. त्यासाठी *ग* मधून आणखी काही वर्तुळे घेऊन हीच आकडेमोड पुन्हा करावी लागते. या आकडेमोडीतून मिळणारी $दा_1$, $दा_2$ व $दा_3$ ही मूल्ये भूपृष्ठ दाखविणाऱ्या समतल रेषेपासून कोटीमूल्यांप्रमाणे स्थित केली म्हणजे हा आलेख मिळतो.

घर्षणवर्तुळ पद्धतीचा अवलंब केल्यामुळे होणारी अतिशय महत्त्वाची चूक, घर्षणवर्तुळाला $ब_1$ ही प्रतिक्रिया (आकृती ३४ अ) स्पर्शरेषेवत् असते, या गृहीतामुळे निर्माण होते. प्रत्यक्षात $ब_1$ ही फलरूप प्रतिक्रिया $त्र_घ$ हून मोठ्या अशा $त्र'_घ$ त्रिज्येच्या वर्तुळास स्पर्शून जाते. हे बल $त्र'_घ > त्र_घ$ त्रिज्येच्या वर्तुळास स्पर्शरेषेवत् असेल, तर त्याचा बलप्रतिमेवरील कोन (आकृती ३४ आ) लहान होतो आणि $दा_1$ चे मूल्य वाढते. अर्थातच $त्र'_घ = त्र_घ$ गृहीत धरल्यामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकते.

$(त्र'_घ - त्र_घ)/त्र_घ$ या गुणोत्तराचे मूल्य दोन गोष्टींवर अवलंबून असते, त्या अशा : (१) $θ_1$ ह्या केंद्रस्थ कोनाचे मूल्य आणि (२) घसरपृष्ठाच्या वक्र भागावरील (आ० ३४ अ मधील $गर_1$) लंबदिक् दाबाचे वितरण. साधारणतः समप्रमाणातील वितरण आणि 'ज्या' आलेखासारखे वितरण या दोन प्रकारांच्या दरम्यान हे वितरण असते. 'ज्या' आलेखासारख्या वितरणात, छेदाच्या दोन्ही टोकांस शून्य दाब आणि केंद्रीय कोन $θ = θ_1/२$ असतो त्या ठिकाणी महत्तम दाब असतो. आकृती ३४ इ मध्ये या दोन्ही दाबवितरणांच्या बाबतीतील $१०० \dfrac{त्र'_घ - त्र_घ}{त्र_घ}$ ची मूल्ये आणि $θ_1$ या कोनाची मूल्ये (० ते १२०° पर्यंत) यांतील संबंध दाखविला आहे (टेलर १९३७). आकृती ३३ व ३४ यांमध्ये दाखविल्याप्रमाणे चिरेबंदी भिंत मृत्तिकाराशीला रेटीत असेल, तर घसरपृष्ठाच्या वक्र भागावरील लंबदिक् दाबाचे वितरण बरेचसे समप्रमाण असते आणि केंद्रस्थ कोन ९०° पेक्षा क्वचितच मोठा असतो. आकृती ३४ अ मधील घसरपृष्ठाच्या वक्र भागाचा केंद्रस्थ कोन ६०° आहे. या पृष्ठावर लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण पूर्णतः समप्रमाण आहे असे गृहीत धरले, तर $ब_1$ या आलेखावरून (आकृती ३४ इ) आपल्याला सुधारगुणांकासाठी ४·६% असे मूल्य प्राप्त होते; म्हणून अधिक अचूक फलित हवे असेल, तर $ब_1$ हे बल आकृती ३४ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे $त्र_घ$ त्रिज्येच्या





आकृती ३४ : (अ व आ) वालुकेचा प्रतियोगी दाब ठरविण्याची घर्षण-वर्तुळ पद्धत; (इ) घर्षण-वर्तुळ पद्धतीत वापरावयाचा सुधार-आलेख (आधार : डी. डब्ल्यू. टेलर).

घर्षणवर्तुळास स्पर्शरेषा म्हणून न काढता १·०४६ त्रव त्रिज्येच्या वर्तुळास स्पर्शरेषा म्हणून काढले पाहिजे.

सुधार-गुणांक आलेखाचा (आकृती ३४ इ) उपयोग केला असता घर्षणवर्तुळ पद्धतीने प्राप्त होणारी फलिते, मागील परिच्छेदात वर्णिलेल्या लघुगणकीय वक्र पद्धतीचा अवलंब करून प्राप्त होणाऱ्या फलितांइतकीच अचूक असतात.

४१. समप्रमाण वितरित अधिभार वाहणाऱ्या समाकर्षणगुणी मृत्तिकाराशीचा प्रतियोगी मृत्तिकादाब : समाकर्षणगुणी मृत्तिकाराशीचा प्रतियोगी

मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या कृती आकृती ३५ मध्ये दाखविल्या आहेत. खालील समीकरणाने या मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध व्यक्त होतो.

$$क = स + ७ \, स्प \, ω \qquad ५\ (१)$$

तसेच, मृत्तिका आणि चिरेबंदी बांधकामाच्या स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले पुढील-प्रमाणे असतात.

$$दॅ_{प्रत} = ष + दॅ_{प्रल} \, स्प \, ठ$$

येथे ठ हा भिंतघर्षणाचा कोन असून ष हे भिंत व मृत्तिका यांमधील विषमाकर्षण आहे. रेट्याचे अधिष्ठान म्हणजे एखादा मृत्तिकाखंड असेल, तर ष आणि ω ची मूल्ये कूलोम समीकरणातील स आणि ω यांच्या मूल्यांइतकीच असतात. या मृत्तिकेची घनता घ आहे; मृत्तिकाराशीचे भूपृष्ठ समतल आहे व त्याच्या दर एकांक क्षेत्रावर भ हा सम-प्रमाणवितरित अधिभार आहे.

परिच्छेद ३६ मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे घसरपृष्ठ $गर_१$ हा वक्र भाग आणि क्षितिजाशी $४५^\circ - ω/२$ कोन करणारा $र_१न_१$ हा सरळ भाग अशा दोन भागांचे बनलेले आहे. $र_१$ हा बिंदू *म* मधून क्षितिजाशी $४५^\circ - ω/२$ कोन करून निघणाऱ्या *मत* या सरळ रेषेवर आहे. $र_१$चे *मत* वरील स्थान यदृच्छया निवडलेले आहे; कारण खरे स्थान अद्याप माहीत व्हावयाचे आहे. $मर_१न_१$ या त्रिकोणाकार खंडातील मृत्तिका रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेत आहे (परिच्छेद १२ पाहा). अर्थातच उभ्या छेदा-वरील कार्तनिक प्रतिबले शून्य असतील. $र_१झ_१$ या उभ्या छेदावरील (आकृती ३५ अ) लंबदिक् दाब पुढील समीकरणाने निश्चित होतो.

$$७_{प्र} = २स \sqrt{ण} + घ \left(ख + \frac{भ}{घ} \right) ण \qquad १२\ (५)$$

येथे $ण = स्प^२ (४५^\circ + ω/२)$ हे विसर्पणमूल्य आहे.

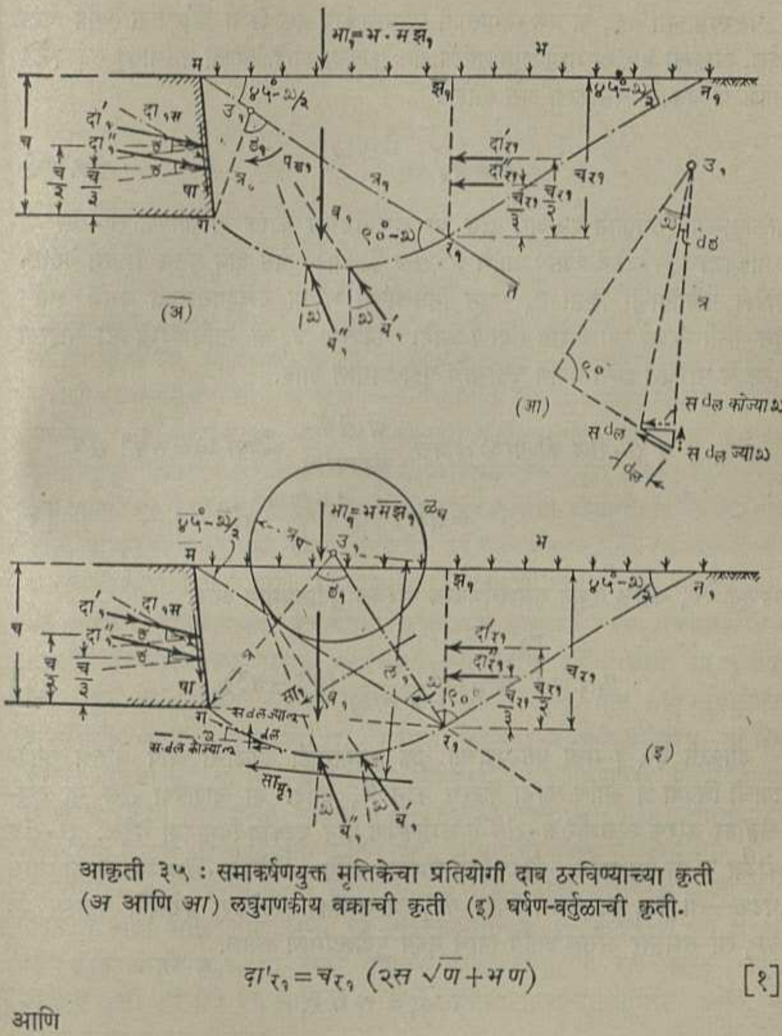
हा दाब दोन भागांचा बनलेला आहे. खोलीच्या मूल्यावर अवलंबून नसणारा

$$७'_{प्र} = २स \sqrt{ण} + भ \, ण$$

हा एक भाग आणि

$$७''_{प्र} = घ \, ख \, ण$$

हा स्थिरजलदाबाप्रमाणे खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढणारा दुसरा भाग (परिच्छेद ३७ पाहा). तेव्हा $घर_१$ उंचीच्या $र_१झ_१$ या छेदावरील या दोन दाबांची एकूण मूल्ये पुढीलप्रमाणे असतील :



आकृती ३५ : समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेचा प्रतियोगी दाब ठरविण्याच्या कृती (अ आणि आ) लघुगणकीय वक्राची कृती (इ) घर्षण-वर्तुळाची कृती.

$$दा'_{र_1} = च_{र_1}\,(२स\,\sqrt{ण} + भ\,ण) \qquad [१]$$

आणि

$$दा''_{र_1} = \frac{१}{२} घ\, च^{२}_{र_1}\, ण \qquad [२]$$

$दा'_{र_1}$ चा कारकबिंदू $र_1$ या बिंदूपासून (आकृती ३५ अ) $\frac{च_{र_1}}{२}$ इतक्या उंचीवर आहे आणि $दा''_{प्र}$ चा कारकबिंदू $र_1$ पासून $\frac{च_{र_1}}{३}$ इतक्या उंचीवर आहे.

घसरपृष्ठाच्या $गर_1$ या वक्र भागासाठी लघुगणकीय वक्र किंवा वर्तुळाचा चाप घेता येईल. आकृती ३५ अ मध्ये लघुगणकीय वक्र काढला आहे. त्याचा नाभिबिंदू $उ_1$ आहे आणि या वक्राचे समीकरण असे आहे :

$$त्र = त्र_{\circ}\, \in^{ठ\, स्प\, ϣ} \qquad ३९\ (२)$$

या वक्राच्या (आकृती ३५ आ) $dल$ या लघुखंडावर कारक असणाऱ्या $स \cdot dल$ या समाकर्षणाचे $स \cdot dल$ ज्या ϣ आणि $स \cdot dल$ कोज्या ϣ असे दोन घटक पाडता येतील. यांपैकी पहिल्याची दिशा $उ_1$ मधून निघणाऱ्या त्र या सदिशासारखी आहे आणि दुसऱ्याची दिशा त्या दिशेस लंबरूप आहे. वक्राच्या $उ_1$ या नाभिबिंदूभोवती पहिल्या घटकाचे परिबल शून्य आणि दुसऱ्याचे पुढीलप्रमाणे आहे.

$$dप_{स} = त्र\, स \cdot dल\ कोज्या\, ϣ = त्रस\, \frac{त्र\, dठ}{कोज्या\, ϣ}\ कोज्या\, ϣ = सत्र^2\, dठ$$

$$= स\, त्र_{\circ}^2 \cdot \in^{२ ठ\, स्प\, ϣ}\ dठ \qquad [३]$$

म्हणून $गर_1$ वरील एकूण समाकर्षणजन्य परिबल पुढीलप्रमाणे आहे.

$$प_{स_1} = \int_{\circ}^{ठ_1} dप_{स} = \frac{स}{२\, स्प\, ϣ}\left(त्र_1^2 - त्र_{\circ}^2\right) \qquad [४]$$

आकृती ३५ इ मध्ये घसरपृष्ठाच्या वक्र भागासाठी वर्तुळाचा चाप घेतला आहे. त्याची त्रिज्या त्र आणि त्याचा केंद्रस्थ कोन $ठ_1$ आहे. या चापाच्या $dल$ या लघुखंडावर कारक असणारे $स \cdot dल$ हे समाकर्षण दोन घटकांत विभागता येईल. $स \cdot dल$ कोज्या ϑ हा एक घटक—तो $गर_1$ ला समांतर आहे—आणि $स \cdot dल$ ज्या ϑ हा दुसरा घटक—तो $गर_1$ ला लंबरूप आहे. $गर_1$ ला समांतर असलेल्या घटकांचे फलरूप बल $गर_1$ ला समांतर असेल आणि त्याचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असेल.

$$सा_{मृ_1} = स\, \overline{ग\, र_1} \qquad [५]$$

$गर_1$ ला लंबरूप असणाऱ्या घटकांची बेरीज शून्य होईल. $सा_{मृ_1}$ या बलाचे $उ_1$ या वर्तुळकेंद्राभोवतीचे परिबल $स \cdot dल$ या समाकर्षण बलांच्या त्याच बिंदूभोवतीच्या परिबलांच्या बेरजेइतके असले पाहिजे. तेव्हा $सा_{मृ_1}$ आणि $उ_1$ मधील लघुतम अंतर $ल_1$ असल्यास

$$सा_{मृ_1} \times ल_1 = \overline{ग\, र_1}\, स \cdot ल_1 = \widehat{ग\, र_1} \cdot स\, त्र$$

म्हणजेच

$$ल_{१} = \frac{\widehat{गर_{१}}}{\overline{गर_{१}}}\, त्र \qquad [६]$$

गम वरील प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्यासाठी आता लघुगणकीय वक्राच्या किंवा घर्षणवर्तुळाच्या पद्धतीचा अवलंब करून आपण परिच्छेद ३७ च्या शेवटी विशद केल्याप्रमाणे प्रारंभ करू. प्रथम मृत्तिकेची घनता $घ = ०$ आहे, असे गृहीत धरून $गर_{१}$ या पृष्ठावरून घसरण होण्यासाठी आवश्यक असलेले $दा'_{१}$ हे बल ठरवू. $घ = ०$ असेल, तर $दा''_{र१}$ हे बल शून्य असते (समीकरण २). $दा'_{१}$ या बलाचा कारक-बिंदू *गम* च्या मध्यावर असतो, आणि हे बल त्यावरील लंबाशी δ कोन करते. $dब$ सारख्या खंडशः प्रतिक्रिया, खंडावरील लंबाशी ϕ कोन करतात. लघुगणकीय वक्राची पद्धत वापरली (आकृती ३५ *अ*), तर $घ = ०$ असताना मिळणारी फलरूप प्रतिक्रिया $ब'_{१}$ आणि $स = ०$ आणि $भ = ०$ असताना मिळणारी प्रतिक्रिया $ब''_{१}$, या दोन्ही वक्राच्या नाभिबिंदूतून जातात. सर्व समाकर्षणबलांचे नाभिबिंदूभोवतीचे एकूण परिबल म्हणजे $प_{स१}$ (समीकरण ४) आणि $षा$ या विषमाकर्षणाचे परिबल यांची बीजगणिती बेरीज होय. पर्याय म्हणून घर्षणवर्तुळाची पद्धत वापरली, तर $घ = ०$ असताना मिळणाऱ्या $ब'_{१}$ या बलाची दिशा निश्चित करणे आवश्यक असते. त्यासाठी आपण $सा_{मृ१}$ हे समाकर्षण-बल आणि $षा$ हे विषमाकर्षण-बल यांच्याऐवजी त्यांचे फलरूप बल $सा_{१}$ विचारात घेऊ. नंतर हे फलरूप बल आणि $दा'_{र१}$ आणि $भा_{१}$ या बलांची बेरीज करू. या कृतीतून $सा_{मृ१}$, $षा$, $दा'_{र१}$ आणि $भा_{१}$ या ज्ञात बलांचे फलरूप बल $ट_{१}$ प्राप्त होते (आकृतीत दाखविलेले नाही). $ट_{१}$ आणि $दा'_{१}$ यांच्या छेदनबिंदूतून घर्षणवर्तुळास स्पर्शरेषा काढली असता $ब'_{१}$ ची दिशा प्राप्त होते. समीकरण ३९ (३) सारखे परिबलविषयक समीकरण मांडून (लघुगणकीय वक्राची पद्धत) किंवा परिच्छेद ४० मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे बलप्रतिमा काढून (घर्षणवर्तुळाची पद्धत) $दा'_{१}$ या बलाची महत्ता ठरविता येते.

यापुढची कृती म्हणजे $स = ०$ आणि $भ = ०$ आहेत आणि मृत्तिकेची घनता शून्य नसून $घ$ आहे असे गृहीत धरणे. या गृहीतानुसार $दा'_{र१}$ (समीकरण १) हे बल शून्य होते आणि $ज्ञ_{१}र_{१}$ या उभ्या छेदावर केवळ $दा''_{र१}$ हे बल कारक राहते. उरलेली कृती परिच्छेद ३९ आणि ४० मध्ये वर्णिल्यासारखीच तंतोतंत असते. ती करून $दा''_{१}$ चे मूल्य मिळते.

निरनिराळी घसरपृष्ठे गृहीत धरून याच कृतीची पुनरावृत्ती केली असता, आपल्याला $(दा'_{१} + दा''_{१})$, $(दा'_{२} + दा''_{२})$, … $(दा'_{छ} + दा''_{छ})$ अशा कित्येक जोड्या प्राप्त होतील. $दा'_{छ} + दा''_{छ}$ चे मूल्य लघुतम असले पाहिजे, या लक्षणाची पूर्ती करील, ते प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ ठरते.

$$दा_{प्र} = दा'_{प्र} + दा''_{प्र} = (दा'_{छ} + दा''_{छ})\ लघुतम$$

परिच्छेद ३९ व ४० मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे आलेख-पद्धतीचा अवलंब करून ($दा'_{छ} + दा''_{छ}$) ची मूल्ये भूपृष्ठापासून कोटी म्हणून स्थित केली असता, $दा_{प्र}$ हे बल ठरविता येते. $दा_{प्रस}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाब म्हणजे $दा_{प्र}$ आणि विषमाकर्षण-बल *धा* यांचा फलरूप दाब होय. *धा* हे बल स्पर्शपृष्ठावर कारक असल्यामुळे $दा_{प्रस}$ या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा कारकबिंदू $दा_{प्र}$ च्या बिंदूच्या ठिकाणीच असतो. भिंतीच्या उंचीचा मध्यबिंदू आणि १/३ उंचीचा बिंदू यांच्या दरम्यान तो असतो.

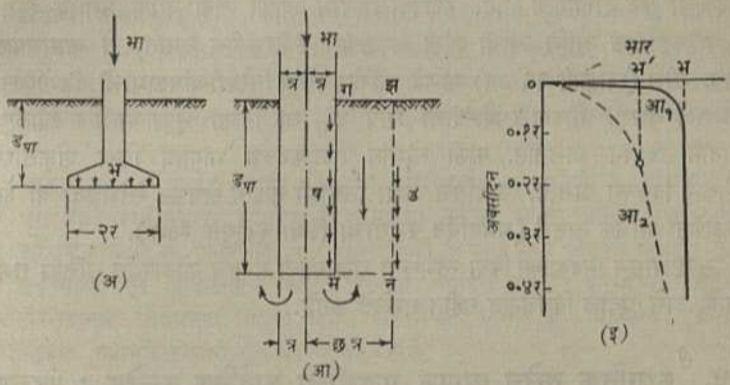
४२. प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या पद्धतींचा सारांश : भिंतीचा र्ड हा घर्षणकोन ω/३ पेक्षा लहान असल्यास समाकर्षणहीन मृत्तिकाराशींचा प्रतियोगी मृत्तिकादाब समीकरण ३८ (२) किंवा त्याला पर्यायी असणाऱ्या आलेखपद्धतींपैकी एखादी पद्धत, यांचा अवलंब करून ठरविता येतो. त्यामुळे होणारी चूक असुरक्षिततेला कारणीभूत होते; परंतु तिचे मूल्य लहान असते. र्ड ची मूल्ये ω/३ पेक्षा अधिक असल्यास घसरपृष्ठ कूलोम-सिद्धांतानुसार सरळरेषात्मक गृहीत धरल्यामुळे होणारी चूक र्ड च्या वर्धमान मूल्यानुसार त्वरेने वाढत जाते. अशा उदाहरणांत परिच्छेद ३९ आणि ४० मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करावा. या पद्धतींचा अवलंब करून मिळणारी फलिते व्यवहारतः सारखीच असतात. समाकर्षणगुणी मृत्तिकेचा प्रतियोगी दाब मात्र लघुगणकीय-वक्रपद्धतीचा अथवा घर्षणवर्तुळ पद्धतीचा अवलंब करूनच ठरवावा.

घसरपृष्ठ वक्र असते, या गृहीतावर आधारित असणाऱ्या पद्धतींचा अवलंब केला असता, प्रथमदर्शनी वाटते त्यापेक्षा पुष्कळच लवकर उत्तर मिळते. चिक्कण मृत्तिकांच्या प्रतियोगी दाबाचा ऊहापोह करताना कार्तनिक विरोधाचा कोन साधारणतः शून्य मानता येतो. हे गृहीत मान्य केले असता घसरपृष्ठाचा वक्र भाग म्हणजे वर्तुळाचा चाप असतो व सरळ भाग क्षितिजाशी ४५° चा कोन करणारा असतो.

प्रकरण ८

भार-धारण-क्षमता

४३. व्याख्या : भूपृष्ठावर किंवा भूपृष्ठाखाली मर्यादित क्षेत्रावर भार ठेवला असता भाराक्रांत क्षेत्र खचते. भार थोडाथोडा वाढवीत नेऊन तदनुषंगिक अवसीदन मोजले असता, आपल्याला **अवसीदन-आलेख** प्राप्त होतो. अशा आलेखात दर एकांक क्षेत्रावरील भाराची मूल्ये या भुजा व तदनुषंगिक अवसीदन या कोटी म्हणून स्थित केलेल्या असतात. अशा आलेखाचे स्वरूप आकृती ३६ इ मध्ये दाखविलेल्या आ_1 आणि आ_2



आकृती ३६ : (अ) पट्टिका पादक; (आ) दंडगोलाकृती स्तंभ; (इ) दृढ (आ_1) आणि विस्कळित (आ_2) मृत्तिकांच्या बाबतीतील एकांक क्षेत्रस्थ भार आणि अवसीदन यांतील संबंध.

या दोन आलेखांच्या दरम्यान पडणारे असते. अवसीदन-आलेखाला आकस्मिक रीत्या उभ्या स्पर्शरेषेचे स्वरूप आले (आलेख आ_1), तर हा बदल आधारभूमीच्या उच्छेदाची घटना दाखवितो, असे समजले जाते. याऐवजी, आ_2 या आलेखात दाखविल्याप्रमाणे, अवसीदन-आलेख तिरक्या दिशेने हळूहळू उतरत राहिला, तर ज्या ठिकाणी आलेखाचे स्वरूप उभट सरळ स्पर्शरेषेसारखे होऊ लागते, त्या सुमारास आधारभूमीचा उच्छेद होतो, असे समजले जाते. हा समज तर्कशुद्ध नसला, तरी प्रचलित कल्पनांशी सुसंगत आहे.

भाराने व्यापलेल्या क्षेत्रास **धारण-क्षेत्र** असे म्हणतात. आधारभूमीचा उच्छेद घडवून आणण्यास आवश्यक असलेल्या भारास **क्रांतिकारी भार** किंवा **लक्ष्मण-भार** किंवा एकूण

भारधारणक्षमता असे म्हणतात. दर एकांक क्षेत्रावरील *भ* किंवा *भ'* (आकृती ३६ इ) या सरासरी लक्ष्मणभारास **मृत्तिकेची भार-धारण-क्षमता** असे म्हणतात. ही क्षमता केवळ मृत्तिकेच्या प्राकृतिक गुणधर्मांवरच अवलंबून असते असे नव्हे, तर भाराक्रांत क्षेत्राचे आकारमान, त्याचा आकार आणि त्याचे भूपृष्ठसंदर्भात असणारे स्थान या गोष्टींवरही ती अवलंबून असते. पुढील परिच्छेदांतून केलेले विवेचन आडव्या धारण-क्षेत्रावर ठेवलेल्या उभ्या भारांपुरतेच मर्यादित आहे.

रुंदी एकसारखी असून लांबी रुंदीच्या तुलनेत बरीच मोठी आहे, अशा पट्टीसारख्या आकाराच्या क्षेत्रावर भार ठेवलेला असेल, तर त्यास **पट्टिका-भार** म्हणतात. हा प्रकार लांबीइतकीच जवळजवळ रुंदी आहे, उदाहरणार्थ : चौरस, चौकोनी किंवा वर्तुळाकार, अशा क्षेत्रांवर ठेवलेल्या भारांहून अर्थातच भिन्न आहे. स्थापत्यव्यवहारात धारण-क्षेत्रावर भार संक्रमित होतो तो **पादके** किंवा **स्तंभ** यांच्या द्वारे. आकृती ३६ अ मध्ये पादकाचा छेद दाखविला आहे. रुंदीच्या मानाने ज्याची लांबी बरीच अधिक असते, ते **पट्टिकापादक** आणि ज्याची लांबी जवळपास रुंदीइतकीच असते, ते **आसनपादक** होय. स्तंभ (आकृती ३६ आ) म्हणजे काँक्रीट किंवा चिरेबंदी बांधकामाची दंडगोलाकृती समपार्श्व वास्तू. तिच्या लांबीरुंदीची मापे $ड_{पा}$ या तिच्या भूपृष्ठाखालील खोलीच्या मानाने लहान असतात. काही स्तंभांत तळाकडच्या भागाला छिन्न शंकूसारखा आकार दिलेला असतो. अर्थातच अशा ठिकाणी तळाचे क्षेत्रफळ स्तंभछेदाच्या क्षेत्र-फळापेक्षा अधिक असते **(अग्रवर्धित पद्धतीचा किंवा कुंडीयुक्त स्तंभ)**.

भूपृष्ठापासून पादकाच्या किंवा स्तंभाच्या तळाखाली बऱ्याच खोलीपर्यंत मृत्तिका समांग आहे, असे पुढील विवेचनात गृहीत धरलेले आहे.

४४. स्थानिक तसेच व्यापक पद्धतीचा कार्तनिक उच्छेद : पादकाद्वारे भूमीवर भार पडण्यापूर्वी त्याच्या तळाला आधार देणारी भूमी स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असते. त्या अवस्थेतील प्रतिबल-परिस्थिती प्रकरण १७ मध्ये वर्णिली जाईल. पादकावरील भार एका विवक्षित क्रांतिकारी मूल्यापलीकडे वाढविला असता, त्याखालची मृत्तिका क्रमाक्रमाने नम्य समतोलाच्या अवस्थेत जाते. हे संक्रमण होत असताना, पादकतळावरील मृत्तिका-प्रतिक्रियांचे वितरण आणि पादकाखालील मृत्तिकेमधील प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा बदलत असतात. या संक्रमणाला पादकतळाच्या कडांपाशी प्रारंभ होतो आणि नंतर ते इतरत्र पसरत जाते. आकृती १२३ इ आणि आकृती १२३ ई पाहा. पहिल्या आकृतीत एक पट्टिका-पादक समांग वालुकाराशीच्या समतल पृष्ठावर ठेवलेले आहे व दुसरीत त्याचा तळ भूपृष्ठापासून विवक्षित खोलीवर आहे. मृत्तिकेचे प्राकृतिक गुणधर्म जर असे असतील की, मृत्तिकेचा नम्य विसर्पणाने उच्छेद होण्यासाठी तत्पूर्व विकृती थोडीशीच असावी, तर आकृती १५ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे नम्य समतोलाची अवस्था येईपर्यंत पादक भूमीमध्ये खचत नाही. भार आणि अवसीदन

यांतील अशा परिस्थितीतील संबंध, आकृती ३६ इ मधील आ, या ठळक आलेखाने दाखविला जातो. अशा उच्छेदाच्या वेळी मृत्तिका दोन्ही अंगांस बाह्य दिशेने सरकते. आकृती ३७ इ मधील *नतप* या रेषेने यांपैकी एका बाजूचे घसरपृष्ठ दाखविले आहे. हे पृष्ठ *नत* हा वक्र भाग व *तप* हा सरळ भाग यांचे बनलेले आहे. *तप* हा सरळ भाग भूपृष्ठाशी ४५° – ϕ/२ एवढा कोन करतो (परिच्छेद १६ पाहा). या प्रकारच्या उच्छेदास **व्यापक कार्तनिक उच्छेद** म्हणण्यात येईल.

आकृती ३७ इ मध्ये दाखविलेल्या व्यापक पद्धतीच्या कार्तनिक उच्छेदाच्या लक्षणांची पूर्तता प्रत्यक्षात पूर्णपणे कधीच होत नाही; कारण पादकतळालगतच्या मृत्तिकेचे आडव्या दिशेतील दमन, *गतप* या विभागाच्या माथ्याकडील संपूर्ण भागात नम्य समतोलाची अवस्था निर्माण व्हावी इतके मोठे नसते. म्हणून आकृती ३७ ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे उच्छेद होईल, असे अनुमान करावे लागते. ज्यात नम्य समतोल अवस्था यावयास हवी, त्या विभागाचा अगदी माथ्याकडचा भाग, पार्श्वीय दमनाच्या अपुरेपणामुळे, स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असतानासुद्धा कार्तनिक उच्छेद होतो, हे तेथे दाखविले आहे. स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असलेल्या वालुकाराशीला एखादे घसरपृष्ठ छेदून जाते, तेव्हा त्याने मुक्त पृष्ठाशी केलेला कोन ४५°–ϕ/२ पासून ९०° पर्यंत मूल्याचा असू शकतो. (आकृती १७ अ आणि इ व आकृती ७० इ पाहा.) तथापि, अशाच परिस्थितीत समाकर्षणगुणी मृत्तिकांमधील घसरपृष्ठ, स्थितिस्थापक समतोल विभागाच्या सीमेशी थांबते आणि मुक्तपृष्ठाच्या आसपास कार्तनिक प्रतिबलांनी युक्त भागाऐवजी ताणयुक्त भाग निर्माण होऊन तुटक स्वरूपाचे तडे आढळण्याचा संभव असतो. व्यापक पद्धतीने होणाऱ्या कार्तनिक उच्छेदाच्या विवेचनात सिद्धांत आणि सत्यस्थिती यांतील हा विसंवाद दुर्लक्षिला जाईल. त्यामुळे होणारी चूक महत्त्वाची नसते.

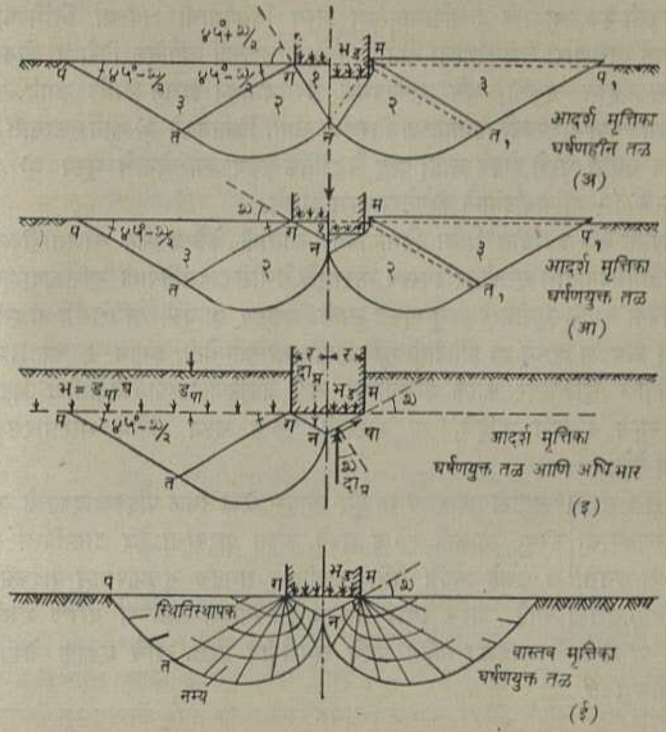
याउलट, नम्य विसर्पणापूर्वीची विकृती बरीच मोठी असावी, अशा प्राकृतिक गुणधर्मांची मृत्तिका असेल, तर व्यापक उच्छेदाच्या दिशेने प्रगती होत असताना अवसीदन त्वरेने वाढत असते. या अवस्थेत भार आणि अवसीदन यांतील संबंध स्थूलमानाने आकृती ३६ इ मध्ये आ₂ या तुटक आलेखाने दाखविल्याप्रमाणे असतो. अवसीदन-आलेखाच्या उतारात सुस्पष्टपणे येणाऱ्या उभटपणाच्याद्वारे दाखविली जाणारी आधार-भूमीच्या उच्छेदाची परिस्थिती, उच्छेद भूपृष्ठापर्यंत पसरण्यापूर्वीच निर्माण झालेली असते; म्हणून या उच्छेद-प्रकाराला **स्थानिक पद्धतीचा कार्तनिक उच्छेद** असे म्हटले जाईल.

४५. उथळ पट्टिका-पादकांखालच्या भूमीत व्यापक पद्धतीचा कार्तनिक उच्छेद होण्यासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे : पादकाची रुंदी त्याच्या भूपृष्ठाखालील खोलीइतकी किंवा अधिक असेल, तर अशा पादकाला **उथळ पादक** म्हणतात. अशा उदाहरणांत पादकतळाच्या वरच्या भागातील मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध

आपण दुर्लक्षू शकतो. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे झाल्यास, या पातळीच्या वर असणाऱ्या $घ$ घनतेच्या मृत्तिकेऐवजी तेथे दर एकांक क्षेत्रावर $भ = घ.ड_{पा}$ या मूल्याचा अधिभार आहे, असे समजता येते. या गृहीतामुळे पुढची आकडेमोड बऱ्याच प्रमाणात सोपी होते, तसेच त्यामुळे होणारी चूक क्षुल्लक असून तीमुळे सुरक्षिततेत भर पडते. उलटपक्षी, $ड_{पा}$ ही खोली २र या रुंदीपेक्षा बऱ्याच प्रमाणात मोठी असेल (**खोल पादक**), तर पादकतळपातळीच्या वरच्या मृत्तिकेतील कार्तनिक प्रतिबले विचारात घेणे आवश्यक ठरते (परिच्छेद ५० पाहा).

पादकतळ-पातळीच्या वर असणाऱ्या मृत्तिकेऐवजी $भ$ हा एकांक मूल्याचा अधिभार गृहीत धरला, तर पादकतळ म्हणजे अपारप्राय राशीच्या समतल पृष्ठभागावर ठेवलेली २र रुंदीची भारयुक्त पट्टिका आहे, असे मानता येते. अशा भारामुळे उद्भवणारी नम्य समतोलाची अवस्था आकृती १५ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते. भारयुक्त क्षेत्रा-वरील कार्तनिक प्रतिबले शून्यमूल्य आहेत, असे गृहीत धरून ही आकृती काढलेली आहे. त्यासाठी पादकतळ आणि मृत्तिका यांमध्ये घर्षण व विषमाकर्षण यांचा संपूर्णपणे अभाव असणे आवश्यक असते. आकृती ३७ *अ* याच गृहीतानुसार काढलेली आहे. या आकृतीतील *पप*$_{१}$*त*$_{१}$*नत* या नम्य समतोलाच्या विभागाचे तीन विभाग पाडता येतात ते असे : (१) भार-पट्टिकेखालील त्रिकोणी भाग. यात ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबले उभ्या दिशेत कारक असतात. (२) त्रिज्यादिक् कार्तनिक बलांचे दोन भाग. हे भारपट्टीच्या कडांपासून निघतात. या भागांची एक सीमा क्षितिजाशी $४५^\circ + \phi/२$ एवढा कोन करते व दुसरी $४५^\circ - \phi/२$ एवढा कोन करते आणि (३) रॅन्किन्प्रणीत प्रतियोगी अवस्थेतील दोन भाग. मृत्तिकाधाराचा उच्छेद होतो त्या क्षणाच्या विभाग १ ते ३ यांच्या सीमा आकृती ३७ अ च्या उजव्या भागातील तुटक रेषांनी दाखविल्या आहेत व भार भूमीमध्ये खचत असतो त्या वेळच्या त्याच सीमा, सलग ठळक रेषांनी दाखविल्या आहेत. विभाग १ मध्ये असलेली मृत्तिका पार्श्वीय दिशेने पसरते व त्याचे विरूपत्व आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे असते.

पट्टिकापादकाचा तळ खडबडीत किंवा घर्षणयुक्त असेल (आकृती ३७ आ), तर १ या विभागातील मृत्तिकेच्या पसरण्याच्या प्रवृत्तीला पादकतळ आणि मृत्तिका यांतील घर्षण आणि विषमाकर्षण यांनी विरोध केला जातो. पार्श्वीय प्रसरणास होणाऱ्या या विरोधाच्या अस्तित्वामुळे पादकतळाच्या लगत असलेली मृत्तिका नेहमीच स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत राहते व खचणाऱ्या पादकाचाच जणू एक भाग आहे, अशा प्रकारे तिचे वर्तन होते. परिणामी, या त्रिकोणाकृती मृत्तिकाखंडाची उंची न बदलता जवळजवळ तीच राहते. तथापि पादक मात्र खचत असते. *न* या बिंदूच्या खालची मृत्तिका सरळ दिशेत खाली सरकली, तरच ही घटना घडणे शक्य आहे. अशा हालचालीसाठी *न* या बिंदूतून काढलेली उभी रेषा स्पर्शरेषेवत् असेल, अशा पद्धतीने *नत* या घसरपृष्ठाचा प्रारंभ होणे आवश्यक आहे. *गनत* या त्रिज्यादिक्



आकृती ३७ : पट्टिका-पादकाच्या मृत्तिकाधाराचा उच्छेद झाल्यानंतर दिसणाऱ्या नम्य विसर्पण विभागाच्या सीमा

कार्तनिक विभागाची *गत* ही सीमा म्हणजेसुद्धा एक घसरपृष्ठ आहे. परिच्छेद ७ मध्ये विशद केल्याप्रमाणे आदर्श नम्य राशीमधील संभाव्य घसरपृष्ठे नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या विभागाच्या प्रत्येक बिंदुस्थानी एकमेकांस ९०° – ॐ एवढा कोन करून छेदतात. तेव्हा *गन* या सीमेने (आकृती ३७ आ) क्षितिजाशी केलेला कोन ॐ असेल. अर्थात् त्यासाठी मृत्तिका आणि पादकतळ यांतील घर्षण आणि विषमाकर्षण यांतून उद्भवणारा विरोध एवढा असला पाहिजे की, तळावरून पादक सरकणार नाही. पादकाच्या खचण्यामुळे येणारे विरूपत्व आकृतीच्या उजव्या भागात दाखविले आहे. पादकतळाच्या दोन्ही बाजूंस होणाऱ्या मृत्तिकेच्या या वैशिष्ट्यपूर्ण उठावाविषयी बऱ्याच कल्पना करण्यात आलेल्या आहेत; आणि त्याचा **धारक्रिया** म्हणून उल्लेख केलेला आहे. परंतु हा उठाव म्हणजे दुसरे तिसरे काही नसून उपरोक्त दोन त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभागांच्या अस्तित्वाचा केवळ दृश्य परिणाम आहे.

आकृती ३७ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे नम्य विसर्पणाची अवस्था निर्मिण्यासाठी आवश्यक असणारा तळघर्षणाचा कोन, आधारमृत्तिकेच्या कार्तनिक विरोधी कोनापेक्षा पुष्कळच लहान असतो, असे एतद्विषयक संशोधनातून दिसून आले आहे. तेव्हा पादकाखालच्या मध्यवर्ती विभागाच्या तिरक्या सीमा क्षितिजाशी ϕ कोन करतात असे नेहमीच गृहीत धरणे शक्य आहे; परंतु सैद्धांतिक दृष्ट्या या कोनाचे मूल्य ϕ आणि $४५^\circ + \phi/२$ या मर्यादांमध्ये कोणतेही असू शकते.

आकृती ३७ इ मधील १ या विभागाच्या सीमांनी केलेला कोन कोणताही असो, त्यांच्या सान्निध्यातील मृत्तिकेवर उपरस्थ भारामुळे येणारा दाब प्रतियोगी मृत्तिकादाबाइतका झाल्याविना पादक भूमीमध्ये खचू शकत नाही. प्रकरण ७ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करून हा प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरविता येतो; आणि १ या मध्यवर्ती विभागातील मृत्तिकेवर कारक असणाऱ्या सर्व बलांच्या उभ्या दिशेतील घटकांची बेरीज शून्य असली पाहिजे, या अटीची पूर्तता करून अंतिम भारधारणक्षमता ठरविता येते.

ही रीत समजण्यासाठी उदाहरण म्हणून आपण एका उथळ पट्टिकापादकाची अंतिम भारधारणक्षमता ठरवू. आकृती ३७ इ मध्ये अशा पादकाचा छेद दाखविला आहे. मृत्तिकेची घनता घ आहे आणि मृत्तिकाराशीच्या समतल भू पृष्ठापासून पादकतळाची खोली $ह_{पा}$ इतकी आहे. पादक उथळ असल्यामुळे त्याच्या तळाच्या वरील भागातील मृत्तिकेच्या ठिकाणी अधिभार गृहीत धरणे समर्थनीय ठरेल. त्याचे एकांक क्षेत्रावरील मूल्य असे :

$$भ = घ \cdot ह_{पा}$$

मृत्तिकेच्या विरोधाचे कूलोमप्रणीत नेहमीचे समीकरण असे :

$$क = स + \sigma \,स्प\, \phi \qquad ५(१)$$

गन या स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले उच्छेदक्षणी पुढीलप्रमाणे असतील :

$$द_{प्रत} = स + द_{प्रल} \,स्प\, \phi$$

येथे $द_{प्रल}$ म्हणजे स्पर्शपृष्ठाच्या एकांक क्षेत्रावरील प्रतियोगी दाबाचा लंबदिक् घटक आहे. पादकतळाच्या घर्षणामुळे तसेच तळ आणि मृत्तिका यांतील विषमाकर्षणामुळे *गन* आणि *मन* ही स्पर्शपृष्ठे क्षितिजाशी ϕ कोन करतील. या प्रत्येक पृष्ठावर येणाऱ्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे दोन भाग आहेत, त्यांतील $दा_{प्र}$ हा भाग स्पर्शपृष्ठावरील लंबाशी ϕ कोन करतो (ϕ = δ = भिंतघर्षण कोन) आणि *पा* हा विषमाकर्षणजन्य दुसरा भाग स्पर्शपृष्ठाला समांतर आहे. त्याचे मूल्य असे :

$$पा = \frac{र}{कोज्या\, \omega} \cdot स$$

$दा_{प्र}$ हा दाब ठरविण्याच्या पद्धती परिच्छेद ४१ मध्ये वर्णिल्या आहेत. या संबंधात हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, या पद्धतींपैकी कोणत्याही पद्धतीत प्राप्त होणारे घसरपृष्ठ हे केवळ स्थूलमानाने खरे घसरपृष्ठ समजावे लागते; कारण या पद्धती काटेकोरपणे शास्त्रपूत नाहीत. म्हणून लघुगणकीय वक्राच्या किंवा घर्षणवर्तुळाच्या पद्धतीने प्राप्त होणाऱ्या घसरपृष्ठाचा प्रारंभ आकृती ३७ इ मधील *न* या बिंदूतून होताना त्याची स्पर्शरेषा उभी असेलच असे म्हणता येणार नाही. परंतु खऱ्या आणि स्थूलमानाने प्राप्त होणाऱ्या घसरपृष्ठांतील फरकामुळे होणारी चूक महत्त्वाची नसते. स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या *गमन* या मृत्तिकाखंडाच्या समतोलासाठी $घ.र^{२}.स्प\,\omega$ या त्याच्या वजनासहित सर्व उभ्या बलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. ही बेरीज खाली मांडली आहे.

$$भा_{इ} + घ.र^{२}.स्प\,\omega - २दा_{प्र} - २स\,र\,स्प\,\omega = ० \qquad [१]$$

म्हणून

$$भा_{इ} = २दा_{प्र} + २स\,र\,स्प\,\omega - घ.र^{२}.स्प\,\omega \qquad [२]$$

$दा_{प्र}$ माहीत असेल, तर हे समीकरण म्हणजे आपल्या समस्येचे उत्तर आहे. जर $ह_{पा} = ०$, $म = ०$ आणि $स = ०$ असेल, म्हणजेच पादकतळ समाकर्षणहीन वालुकाराशीच्या समतल पृष्ठावर ठेवलेले असेल, तर $दा_{प्र}$ चे मूल्य ३८ (१) या समीकरणाने मिळणाऱ्या मूल्याइतके होते. या समीकरणामध्ये $च = र.स्प\,\omega$, $ठ = \omega$, $मृ_{प्र} = मृ_{प्रघ}$ आणि $ग = १८०^{\circ} - \omega$ नियुक्त करून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$दा_{प्र} = \frac{१}{२}घ.र^{२}\frac{स्प\,\omega}{कोज्या^{२}\omega}मृ_{प्रघ} \qquad [३]$$

येथे $मृ_{प्रघ}$ हा $स = ०$, $म = ०$, $ग = १८०^{\circ} - \omega$ आणि $ठ = \omega$ या परिस्थितीतील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. समीकरण २ मध्ये हे मूल्य आणि $स = ०$ नियुक्त करून आपल्याला पादकाच्या एकांक लांबीवरील एकूण भारधारणक्षमता पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$भा_{इ} = भा_{घ} = २\times\frac{१}{२}घ.र^{२}.स्प\,\omega\left(\frac{मृ_{प्रघ}}{कोज्या^{२}\omega} - १\right) = २र\times घ.र.\,प_{घ} \qquad [४अ]$$

येथे

$$प_{घ} = \frac{१}{२}.स्प\,\omega\left(\frac{मृ_{प्रघ}}{कोज्या^{२}\omega} - १\right) \qquad [४आ]$$

आहे.

$मृ_{प्रघ}$ चे मूल्य लघुगणकीय वक्र किंवा घर्षणवर्तुळ यांपैकी एका पद्धतीचा अवलंब करून मिळवता येते (परिच्छेद ३९ व ४०). भिंतघर्षण कोन δ आणि स्पर्शपृष्ठाच्या उतार कोन θ हे अनुक्रमे ϕ आणि $१८०^{\circ} - \phi$ एवढे असल्यामुळे $मृ_{प्रघ}$ आणि $घ_{घ}$ यांची मूल्ये केवळ ϕ वर अवलंबून असतात. म्हणून $घ_{घ}$ एकदाच गणितसिद्ध करून ठेवता येतो. $घ_{घ}$ आणि ϕ यांमधील संबंध आकृती ३८ इ मधील $घ_{घ}$ या ठळक आलेखाने दाखविला आहे.

४६. भार-धारण-क्षमता ठरविण्याची सोपी पद्धत : आधारमृत्तिका समाकर्षणगुणी असेल, तर पादकाच्या एकांक लांबीवरील $भा_{ह}$ हा लक्ष्मणभार समीकरण ४५(२) च्या साहाय्याने ठरविण्यासाठी प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा $दा_{प्र}$ हा घटक ठरवावा लागतो. या कामासाठी बराच वेळ खर्च होतो. तेव्हा व्यवहारातील समस्या सोडविण्यासाठी लक्ष्मणभाराचे मूल्य थोडेसे कमी अचूक मिळाले, तरी समाधान मानावे लागते. ही सोपी पद्धत पुढील समीकरणावर आधारित आहे.

$$दा_{प्रल} = \frac{च}{ज्या\,\theta}\,(स\;मृ_{प्रस} + भ.\;मृ_{प्रभ}) + \frac{१}{२}\,घ.\;च^{२}.\frac{मृ_{प्रघ}}{ज्या\,\theta} \qquad ३७(४)$$

येथे $दा_{प्रल}$ हा $च$ उंचीच्या सरळ स्पर्शपृष्ठावरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक असून θ हा त्या स्पर्शपृष्ठाने क्षितिजाशी केलेला कोन आहे आणि $मृ_{प्रस}$, $मृ_{प्रभ}$ आणि $मृ_{प्रघ}$ हे, ज्यांची मूल्ये $च$ आणि $घ$ यांवर अवलंबून नाहीत, असे गुणांक आहेत. आकृती ३७ इ मधील $गन$ म्हणजे जर स्पर्शपृष्ठ असेल, तर वरील समीकरणात आलेल्या $च$, θ आणि δ या पदांची मूल्ये खालीलप्रमाणे असतील :

$$च = र.स्प\,\phi,\; \theta = १८० - \phi,\; \delta = \phi \text{ आणि } घ = स.$$

स्पर्शपृष्ठावरील $दा_{प्र}$ हा एकूण प्रतियोगी मृत्तिकादाब $दा_{प्रल}/कोज्या\,\delta$ इतका असतो म्हणजेच येथे

$$दा_{प्र} = \frac{दा_{प्रल}}{कोज्या\,\delta} = \frac{दा_{प्रल}}{कोज्या\,\phi} \qquad [१]$$

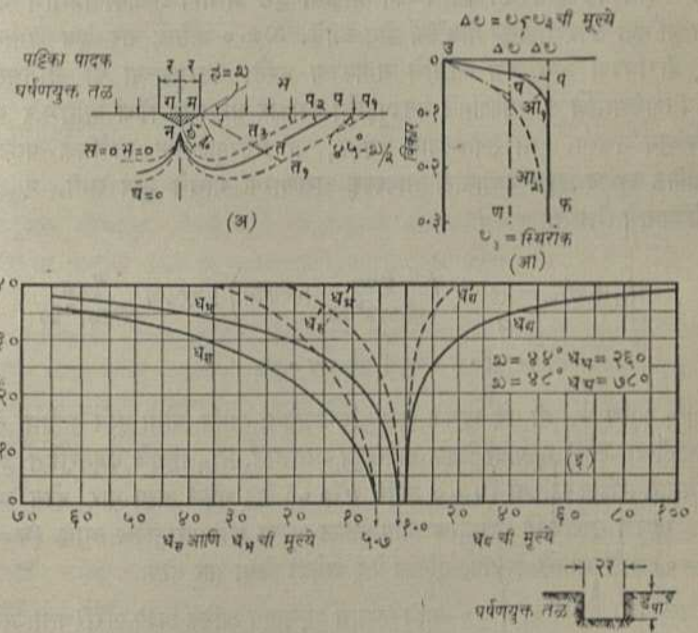
होईल, हे आणखी लक्षात घेतल्यास समीकरण ३७ (४) च्या साहाय्याने आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$दा_{प्र} = \frac{दा_{प्रल}}{कोज्या\,\delta} = \frac{र}{कोज्या^{२}\phi}\,(स.\;मृ_{प्रस} + भ.\;मृ_{प्रभ})$$
$$+ \frac{१}{२}\,घ.\,र^{२}.\frac{स्प\,\phi}{कोज्या^{२}\phi}\cdot मृ_{प्रघ}$$

हे समीकरण आणि समीकरण ४५ (२) यांचा संयोग करून आपल्याला पादकावरील भारासाठी पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{भा}_{\text{ह}} = \text{२र.स}\left(\frac{\text{मृ}_{\text{प्रस}}}{\text{कोज्या}^{२}\,\text{ऌ}} + \text{स्प}\,\text{ऌ}\right) + \text{२र.म.}\ \frac{\text{मृ}_{\text{प्रघ}}}{\text{कोज्या}^{२}\,\text{ऌ}}$$
$$+\,\text{घ.र}^{२}.\text{स्प}\,\text{ऌ}\left(\frac{\text{मृ}_{\text{प्रघ}}}{\text{कोज्या}^{२}\,\text{ऌ}} - १\right) \qquad [२]$$

येथे $\text{मृ}_{\text{प्रस}}$, $\text{मृ}_{\text{प्रभ}}$ आणि $\text{मृ}_{\text{प्रघ}}$ हे शुद्ध अंक असून त्यांची मूल्ये पादकाच्या रुंदीवर अवलंबून नाहीत. मृत्तिकाधारात व्यापक पद्धतीचा कार्तनिक उच्छेद घडत असेल, तरच हे समीकरण लागू करता येते.



व्यापक कार्तनिक उच्छेद : $\text{भा}_{\text{ह}} = \text{२र}\,(\text{सध}_{\text{स}} + \text{घड}_{\text{पा}}\,\text{ध}_{\text{म}} + \text{घर}\,\text{ध}_{\text{घ}})$

स्थानिक कार्तनिक उच्छेद : $\text{भा}'_{\text{ह}} = \text{२र}\,(२/३\ \text{सध}'_{\text{स}} + \text{घड}_{\text{पा}}\,\text{ध}'_{\text{म}} + \text{घर}\,\text{ध}'_{\text{घ}})$

वर्तुळाकार पादक (व्यास २त्र) : $\text{भा}_{\text{हत्र}} \leqslant \text{त्र}^{२}\pi\,(१\cdot३\ \text{सध}_{\text{स}} + \text{घड}_{\text{पा}}\,\text{ध}_{\text{म}} + ०.६\ \text{घत्रध}_{\text{घ}})$

मृत्तिकेची घनता : घ

मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध : $\text{क} = \text{स} + \text{ए}\,\text{स्प}\,\text{ऌ}$

आकृती ३८ : भार-धारणक्षमता-गुणकांच्या साहाय्याने भारधारणक्षमतेचे अनुमान करण्याची पद्धत : (अ) या पद्धतीशी निगडित असणाऱ्या दोषांचे उगमस्थान, (आ) दृढ आणि विस्कळित मृत्तिकांचे भारधारणक्षमता-गुणक ठरविण्याच्या कृतीतील सुकरतादायी गृहीत, (इ) ऌ आणि भारधारणक्षमता-गुणक यांतील संबंध.

आकृती ३८ अ मध्ये खडबडीत तळाचे पट्टिकापादक दाखविले आहे. $घ = ०$ असल्यास उच्छेद $नत_{१}प_{१}$ या घसरपृष्ठानुसार होईल. या पृष्ठाचा $नत_{१}$ हा वक्र भाग म्हणजे एक लघुगणकीय वक्र आहे, आणि $म$ हा त्याचा नाभिबिंदू आहे (प्रांड्ट्ल १९२०). या वक्राचे समीकरण असे आहे :

$$त्र = त्र_{०}\, e^{\theta\, स्प\, \phi} \qquad [३]$$

येथे θ (त्रिज्यक-मूल्य) हा केंद्रस्थ कोन आकृती ३८ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे $त्र_{०} = मन$ या मूळ सदिशापासून मोजलेला कोन आहे. $\phi = ०$ असेल, तर हेच समीकरण $त्र_{०}$ ही त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाचे समीकरण ठरते. घसरपृष्ठाच्या या समीकरणात $स$ व त्याचप्रमाणे $भ$ नसल्यामुळे घसरपृष्ठाचा आकार समाकर्षण किंवा अधिभार यावर अवलंबून नसतो. या उदाहरणात $नत_{१}प_{१}$ या घसरपृष्ठावरून सार्वत्रिक पद्धतीचा कार्तनिक उच्छेद घडून येण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या भाराचे मूल्य समी. २ वरून पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$भा_{स} + भा_{भ} = २र \cdot स \left(\frac{मृ_{प्रस}}{कोज्या^{२}\phi} + स्प\,\phi \right) + २र \cdot भ \frac{मृ_{प्रभ}}{कोज्या^{२}\phi}$$

$$= २र \cdot स \cdot ध_{स} + २र \cdot भ \cdot ध_{भ} \qquad [४]$$

$ध_{स}$ आणि $ध_{भ}$ ही पदे म्हणजे शुद्ध अंक आहेत; आणि त्यांची मूल्ये कूलोम समीकरणातील ϕच्या मूल्यावर केवळ अवलंबून असतात. $भा_{स}$ म्हणजे वजनरहित आणि अधिभारविरहित मृत्तिका ($घ = ०$ आणि $भ = ०$) पेलू शकेल असा भार होय आणि $भा_{भ}$ म्हणजे मृत्तिकेची भारधारणक्षमता केवळ $भ$ या अधिभारामुळेच आहे ($घ = ०$, $स = ०$) असे मानले असता, मृत्तिका पेलू शकेल असा भार होय.

उलटपक्षी, $स = ०$, $भ = ०$ आणि $घ$ मात्र शून्याहून अधिक अशी परिस्थिती असेल, तर उच्छेद $नत_{२}प_{२}$ या पृष्ठावरून होतो (आकृती ३८ अ). या रेषेचा वक्र भाग काटेकोरपणे व्यक्त करील असे समीकरण अद्याप सापडलेले नाही. त्याचा आकार लघुगणकीय वक्र किंवा घर्षणवर्तुळ यांपैकी एका पद्धतीचा अवलंब करून स्थूलमानाने ठरविता येतो (परिच्छेद ३९ व ४०). $नत_{२}$ या वक्राचा नीचतम बिंदू $नत_{१}$ या वक्राच्या नीचतम बिंदूपेक्षा पुष्कळच वर स्थित असतो, असे मात्र या विषयीच्या संशोधनावरून दिसून येते. $नत_{२}प_{२}$ या पृष्ठावरून उच्छेद घडविण्यासाठी आवश्यक असणारा लक्ष्मणभार पुढील प्रमाणे मांडता येतो.

$$भा_{घ} = घ.\, र^{२} स्प\,\phi \left(\frac{मृ_{प्रघ}}{कोज्या^{२}\phi} - १ \right) = २र \times घ \cdot र \cdot ध_{घ} \qquad ४५(४अ)$$

स, $\text{ड}_{\text{पा}}$ आणि घ यांची मूल्ये शून्याहून मोठी असतील, तर उच्छेद नतप (आकृती ३८ अ) या घसरपृष्ठानुसार घडून येतो. हे पृष्ठ $\text{मत}_{१}\text{प}_{१}$ आणि $\text{मत}_{२}\text{प}_{२}$ या पृष्ठांच्या दरम्यान पडते. आतापर्यंत मांडलेल्या गणितावरून आपणांला हे माहीत झाले आहे की, या परिस्थितीत पट्टिकेच्या एकांक लांबीवरील $\text{भा}_{\text{ड}}$ हा लक्ष्मणभार $\text{भा}_{\text{स}}+\text{भा}_{\text{भ}}$ (समीकरण ४) आणि $\text{भा}_{\text{घ}}$ (समीकरण ४५ (४ अ)) यांच्या बेरजेपेक्षा किंचित मोठा असतो; म्हणून त्याचे मूल्य खालीलप्रमाणे गृहीत धरल्यास फारशी चूक होत नाही.

$$\text{भा}_{\text{ड}}=\text{भा}_{\text{स}}+\text{भा}_{\text{भ}}+\text{भा}_{\text{घ}}=\text{२र}\cdot\text{स}\cdot\text{ध}_{\text{स}}+\text{२र}\cdot\text{भ}\cdot\text{ध}_{\text{भ}}+\text{२र}^{२}\cdot\text{घ}\cdot\text{ध}_{\text{घ}}$$

येथे २र ही पादकाची रुंदी आहे. $\text{घ}\cdot\text{ड}_{\text{पा}}=\text{भ}$ असे नियुक्त केल्यास आपणांस पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{भा}_{\text{ड}}=\text{भा}_{\text{स}}+\text{भा}_{\text{भ}}+\text{भा}_{\text{घ}}=\text{२र}\ (\text{स}\cdot\text{ध}_{\text{स}}+\text{घ}\cdot\text{ड}_{\text{पा}}\cdot\text{ध}_{\text{भ}}+\text{घ र ध}_{\text{घ}})\qquad[\text{५}]$$

$\text{ध}_{\text{स}}$, $\text{ध}_{\text{भ}}$ आणि $\text{ध}_{\text{घ}}$ या गुणकांना उथळ पट्टिकापादकांचे **भार-धारणक्षमता-गुणक** किंवा **धारणगुणक** म्हणतात. त्यांची मूल्ये केवळ कूलोमच्या समीकरणातील ω या कार्तनिक विरोधाच्या कोनावर अवलंबून असल्यामुळे, एकदाच गणितसिद्ध करून ठेवता येतात.

समीकरण ५ च्या वापरामुळे होणाऱ्या चुकीचे गांभीर्य जाणून घेण्यासाठी एका पट्टिकापादकावरील लक्ष्मणभार ठरवू. त्याची रुंदी २र आहे; आणि आदर्श वालुका राशीच्या समतल पृष्ठापासून २र खोलीवर ते ठेवलेले आहे. $\omega=३४^{\circ}$ असताना आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात. $\text{मप}_{१}=८{\cdot}५\ \text{र}$, $\text{मप}=७{\cdot}०\ \text{र}$ आणि $\text{मप}_{२}=५{\cdot}५\ \text{र}$ (आकृती ३८ अ). $\omega=३८^{\circ}$ असताना हीच मूल्ये $\text{मप}_{१}=११{\cdot}५\ \text{र}$, $\text{मप}=८{\cdot}७\ \text{र}$ आणि $\text{मप}_{२}=७{\cdot}१\ \text{र}$ अशी असतात. या आकड्यांवरून असे दिसते की, आकृती ३८ अ मध्ये दाखविलेली तीन घसरपृष्ठे फार वेगळाली आहेत. तथापि असेही आढळून आले होते की, नतप वरून कार्तनिक उच्छेद घडून येण्यासाठी आवश्यक असलेला $\text{भा}_{\text{ड}}$ हा भार $\text{नत}_{१}\text{प}_{१}$ आणि $\text{नत}_{२}\text{प}_{२}$ वरून उच्छेद घडविणाऱ्या भारांच्या बेरजेपेक्षा १०% हून थोड्या कमी प्रमाणात मोठा असतो.

समीकरण ४ मध्ये येणारे $\text{भा}_{\text{स}}$ आणि $\text{भा}_{\text{भ}}$ हे भार ठरविण्याची समस्या एरीच्या प्रतिबलविषयक समीकरणांचा अवलंब करून काटेकोरपणे सोडविली आहे (प्रांड्ट्ल १९२०, रैसनेर १९२४). या भारांच्या व्याख्या करताना मृत्तिकेची घनता शून्य मानली आहे. प्रांड्ट्ल आणि रैसनेर यांनी प्रकाशित केलेल्या समीकरणांवरून पुढील समीकरणे निष्पन्न होतात.

$$\text{ध}_{\text{स}}=\text{कोस्प}\ \omega\left[\frac{\text{अ}^{२}_{\text{ठ}}}{\text{२कोज्या}^{२}\ (४५^{\circ}+\omega/२)}-१\right]\qquad[\text{६ अ}]$$

आणि

$$प_भ = \frac{अ_ठ^२}{२कोज्या^२ (४५^\circ + ॐ/२)} \quad [६ आ]$$

येथे

$$अ_ठ = e^{(\frac{३}{२}\pi - ॐ/२) स्प ॐ} \quad [६ इ]$$

आहे.

$प_स$ आणि $प_भ$ यांची मूल्ये केवळ ॐ च्या मूल्यावर अवलंबून असतात, हे पूर्वी विदित केले आहेच. आकृती ३८ इ च्या डाव्या भागात ही मूल्ये भुजा म्हणून स्थित करून $प_स$ आणि $प_भ$ हे ठळक रेषांनी दाखविलेले आलेख काढले आहेत. $प_घ$ ची मूल्ये समीकरण ४५ (४ आ) च्या साहाय्याने मिळतात. आकृती ३८ इ मधील उजव्या भागात काढलेल्या $प_घ$ या आलेखाच्या भुजा म्हणजे ही मूल्ये होत. ॐ = ० असल्यास पुढील मूल्ये प्राप्त होतात.

$$प_स = \frac{३}{२}\pi + १ = ५{\cdot}७;\ प_भ = १ \text{ आणि } प_घ = ० \quad [७ अ]$$

ही मूल्ये आणि $ड_{पा} = ०$ अशी मूल्ये समीकरण ५ मध्ये नियुक्त केली असता, आपल्याला समतल पृष्ठावरील खडबडीत तळ असलेल्या पट्टिकापादकाच्या एकांक लांबीवरील $भा_ङ$ या भारधारणक्षमतेचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$भा_ङ = २ र \times ५{\cdot}७ स \quad [७ आ]$$

आणि एकांक क्षेत्रावरील भारधारणक्षमतेसाठी पुढील मूल्य मिळते.

$$भ_ङ = ५{\cdot}७ स \quad [७ इ]$$

ॐ = ३४° असल्यास आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$प_स = ४१{\cdot}९,\ प_भ = २९{\cdot}३ \text{ आणि } प_घ = ३६{\cdot}०$$

अशा मृत्तिकेवर ठेवलेल्या (पायाची खोली $ड_{पा} = ०$) पट्टिकापादकाच्या एकांक लांबीवरील भारधारणक्षमता पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$भा_ङ = २ र \times ४१{\cdot}९ स + २ र^२ \times ३६{\cdot}० घ$$

आणि एकांक क्षेत्राची धारणक्षमता पुढीलप्रमाणे असते.

$$भ_ङ = ४१{\cdot}९ स + ३६ र{\cdot} घ$$

ही फलिते आणि आकृती ३८ इ द्वारे मिळणारी माहिती पाहता असे दिसते की, ॐ चे मूल्य जसे वाढत जाईल तसे लक्ष्मणभाराचे मूल्य त्वरेने वाढत जाते.

समीकरणे ६ व ७ खडबडीत तळाच्या पट्टिका-पादकांसाठी आहेत. अशा पादकाखाली स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या विभागाच्या *गन* आणि *मन* या सीमा (आकृती ३८ अ) क्षितिजाशी $\theta = \phi$ एवढा कोन करतात. जर पादकाचा तळ सरकण्यास होणारा विरोध θ चे मूल्य ϕ पर्यंत खाली आणण्यासाठी पुरेसा नसेल, तर धारणगुणकांची मूल्ये उपरोक्त समीकरणांतून प्राप्त होणाऱ्या मूल्यांपेक्षा लहान असतात.

θ चे मूल्य ϕ हून अधिक आहे असे गृहीत धरले असता, $ध_{स}$ आणि $ध_{भ}$ यांची मूल्ये खालील समीकरणांनी व्यक्त होतात.

जर $\phi < \theta < ४५^{\circ} + \phi/२$ असेल, तर

$$ध_{स} = \text{स्प}\,\theta + \frac{\text{कोज्या}\,(\theta - \phi)}{\text{ज्या}\,\phi\;\text{कोज्या}\,\theta}\left[अ_{\theta}^{२}\,(१ + \text{ज्या}\,\phi) - १\right] \qquad [८\ अ]$$

आणि

$$ध_{भ} = \frac{\text{कोज्या}\,(\theta - \phi)}{\text{कोज्या}\,\theta}\,अ_{\theta}^{२}\,\text{स्प}\left(४५^{\circ} + \frac{\phi}{२}\right) \qquad [८\ आ]$$

येथे

$$अ_{\theta} = \in^{\left(\frac{३}{४}\pi + \phi/२ - \theta\right)\,\text{स्प}\,\phi} \qquad [८\ इ]$$

जर $\theta = ४५^{\circ} + \phi/२$ (सर्वस्वी घर्षणहीन तळ) असेल तर,

$$ध_{स} = \text{कोस्प}\,\phi\left[अ_{\theta}^{२}\,\text{स्प}^{२}(४५^{\circ} + \phi/२) - १\right] \qquad [९\ अ]$$

आणि

$$ध_{भ} = अ_{\theta}^{२}\,\text{स्प}^{२}\left(४५^{\circ} + \frac{\phi}{२}\right) \qquad [९\ आ]$$

येथे

$$अ_{\theta} = \in^{\frac{१}{२}\pi\,\text{स्प}\,\phi} \qquad [९\ इ]$$

आहे.

या मूल्यांस आनुषंगिक असणारी $ध_{स}$ ची मूल्ये परिच्छेद ४५ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे निश्चित करता येतात. आपण जर असे धरून चाललो की, $ध = ०$ या परिस्थितीतील घसरपृष्ठ (आकृती ३८ अ मधील $नत_{१}प_{१}$ हे पृष्ठ) समीकरण ३ च्या साहाय्याने ठरविता येते, तर समीकरणे ६, ८ व ९ हीसुद्धा सोप्या पद्धतीचा अवलंब करून सिद्ध करता येतील. त्यासाठी एक अट मात्र आधारभूत मानावी लागेल, ती अशी की, आकृती ३७ इ आणि ३८ अ मधील नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या *गमन* विभागाच्या तिरकस सीमांवरील दाब, प्रतियोगी मृत्तिकादाबाइतका असलाच पाहिजे.

पूर्णतया घर्षणहीन तळ असलेल्या पट्टिकापादकाच्या ψ चे मूल्य $४५^\circ + \phi/२$ इतके असते. त्यात पुनः $\phi = ०$ असेल, तर आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$प_स = \pi + २ = ५{\cdot}१४,\ प_भ = १ \text{ आणि } प_घ = ० \qquad [९ ई]$$

$प_स = ५{\cdot}१४$ हे मूल्य समीकरण ५ मध्ये प्रविष्ट करून आणि पादक भूपृष्ठावर ठेवलेले आहे ($ड_{पा} = ०$) असे गृहीत धरून एकांक लांबीवरील $भा_इ$ या अंतिम भारधारण-क्षमतेचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$भा_इ = २ र \times ५{\cdot}१४\, स \qquad [९ उ]$$

आणि एकांक क्षेत्रावरील भारधारणक्षमता अशी मिळते :

$$भ_इ = ५{\cdot}१४\, स \qquad [९ ऊ]$$

याच परिस्थितीत खडबडीत तळाच्या पट्टिका-पादकाच्या बाबतीतील मूल्य $भ_इ = ५{\cdot}७\, स$ (समीकरण ७ इ) असते. दोन्ही मूल्ये पादकाच्या रुंदीवर अवलंबून नाहीत.

पादकावरील भाराचा कारकबिंदू जर तंतोतंतपणे मध्यरेषेवर नसेल (अकेंद्रभार), तर आधार-मृत्तिकेच्या उच्छेदाचा प्रारंभ अकेंद्र बाजूकडे होतो. परिणामी पादक जेव्हा खचते, तेव्हा त्याचा तळ अकेंद्र बाजूकडे कललेला असतो. अकेंद्रत्व फारच अल्प असेल, तर अशा प्रकारच्या उच्छेदासाठी आवश्यक असणारा भार सममात्र व्यापक कार्तनिक उच्छेद घडवून आणणाऱ्या भाराइतकाच जवळजवळ असतो. अशा उदाहरणात आकृती ३७ मधील सममात्र पृष्ठाच्या एका बाजूकडील त्रिज्यादिक् कार्तनिक प्रतिबले तीव्र झाल्यामुळे उच्छेद होतो. तथापि दुसऱ्या बाजूकडील त्रिज्यादिक् कार्तनिक विभागातील विरूपत्व क्षुल्लकच असते. या कारणास्तव उच्छेदाच्या वेळी पादक ज्या बाजूकडे कलते, त्याच बाजूस नेहमी फुगवटा येतो.

४७. उथळ पट्टिकापादकांखालील स्थानिक स्वरूपाच्या कार्तनिक उच्छेदाची लक्षणे : समाकर्षणगुणी मृत्तिकांमधील उच्छेदाच्या वेळची प्रतिबल-परिस्थिती स्थूलमानाने पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$\sigma_१ = २स \cdot स्प\left(४५^\circ + \frac{\phi}{२}\right) + \sigma_३\, स्प^२\left(४५^\circ + \frac{\phi}{२}\right) \qquad ७ (३)$$

येथे $\sigma_१$ हे ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल आणि $\sigma_३$ हे कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल आहे. $स$ आणि ϕ म्हणजे कूलोमच्या समीकरणातील दोन स्थिरांक आहेत. दोन निरनिराळ्या मृत्तिकांच्या बाबतीत $\sigma_१ - \sigma_३$ हा प्रतिबलांतील फरक आणि $\sigma_१$ या प्रधान प्रतिबलाच्या दिशेतील रेखात्मक विकृती यांतील संबंध आकृती ३८ आ मध्ये दाखविला आहे.

पादकाखाली असणाऱ्या मृत्तिकेच्या बाबतीतील हा संबंध आलेख $आ_१$ या सलग रेषेने दाखविल्याप्रमाणे असेल, तर भार प्रभावाखाली या मृत्तिकेचे वर्तन जवळजवळ आदर्श, नम्य पदार्थाप्रमाणे होते. ते *उपफ* या मोडक्या रेषेने दाखविले आहे. या परिस्थितीत होणारा मृत्तिकाधाराचा कार्तनिक उच्छेद व्यापक असतो.

उलटपक्षी, प्रतिबल आणि विकृती यांतील संबंध $आ_२$ या तुटक आलेखाने दाखविल्याप्रमाणे असेल, तर *गतप* या खंडाच्या (आकृती ३७ इ) *प* या बाह्य कडेपर्यंत नम्य समतोलाची अवस्था पसरण्यासाठी आवश्यक असलेले पार्श्वीय दमन हे पादकाच्या खचण्यामुळे उद्भवणाऱ्या पार्श्वीय दमनापेक्षा अधिक असते. म्हणून या ठिकाणी होणारा मृत्तिकाधाराचा कार्तनिक उच्छेद स्थानिक असतो. या उदाहरणातील $भा_{ह}$ या लक्षणभाराचे नीचतम मूल्य जाणून घेण्यासाठी आपण $आ_२$ या आलेखाऐवजी *उपण* ही रेषा विचारात घेऊ. ही रेषा आदर्श, नम्य पदार्थातील प्रतिबल-विकृति संबंध दाखविते. मात्र या पदार्थाचे $स'$ आणि $ऌ'$ हे कार्तनिक अंक $आ_२$ या आलेखाला आनुषंगिक असलेल्या पदार्थाच्या *स* आणि *ऌ* या अंकांपेक्षा लहान आहेत. समीकरण ७ (३) मध्ये *स* आणि *ऌ* ऐवजी $स'$ आणि $ऌ'$ नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळेल.

$$ए_१ = २ स' \cdot स्प (४५^\circ + ऌ'/२) + ए_३ स्प^२ \left(४५^\circ + \frac{ऌ'}{२}\right) \qquad [१]$$

आकृती ३८ आ मध्ये काढलेला $आ_२$ हा आलेख, त्याच्याऐवजी घेतलेल्या *उपण* या आदर्श आलेखाच्या जवळजवळ पूर्णपणे उजव्या बाजूस स्थित आहे. त्यामुळे समीकरण १ ला अभिप्रेत असलेल्या पदार्थामध्ये व्यापक कार्तनिक उच्छेद घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असणारा $भा'_{ह}$ हा लक्ष्मणभार, $आ_२$ या आलेखाला अभिप्रेत असलेल्या मृत्तिकेमध्ये स्थानिक स्वरूपाचा कार्तनिक उच्छेद घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या भारापेक्षा काहीसा लहानच असतो. प्रतिबल-विकृति-संबंधविषयक उपलब्ध माहितीवरून $स'$ आणि $ऌ'$ या पदांना पुढीलप्रमाणे कमी केलेली मूल्ये देणे समर्थनीय ठरेल.

$$स' = \tfrac{२}{३}\, स \qquad [२ अ]$$

आणि

$$स्प\, ऌ' = \tfrac{२}{३}\, स्प\, ऌ \qquad [२ आ]$$

मृत्तिकाधारामध्ये होणारा कार्तनिक उच्छेद व्यापक असेल, तर भारधारणक्षमता समीकरण ४६ (५) च्या साहाय्याने स्थूलमानाने ठरविता येते. ज्यांचा तळ खडबडीत आहे, अशा पादकांच्या बाबतीत या समीकरणात समाविष्ट असलेल्या $ध_{स}$, $ध_{भ}$ आणि $ध_{घ}$ या धारणगुणकांची मूल्ये समीकरण ४६ (६ अ ते इ) आणि समीकरण ४५ (४ आ) यांनी दिली जातात. याच प्रकारच्या पादकांच्या स्थानिक स्वरूपाच्या कार्तनिक उच्छेदाच्या बाबतीतील $ध'_{स}$, $ध'_{भ}$ आणि $ध'_{घ}$ या गुणकांची मूल्ये मिळविण्यासाठी या

समीकरणांतील $स$ आणि ϕ या मूल्यांऐवजी $स'$ आणि ϕ' ही मूल्ये नियुक्त केली पाहिजेत; आणि समीकरण ४५ (४ आ) चा अवलंब करून मिळणाऱ्या $दा_{प्र}$ चे मूल्य ठरविण्यासाठी आधारमृत्तिकेचा कार्तनिक विरोधाचा कोनही ϕ' आहे, असे गृहीत धरले पाहिजे. मग $भा'_{इ}$ हा लक्ष्मणभार पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$भा'_{इ}=२र.(\tfrac{२}{३}\, स\, ध'_{स}+घ\,.\,ड_{पा}\, ध'_{भ}+घ\,.\,र\,.\,ध'_{घ}) \qquad [३]$$

हे समीकरण, समीकरण ४६ (५) सारखेच आहे. आकृती ३८ इ मध्ये $ध'_{स}$, $ध'_{भ}$ आणि $ध'_{घ}$ यांची मूल्ये देणारे आलेख दिले आहेत.

तसेच पट्टिकेच्या एकांक क्षेत्राची भारधारणक्षमता पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$भ'_{इ}=\frac{भा'_{इ}}{२र}=\tfrac{२}{३}\, स\,.\,ध'_{स}+घ.\,ड_{पा}\, ध'_{भ}+घ.\,र\,.\,ध'_{घ} \qquad [४]$$

एखाद्या मृत्तिकेच्या बाबतीतील प्रतिबल-विकृति संबंध आकृती ३८ आ मधील $आ_{१}$ आणि $आ_{२}$ या दोन परम मर्यादांच्या दरम्यान असतील, तर लक्ष्मणभाराचे मूल्यही $भा_{इ}$ आणि $भा'_{इ}$ यांच्या दरम्यान असते.

४८. पट्टिकापादकाच्या तळावरील स्पर्शदाबाचे वितरण : स्पर्शदाब या संज्ञेने पादकाचा तळ आणि आधारमृत्तिका यांमध्ये असणाऱ्या स्पर्शपृष्ठावरील दाब व्यक्त होतो. पुढे केलेले स्पर्शदाबाच्या वितरणाचे विवेचन खालील समीकरणावर आधारलेले आहे.

$$भा_{इ}=२र\,(सध_{स}+घ.\,ड_{पा}\,.\,ध_{भ}+घ.\,र.\,ध_{भ}) \qquad ४६\ [५]$$

या समीकरणावरून हे दिसून येईल की, पट्टिकापादकाच्या एकांक लांबीवरील एकूण भारधारणक्षमतेचे दोन भाग पाडता येतील,

$$भा_{१}=२र\ \ (स\cdot ध_{स}+घ\cdot ड_{पा}\cdot ध_{भ}) \qquad [१]$$

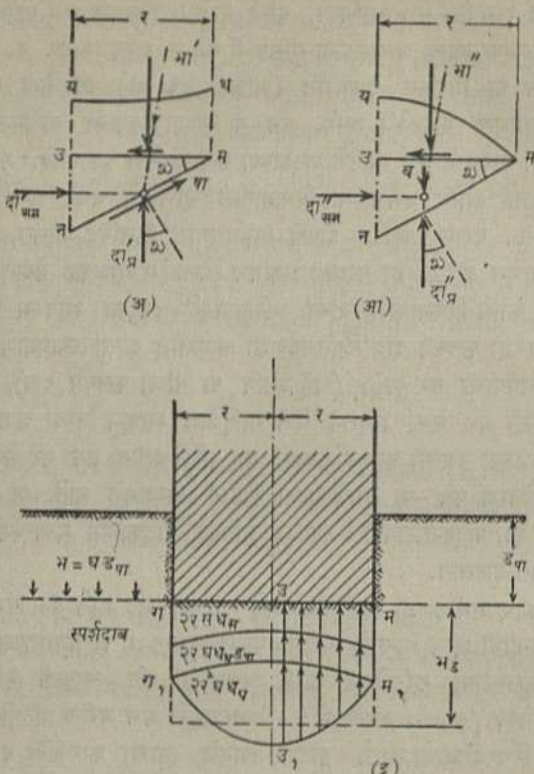
हा एक भाग पादकाच्या रुंदीच्या सरळ प्रमाणात वाढतो; आणि

$$भा_{२}=२घ\cdot र^{२}\cdot ध_{घ} \qquad [२]$$

हा दुसरा भाग रुंदीच्या वर्गाच्या प्रमाणात वाढतो. आकृती ३७ इ मधील *गमन* या विभागाच्या तिरकस सीमांवरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या वितरणाच्या अनुरोधाने $भा_{१}$ आणि $भा_{२}$ या भारांचे पादकतळावरील वितरण निश्चित करता येते. हा विभाग स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असतो. आकृती ३९ अ आणि आ यांमध्ये या विभागाचा अर्धा भाग दाखविला आहे.

समीकरण १ मधील $ध_{स}$ आणि $ध_{भ}$ यांची मूल्ये ठरविताना असे गृहीत धरले होते की, पादकतळाच्या खाली असणाऱ्या मृत्तिकेची घनता शून्य आहे. या गृहीतानुसार मिळणारे *मन* या तिरकस पृष्ठावरील (आकृती ३९ अ) प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे वितरण समप्रमाण पद्धतीचे आहे. *उन* या उभ्या पृष्ठावर कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव आहे; कारण हे पृष्ठ म्हणजे पादकाच्या सममात्रतेचे पृष्ठ आहे. *मन* वरील दाब समप्रमाण आहे आणि *उमन* या विभागातील मृत्तिकेचे वजन शून्य आहे. तेव्हा व्यवहारतः *उन* वरील लंबदिक् दाबही समप्रमाणात वितरित असेल, असे आपण समजतो. म्हणून $दा'_{सम}$ हा फलरूप दाब *मन* रेषेला मध्याजवळ छेदील. पादकतळावरील घर्षण आणि विषमाकर्षण यांच्या अस्तित्वामुळे *उम* या आडव्या पृष्ठावर कारक असणारा *भा'* हा फलरूप दाब क्षितिजलंबाशी आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कोन करतो. समतोल साधावयाचा तर $दा'_{प्रस}$ ($दा'_{प्र}$ आणि *या* यांचा फलरूप दाब), $दा'_{सम}$ आणि *भा'* ही तिन्ही बले एका बिंदूतून गेली पाहिजेत. म्हणून उभ्या दाबाचा कारकबिंदू *उम* च्या मध्याच्या उजव्या बाजूस पडतो. या परिस्थितीत *उम* वर येणाऱ्या लंबरूप प्रतिबलांचे वितरण *यथ* या आलेखाच्या कोटींनी दाखविले जाते. या आलेखावरून असे दिसते की, पादकतळावरील लंबदिक् प्रतिबले पादकाच्या मध्यरेषेपासून कडांच्या बाजूस किंचित वाढतात.

समीकरण २ मधील $ध_{घ}$ ठरविताना असे गृहीत धरले होते की, समाकर्षण आणि अधिभार दोन्हीही शून्य मूल्याचे आहेत. या गृहीतानुसार स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या मृत्तिकेवर कारक असणारी बले आकृती ३९ आ मध्ये दाखविली आहेत. $स = ०$ आणि $भ = ०$ असल्यामुळे *मन* वरील प्रतियोगी मृत्तिकादाब *म* पासून स्थिरजलदाबाप्रमाणे वाढतो त्यामुळे त्याचा कारकबिंदू *न* बिंदूपासून $\frac{१}{३}$ *मन* एवढ्या अंतरावर स्थित आहे (परिच्छेद ३७ पाहा); आणि त्याची कारकदिशा *उमन* या मृत्तिकाखंडाच्या गुरुत्वमध्यातून जाते. या मृत्तिकाखंडाचे वजन *व* आहे. *उन* या उभ्या पृष्ठावर कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव असतो. *मन* वरील दाब स्थिरजलदाबाप्रमाणे वाढत असल्यामुळे $दा''_{सम}$ या लंबदिक् दाबाच्या कारकबिंदूचे वरील स्थान आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे *उन* चा मध्यबिंदू आणि तळाकडचा तृतीयांशदर्शक बिंदू या दोहोंमध्ये कोठेतरी असेल, असे अपेक्षिता येते. समतोल साधावयाचा असेल, तर *उम* या आडव्या पृष्ठावरील *भा''* हा फलरूप दाब $दा''_{प्र}$ आणि $दा''_{सम}$ यांच्या संपातबिंदूतून जाणे आवश्यक आहे. *भा''* ची दिशा मध्यरेषेकडे कललेली असल्यामुळे त्याच्या कारकबिंदूचे स्थान *उ* पासून $\frac{१}{३}$*र* पेक्षा किंचित अधिक अंतरावर असेल. पादकतळावरील लंबदिक् दाबाचे मूल्य त्याच्या *म* या बाह्यकडेजवळ शून्य असून *उ* या मध्यबिंदूकडे वाढत जाते (परिच्छेद १६ पाहा). ही सर्व लक्षणे एकत्र विचारात घेतली असता, असा निष्कर्ष निघतो की, पादकतळावरील स्पर्शदाबाचे वितरण स्थूलमानाने परिवलयाकृती असले पाहिजे.



आकृती ३९ : पट्टिका-पादकांच्या घर्षणयुक्त तळाखाली असलेल्या स्थितिस्थापक समतोल-विभागाच्या सीमांवर उच्छेदक्षणी कारक असणारी बले : (अ) वजनरहित, समाकर्षणयुक्त मृत्तिका; (आ) वजनयुक्त, समाकर्षणहीन मृत्तिका; (इ) वजनयुक्त आणि समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेवर ठेवलेल्या पट्टिकापादकाच्या घर्षणयुक्त तळावर मृत्तिकेच्या उच्छेदक्षणी येणाऱ्या स्पर्शदाबाचे वितरण.

आकृती ३९ इ मध्ये $भा_{इ}$ या एकूण लक्ष्मणभाराचे (समीकरण ४६(५)) पादक-तळावरील वितरण दाखविले आहे. $भ_{इ}$ या भारधारणक्षमतेचे मूल्य $गग_१उ_१म_१म$ या दाबाकृतीच्या सरासरी उंचीइतके होईल.

एकदा मृत्तिकाधाराचा उच्छेद घडून आला म्हणजे घसरपृष्ठाच्या वर असलेल्या मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थिती विकृतीवर अवलंबून राहत नाही. या कारणास्तव मृत्तिकाधाराच्या उच्छेदानंतर स्थितिस्थापकत्व गुणानुसार पादकात येणारी विरूपता मृत्तिकेच्या प्रतिक्रियेवर प्रभाव टाकू शकत नाही. याउलट, पादकावरील भार लक्ष्मण-

मूल्यापेक्षा पुष्कळच कमी असेल, तर स्थितिस्थापकत्व गुणानुसार होणाऱ्या पादकाच्या विरूपत्वाचा स्पर्शदाब-वितरणावर बराच प्रभाव पडण्याचा संभव असतो (परिच्छेद १३९ पाहा). भाराचे मूल्य जसे लक्षमणमूल्याप्रत जाऊ लागते, तसे स्पर्शदाबाचे प्रारंभाचे वितरण हळूहळू आकृती ३९ ई मध्ये दाखविलेल्या वितरणासारखे होऊ लागते.

४९. चौरसाकृती किंवा वर्तुळाकार उथळ पादकांची भारधारणक्षमता :

पादकाची $\text{ड}_{\text{पा}}$ ही खोली त्याच्या रुंदीपेक्षा कमी असेल, तर असे चौरसाकार किंवा वर्तुळाकार पादक उथळ मानले जाते. उथळ पादकाचा ऊहापोह करताना पादकाच्या तळाच्या वरच्या भागात असलेल्या मृत्तिकेऐवजी (घनता : घ) आपण दर एकांक क्षेत्रावर $\text{भ} = \text{ड}_{\text{पा}}\text{घ}$ हा अधिभार गृहीत धरू शकतो (परिच्छेद ४५ चा पहिला उपपरिच्छेद पाहा).

पट्टिकापादकाचा मृत्तिकाधार खचला, तर मृत्तिकेचे कण पादकाच्या मध्यरेषेला लंबरूप असलेल्या एका पातळीला समांतर हालचाल करतात. म्हणून अशा पादकाची भारधारणक्षमता गणितसिद्ध करण्याची समस्या म्हणजे पृष्ठविरूपतेची समस्या ठरते. याउलट, चौरसाकृती किंवा वर्तुळाकार पादकाखालचा मृत्तिकाधार खचला, तर मृत्तिकाकण समांतर पातळ्यांत न हलता त्रिज्यादिक् पातळ्यांत हलतात.

ज्या उपपत्तीच्या आधारे समीकरण ४६ (५) आपल्याला मिळाले तिचाच पुन्हा अवलंब केला असता असा निष्कर्ष निघतो की, त्र त्रिज्येच्या वर्तुळाकार पादकावरील लक्षमणभार स्थूलमानाने पुढील सर्वसामान्य समीकरणाने व्यक्त करता येणे शक्य आहे.

$$\text{भा}_{\text{डत्र}} = \pi\, \text{त्र}^2 \left(\text{स}\text{ध}''_{\text{स}} + \text{घ}\text{ड}_{\text{पा}}\, \text{ध}''_{\text{भ}} + \text{घ}\text{त्र}\, \text{ध}''_{\text{घ}}\right) \qquad [१]$$

$\text{ध}''_{\text{स}}$, $\text{ध}''_{\text{भ}}$ आणि $\text{ध}''_{\text{घ}}$ हे शुद्ध अंक असून त्यांची मूल्ये केवळ ω या कार्तनिक विरोधाच्या कोनावर अवलंबून असतात. समीकरण (१) हे समीकरण ४६ (५) सारखेच आहे. परंतु गणित मांडण्यातील अडचणीमुळे हे गुणांक ठरविण्याची शास्त्रपूत पद्धत अद्याप शोधली गेलेली नाही. सैद्धांतिक विवेचनातून किंवा पुरेशा प्रयोगांच्या आधारे या बाबतीत यश येत नाही, तोपर्यंत आपल्याजवळ सध्या असलेल्या मर्यादित अनुभवाच्या आधारेच भारधारणक्षमतेचे प्राकलन करणे भाग आहे. एतद्विषयक उपलब्ध माहिती व्यावहारिक मृत्तिका-स्थापत्याच्या ग्रंथात दिली जाईल (गोल्डर १९४२, स्केम्पटन १९४२ आणि अप्रकाशित प्रयोगफलिते). अतिशय प्रतिकूल असणारी प्रायोगिक फलिते, एक तात्पुरते समीकरण प्रस्थापित करण्यासाठी आधारभूत धरून, ग्रंथकर्त्याने वर्तुळाकार क्षेत्राच्या भारधारणक्षमतेसाठी पुढील समीकरण मांडले आहे.

$$\text{भा}_{\text{ड}} = \pi\, \text{त्र}^2\, \text{भ}_{\text{ड}} = \pi\, \text{त्र}^2 \left(१{\cdot}३\ \text{स}\, \text{ध}_{\text{स}} + \text{घ}\cdot \text{ड}_{\text{पा}}\cdot \text{ध}_{\text{भ}} + ०{\cdot}६\ \text{घ}\cdot \text{त्र}\cdot \text{ध}_{\text{घ}}\right) \qquad [२]$$

$ध_{स}$, $ध_{भ}$ आणि $ध_{घ}$ यांची येथील मूल्ये म्हणजे पट्टिकापादकांच्या संदर्भात त्याच मृत्तिकेच्या बाबतीत मिळणारे धारण-गुणक आहेत. २र × २र असे चौरस क्षेत्र व्यापणाऱ्या पादकासाठी ग्रंथकर्त्याने पुढील समीकरण मांडले आहे.

$$भा_{इ} = ४ र^{२} भ_{इ} = ४ र^{२} (१\cdot३ स\cdot ध_{स} + घ\cdot ड_{पा}\cdot ध_{भ} + ०\cdot८ घ\cdot र\cdot ध_{घ}) \qquad [३]$$

जर मृत्तिका विस्कळित किंवा अतिशय दमनीय असेल, तर $ध$ या धारणगुणकांऐवजी $ध'$ ची मूल्ये घेतली पाहिजेत (आकृती ३८ इ पाहा).

लहान प्रमाणावर केलेल्या प्रारूप प्रयोगांवरून असे दिसून आले आहे की, वर्तुळाकार (त्रिज्या : त्र) भारयुक्त क्षेत्राच्या परिसरातील भूपृष्ठामध्ये येणारा जास्तीत जास्त फुगवटा त्याच्या मध्यबिंदूपासून सुमारे ३ त्र अंतराच्या आतच असतो; आणि सुमारे ५ त्र अंतरापलीकडे ही फूग दिसून येत नाही.

समीकरण २ वरून पुढील निष्कर्ष निघतात. समाकर्षणगुणी ($ω = ०$) मृत्तिकेवर ठेवलेल्या पट्टिकापादकाच्या (रुंदी : २र) मृत्तिकाधारात एकांक क्षेत्रावरील $भ_{इ}$ या भारामुळे व्यापक कार्तनिक उच्छेद घडून येत असेल, तर त्याच मृत्तिकेवरील वर्तुळाकार (व्यास : २त्र) पादकाची भारधारणक्षमता स्थूलमानाने १·३ $भ_{इ}$ इतकी असते. याउलट, जर $स = ०$, $ड_{पा} = ०$ आणि $ω > ०$ अशी मृत्तिका असेल, तर तिच्यावरील वर्तुळाकार पादकाची भारधारणक्षमता ०·६ $भ_{इ}$ असते. येथे $भ_{इ}$ म्हणजे त्याच मृत्तिकेवरील पट्टिकापादकाखाली (रुंदी : २र) व्यापक कार्तनिक उच्छेद घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असणारा एकांक क्षेत्रावरील भार आहे. वालुका आणि चिक्कण मृत्तिका यांवर केलेल्या प्रयोगांनी उपरोक्त निष्कर्ष स्थूलमानाने यथार्थ आहेत, असे दाखवून दिले आहे. गणितसिद्ध मूल्ये आणि प्रत्यक्षात मोजलेली मूल्ये यांत तंतोतंत एकवाक्यता अपेक्षिता येत नाही.

५०. दंडगोलाकृती स्तंभांची भारधारणक्षमता : पूर्वीच्या परिच्छेदांतून पादकतळ-पातळीच्या वर असलेल्या मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध दुर्लक्षिला होता; कारण त्यामुळे होणारी चूक लहान होती आणि सुरक्षिततेत भर टाकणारी होती. परंतु ज्यांचा व्यास पायाच्या खोलीशी तुलना केली असता लहान असतो, अशा स्तंभांचा विचार करताना तसे करणे समर्थनीय ठरत नाही. त्यामुळे उद्भवणारी चूक फार मोठी असण्याचा संभव असतो. मृत्तिकेतील कार्तनिक प्रतिबलांचा स्तंभाच्या भारधारणक्षमतेवर होणारा परिणाम आकृती ३६ आ च्या उजव्या भागात दाखविला आहे. तेथे *मन* ने दाखविलेल्या कंकणाकृती भूमीच्या खाली स्थित असलेल्या मृत्तिकेवर आडवा त्रिज्यादिक् दाब कारक होतो. हा दाब स्तंभतळालगत खाली असणाऱ्या मृत्तिकेकडून निर्माण झालेला असतो. आकृतीत बाणांनी दाखविल्याप्रमाणे ऊर्ध्व दिशेने विचलित होण्याची प्रवृत्ती या मृत्तिकेत असते. या प्रवृत्तीला केवळ *मन* या कंकणाकृती भागावरील

मृत्तिकेच्या वजनामुळेच (एकांक क्षेत्रावरील वजन घ · ड$_{पा}$) विरोध केला जातो असे नव्हे, तर मृत्तिका व स्तंभ या दोहोंतील स्पर्शपृष्ठावरील त्वचाघर्षणाने (एकांक क्षेत्रावरील मूल्य ष) आणि कंकणाकृती क्षेत्रावरील मृत्तिकाखंडाच्या नज्ञ या बाह्य सीमेवरील ड या कार्तनिक प्रतिबलांनीसुद्धा तो केला जातो. या प्रतिबलांचा परिणाम दुहेरी असतो. एकतर त्यांच्यामुळे स्तंभतळावर पडणारा भार स्तंभावरील भा या भारापेक्षा कमी होतो; तो असा :

$$भा_१ = भा - २\pi\, त्र . ष . ड_{पा}$$

म्हणून उच्छेदक्षणी स्तंभतळावरील एकूण उभा भार भा$_{इ}$ असेल, तर तो भार निर्माण करण्यास आवश्यक असणारा भा$_{इस्तं}$ हा स्तंभावरील भार (स्तंभवजनासहित) पुढीलप्रमाणे असेल.

$$भा_{इस्तं} = भा_{इ} + २\pi\, त्र . ष . ड_{पा} \qquad [१]$$

दुसरे असे की, मन या कंकणाकृती भागाच्या वर असलेल्या मृत्तिकेतील कार्तनिक प्रतिबलांमुळे हा भाग ऊर्ध्व दिशेने सरकू लागताच या भागाच्या एकांक क्षेत्रावरील उभा दाब वाढतो. घ.ड$_{पा}$ या मूळ मूल्याऐवजी तो घ$_१$ड$_{पा}$ एवढा मोठा होतो. समीकरण ४९ (२) मध्ये घ.ड$_{पा}$ ऐवजी घ$_१$ड$_{पा}$ नियुक्त करून मिळणारे भा$_{इ}$ चे मूल्य समीकरण १ मध्ये प्रविष्ट केले असता, आपल्याला स्तंभावरील लक्ष्मणभारासाठी पुढील समीकरण मिळते.

$$भा_{इस्तं} = \pi\, त्र^{२} (१·३\, स\, ध_{स} + घ_{१}·ड_{पा}\, ध_{भ} + ०·६\, घ·ध_{घ}) + २\pi\, त्र·ष·ड_{पा} \qquad [२]$$

ध$_{स}$, ध$_{भ}$ आणि ध$_{घ}$ यांची मूल्ये आकृती ३८ इ वरून मिळू शकतात. म न या कंकणाकृती भागाच्या ऊर्ध्वगमनास विरोध करणारी बले कळली असता, घ$_१$ चे मूल्य ठरविता येते. या क्षेत्राचा बाह्य व्यास २छ . त्र एवढा असल्यामुळे ही बले पुढीलप्रमाणे मांडता येतात.

$$ड_{पा} \left[(छ^{२} - २)\, \pi\, त्र^{२} + २\pi\, त्र\, ष + २\, छ\, \pi\, त्र\, ड \right]$$

म्हणजेच कंकणाकृती भागाच्या दर एकांक क्षेत्रावरील त्याचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असेल.

$$म_{१} = ड_{पा} \left[घ + २\, \frac{ष + छ\, ड}{(छ^{२} - १)\, त्र} \right] = घ_{१} · ड_{पा} \qquad [३\ अ]$$

येथे

$$घ_{१} = घ + २\, \frac{ष + छ\, ड}{(छ^{२} - १)\, त्र} \qquad [३\ आ]$$

आहे. समीकरण ३ मधील छ या पदाचे मूल्य असे असले पाहिजे की, समीकरण २ मधील $भा_{इस्तं}$ या लक्ष्मणभाराचे मूल्य लघुतम येईल. थोडीशी आकडेमोड करून हे साध्य होते. त्वचाघर्षणाचे पूर्ण मूल्य या समीकरणात नियुक्त करता येते; कारण त्वचाघर्षण पूर्णपणे कार्यान्वित झाल्याविना स्तंभ भूमीमध्ये खचू शकत नाही. तथापि समीकरण ३ आ मधील ड चे मूल्य फार अनिश्चित असते; कारण *नझ* वरील कार्तनिक प्रतिबलांची तीव्रता बऱ्याच अंशी मृत्तिकेच्या अवकाश-दमनीयतेच्या प्रमाणावर अवलंबून असल्यामुळे मृत्तिका जर व्यवहारतः अदमनीय असेल—उदाहरणार्थ, दृढ वालुका—तर *नझ* च्या तळाकडील भागावरील कार्तनिक प्रतिबले महत्त्वपूर्ण असण्याचा संभव असतो. उलटपक्षी, विस्कळित वालुकेत ती पुष्कळच दमनीय असल्यामुळे, *नझ* या संपूर्ण क्षेत्रावरील कार्तनिक प्रतिबले नगण्य असण्याचा संभव असतो; कारण स्तंभाच्या अधोमुख हालचालीसाठी आवश्यक असलेला अवकाश, *मन* या कंकणाकृती क्षेत्राखाली असलेल्या वालुकेत पार्श्वीय दमन होऊन निर्माण होणे शक्य असते. परिणामी, या क्षेत्राच्या वरची वालुका उचलली जाण्याची प्रवृत्तीही नगण्य असण्याचा संभव असतो. तेव्हा मृत्तिकेच्या *नझ* या दंडगोलाकृती पृष्ठभागावरील कार्तनिक विरोध अंशतःच कार्यान्वित होणार असल्यामुळे त्या बाबतीत सढळ प्रमाणात सवलत ठेवूनच समीकरण ३ आ मधील ड चे मूल्य निवडले पाहिजे. कसेही असो, स्तंभाच्या भारधारणक्षमतेवर मृत्तिकेच्या अवकाशदमनीयतेचा प्रभाव निर्णायक रीत्या पडत असल्यामुळे तिचा विचार केलाच पाहिजे.

५१. स्थूणांची व्यक्तिशः भारधारणक्षमता : स्थूणा आणि कृश स्तंभ यांत भेद आहे, तो केवळ बांधकामाच्या पद्धतीत. काही स्थूणा शंकूच्या आकाराच्या असल्या, तरी स्तंभांच्या भारधारणक्षमतेवर केलेले उपरोक्त भाष्य स्थूणांच्या बाबतीतही लागू पडते. स्थूणेवरील एकूण भारापैकी $भा_{घ}$ हा भाग त्वचाघर्षणाने पेलला जातो. उरलेला $भा_{अ}$ हा भाग स्थूणेचा तळ किंवा स्थूणाग्र याद्वारे मृत्तिकेवर संक्रमित होतो. त्यास **अग्रविरोध** म्हणतात; म्हणून स्थिरभाराखालील स्थूणेची $भा_{स्थ}$ ही भारधारणक्षमता पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$भा_{स्थ} = भा_{अ} + भा_{घ}$$

$भा_{अ}$ आणि $भा_{घ}$ ही पदे स्तंभांची भारधारणक्षमता निश्चित करणाऱ्या समीकरण ५० (१) मधील $भा_{ड}$ आणि $२ \pi त्र \cdot प \cdot ड_{पा}$ या पदांशी जुळणारी आहेत.

मृदु चिक्कण मृत्तिका, गाळ किंवा नदीतील चिखल यांसारख्या सर्वदूर समप्रमाणात नम्य असणाऱ्या पदार्थात पूर्णपणे निविष्ट असलेल्या स्थूणांच्या बाबतीत $भा_{अ}$ हा अग्रविरोध त्वचाघर्षणाने पेललेल्या $भा_{घ}$ च्या मानाने क्षुल्लक असण्याचा संभव असतो. अशा स्थूणांना **घर्षणाधारी स्थूणा** म्हणतात. याउलट, स्थूणाग्र एखाद्या दृढ स्तरांत निविष्ट असेल,

तर भाराचा अधिकांश भाग हा स्थूणाग्राने पेललेला असतो. अशा स्थूणेला **अग्राधारी** स्थूणा म्हणतात.

त्वचाघर्षण आणि अग्रविरोध यांचे परस्परांतील प्रमाण मृत्तिकाप्रकारावर आणि स्थूणेच्या मोजमापांवरच केवळ अवलंबून नसते, तर भूमीमध्ये स्थूणा स्थापण्यासाठी अवलंबिलेल्या पद्धतीवरही ते अवलंबून असते. काही प्रकारांच्या स्थूणा—उदाहरणार्थ, लाकडी स्थूणा आणि सलोह काँक्रीटच्या पूर्वाकारित स्थूणा—त्यांच्या शीर्षावर घणाने आघात करून भूमीत ठोकल्या जातात. स्थूणा प्रस्थापित करण्याचा दुसरा प्रकार पुढील-प्रमाणे असतो : ठोकण्याचे काम चालू असताना, ज्याचे तळाकडचे तोंड बंद ठेवलेले असते व जे भूमीबाहेर पुनः काढून घेता येण्याजोगे असते, असे एक कवच भूमीमध्ये प्रथम ठोकतात; नंतर हे कवच काँक्रीटने भरतात; आणि काँक्रीट भरत असताना ते हळूहळू भूमीतून वर काढून घेतात. कवच ठोकत असताना निर्माण झालेली प्रतिबले या क्रियेमुळे अंशतः कमी होतात. कठीण स्तरात स्थूणा किंवा कवच ठोकणे सोयीचे व्हावे व वेधनाचा वेग वाढावा यासाठी पाण्याचा झोत वापरता येतो. अशा झोतामुळे स्थूणाग्राच्या खालची मृत्तिका ढिली होते. वेधन विवरात काँक्रीट ओतून किंवा धुमसून किंवा उघड्या तोंडाचे दंडगोलाकृती कवच भूमीत ठोकूनही स्थूणा स्थापित केलेल्या आहेत. कवच ठोकताना त्याच्या आत येणारी मृत्तिका या दुसऱ्या पद्धतीत हवेच्या झोताचा वापर करून बाहेर काढली जाते आणि मोकळ्या झालेल्या जागेत नंतर काँक्रीट भरले जाते.

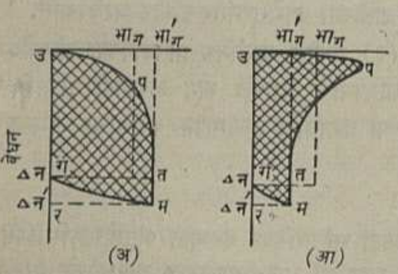
त्वचाघर्षणावर आणि समीकरण ५०(३) मधील कार्तनिक प्रतिबलांच्या तीव्रतेवर पडणाऱ्या स्थूणास्थापन-पद्धतीच्या प्रभावाविषयीचे आपले ज्ञान अद्यापही प्राथमिक अवस्थेत आहे; आणि सैद्धांतिक पद्धतीने या प्रभावाचे मूल्यमापन करण्याचा संभवही फारच थोडा आहे.

दंडगोलाकृती स्तंभांची भारधारणक्षमता गणितसिद्ध करण्यात अंतर्भूत असलेल्या अनिश्चितपणामुळे (परिच्छेद ५० पाहा) स्थूणांची भारधारणक्षमता ठरविण्याचे प्रयत्न (स्टर्न १९०८, डॅार १९२२ आणि इतर कित्येक) यशस्वी झाले नाहीत, यात आश्चर्य वाटण्याचे कारण नाही. या सर्व प्रयत्नांतून अतिशय बिनबुडाची गृहीते तरी समाविष्ट झालेली आहेत किंवा उपलब्ध सिद्धांतांचा चुकीच्या पद्धतीने वापर केलेला आहे. पुढील उदाहरणावरून हे दिसून येईल. काही प्रयत्नांत पृष्ठीय विरूपतेच्या बाबतीतच केवळ लागू पडणारा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा सिद्धांत किंवा पट्टिकापादकाच्या भारधारणक्षमतेचा, परिच्छेद ४५ मध्ये वर्णिलेला सिद्धांत, अशा एखाद्या सिद्धांताचा अवलंब करून अग्रविरोध गणितसिद्ध केलेला आढळतो. तर अन्य काही प्रयत्नांत त्वचेवरील मृत्तिकादाब कूलोमच्या मृत्तिकादाबविषयक सिद्धांताच्या साहाय्याने निश्चित केलेला आढळतो. आता हा सिद्धांतसुद्धा पृष्ठीय विरूपतेतच लागू पडतो. आणखी असे की, मृत्तिकेच्या अवकाशदमनीयतेचा अग्रविरोधावर होणारा परिणाम तर सतत दुर्लक्षिला गेला आहे (टेरझागी १९२५).

स्थूणांची भारधारणक्षमता अद्यापही प्रयोगशाळेत केलेल्या मृत्तिकाप्रयोगांवरून मिळालेल्या फलितांच्या आधारे ठरविता येत नाही. तेव्हा अर्थातच तिच्या प्राक्कलनासाठी एकतर स्थानिक अनुभवाचा आधार घेणे किंवा प्रत्यक्ष स्थानावर प्रयोगादाखल स्थूणा ठोकून व उच्छेदक्षण येईपर्यंत तिच्यावर भार लावणे; यांपैकी एका पद्धतीचा अवलंब करणे आपल्याला भाग पडते.

भार-प्रयोगाची आवश्यकता टाळता आली तर पाहावी, या हेतूने इष्ट ती माहिती सोप्या स्थानिक प्रयोगांच्याद्वारे प्राप्त करून घेण्याचे प्रयत्न शतकापेक्षा अधिक काळापासून चालू आहेत. अशा प्रयोगात $\text{व}_{\text{ह}}$ या ज्ञात वजनाचा घण स्थूणेच्या माथ्यावर च या ज्ञात उंचीवरून पडू दिला असता निर्माण होणाऱ्या Δन या वेधनाची खोली मोजली जाते. स्थूणेचे Δन हे वेधन आणि त्यास होणारा विरोध या दोहोंतील संबंध अशा प्रयोगातून मिळतो व तो व्यक्त करणारी समीकरणे **स्थूणासूत्रे** म्हणून प्रसिद्ध आहेत.

५२. स्थूणासूत्रे. स्थिरभाराद्वारे केलेल्या स्थूणेच्या वेधनास होणाऱ्या विरोधाचा दाखला देऊन असे गृहीत धरले जाते की, घणाच्या एका आघाताखाली होणाऱ्या वेधनाचे मान आणि मृत्तिकेचा तदनुषंगिक *भा* हा विरोध यांतील संबंध स्थूलमानाने आकृती ४० मध्ये दिलेल्या दोन्ही आलेखांतील *उपम* या रेषेने दाखविल्याप्रमाणे असतो.



आकृती ४० : घणाच्या आघातांमुळे होणारे स्थूणेचे वेधन आणि त्याला होणारा विरोध $\text{भा}_{\text{ह}}$ यांतील संबंध (अ) वाळूमध्ये, (आ) चिकण मृत्तिकेमध्ये.

आकृती ४० मध्ये दाखविल्याप्रमाणे स्थूणा अधिकाधिक खोल जाईल तसा वाळुकेतील विरोध सातत्याने वाढत जातो; परंतु चिकण मृत्तिकेतील विरोध मात्र एका महत्तम मूल्याप्रत जाऊन नंतर कमी होण्याचा संभव असतो. घणाघातांखालील वेधनाला होणारा विरोध वाढत्या वेधनानुसार बदलत असल्यामुळे "शीघ्र-वेधन-विरोध" या शब्दप्रयोगाला कोणताच निश्चित अर्थ नाही, असे म्हणावे लागेल. तसा अर्थ यावयाचा असेल, तर हा शब्दप्रयोग अंतिम विरोधासाठी वापरला पाहिजे. वेधन-आलेखाला काढलेल्या उभ्या असंपाती रेषेच्या $\text{भा}'_{\text{ग}}$ या भुजामूल्याने हा अंतिम विरोध दाखविला आहे.

घणाघातांमुळे स्थूणेचे स्थायी स्वरूपाचे वेधन घडून येते एवढेच नव्हे, तर स्थूणेचे व भोवतालच्या मृत्तिकेचे अल्पकाळापुरते स्थितिस्थापक स्वरूपाचे दमनही होते. त्यामुळे घणाघातांमुळे होणाऱ्या वेधनाच्या पाठोपाठ स्थितिस्थापकत्व गुणामुळे होणारे उद्वेधनही

घडून येते. या उद्वेधनात स्थूणाशीर्ष स्पष्टपणे वर उसळून आल्याचे दिसते. आकृती ४० मध्ये हे उद्वेधन *मग* या रेषेने दाखविले आहे.

वेधनातील वाढ आणि तदनुषंगिक विरोध यांचा गुणाकार म्हणजे वाढलेल्या वेधनासाठी करावे लागणारे कार्य होय. एखादी स्थूणा भूमीमध्ये Δ *न* अंतर उतरवताना उद्भवणाऱ्या त्वचाघर्षणावर मात करण्यासाठी आणि स्थूणाग्राजवळची मृत्तिका बाजूला सारण्यासाठी करावे लागणारे कार्य, आकृती ४० मधील प्रत्येक आलेखात *उमग* या रेखांकित क्षेत्राने दाखविले आहे. या उपयुक्त कार्याव्यतिरिक्त प्रत्येक घणाघातामुळे स्थूणेमध्ये व भोवतालच्या मृत्तिकेमध्ये तीव्र स्वरूपाची कंपने निर्माण होतात आणि आघातानंतर घणही अनेक वेळा उसळी घेतो, असे स्पष्टपणे दिसते. या गतिजन्य घटना घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असणारी कार्यशक्ती हा शक्तिनाश आहे, असेच म्हटले पाहिजे. कारण स्थूणेचे स्थायी स्वरूपाचे वेधन घडून येण्यासाठी या कार्यशक्तीचा काहीच उपयोग झालेला नसतो. ज्याचे अग्र पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या तळावर ठेवलेले आहे आणि जो स्वतःही पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक आहे अशा स्तंभाच्या माथ्यावर घणाघात केला, तर या अग्राचे मूळ स्थान आणि आघातानंतरचे स्थान ही दोन्ही एकच असतात. अशा वेळी घणाघातासाठी वापरलेली संपूर्ण शक्ती वाया जाते हे या संदर्भात लक्षात येईल.

प्रचलित स्थूणासूत्रे एका सुकरतादायी गृहीतावर आधारित आहेत. स्थूणेचे Δ *न* या अंतरातून वेधन होत असताना अनुभवास येणारा $भा_{ग}$ हा वेधन-विरोध या संपूर्ण अंतरात स्थिरमूल्य राहतो, हे ते गृहीत होय. आघात करणाऱ्या घणाने केलेले एकूण कार्य $व_{ह} \cdot च$ असेल तर त्याचे समीकरण आपण पुढीलप्रमाणे मांडू शकतो.

$$व_{ह} \times च = भा_{ग} \Delta न + ऊ \qquad [१]$$

येथे ऊ म्हणजे एकूण कार्य-शक्ति-नाश आहे. कोणत्याही प्रकारे समर्थनीय नसूनही येथे आणखी असे गृहीत धरले आहे की, स्थूणा व तिच्या भोवतालची मृत्तिका यांचे स्थितिस्थापकत्वामुळे होणारे तात्पुरते दमन घडत असताना होणारे कार्य हे कार्यशक्तिनाशाचाच एक अवश्यमेव भाग आहे. तथापि आघाताने निर्मिलेल्या कंपनांच्याद्वारे होणारा महत्त्वाचा कार्यशक्तिनाश मात्र येथे दुर्लक्षिला आहे.

विरोध आणि वेधन यांतील खरा संबंध दाखविणारे आकृती ४० मधील आलेख आणि स्थूणासूत्रे ज्यांवर आधारित असतात त्या काहीशा कृत्रिम कल्पना यांचा आपल्याला मेळ घालावयाचा असेल, तर रेखांकित क्षेत्राचा *गतम* हा खालचा भाग म्हणजे कार्यशक्तिनाश ऊ आहे, असे आपण मानले पाहिजे; आणि *उगतप* या वरच्या भागाऐवजी, तीच उंची व तेच क्षेत्रफळ असणारा एक आयत गृहीत धरला पाहिजे. अशा आयताची रुंदी पुढीलप्रमाणे असेल.

$$भा_{ग} = \frac{उ\,ग\,त\,प \text{ क्षेत्रफळ}}{\Delta न} \qquad [२]$$

ही रुंदी म्हणजे ज्याचा स्थूणासूत्रांत उल्लेख केला जातो, तो शीघ्र-वेधनविरोध होय, असे म्हणता येईल. आकृती ४० मध्ये दाखविल्याप्रमाणे $भा_{ग}$ चे मूल्य शीघ्र-वेधनविरोधाच्या $भा'_{ग}$ या खऱ्या मूल्यापेक्षा लहान किंवा मोठे असू शकते.

समीकरण १ मधील ऊ या कार्यशक्तिनाशाचे प्राकलन करण्याच्या प्रचलित पद्धती पुढे दिलेल्या गृहीतांपैकी कोणत्या तरी एकावर आधारित असतात.

(अ) कार्यशक्तिनाश हा शीघ्रवेधनविरोध, $भा_{ग}$, गुणिले स्थूणेचे तात्पुरते वेधन $(\Delta न' - \Delta न)$ इतका असतो;

(आ) स्थूणेचे स्थितिस्थापकत्वगुणानुसार होणारे दमन हेच ऊ या कार्यशक्तिनाशास कारणीभूत असते;

(इ) ऊ आणि न्यूटनप्रणीत आघात-सिद्धांतानुसार मिळणारा कार्यशक्तिनाश हे एकच असतात;

(ई) स्थितिस्थापकत्वगुणानुसार होणाऱ्या दमनातील कार्यशक्तिनाश आणि न्यूटनच्या सिद्धांतानुसार मिळणारा कार्यशक्तिनाश असे दोन्ही तऱ्हेचे कार्यशक्तिनाश ऊ मध्ये समाविष्ट असतात.

स्थूणासूत्रांच्या मूळ प्रवर्तकांनी प्रसिद्ध केलेल्या समीकरणांतून अंतिम विरोधाचा निर्देश केलेला असो अथवा निर्धोक भाराचा निर्देश केलेला असो; पुढील विवेचनात हीं निरनिराळी सूत्रे अंतिम विरोधाचे मूल्य घेऊनच मांडली जातील.

समजा,

$ल$ = स्थूणेची लांबी,

$आ$ = स्थूणेच्या सरासरी छेदाचे क्षेत्रफळ,

$व_{स्थ}$ = स्थूणेचे वजन,

$यं$ = स्थूणा-पदार्थाचा स्थितिस्थापन-मापांक,

$प्र$ = न्यूटनच्या आघात-सिद्धांतातील प्रत्यानयनाचा गुणांक

आहेत. कार्यशक्तिनाशाचे प्राकलन वरील (अ) या गृहीतावर आधारित असेल, म्हणजे ऊ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे असेल,

$$ऊ = भा_{ग}(\Delta न' - \Delta न) \qquad [३]$$

तर समीकरण १ चा अवलंब करून पुढील समीकरण मिळते.

$$भा_{ग} = \frac{व_{ह} \cdot च}{\Delta न'} \qquad [४]$$

या समीकरणाचे उत्तर काढण्यासाठी आवश्यक असणारे $\Delta न'$ हे महत्तम वेधन, क्षेत्रात प्रत्यक्ष मोजल्याविना मिळत नसल्यामुळे हे समीकरण फारसे वापरात नाही.

वाइसबाख सिद्धांत (सुमारे १८२०) म्हणजे वरील (आ) या गृहीतावर आधारलेल्या सिद्धांतांचे एक उदाहरण आहे. यात स्थूणेच्या स्थितिस्थापकत्वजन्य दमनामुळे होणारा कार्यशक्तिनाशच केवळ विचारात घेतला जातो. स्थूणेच्या वेधनास होणारा विरोध स्थूणाग्राच्या स्थानी एकत्रित झालेला असतो, असेही वाइसबाखने गृहीत धरले. स्थूणेतील अक्षदिक् भार ० पासून $भा_ग$ या मूल्यापर्यंत वाढतो; म्हणून उपरोक्त दमन निर्मिण्यासाठी करावे लागणारे कार्य पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$ऊ = \frac{१}{२} \cdot \frac{भा_ग^२ ल}{आ \cdot यं} \qquad [५]$$

हे मूल्य समीकरण १ मध्ये नियोजित करून आणि ते $भा_ग$ साठी सोडवून आपल्याला वाइसबाखचे पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$भा_ग = -\frac{\Delta न \cdot आ \cdot यं}{ल} + \sqrt{\frac{२व_ह \cdot च \cdot आ \cdot यं}{ल} + \left(\frac{\Delta न \cdot आ \cdot यं}{ल}\right)^२} \qquad [६]$$

घण आणि स्थूणा यांमधील अंशतः स्थितिस्थापक असणाऱ्या आघातामुळे होणाऱ्या कार्यशक्तिनाशाचे न्यूटनप्रणीत समीकरण (गृहीत इ) पुढीलप्रमाणे असते.

$$ऊ = व_ह \cdot च \frac{व_{स्थ} (१ - प्र^२)}{व_{स्थ} + व_ह} \qquad [७]$$

पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असणाऱ्या आघाताच्या प्रत्यानयनाचा गुणांक प्र याचे मूल्य एक असते आणि तदनुषंगिक कार्यशक्तिनाश शून्यमूल्य असतो. ऊ = ० असल्यास समीकरण १ च्या साहाय्याने आपल्याला सँडर्सचे (सुमारे १८५०) खालील समीकरण मिळते.

$$भा_ग = \frac{व_ह \cdot च}{\Delta न}$$

याउलट, आघातामध्ये स्थितिस्थापकत्वाचा पूर्ण अभाव असेल ($प्र = ०$), तर न्यूटनप्रणीत कार्यशक्तिनाशाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे होते.

$$ऊ = व_ह \cdot च \frac{व_{स्थ}}{व_{स्थ} + व_ह}$$

खाली दिलेल्या आयटेलविनच्या (सुमारे १८२०) सूत्राचा उपरोक्त मूल्य हा आधार आहे.

$$भा_ग = \frac{व_ह \cdot च}{\Delta न \left(१ + \frac{व_{स्थ}}{व_ह}\right)}$$

या समीकरणातील $\Delta न \frac{व_{स्थ}}{व_{ह}}$ या पदाऐवजी $थ$ हा एक प्रायोगिक स्थिरांक घातला, तर आपल्याला इंजिनियरिंग न्यूजचे पुढील सूत्र प्राप्त होते.

$$भा_{ह} = \frac{व_{ह} \cdot च}{\Delta न + थ} \qquad [८]$$

(ई) या गृहीतावर आधारित असलेल्या तथाकथित सार्वत्रिक समीकरणांत कार्यशक्ति-नाशाचे कल्पनेत येऊ शकणारे सर्व प्रकार विचारात घेतलेले आहेत. हे प्रकार असे : स्थूणेच्या स्थितिस्थापकत्वगुणानुसार होणाऱ्या दमनामुळे होणारा नाश (समीकरण ५), न्यूटनच्या सूत्रातील नाश (समीकरण ७) आणि आणखी $ऊ_{मृ}$ हा नाश. $ऊ_{मृ}$ म्हणजे स्थितिस्थापकत्वगुणानुसार मृत्तिका आणि स्थूणाटोप यांच्या दमनामुळे होणारा कार्यशक्तिनाश होय. समीकरण १ मधील ऊ ऐवजी या सर्व नाशांची बेरीज नियोजित करून आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$व_{ह}च = भा_{ग}\,\Delta न + व_{ह}च\,\frac{व_{स्थ}(१-प्र^{२})}{व_{स्थ}+व_{ह}} + \frac{भा^{२}_{ग}ल}{२\,आ\,यं} + ऊ_{मृ} \qquad [९]$$

अशा प्रकारच्या स्थूणासूत्रांच्या समूहाचे विख्यात प्रातिनिधिक उदाहरण सांगायचे, तर ते रेड्टेनबाखर (१८५९) आणि हिले (१९३०) यांच्या सूत्रांचे सांगता येईल.

$व_{ह}$, च आणि $\Delta न$ यांची मूल्ये तीच ठेवून निरनिराळ्या स्थूणासूत्रांनुसार मिळणारी $भा_{ग}$ या शीघ्र-वेधन-विरोधाची मूल्ये फारच वेगळी असतात. ऊ या कार्यशक्तिनाशाच्या सैद्धांतिक मूल्यमापनाला पायाशुद्ध शास्त्रीय आधार नाही, हे या एकाच गोष्टीवरून स्पष्ट होते.

ए. ई. कुमिंग्जच्या (१९३०) मते ऊ हा कार्यशक्तिनाश ठरविण्याच्या निरनिराळ्या पद्धतींवर पुढीलप्रमाणे आक्षेप घेता येण्यासारखे आहेत. स्थिर परिस्थितीतील प्रतिबल आणि विकृती यांतील संबंध नियंत्रित करणाऱ्या नियमावर, समीकरण ५, आधारित आहे. हा नियम आघातजन्य विरूपतेला लागू होत नाही. तसेच या समीकरणात मृत्तिकेच्या विरूपतेतील कार्यशक्तिनाशाचा समावेश नाही, हाही एक दोष आहे. आघातजन्य कार्यशक्तिनाशाविषयीचे न्यूटनचे समीकरण ७ हे फक्त ज्यांच्यावर बाह्य बंधन नाही, अशा वस्तूंमधील आघातासच लागू आहे. घणाच्या ठोक्याने केलेल्या आघातासारख्या समस्यांच्या संबंधांत न्यूटनचा सिद्धांत वापरण्याबाबत त्याने स्वतःच इशारा देऊन ठेवला आहे (न्यूटन १७२६). न्यूटनप्रणीत आघातजन्य नाश आणि स्थितिस्थापकत्वगुणानुसार येणाऱ्या विरूपत्वांमुळे होणारा नाश या दोहोंचा समावेश समीकरण ९ मध्ये केलेला आहे. न्यूटनच्या सिद्धांतात कार्यशक्ति-नाशाच्या सर्व प्रकारांचा विचार केलेला आहे व त्यांत एकमेकीवर आदळणाऱ्या वस्तूंत स्थितिस्थापकत्व-

गुणानुसार येणाऱ्या विरूपतेत होणारा कार्यशक्तिनाशही समाविष्ट झालेला आहे, एवढी एकच गोष्ट समीकरण ९ बाद ठरविण्यास पुरेशी आहे; मग न्यूटनचा आघातविषयक सिद्धांत प्रस्तुत समस्येत लागू पडत असो वा नसो.

या अंगभूत दोषांमुळे सर्वच प्रचलित स्थूणासूत्रे, स्थूणा-वेधन-कार्यातून मिळणाऱ्या फलितांवर, घण आणि स्थूणा यांच्या वजनाचे गुणोत्तर अशासारख्या मूलभूत गोष्टींचा प्रभाव कसा पडतो, या बाबतीत अगदी चुकीच्या कल्पना करून देतात. स्थूणांच्या वेधनावर होणाऱ्या घणाघातांच्या परिणामाविषयी विश्वासार्ह माहिती मिळविण्यासाठी या आघातांतून निर्माण होणाऱ्या कंपनांचा विचार करणे आवश्यक असते. कंपनांच्या सिद्धांताची मूलतत्त्वे आणि त्यांची स्थूणावेधनकार्यात उद्भवणाऱ्या समस्यांच्या संदर्भातील उपयुक्तता, या विषयाची चर्चा परिच्छेद १६२ मध्ये केली जाईल.

उघड उघड दिसून येणाऱ्या त्रुटी आणि विश्वासार्हतेचा अभाव असूनही ही स्थूणासूत्रे धंदेवाईक अभियंत्यांमध्ये फार लोकप्रिय आहेत. कारण त्यांचा अवलंब केला असता, स्थूणाधारी पायाच्या पूर्वकल्पाची मांडणी फार सोपी होते. या कृत्रिम सोपेपणासाठी द्यावे लागणारे मोल मात्र फार मोठे असते. स्थूणासूत्रांचा अवलंब करून मिळणाऱ्या फलितांनुसार पूर्वकल्पित केलेल्या पायांचे सुरक्षिततांक काही उदाहरणांत फारच अधिक येतात; तर अन्य काही उदाहरणांत पायाचे उल्लेखनीय प्रमाणात अवसीदन अनुभवास येते. अशा सूत्रांचा उपयोग कोणत्या परिस्थितीत करणे सुयोग्य ठरेल याविषयी अद्यापही मतभेद आहेत. या संबंधात वाचकांचे लक्ष नुकत्याच झालेल्या अतिशय विद्वत्तापूर्ण चर्चेकडे वेधले पाहिजे (स्थूणासूत्रे. Progress report of the Committee on the Bearing Value of Pile Foundations Proc. Am. Soc. C. E. May 1941, सप्टेंबर ते डिसेंबर १९४१ व जानेवारी ते मार्च १९४२, शेवट मे १९४२ या कालातील प्रत्येक अंकातील चर्चा).

५३. स्थूणांचा शीघ्रवेधन आणि मंदवेधन विरोध : शीघ्रवेधन-विरोध म्हणजेच घणाच्या आघातांद्वारे केल्या जाणाऱ्या शीघ्र वेधनास होणारा मृत्तिकेचा विरोध. हा विरोध आणि स्थूणेच्या अतिमंद वेधनासाठी आवश्यक असणारा स्थैतिक भार हे दोन्ही अवश्यमेव सारखे असलेच पाहिजेत असे नाही. त्याची कारणे पुढीलप्रमाणे आहेतः स्थूणाग्राच्या शीघ्र वेधनास होणारा विरोध हा काही केवळ स्थैतिक घर्षण किंवा समाकर्षण यांमुळे निर्माण होणारा विरोध नसतो; मृत्तिकेच्या स्निग्धतागुणामुळे उद्भवणारा विरोधही त्यात समाविष्ट असतो. एखाद्या द्रवाचे विस्थापन शीघ्र गतीने करू म्हटल्यास त्या द्रवाकडून अशा विस्थापनास होणाऱ्या स्निग्धताजन्य विरोधासारखाच हा विरोध असतो. तथापि एकामागून एक द्रुतगतीने होणाऱ्या आघातांमुळे मृत्तिकेची स्थूणेच्या पृष्ठावर असणारी पकड ढिली होते. काही उदाहरणांत स्थूणा ठोकणे चालू असेपर्यंत आणि त्यानंतरही काही काळ त्वचाघर्षण जवळजवळ पूर्णपणे निष्क्रिय होण्याचा संभव असतो; अर्थात ही उदाहरणे टोकाची होत.

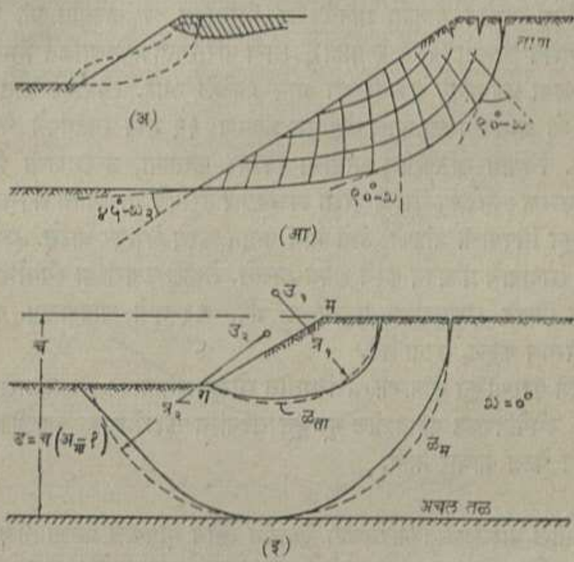
स्थूणाधारी पायाच्या पूर्वकल्पाच्या वेळी आपल्याला स्वारस्य असते, ते केवळ स्थूणांच्या स्थिर स्थितीतील भारधारणक्षमतेच्या बाबतीत; म्हणून आपल्याला शीघ्रवेधन विरोधाविषयी विश्वासार्ह माहिती मिळाली, तरी एक प्रश्न तसाच शिल्लक राहतो. तो म्हणजे क्षेत्रात पद्धतशीर प्रयोग करून मृत्तिकाविषयक भिन्नभिन्न परिस्थितीत शीघ्र वेधनास होणारा विरोध आणि स्थैतिक भारधारणक्षमता यांतील संबंध ठरविणे हा होय. ते होईपर्यंत शीघ्रवेधनविषयक स्थूणासूत्रे म्हणजे, केवळ एखाद्या बांधकामावर सगळीकडे परिमित प्रमाणात निर्धोक आणि सारखी फलिते प्राप्त करून देण्यासाठी स्थापत्यविशारदांस साहाय्यक ठरणारी एक मोजपट्टी, एवढीच त्यांची उपयुक्तता राहते (कुमिंग्ज १९४०). परंतु अस्तित्वात असलेल्या सर्वच स्थूणासूत्रांत काही ना काही उणिवा असल्यामुळे, अनुभवावर अधिष्ठित सूत्रांनाच मोजपट्टी म्हणून मान्य करणे साधारणपणे श्रेयस्कर असते; मग तो अनुभव स्थानिक असो किंवा भिन्नभिन्न मृत्तिका-प्रकारांत स्थूणा ठोकताना मिळालेला असो.

५४. स्थूणांकडून वाकण्यास होणारा विरोध : जर एखादी बरीच लांब व कृश अशी अग्राधारी स्थूणा अतिशय मृदू मृत्तिकेने वेष्टित असेल, तर उपरस्थ भाराखाली वाकून अशा स्थूणेचा उच्छेद होऊ शकेल, याची कल्पना करता येते. वाकून उच्छेद घडविण्यासाठी आवश्यक असलेला भार गणितसिद्ध करावयाचा असेल, तर भोवतालच्या मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांसंबंधी काही गृहीते मान्य करणे आवश्यक ठरते. स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्यांच्या खंडातील परिच्छेद १२९ मध्ये ही समस्या चर्चिली जाईल. त्या विश्लेषणातून असा निष्कर्ष निघतो की, स्थूणा वाकण्याचा धोका अगदी क्वचित असतो. म्हणून पुष्कळशा उदाहरणांत त्याकडे दुर्लक्ष करता येते.

प्रकरण ९

उतारांचे स्थैर्य

५५. **गृहीते :** प्रत्येक मृत्तिकाप्रकारात उताराची उंची व कोन इतके वाढविता येतात की, स्वतःच्या वजनामुळेच मृत्तिकेत उच्छेदाची प्रवृत्ती निर्माण व्हावी. अशा प्रकारे सुस्पष्ट किंवा निश्चित पृष्ठावरून कार्तनिक उच्छेद घडून आला, तर त्यास **घसरण** म्हणतात. आकृती ४१ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे अशा घसरणीत मृत्तिकेचे एक शकल



आकृती ४१ : (अ) उतार-उच्छेदाशी निगडित असलेले विरूपत्व, (आ) घसरणाऱ्या राशीमधील कार्तनिक प्रतिमा, (इ) उतार-उच्छेद (वरच्या वक्र रेषा) आणि आधार-भूमीसह उच्छेद (खालच्या वक्र रेषा); सलग वक्र रेषांनी प्रत्यक्षातील आणि तुटक वक्र रेषांनी गृहीत धरला जाणारा, घसरपृष्ठाचा आकार दाखविला आहे.

खाली खचते आणि बाहेरच्या बाजूला सरकते. शकल आणि त्याचा आधार यांमध्ये असणाऱ्या संपूर्ण स्पर्शपृष्ठावर घसरण्याची क्रिया घडून येते. ही हालचाल सुस्पष्ट अशा घसरपृष्ठावर न घडल्यास तिला **अवपात** किंवा **विसर्पण** म्हणतात. ज्या मृत्तिकांच्या बाबतीत निश्चित असा वश्यता-बिंदू असतो, त्यांचा उच्छेद अवपात-पद्धतीने न होता,

घसरण-पद्धतीनेच फक्त होतो. आदर्श मृत्तिकांच्या बाबतीत निश्चित असा वश्यता-बिंदू असतो, असे गृहीत धरले जाते; म्हणून या प्रकरणात घसरणीच्या स्थैर्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचाच केवळ विचार केला आहे. तसेच हे विवेचन, ज्या मृत्तिकांचे कार्तनिक विरोधाचे सामर्थ्य कूलोमच्या पुढील समीकरणाने व्यक्त केले जाते, अशा समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांतील घसरणींपुरतेच मर्यादित केले आहे.

$$क = स + σ\ स्प\ φ \qquad ५ (१)$$

या समीकरणात σ म्हणजे घसरपृष्ठावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल आहे. त्यात उदासीन प्रतिबलाचाही समावेश आहे. तसेच येथे हेही गृहीत धरले आहे की, क्षेत्रात कार्तनिक उच्छेद होताना प्रतिबल व निस्सारण, या बाबतीत जी परिस्थिती असण्याचा संभव असतो (परि० ६ पाहा), तीच परिस्थिती प्रयोगशाळेत निर्माण करून तदनंतर केलेल्या प्रयोगांतून हे समीकरण प्राप्त झालेले आहे. स्थैर्यावर ज्ञात उदासीन प्रतिबलांचा जो प्रभाव पडतो त्याचे संशोधन प्रकरण १२ मध्ये स्वतंत्रपणे केले जाईल (परि. ९३). चिक्कण मृत्तिकेतील उतारांचा विचार करताना, उच्छेदक्षणी तिच्यातील ओलाव्यात कारक असलेला रंध्रदाब पुरेशा अचूकपणे ठरविणे आपल्याला क्वचितच शक्य असते; म्हणून विषयाची मांडणी, असे भाग पाडून करणे श्रेयस्कर वाटते. ज्या थोड्या उदाहरणांत रंध्रदाबाचे प्राकलन करणे शक्य असते, तेथील उतारांच्या स्थैर्याची निश्चिती या प्रकरणात विशद करावयाच्या पद्धती व परि. ९३ मध्ये द्यावयाच्या पद्धती या दोहोंचा समन्वय करून, करता येते.

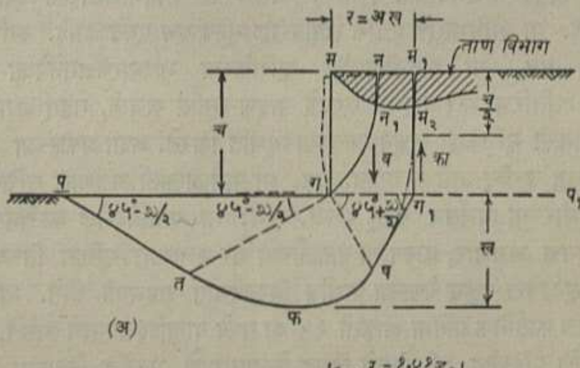
घसरणीला कारणीभूत होणाऱ्या परिस्थितीत मोठ्या प्रमाणावर आढळणारी विविधता लक्षात घेता, स्थैर्यविषयक गणितातील मूलभूत तत्त्वांचा ऊहापोह करण्यापलीकडे अधिक खटाटोप येथे केला जाणार नाही.

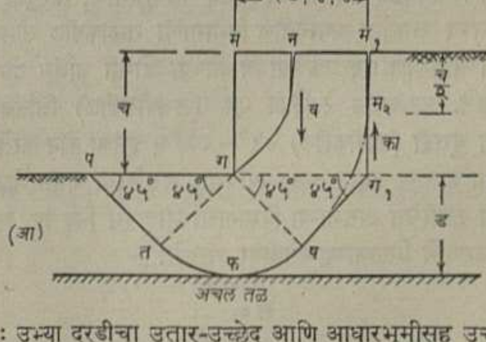
क्षेत्रातील परिस्थितीत आढळणारी गुंतागुंत तसेच मृत्तिकांचे प्रत्यक्षातील प्राकृतिक गुणधर्म आणि तद्विषयक गृहीते यांतील महत्त्वपूर्ण फरक लक्षात घेता, कोणत्याही स्थैर्यविषयक सिद्धांताची मजल, घसरणीला होणाऱ्या विरोधाचे स्थूलमानाने अनुमान करण्यापलीकडे जात नाही. आकडेमोडीची कृती सोपी असेल, तर मूलभूत गृहीते आणि प्रत्यक्ष परिस्थिती यांतील फरकाचे व्यावहारिक परिणाम काय होतील, त्यांची सहज अपेक्षा करता येते; आणि मग निर्णय घेताना योग्य ते बदल करता येतात. क्लिष्ट स्वरूपाच्या सिद्धांताचा वापर करताना हा महत्त्वाचा लाभ उपलब्ध नसतो. याच कारणासाठी, अगदी अलीकडचे काही सिद्धांत (ब्राहट्झ १९३९, ग्लोव्हर आणि कॉर्नवेल १९४१)—त्यांत शास्त्रीय दृष्ट्या गुणवत्ता असूनही—पुढील विवेचनात समाविष्ट केलेले नाहीत. या सिद्धांतांतील मूलभूत गृहीते आणि त्यांचे व्यावहारिक परिणाम यांचे सार काढून, कॅरिलोने (१९४२ क) त्यांवर मल्लिनाथी केली आहे.

५६. उतार-उच्छेद आणि आधारभूमीसह उच्छेद : आकृती ४२ अ मध्ये समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेतील उभ्या दरडीचा छेद दाखविला आहे. मृत्तिकेची घनता γ आहे आणि तिचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने मिळतो.

$$क = स + ए स्प ϕ$$

खणण्याचे काम चालू असताना, मृत्तिकेच्या वजनाचा प्रभाव पडून *गम* हे उभे पृष्ठ तुटक रेषेने दाखविल्याप्रमाणे विरूपत्व पावते. तसेच रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेल्या मृत्तिकेत ताण निर्माण झाल्याची अवस्था येते; आणि थोड्याच काळात तेथे ताणजन्य तडे पडतात. अशा तड्यांची खोली निश्चित करणारी परिस्थिती आणि तड्यालगतच्या पदार्थातील प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणारा त्यांचा प्रभाव, या विषयाचे संशोधन वेस्टरगार्डने काँक्रीटसारख्या टणक पदार्थांच्या बाबतीत केले आहे (१९३३ ड, १९३९). परंतु या संशोधनातून निघालेले निष्कर्ष, उभ्या दरडीमागील मृत्तिकेत उद्भवणाऱ्या ताणयुक्त विभागाला जसेच्या तसे लावता येत नाहीत. जिलेटिनवर केलेल्या प्रारूप





आकृती ४२ : उभ्या दरडीचा उतार-उच्छेद आणि आधारभूमीसह उच्छेद.
(अ) अंतर्गत घर्षण-कोन $ϕ > ०$; (आ) $ϕ = ०$

प्रयोगांमधून मिळालेल्या फलितांच्या आधारे ग्रंथकर्त्याने स्वीकारलेले गृहीत असे आहे की, ताणयुक्त भाग दरडीच्या उंचीच्या अर्ध्यापेक्षा अधिक खोलवर जात नाही; परंतु त्यासाठी हा ताण अतिरिक्त संकोचनामुळे निर्माण झालेला नसून गुरुत्वाकर्षणजन्य असला पाहिजे. थोड्याफार काळानंतर तपमान आणि मृत्तिकेतील ओलावा यांत होणाऱ्या नियतकालिक फरकांमुळे मृत्तिकेत ताणजन्य उच्छेद घडून येतो. मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध पुरेसा नसेल, तर दरडीच्या माथ्याकडील ताणजन्य उच्छेदामागोमाग, तिच्या तळाकडील भागातही कार्तनिक उच्छेद घडून येतो. हा उच्छेद दरडीच्या *ग* या तळाच्या कडेतून जाणाऱ्या *गन*, या वक्र आणि उतरत्या पृष्ठावरून होतो. हाच **दरडीचा किंवा उताराचा उच्छेद** होय. उताराचा उच्छेद होऊ नये यासाठी आवश्यक असणाऱ्या स्थैर्यलक्षणांचे संशोधन करण्याच्या पद्धती आणि पार्श्वीय आधारावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या पद्धती यांचे फार जवळचे नाते आहे.

याचप्रमाणे दरडीचा आधारभूमीसह उच्छेद होण्याचा संभवही आपण विचारात घेतला पाहिजे. *गप*, या आडव्या पातळीच्या संदर्भात विचार केला असता, दरडीतील मृत्तिका तिच्यावर समप्रमाणात वितरित असलेल्या अधिभारासारखी आहे, असे म्हणता येईल. या अधिभाराचे एकांक क्षेत्रावरील मूल्य *घच* एवढे आहे. अधिभाराची ही तीव्रता *गप*, या पातळीखालील मृत्तिकेच्या भारधारणक्षमतेपेक्षा अधिक असेल, तर अतिरिक्त भार वाहणारे एखादे पादक भूमीत खचावे, तद्वत् आकृतीतील उभ्या पृष्ठामागची मृत्तिकाही खचून खालच्या भूमीत शिरते. अशा प्रकारच्या उच्छेदास **आधारभूमीसह उच्छेद** असे म्हणतात. *गप*, या पातळीखाली असणारी मृत्तिका केवळ दरडीच्या समोरच्या बाजूसच सरकू शकते. पुनः या पातळीवरील कार्तनिक बलांचे मूल्यही लहानच असणार; कारण या पातळीच्या वर असणारी मृत्तिका तिच्या खाली असणाऱ्या मृत्तिकेत घडून येणाऱ्या पार्श्वीय विस्तरणात सहभागी होते. त्यामुळे या उदाहरणातील कार्तनिक प्रतिभा आकृती १५ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते. आकृती १५ अ आणि परिच्छेद १६ यांमध्ये विशद केल्याप्रमाणे, भारयुक्त क्षेत्राच्या कडेजवळ असणाऱ्या नम्य समतोल-अवस्थेतील विभागाची तळाकडील सीमा, आकृती ४२ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक वक्र रेषा व तिच्या दोन्ही बाजूंस दोन सरळ रेषा यांनी बनलेली असते. या सरळ रेषांपैकी एक (उजवीकडील) क्षितिजाशी $४५^\circ + \phi/२$ इतका आणि दुसरी (डावीकडील) $४५^\circ - \phi/२$ इतका कोन करते. वक्र रेषेची त्रिज्या अधिभाराच्या बाजूला लहान असून अधिभार नसलेल्या बाजूस मोठी होत जाते. नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या विभागाचा नीचतम बिंदू *पप*, या पातळीच्या खाली पुढील समीकरणाने मिळणाऱ्या खोलीवर असतो.

$$ख = \frac{र}{अ} \qquad [२]$$

दरडीच्या तळालगत असलेल्या *गग*, या र रुंदीच्या पट्टिकेची एकांक लांबीवरील

$भा'_{ह}$ ही भारधारणक्षमता २ र रुंदीच्या पट्टिकेच्या $भा_{ह}$ या भारधारणक्षमतेच्या निम्मे असते, असे स्थूलमानाने म्हणता येईल; कारण पट्टिकेच्या खाली असलेली मृत्तिका फक्त एका बाजूलाच सरकू शकते. $भा_{ह}$ चे मूल्य समीकरण ४६ (५) ने ठरविता येते. या समीकरणात $ड_{पा}$ (पायाची खोली) = ० असे नियोजून आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$भा_{ह} = २\, र\, स\, ध_{स} + २\, र^{२}\, घ\, ध_{घ}$$

आणि

$$भा'_{ह} = \frac{१}{२}\, भा_{ह} = र\, स\, ध_{स} + र^{२}\, घ\, ध_{घ} \qquad [३]$$

आकृती ४२ अ मधील अधिभार आणि आधारभूमी यांमधील $ग ग_{१}$ या स्पर्शपृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबले फारच लहान मूल्यांची असतात. त्यामुळे $ध_{स}$ या धारण-गुणकाचे मूल्य पूर्णत्वाने घर्षणहीन तळ असणाऱ्या पट्टिकापादकास लागू पडणाऱ्या समीकरण ४६ (९ अ) ने ठरविता येते. हे मूल्य समी. ४६ (६ अ) ने मिळणाऱ्या मूल्यापेक्षा काहीसे कमी असते आणि आ० ३८ इ० मधील $ध_{घ}$ या आलेखाच्या साहाय्याने मिळणाऱ्या मूल्यापेक्षा $ध_{घ}$ चे येथील मूल्य काहीसे कमी असते.

आ० ४२ अ मध्ये $ग ग_{१}$ या पट्टीची रुंदी $र = अख$ इतकी आहे. तिच्या एकांक लांबीवरील मृत्तिकेचे वजन $व = अखघच$ इतके आहे. या वजनातून घसरणीला होणारा $म_{२} ग_{१}$ या पृष्ठखंडावरील कार्तनिक विरोध उणे केला असता, उपरोक्त पट्टीवर कारक होणाऱ्या अधिभाराचे मूल्य मिळते. $म_{२} ग_{१}$ ची माथ्याकडची कड एका ताणजन्य तड्याच्या तळाशी आहे. या तड्याची खोली च / २ पेक्षा अधिक असत नाही. त्यामुळे पट्टिकेच्या एकांक लांबीवरील *का* या कार्तनिक विरोधाचे मूल्य निदान ०.५ *चस* इतके होते व एकांक लांबीवरील *भा* या अधिभाराचे मूल्य पुढील समीकरणाने व्यक्त होणाऱ्या मूल्यापेक्षा अधिक असत नाही.

$$भा = अ\, ख\, च\, घ - ०.५\, च\, स \qquad [४]$$

हा अधिभार $भा'_{ह}$ (समी० ३) पेक्षा अधिक असल्यास $म_{२} ग_{१} फप$ या पृष्ठावर घसरण होऊन आधारभूमीचा उच्छेद होतो; म्हणून दरडीच्या आधारभूमीसह उच्छेदाचे लक्षण खालीलप्रमाणे मांडता येते.

$$भा'_{ह} = अ\, ख\, स\, ध_{स} + अ^{२}\, ख^{२}\, घ\, ध_{घ} = अ\, ख\, घ\, च - ०.५\, च\, स$$

किंवा

$$च = \frac{ध_{स} \dfrac{स}{घ} + अ\, ख\, ध_{घ}}{१ - \dfrac{०.५}{अ\, ख} \cdot \dfrac{स}{घ}} \qquad [५]$$

आ० ४२ अ मधील $र = अ\,ख$ या रुंदीच्या $ग ग_1$ या पट्टीवर जिचे वजन पेलले जाऊ शकेल, अशा उच्चतम दरडीची उंची या समीकरणाने मिळाली.

$$ख = \frac{०.५}{अ} \cdot \frac{स}{घ}$$

असेल, तर पट्टीवरील अधिभाराचे मूल्य शून्य होते आणि $च = \infty$ होते. तसेच $ख = \infty$ असेल, तर $च = \infty$ असे उत्तर समी० ५ वरून मिळते. म्हणून या दोन मर्यादांच्या मध्ये असलेल्या $ख_1$ या मूल्याच्या वेळी $च$ चे मूल्य (समी० ५) लघुतम असेल. $ख_1$ हे मूल्य पुढील अटीची पूर्तता झाली असता मिळते.

$$\frac{d\,च}{d\,ख} = ० \qquad [६]$$

तसे करून $ख_1$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे येते.

$$ख_1 = \frac{स}{२\,अ\,घ}\left(१ + \sqrt{१ + २\frac{ध_स}{ध_घ}}\right) \qquad [७]$$

$\omega = २०^\circ$ आणि ३०° गृहीत धरल्यास $ख_1$ ची मूल्ये स्थूलमानाने, अनुक्रमे $३.० स/घ$ आणि $२.५ स/घ$ अशी मिळतात. या उदाहरणातील दरडीच्या उंचीचे $च_{आ}$ हे मूल्य समी० ५ मध्ये $ख_1$ चे उपरोक्त मूल्य नियोजून मिळविता येते. मृत्तिका $ख_1$ पेक्षा अधिक खोलीपर्यंत समांग असेल, तर दरडीची उंची $च_{आ}$ पेक्षा अधिक झाली म्हणजे तिच्या वजनामुळे आधारभूमीसह उच्छेद होतो. यावेळी घसरपृष्ठाचा नीचतम बिंदू $ख_1$ या खोलीवर स्थित असतो. परंतु $ख_1$ पेक्षा कमी मूल्य असणाऱ्या $ड$ या खोलीवर एखादा कठीण थर असेल, तर $च_{आ}$ पेक्षा अधिक उंचीच्या दरडीचे वजनही अशा आधारभूमीने पेलले जाते. ही उंची ठरविण्यासाठी समी० ५ मध्ये $ख$ ऐवजी $ड$ चे मूल्य नियुक्त केले पाहिजे. अशा उदाहरणात कठीण थराचे पृष्ठ घसरपृष्ठाला स्पर्शरेषेप्रमाणे असते.

$\omega = ०$ असल्यास समी० ३ मधील $ध_घ$ या धारणगुणकाचे मूल्य शून्य होते (परि० ४६ पाहा). समी० ५ मध्ये $ध_घ = ०$ नियुक्त केले, तर पुढील समीकरण मिळते.

$$च = \frac{ध_स \dfrac{स}{घ}}{१ - \dfrac{०.५\,स}{अ\,ख\,घ}}$$

$ख$ चे मूल्य वाढत जाईल तसे $च$ चे हे मूल्य घटत जाते. म्हणून $\omega = ०$ असल्यास, जेव्हा आधारभूमीसह उच्छेद घडून येतो, तेव्हा कठीण थराचे पृष्ठ नेहमीच घसर-

पृष्ठाला स्पर्शरेषेप्रमाणे असते; मग अशा थराची ड ही खोली कितीही असो. आधारभूमीसह उच्छेद घडवून आणील, अशी $च_{आ}$ ही दरडीची उंची $ख=ड$ नियोजून मिळविता येते; ती अशी :

$$च_{आ} = \frac{ध_{स}\frac{स}{घ}}{१ - \frac{०\cdot५ स}{अ ड घ}} \qquad [८]$$

$ड=\infty$ असल्यास $च_{आ}$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$च_{आ\infty} = ध_{स}\frac{स}{घ} \qquad [९]$$

$\omega=०$ असताना मिळणारे घसरपृष्ठ आ. ४२ आ मध्ये $ग_{१}फप$ या रेषेने दाखविले आहे. त्यामध्ये एक वक्र भाग आणि दोन सरळ भाग आहेत. सरळ भाग क्षितिजाशी ४५° चा कोन करतात आणि वक्र भाग ज्या वर्तुळाचा चाप आहे, त्याचे केंद्र *ग* च्या ठिकाणी आहे (परि० ४६ पाहा). ज्या पट्टीखाली उच्छेद घडून येतो, तिची रुंदी पुढीलप्रमाणे असते.

$$र = अड = ड\sqrt{२} = १\cdot४१ ड$$

आणि

$$अ = १\cdot४१$$

$गग_{१}$ वरील कार्तनिक प्रतिबले फार लहान असल्यामुळे, $ध_{स}$ या भारधारणगुणकाचे मूल्य ४६ (९ई) या समीकरणाने प्राप्त होते; ते असे :

$$ध_{स} = ५\cdot१४$$

$अ=१\cdot४१$ आणि $ध_{स}=५\cdot१४$ ही मूल्ये समी० ८ आणि ९ मध्ये नियुक्त करून पुढील मूल्ये मिळतात.

$$च_{आ} = \frac{५\cdot१४\frac{स}{घ}}{१ - \frac{०\cdot३५५ स}{ड घ}} \qquad [१०]$$

आणि

$$च_{आ\infty} = ५\cdot१४\frac{स}{घ} \qquad [११]$$

वरील विवेचनात घसरपृष्ठ *ग*, बिंदूजवळ (आ० ४२ अ आणि आ) सुस्पष्टपणे मोडलेले आहे असे गृहीत धरलेले होते. प्रत्यक्षात मात्र घसरपृष्ठ सलग असते. दोन्ही आकृतींत ते $म_2 ग$ या तुटक रेषांनी दाखविले आहे.

आ० ४१ अ मध्ये उताराची उच्छेदपूर्व आणि उच्छेदोत्तर स्वरूपे दाखविली आहेत. उच्छेदापूर्वी रेखांकित भागातील मृत्तिका ताणलेल्या अवस्थेत असते. तेथे प्रत्यक्ष उच्छेदापूर्वी नेहमीच ताणजन्य तणे दृष्टीस पडतात. घसरण उताराच्या पायथ्यापासून निघणाऱ्या वक्र पृष्ठावरून होते. घसरणीच्या वेळी मृत्तिकाराशीचा माथ्याकडील भाग उताराच्या बाजूने ताणला जातो, तर तळाकडचा भाग त्याच बाजूने दाबला जातो. या परिस्थितीतील कार्तनिक प्रतिमा आ० ४१ आ मध्ये दाखविली आहे. घसरलेल्या मृत्तिकाराशीच्या अगदी तळाकडील भागात असणारी कार्तनिक प्रतिमा आ. १३ अ (प्रतियोगी उच्छेद) मधील उभ्या छेदाच्या डावीकडील प्रतिमेसारखी आहे आणि अगदी वरच्या भागातील प्रतिमा काही प्रमाणात त्या छेदाच्या उजवीकडील (उद्युक्त उच्छेद) प्रतिमेसारखी आहे. या दोन प्रतिमांच्या मध्ये असणारा संक्रमणविभाग आ. १५ अ मधील प्रतियोगी आणि उद्युक्त विभागांना जोडणाऱ्या त्रिज्यादिक् कार्तनिक प्रतिमेसारखा आहे.

जिच्या कार्तनिक विरोधाचा कोन $\phi = 0$ आहे, अशा मृत्तिकेतील उताराचाही आधारभूमीच्या अपुऱ्या भारधारणक्षमतेमुळे उच्छेद होऊ शकतो. आ. ४१ इ मध्ये हे दाखविले आहे. एखाद्या दरडीचा उच्छेद उतारापुरता राहील का आधारभूमीसह होईल, हे स्थैर्यविषयक गणित मांडल्याविना ठरविता येत नाही. विवेचन सोपे होण्यासाठी आपण पुढील कृती करू. उतार-उच्छेद असल्यास *ग* या पायथ्यातून जाणाऱ्या घसरपृष्ठाच्या ठिकाणी, आपण $उ_1$ हा केंद्रबिंदू व $त्र_1$ ही त्रिज्या घेऊन काढलेला चाप गृहीत धरू आणि आधारभूमीसह उच्छेद असल्यास तेथील घसरपृष्ठाच्या ठिकाणी, $उ_2$ हा केंद्रबिंदू व $त्र_2$ ही त्रिज्या घेऊन काढलेला चाप गृहीत धरू. *ग* या तळबिंदूतून (पायथ्यातून) जाणाऱ्या वर्तुळांना **तळबिंदुगामी वर्तुळे** असे म्हणतात, तर तळबिंदूपासून काही अंतरावर समतल भूपृष्ठाला छेदणाऱ्या वर्तुळांना **मध्यमा-वर्तुळे** म्हणतात; कारण त्यांचे केंद्रबिंदू, उताराला त्याच्या मध्यबिंदूत छेदणाऱ्या रेषेवर-म्हणजेच मध्यमेवर-असतात. यदृच्छया निवडलेल्या एखाद्या तळबिंदुगामी वर्तुळावरून घडणाऱ्या उच्छेदास प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या समाकर्षणाचे मूल्य $स_{आत}$ आणि मध्यमावर्तुळाच्या बाबतीतील तशाच समाकर्षणाचे मूल्य $स_{आम}$ आहे असे ठरवू. ज्या तळबिंदुगामी वर्तुळाच्या बाबतीतील $स_{आत}$ चे मूल्य महत्तम म्हणजेच $स_{लत}$ असेल, त्यावरून उताराचा उच्छेद घडून येतो. त्याचप्रमाणे ज्या मध्यमावर्तुळाच्या बाबतीत $स_{आम}$ चे मूल्य महत्तम म्हणजेच $स_{लम}$ असेल, त्यावरून आधारभूमीसह उच्छेद घडून येतो. या दोन वर्तुळांना अनुक्रमे **तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळ** आणि **मध्यमा-लक्ष्मणवर्तुळ** असे संबोधण्यात येईल. यांपैकी पहिल्याची तुलना विचलित होणाऱ्या आधारभिंतीमागच्या भरणातील घसरपृष्ठाशी

करता येईल व दुसऱ्याची तुलना पट्टिकापादकाखालच्या भूमीत अतिरिक्त भारामुळे निर्माण होणाऱ्या घसरपृष्ठाशी करता येईल. $स_{लत}$ (तळबिंदुगामी लक्षमणवर्तुळ) आणि $स_{लम}$ (मध्यमा लक्ष्मणवर्तुळ) ही समाकर्षणाची मूल्ये म्हणजे **समाकर्षणाची लक्ष्मणमूल्ये** होत. लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान निश्चित करण्याच्या पद्धती परि० ५८ ते ६१ मध्ये वर्णिल्या जातील. समाकर्षणाची लक्ष्मणमूल्ये घर्षणवर्तुळ पद्धतीने (परि० ४०) ठरविता येतात.

आ. ४२ आ मधील $म_२फप$ या खऱ्या घसरपृष्ठाऐवजी आ. ४१ इ मधील $ळ_म$ या वर्तुळासारखे मध्यमावर्तुळ नियुक्त केले, तर $अ_{गा}=\infty$ या गुणकाला अनुषंगिक लक्ष्मण-उंचीचे मूल्य

$$च_{अ।\infty} = ५\cdot१४ \frac{स}{घ}$$

ऐवजी पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$च_{आ\,\infty} = ५\cdot५२ \frac{स}{घ} \qquad [१२]$$

या मूल्यात होणारी ७·४% चूक उभ्या उताराच्या म्हणजेच दरडीच्या असुरक्षिततेला कारणीभूत होते. तथापि तिरक्या उतारांचा विचार करीत असताना घसरपृष्ठाचा आकार वर्तुळाकार मानण्याने होणारी चूक तितकीशी महत्त्वाची असण्याचा संभव नसतो.

समाकर्षणाचे तळबिंदुगामी वर्तुळाच्या बाबतीतील लक्ष्मणमूल्य व मध्यमावर्तुळाच्या बाबतीतील तसलेच मूल्य यांच्या $स_{लत}/स_{लम}$ या गुणोत्तराचे मूल्य १·० पेक्षा मोठे तसेच लहानही असू शकते. ते १·० पेक्षा मोठे असेल, तर उतारउच्छेद होईल, अशी आपली अपेक्षा असते. उलटपक्षी, ते १·० हून लहान असेल, तर आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका असतो. उताराची उंची दिलेली असेल, तर या गुणोत्तराचे मूल्य, उताराचा कोन व कार्तनिक विरोधाचा कोन (ϕ) यांवर अवलंबून असते. कित्येक वेळा ते पृष्ठापासून कठीण थराच्या खोलीवरही (ड) अवलंबून असते. $\frac{ड+च}{च}$ या गुणोत्तरास **गाधतागुणक** $अ_{गा}$ असे संबोधण्यात येईल. स्थैर्यलक्षणावर पडणाऱ्या गाधता-गुणकाच्या प्रभावाची चर्चा परिच्छेद ५८ ते ६१ मध्ये केली जाईल.

खऱ्या घसरपृष्ठाऐवजी वर्तुळाचा चाप नियुक्त करण्याची कल्पना प्रथम पेटरसनने मांडली. या कल्पनेवर आधारित असणाऱ्या पद्धतींचा पुढचा विकास फेलेनियस (१९२७) आणि टेलर (१९२७) यांनी केला. रेन्डूलिकने (१९३५ आ) असे सुचविले की, खऱ्या घसरपृष्ठासाठी लघुगणकीय वक्र नियुक्त करता येईल. परंतु घर्षणवर्तुळाच्या सुधारित पद्धतीचा (परिच्छेद ४०) अवलंब करून मिळणारी फलिते आणि लघुगणकीय वक्राच्या पद्धतीने मिळणारी फलिते व्यवहारतः एकच असतात, असे टेलरने (१९३७) दाखवून दिले. लघुगणकीय वक्राच्या पद्धतीपेक्षा घर्षणवर्तुळाची पद्धत अधिक सोयीस्कर

असल्यामुळे लघुगणकीय वक्राच्या पद्धतीचा ऊहापोह केला जाणार नाही. उतारस्थैर्य-विषयक समस्या नम्यतासिद्धांतातील विश्लेषणात्मक पद्धतींनी सोडविण्याचा प्रयत्न फ्रँटार्ड (१९२२) व याकी (१९३६) यांनी केला. घसरू पाहणाऱ्या राशीच्या माथ्याकडच्या आणि पायथ्याकडच्या परिसरात अस्तित्वात असलेल्या रँनकिन् विभागांच्या दरम्यान एक संक्रमणविभाग असतो, या गोष्टीकडे फ्रँटार्डने दुर्लक्ष केले. म्हणजेच आकृती ४१ आ मध्ये दाखविलेल्या सलग कार्तनिक प्रतिमेऐवजी त्याने आकृती १३ अ (टेरझागी १९३६ अ) दाखविल्याप्रमाणे खंडित कार्तनिक प्रतिमा नियुक्त केली. याकीने असे गृहीत धरले की, घसरण एका तळबिंदुगामी वर्तुळाच्या चापावरून होते व हा चाप उताराशी $४५^\circ - \phi/२$ इतका कोन करतो. प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ उताराशी $४५^\circ - \phi/२$ एवढा कोन करते, परंतु म्हणून सुकरतेसाठी गृहीत धरलेले वर्तुळाकार पृष्ठही तोच कोन करील, असे मानणे समर्थनीय ठरत नाही. या पद्धतींचा अवलंब केल्यामुळे होणाऱ्या चुका फारच मोठ्या आहेत. आणखी असे की, उपरोक्त दोघांही संशोधकांनी आधारभूमीसह उच्छेदाच्या शक्यतेचा विचारच केला नाही. त्यांनी सुचविलेल्या कृती अती क्लिष्टही आहेत. या कारणास्तव प्रगत म्हणून प्रस्तुत केलेल्या या पद्धती समाधानकारक मानता येत नाहीत.

वाचकाला गणितात्मक कृतींचा चांगला परिचय व्हावा, या उद्देशाने उतारस्थैर्य-विषयक समस्यांचे विवेचन पुढील क्रमाने करावयाचे आहे. प्रथम आपण उभ्या दरडीच्या स्थैर्यलक्षणांचा विचार करू; कारण तीं आधारभिंतीमागे केलेल्या भरणाच्या स्थैर्यलक्षणां-सारखी असतात. त्यानंतर आपण क्रमशः पुढील समस्या सोडवू : (अ) सलग तिरकस उतारांच्या बाबतीतील समाकर्षणाचे लक्ष्मणमूल्य ठरविणे; (आ) स्तरयुक्त मृत्तिकाराशी-मधील सांधलेल्या उताराच्या बाबतीतील समाकर्षणाचे लक्ष्मणमूल्य ठरविणे आणि (इ) दिलेल्या उताराचा घसरणीच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक ठरविणे. उताराच्या उच्छेदाच्या स्वरूपावर (उतार-उच्छेद किंवा आधारभूमीसह उच्छेद) ϕ या कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचा महत्त्वाचा प्रभाव पडत असल्यामुळे, या समस्या सोडवितांना प्रथम $\phi = ०$ गृहीत धरून (परि० ५८ व ५९) आणि नंतर $\phi > ०$ गृहीत धरून (परि० ६० आणि ६१) त्या सोडविल्या जातील. या समस्यांचा ऊहापोह करताना ताणजन्य तड्यांचे अस्तित्व दुर्लक्षिले जाईल. ताणजन्य तड्यांचा तिरकस उताराच्या स्थैर्यावर जो प्रभाव पडतो, त्याचा विचार परिच्छेद ६२ मध्ये केला जाईल.

५७. उभ्या दरडीची लक्ष्मण-उंची : कूलोमच्या समीकरणातील ϕ या कोना-पेक्षा उताराचा कोन मोठा असेल, तर उताराच्या माथ्याकडील मृत्तिकेत ताणयुक्त अवस्था असते. तडे निर्माण होऊन ताणयुक्त अवस्थेतून मुक्तता होईपर्यंत उभी राहू शकणारी महत्तम उंची म्हणजे अशा उताराची लक्ष्मण-उंची होय.

उभ्या दरडीची लक्ष्मणउंची ठरविण्याच्या पुढील कृतीत उच्छेदाच्या वेळी घसरपृष्ठ दरडीच्या पायथ्यातून जाते (उतारउच्छेद), असे गृहीत धरले आहे. ϕ चे मूल्य

कोणतेही असले, तरी हे गृहीत स्वीकारणे समर्थनीय ठरते, असेही नंतर दाखविले जाईल. मृत्तिकेच्या कार्तनिक विरोधाचे, कूलोमचे समीकरण खाली मांडले आहे.

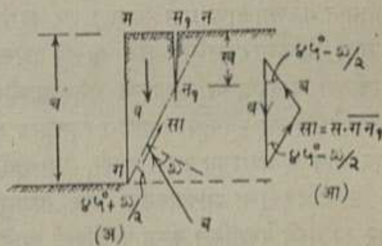
$$\text{क} = \text{स} + \sigma\ \text{स्प}\ \phi \qquad \text{५(१)}$$

दरडीच्या उभ्या पृष्ठामागची मृत्तिका रँन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत असते, या गृहीताचा आधार घेऊन तिच्या लक्ष्मणउंचीचे अनुमान करण्याची, परिपूर्ण नसलेली परंतु अगदी सोपी अशी एक पद्धत आहे. या गृहीतानुसार आकृती ४३ अ मधील *गन* हे घसरपृष्ठ सरळ असून ते क्षितिजाशी $\text{४५}^\circ + \phi/\text{२}$ कोन करते (परिच्छेद १२ पाहा). एखादा समाकर्षणगुणी अपारप्राय मृत्तिकाराशी रँन्‌किन्‌प्रणीत उद्युक्त अवस्थेत असेल, तर च उंचीच्या उभ्या छेदावरील $\text{दा}_\text{उ}$ हा एकूण आडवा दाब समीकरण १४ (३) च्या साहाय्याने पुढीलप्रमाणे मिळतो.

$$\text{दा}_\text{उ} = -\text{२}\,\text{स}\,\text{च}\,\frac{\text{१}}{\sqrt{\text{ण}}} + \frac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{घ}\,\text{च}^\text{२}\,\frac{\text{१}}{\text{ण}}$$

येथे $\text{ण} = \text{स्प}^\text{२}(\text{४५}^\circ + \phi/\text{२})$ हे विसर्पण मूल्य आहे. जर

$$\text{च} = \text{च}_\text{स} = \text{४}\,\frac{\text{स}}{\text{घ}}\sqrt{\text{ण}} \qquad [\text{१}]$$



आकृती ४३ : ताणजन्य भेगा निर्माण झाल्या असता उभ्या दरडीच्या स्थैर्यासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे.

असेल, तर $\text{च}_\text{स}$ उंचीच्या उभ्या छेदावरील $\text{दा}_\text{उ}$ या एकूण दाबाचे मूल्य शून्य असते. $\phi = \text{०}$ असल्यास ण चे मूल्य एक असते आणि $\text{च}_\text{स}$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे होते.

$$\text{च}_\text{स} = \text{४}\,\frac{\text{स}}{\text{घ}} \qquad [\text{२ अ}]$$

परंतु $\text{च}_\text{स}$ उंचीचा उपरोक्त अपारप्राय राशीतील उभा छेद आणि त्याच उंचीची आधाराविना उभी असलेली दरड यांत पूर्णत्वाने साम्य नसते; कारण या दोन उभ्या पातळ्यांवरील प्रतिबल-परिस्थिती सारखी नसते. पहिल्या उदाहरणात आकृती ११ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे उभ्या छेदाच्या माथ्याकडच्या भागात ताणप्रतिबले आणि खालच्या भागावर दमनकारी प्रतिबले कारक असतात. तसेच उभा छेद आणि तिरकस पृष्ठ यांनी सीमित झालेल्या व घसरू पाहणाऱ्या खंडामधील मृत्तिका नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असते. आधाराविना उभ्या असलेल्या दरडीच्या प्रत्येक ठिकाणी लंबदिक्

प्रतिबलांचे मूल्य शून्य असते आणि दरडीच्या पायथ्यातून जाणाऱ्या संभाव्य घसरपृष्ठाच्या वर असलेली मृत्तिका स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असते. लक्ष्मणउंची आणि घसरपृष्ठाचे स्वरूप या दोन्हींवर या लक्षणांचा परिणाम होतो. घसरपृष्ठ निश्चितपणे वक्र असते, असा अनुभव आहे. घसरपृष्ठ वर्तुळाकार गृहीत धरून फेलेनियसने (१९२७) दाखवून दिले की,

$$च_{स} = ३{\cdot}८५ \frac{स}{घ} \qquad [२ आ]$$

असते. समीकरण २ अ ने मिळणाऱ्या मूल्यापेक्षा हे मूल्य केवळ ५% ने कमी आहे. तसेच ϕ चे मूल्य शून्याहून अधिक असेल, तर ही चूक आणखीही कमी होते. तेव्हा अनुमान करण्याचाच प्रश्न असेल, तर समीकरण १ व २ अ यांचा अवलंब केला असता मिळणारे उत्तर पुरेसे अचूक असते, असे म्हणावे लागेल आणि उभ्या दरडीच्या पायथ्यातून जाणाऱ्या घसरपृष्ठाची वक्रता दुर्लक्षिली तरी चालेल. त्यामुळे उभ्या दरडीच्या स्थैर्यावर पडणारा ताणजन्य तड्यांचा प्रभाव विचारात घेताना, पुढील विवरणात हे घसरपृष्ठ सरळ असते, असे गृहीत धरले आहे.

उभ्या दरडीचा माथ्याकडील भाग ताणयुक्त अवस्थेत असतो. हा भाग आकृती ४२ अ मध्ये रेखांकित करून दाखविला आहे. आकृती ४३ अ मधील *गन* या संभाव्य घसरपृष्ठाला एखादा ताणजन्य तडा *ख* या खोलीवर छेदून जात असेल, तर मृत्तिकेचा $म_१नन_१$ हा त्रिकोणाकृती भाग उतारउच्छेदात सहभागी होत नाही. $मम_१न_१ग$ या उर्वरित राशीचा समतोल साधण्यासाठी आवश्यक असणारी परिस्थिती आकृती ४३ आ मधील बलप्रतिमेने दाखविली आहे. या राशीच्या एकांक लांबीचे *व* हे वजन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$व = \frac{१}{२} घ\,(च^{२} - ख^{२})\, स्प\left(४५^{\circ} - \frac{\phi}{२}\right) = \frac{१}{२}\, घ\,(च^{२} - ख^{२})\, \frac{१}{\sqrt{ण}}$$

$गन_१$ वर कारक असणारे समाकर्षण पुढीलप्रमाणे आहे;

$$सा = (च - ख)\, \frac{स}{कोज्या\,(४५^{\circ} - \phi/२)}$$

आणि *क* ही प्रतिक्रिया $गन_१$ वरील लंबाशी ϕ कोन करते. बलप्रतिमेवरून आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$च=\frac{१}{२}घ\,(च^२-ख^२).\,\frac{१}{\sqrt{ण}}=२\,सा\ कोज्या\left(४५°-\frac{\omega}{२}\right)=२\,स\,(च-ख)$$

किंवा—

$$च=च'_{स}=४\frac{स}{घ}\sqrt{ण}-ख=च_{स}-ख \qquad [३]$$

येथे $च_{स}$ म्हणजे समीकरण १ चा अवलंब केला असता मिळणारी लक्ष्मणउंची आहे. साधारण परिस्थितीत ताणजन्य तड्याची खोली उभ्या उताराच्या अर्ध्या उंचीपेक्षा अधिक नसते. तेव्हा $ख=च'_{स}/२$ गृहीत धरली, तर आपल्याला समीकरण ३ वरून पुढील समीकरण मिळते.

$$च'_{स}=\frac{२\,च_{स}}{३}=२\cdot६७\frac{स}{घ}\sqrt{ण} \qquad [४]$$

आणि $\omega=०$ असल्यास $ण=१$ होत असल्यामुळे,

$$च'_{स}=२\cdot६७\,\frac{स}{घ} \qquad [५]$$

असे मूल्य मिळते.

$च'_{स}$ म्हणजे ताणजन्य तड्यांमुळे दुर्बल झालेल्या उभ्या दरडीची महत्तम उंची होय. विनाधार दरडीची उंची $च'_{स}$ पेक्षा (समीकरण ४ व ५) अधिक नसल्यास ती अमर्याद काळापर्यंत स्थिर राहू शकेल. अर्थात त्यासाठी समतोल साधणाऱ्या परिस्थितीत काही कारणामुळे—उदाहरणार्थ, उघड्या तड्यांमध्ये पृष्ठभागावरचे पाणी साचून—बदल घडता कामा नये.

विनाधार उभ्या दरडीमध्ये आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका नसतो, या मूळ गृहीताचे समर्थन करावयाचे अद्याप बाकी आहे. $\omega=०$ असल्यास दरडीची उंची $च_{आ}$ (समी. ५६ (८)) पेक्षा अधिक असल्याशिवाय तिचा आधारभूमीसह उच्छेद होत नाही. $अ_{गा}=\frac{ड+च}{च}$ या गाधतागुणकाचे मूल्य जसे वाढत जाते, तसे $च_{आ}$ चे मूल्य घटत जाते. $अ_{गा}=\infty$ झाल्यास तिचे मूल्य लघुतम होते, आणि ते पुढीलप्रमाणे असते.

$$च_{आ\infty}=५\cdot१४\,\frac{स}{घ} \qquad ५६(११)$$

हे लघुतम मूल्यही $च_{स}=\frac{४स}{घ}$ (समी. २ अ) या लक्ष्मणउंचीपेक्षा पुष्कळच जास्त आहे.

ϕ या कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे मूल्य वाढत गेल्यास $च_{आ} / च_{स}$ या गुणोत्तराचे मूल्य त्वरेने वाढत जाते, असेही अशाच प्रकारच्या संशोधनातून निष्पन्न झालेले आहे. हे निष्कर्ष आपल्या मूळ गृहीताशी सुसंगतच आहेत.

५८. ϕ=० परिस्थितीतील स्थैर्य-गुणक आणि लक्ष्मणवर्तुळ : आकृती ४४ अ मध्ये उताराच्या तळबिंदूतून जाणारे एक वर्तुळ दाखविले आहे. तेथे *गम* हा उतार क्षितिजाशी β कोन करतो. उताराच्या संदर्भातील *गन* या वर्तुळाचे स्थान दोन कोनांनी निश्चित झाले आहे. हे दोन कोन म्हणजे *गन* या जीवेने केलेला उतार-कोन α आणि केंद्रस्थ कोन २θ हे होत.

समजा,

$व$ = *गमनझ* या मृत्तिकाखंडाच्या एकांक जाडीचे वजन,
$ल_{व}$ = तळबिंदुगामी वर्तुळाच्या उ या मध्यबिंदूपासून मोजलेली $व$ ची भुजा,
$त्र$ = तळबिंदुगामी वर्तुळाची त्रिज्या,
$ल_{चा}$ = *गन* या चापाची लांबी आणि
$स_{आ}$ = *गन* वरून होणाऱ्या घसरणीस प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असलेले एकांक क्षेत्रावरील समाकर्षण आहेत.

ϕ=० असल्यामुळे *गन* वरून होणारी घसरण केवळ $स_{आ}ल_{चा}$ या समाकर्षणानेच विरोधिली जाईल. उ या भ्रमणकेंद्राभोवतीच्या परिबलांची बेरीज शून्य असणे समतोलासाठी आवश्यक आहे. म्हणून,

$$वल_{व} - स_{आ}ल_{चा}त्र = ०$$

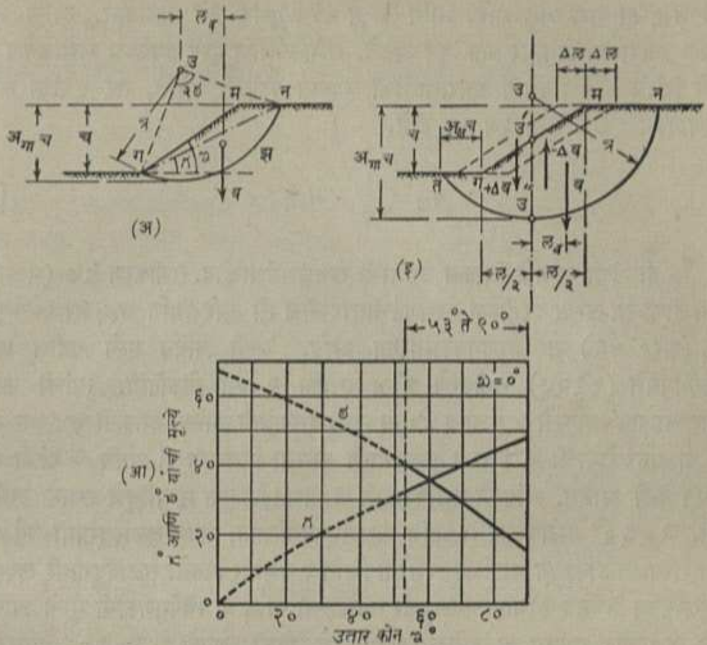
म्हणजेच

$$स_{आ} = व \frac{ल_{व}}{त्रल_{चा}} \qquad [१]$$

आकृतीतील भूमिती लक्षात घेऊन $व$, $ल_{व}$ आणि $ल_{चा}$ यांची मूल्ये ठरविली असता असे दिसून येते की,

$$स_{आ} = घ\, च\, \frac{१}{फ(α, β, θ)} \qquad [२अ]$$

आहे. येथे घ ही मृत्तिकेची घनता आहे, आणि फ (α, β, θ) हे α, β आणि θ यांवर अवलंबून असणारे एक फलन आहे. ज्या तळबिंदुगामी वर्तुळावर $स_{आ}$ चे मूल्य महत्तम असते (तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळ), त्यावरून उताराचा उच्छेद घडून येतो.



आकृती४४ : (अ) तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळानुसार होणारा उतारउच्छेद (आ) ग आणि ठ या (अ) मधील कोनांची मूल्ये व ऋ हा उतारकोन यांतील संबंध. (इ) समांग मृत्तिकेतील आधारासह उच्छेद मध्यमा वर्तुळानुसारच झाला पाहिजे, हे दाखविणारी रेखाकृती (आधार : फेलेनियस १९२७).

उतारकोन ऋ स्थिरमूल्य असल्यामुळे या तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान पुढील समीकरणाची पूर्तता केली असता प्राप्त होते.

$$\frac{\partial \text{स}_{\text{आ}}}{\partial \text{ग}} = 0 \quad \text{आणि} \quad \frac{\partial \text{स}_{\text{आ}}}{\partial \text{ठ}} = 0 \qquad [\text{२आ}]$$

ही समीकरणे सोडवून आणि त्यांतून मिळालेली ग आणि ठ यांची मूल्ये समीकरण १ मध्ये वापरून तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळावरून होणाऱ्या घसरणीला प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या $\text{स}_{\text{ल}}$ या समाकर्षणाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{स}_{\text{ल}} = \frac{\text{घ} \cdot \text{च}}{\text{फ}\,(\text{ग},\ \text{ऋ},\ \text{ठ})} = \frac{\text{घ} \cdot \text{च}}{\text{अ}_{\text{स्थै}}} \qquad [\text{३}]$$

येथे $अ_{स्थै}$ हा शुद्ध अंक आहे, आणि त्याला **स्थैर्य-गुणक** असे म्हणतात. त्याचे मूल्य केवळ उताराच्या कोनावर अवलंबून असते. समाकर्षणाचे मूल्य **उपलब्ध समाकर्षण** $स_{उ}$ असे दिलेले असेल आणि उताराची उंची बदलत जाणारी असेल, तर पूर्वोक्त समीकरणावरून पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$च_{ल} = \frac{स_{उ}}{घ} \cdot अ_{स्थै} \qquad [४]$$

$च_{ल}$ ही उंची म्हणजे **तिरकस उताराची लक्ष्मणउंची** होय. समीकरण ५७ (२आ) ने प्राप्त होणाऱ्या उभ्या दरडीच्या लक्ष्मणउंचीसारखीच ती आहे आणि $अ_{स्थै}$ हा स्थैर्यगुणक $ध_{स}$ (परि० ४६) या धारणगुणकासारखा आहे. βची विविध मूल्ये गृहीत धरून फेलेनियसने (१९२७) समीकरणे २ अ आणि २ आ सोडविली. त्यांची फलिते आलेखरूपात आकृती ४४ आ व ४५ अ मध्ये दाखविली आहेत. आकृती ४४ आ मध्ये β या उतारकोनाची निरनिराळी मूल्ये घेतली असता मिळणारी α आणि θ यांची मूल्ये स्थित केली आहेत. त्यांवरून तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाच्या मध्यबिंदूचे स्थान ठरविता येते. $\beta = ६०^\circ$ असेल तर α आणि θ सममूल्य होतात; आणि तळबिंदुगामी वर्तुळाला उताराच्या तळबिंदूतून काढलेली स्पर्शरेषा क्षितिज-समांतर असते. तळबिंदुगामी लक्ष्मण-वर्तुळावरून उच्छेद होणार असेल, तर त्यावेळची $अ_{स्थै}$ या स्थैर्यगुणकाची मूल्ये आकृती ४५ अ मधील *गपफम* या आलेखाच्या कोटींनी दिली जातात. $\beta = ९०^\circ$ असताना ते मूल्य ३·८५ असते व वाढत जाऊन $\beta = ०$ असताना ८·३६ होते. आकृती ४५ इ मधील $\phi = ०$ या चिन्हाने निर्दिष्ट केलेल्या सलग आलेखाच्या कोटींनी गाधतागुणकाची मूल्ये दिली जातात. हा गाधता-गुणक पुढीलप्रमाणे असतो.

$$अ_{गा} = \frac{ह + च}{च} \qquad [५]$$

त्यावरून तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळावरून होणाऱ्या घसरणीचा नीचतम बिंदू मिळतो. उतारकोन ६०° हून अधिक असेल (आकृती ४५ अ मधील *गपम* आलेखावरील *प* बिंदूच्या उजव्या बाजूस), तर गाधता-गुणकाचे मूल्य एक असते. घसरपृष्ठ उताराच्या तळबिंदूपासून निघून उताराकडे जाते. याउलट, $\beta < ६०^\circ$ असेल, तर घसरपृष्ठाचा नीचतम बिंदू आकृती ४४ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, तळबिंदूच्या पातळीच्या खाली असतो.

उताराचा आधारभूमीसह उच्छेद घडून येण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या समतोल-विषयक लक्षणांचा अभ्यास आता करावयाचा आहे. त्यासाठी *तउ''न* या कोणत्याही एका मध्यमा-वर्तुळाच्या वर असणाऱ्या *मगतउ''न* (आकृती ४४ इ) या मृत्तिकाखंडावर कारक असणाऱ्या बलांचा शोध आपणांस घेतला पाहिजे. या वर्तुळाचा मध्यबिंदू

उताराच्या उ' या मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या उभ्या रेषेवर स्थित असतो, असे गृहीत धरले आहे. या वर्तुळावरून होणाऱ्या घसरणीस प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या $स_{आ}$ या समाकर्षणाचे मूल्य समीकरण १ च्या साहाय्याने मिळते. ते समीकरण असे :

$$स_{आ} = व \frac{ल_{व}}{त्र \cdot ल_{चा}}$$

उ हा वर्तुळमध्य आणि तउ''न हा चाप स्वस्थानी स्थिर ठेवून आकृतीतील उतार डाव्या बाजूस $\Delta ल$ इतके अंतर सरकविला, तर व या वजनात $\Delta व$ एवढी वाढ होते, परंतु परिबलात $\Delta व.\ \Delta ल/२$ एवढी घट होते. उलटपक्षी, हा उतार अशाच पद्धतीने उजव्या बाजूस सरकविल्यास व या वजनात $\Delta व$ एवढी घट होते; आणि त्याचबरोबर उ भोवतीचे परिबलही $\Delta व.\ \Delta ल/२$ एवढे घटते. दोन्ही उदाहरणांत घसरण घडवून आणण्याची प्रवृत्ती असलेले परिबल घटते, पण घसरण-विरोधी बलांचे $स \cdot ल_{चा} त्र$ हे परिबल तेच राहते. म्हणून उताराच्या उ' या मध्यबिंदूतून जाणारी उभी रेषा म्हणजे ज्यांच्या बाबतीत घसरण-कारक परिबल महत्तम आहे, अशा वर्तुळांच्या मध्यांचा बिंदुपथ ठरते. ही सर्व वर्तुळे म्हणजे मध्यमा-वर्तुळे होत. यांपैकी कोणत्याही वर्तुळाचे उताराच्या संदर्भातील स्थान दोन परिमाणविहीन मात्रांनी ठरविता येते. त्या अशा : (१) $अ_{गा} = \frac{ड + च}{च}$ हा गाधतागुणक आणि (२) उताराची उंची व आकृती ४४ इ मधील *गत* हे आडवे अंतर यांतील पुढील गुणोत्तर—

$$अ_{क्ष} = \frac{\overline{गत}}{च} \qquad [६]$$

समीकरण १ मधील व, $ल_{व}$ आणि $ल_{चा}$ या पदांची मूल्ये आकृती ४४ इ मधील भूमितीवरून ठरविली असता असे दिसून येते की,

$$स_{आ} = घ.\ च.\ \frac{१}{फ\ (ϑ,\ अ_{क्ष},\ अ_{गा})} \qquad [७\ अ]$$

आहे. येथे घ ही घनता आहे आणि फ $(ϑ, अ_{गा}, अ_{क्ष})$ हे $ϑ$, $अ_{गा}$ आणि $अ_{क्ष}$ यांच्या मूल्यांवर अवलंबून असणारे फलन आहे. मध्यमा-लक्ष्मणवर्तुळाच्या बाबतीतील $अ_{गा}$ आणि $अ_{क्ष}$ यांच्या मूल्यांनी आणखी पुढील समीकरणांची पूर्तता करावयास हवी.

$$\frac{\partial स_{आ}}{\partial अ_{गा}} = ० \text{ आणि } \frac{\partial स_{आ}}{\partial अ_{क्ष}} = ० \qquad [७\ आ]$$

उतारकोन $ϑ$ चे मूल्य कोणतेही असले, तरी

$$अ_{गा} = \infty \text{ आणि } च_{ल} = ५\cdot५२ \frac{स}{घ} \qquad [८]$$

असतील, तर उपरोक्त समीकरणांची पूर्तता होते. $च_{ल}$ चे वरील मूल्य आणि समीकरण ५६ (१२) ने प्राप्त झालेले मूल्य, हीं दोन्ही सारखीच आहेत. आकृती ४५ अ मधील *भन* या आडव्या रेषेने समीकरण ८ दाखविले आहे. तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाच्या $अ_{स्थै}$ दर्शक रेषेला ती *प* बिंदूत छेदते. या बिंदूची भुजा $ঞ=५३^{\circ}$ आहे. तेव्हा या उतारकोनाचे मूल्य ५३° पेक्षा लहान असेल, तर दोन गोष्टी शक्य आहेत. एक अशी : उताराच्या तळबिंदूलगतचे भूपृष्ठ आडवे किंवा समतल असेल, तर आधारभूमीसह उच्छेद होईल, असे अपेक्षिता येते. तदनुषंगिक $च_{ल}$ ही लक्ष्मणउंची (समी० ८) ঞ या उतारकोनावर अवलंबून असत नाही. दुसरी अशी : तळबिंदूलगतचे पृष्ठ आ० ४५ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे चढते असेल, तर असा उलटा उतार आधारभूमीसह उच्छेदाला प्रतिबंध करतो आणि मग तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळावरून होणाऱ्या उतारउच्छेदाची अपेक्षा करावी लागते. तदनुषंगिक स्थैर्यांकाची मूल्ये *पफम* या आलेखावरून मिळतात.

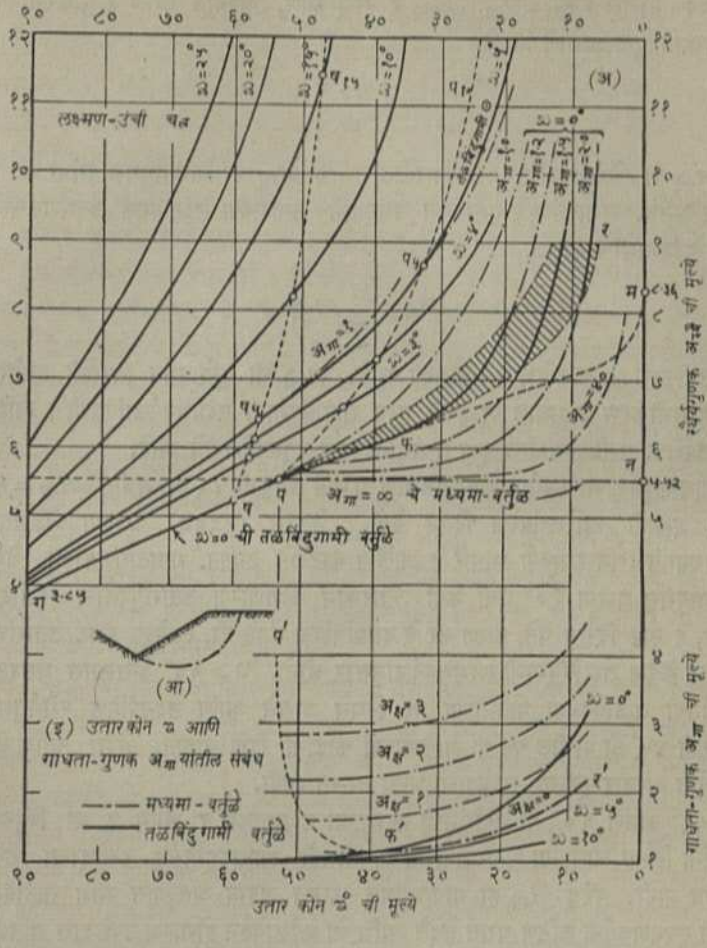
वरील विवेचनात हे निश्चितच गृहीत धरलेले आहे की, लक्ष्मणवर्तुळ पूर्णतया समांग मृत्तिकेतच स्थित आहे. प्रत्यक्षात प्रत्येक मृत्तिकाराशीच्या खाली एखादा कठीण थर अस्तित्वात असतो. घसरपृष्ठाच्या नीचतम बिंदूच्या खोलीवरील या मर्यादेचा प्रभाव उतारउच्छेद आणि आधारभूमीसह उच्छेद या दोन्ही प्रकारांतील लक्ष्मणउंचीवर पडण्याचा संभव असतो. उदा., अशा कठीण थराचे पृष्ठ आ० ४५ आ मध्ये दाखविलेल्या तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळास छेदून जाणारे असेल, तर अशा पृष्ठास स्पर्शून जाणाऱ्या एखाद्या अन्य वर्तुळावरून उच्छेद होईल. हे वर्तुळ तळबिंदुगामी असेल किंवा उतारास तळबिंदूच्या वर काही उंचीवर छेदणारेही असेल (उतारछेदी वर्तुळ).

समी० ८ वरून मिळणारा मध्यमा-लक्ष्मणवर्तुळाचा नीचतम बिंदू अमर्याद खोलीवर स्थित असतो. एखाद्या कठीण थरामुळे घसरपृष्ठ *ह* पेक्षा अधिक खोलवर जाऊ शकत नसेल, तर मध्यमा-लक्ष्मणवर्तुळ या कठीण थरास स्पर्शून जाते आणि गाधतागुणक पुढीलप्रमाणे असतो.

$$अ_{गा} = \frac{च + ह}{च}$$

गाधतागुणकाचे मूल्य कठीण थराच्या खोलीने ठरत असल्यामुळे समी० ७ आ मधील दोन अटींपैकी पहिली अनावश्यक ठरते; आणि उताराच्या संदर्भातील मध्यमालक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान खाली दिलेल्या दुसऱ्या अटीने निश्चित होते.

$$\frac{\partial स_{आ}}{\partial अ_{क्ष}} = ०$$



आकृती ४५ : (अ) गाधतागुणक $अ_{गा}$ आणि अंतर्गत घर्षणकोन ω यांच्या निरनिराळ्या मूल्यांच्या वेळी मिळणारा उतारकोन ऊ आणि स्थैर्यगुणक $अ_{स्थै}$ यांमधील संबंध; (आ) आधारभूमीसह उच्छेदाची असंभाव्यता दाखविणारी रेखाकृती; (इ) $अ_{क्ष}$ (आ० ४४ इ पाहा) आणि ω यांच्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार मिळणारा उतारकोन ऊ आणि गाधतागुणक $अ_{गा}$ यांमधील संबंध. (आधार : डी. डब्ल्यू. टेलरने प्रकाशित केलेली माहिती १९३७.)

उताराची उंची दिलेली असताना, आधारभूमीवर उच्छेदास प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असलेले $स_{ल} = स_{आ\cdot\ महत्तम}$ हे समाकर्षण, आपणांस वरील समीकरणाच्या साहाय्याने पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$स_{ल} = \frac{घ \cdot च}{अ_{स्थै}}$$

$अ_{स्थै}$ या स्थैर्यगुणकाचे मूल्य, उतारकोन आणि $अ_{गा}$ हा गाधतागुणक यांवर अवलंबून असते. समाकर्षणाचे मूल्य ज्ञात असल्यास उताराच्या तदनुषंगिक लक्ष्मणउंचीचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते.

$$च_{ल} = \frac{स}{घ} अ_{स्थै}$$

समीकरण ४ सारखेच हे समीकरण आहे. $अ_{स्थै}$ ची मूल्ये मात्र निराळी आहेत; कारण समीकरण ४ मधील $अ_{स्थै}$ चे मूल्य तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाविषयीचे आहे, तर उपरोक्त समीकरणातील मूल्य मध्यमा-लक्ष्मण-वर्तुळाविषयीचे आहे.

गाधतागुणकाचा स्थैर्यगुणकावर पडणारा प्रभाव आकृती ४५ अ मधील $अ_{गा} = १$, १·२ इत्यादी आलेखांवरून दिसून येतो. टेलरने (१९३७) केलेल्या सैद्धांतिक संशोधनातील निष्कर्षांच्या आधारे हे आलेख काढलेले आहेत. गाधतागुणकाचा स्थैर्यलक्षणावरील प्रभाव ६०° पेक्षा कमी उतारकोन असणाऱ्या उतारापुरताच मर्यादित आहे, हे स्पष्ट दिसून येते; कारण वर हे दाखविलेच आहे की, त्यापेक्षा उभट उतारांचा उच्छेद केवळ तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळानुसार होतो. $ठ > ६०^{\circ}$ असल्यास घसरपृष्ठ संपूर्णतया तळबिंदूच्या पातळीच्या वर स्थित असते आणि तदनुषंगिक स्थैर्यगुणक आकृती ४५ अ मधील *गप* या आलेखाच्या कोटींनी दिले जातात. अशा उतारांच्या बाबतीत आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका असत नाही.

५३° आणि ६०° या मर्यादांमध्ये पडणाऱ्या व अनुक्रमे *प* आणि *प* या बिंदूंच्या भुजांनी दिल्या जाणाऱ्या उतारकोनांच्या बाबतीतही आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका असत नाही. परंतु $अ_{गा}$ हा गाधतागुणक फारच लहान असल्यास मात्र तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळ कठिण थरास छेदते आणि या वर्तुळावरून होणाऱ्या उच्छेदास प्रतिबंध होतो. तेव्हा $अ_{गा} = १$ असल्यास उच्छेदाचे वर्तुळ उताराला छेदते. स्थैर्यगुणकाची तदनुषंगिक मूल्ये आकृती ४५ अ मधील *प* मधून प्रारंभ होणाऱ्या व $अ_{गा} = १$ असा निर्देश केलेल्या तुटक रेषेच्या कोटींनी दिली जातात.

उतारकोन ५३° पेक्षा लहान असल्यास (आकृती ४५ अ मधील *प* बिंदूची भुजा) तीन निरनिराळे प्रकार संभवतात, त्यांचा स्वतंत्रपणे विचार करणे भाग आहे. ते प्रकार असे : (अ) $अ_{गा}$ चे मूल्य साधारण ४ पेक्षा अधिक आहे; (आ) $अ_{गा}$ चे मूल्य १·२ ते ४ च्या दरम्यान आहे आणि (इ) $अ_{गा}$ १·२ पेक्षा लहान आहे.

(अ) गाधतागुणकाचे मूल्य साधारणपणे ४ पेक्षा अधिक असेल, तर $अ_{\text{स्थै}}$ हा स्थैर्यगुणक व्यवहारतः उतारकोनाच्या मूल्यावर अवलंबून असत नाही. परंतु त्याला अपवाद एवढाच की, β चे मूल्य १५° पेक्षा कमी असू नये. β चे मूल्य १५° पेक्षा अधिक असते, तेव्हा प्रत्येक वेळी $अ_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य ५·५२ किंवा किंचित अधिक असते. आकृती ४५ अ मधील *पन* या आडव्या सरळ रेषेने हे दाखविले आहे. या परिस्थितीत उताराचा उच्छेद कठीण थराला स्पर्शून जाणाऱ्या मध्यमावर्तुळावरून होतो.

(आ) $अ_{\text{गा}}$ चे मूल्य १·२ आणि ४ यांच्या दरम्यान पडणारे असेल, तर β आणि $अ_{\text{स्थै}}$ यांतील संबंध दाखविणारा आलेख $अ_{\text{गा}} = १·२$, २ व ४ या चिन्हांनी दाखविलेल्या आलेखांच्या आधारे आंतर्क्षेप पद्धतीने मिळविता येतो. हे तीन आलेख म्हणजे *पफ* या ठळक आलेखाच्या β_1 हे भुजामूल्य असलेल्या बिंदूतून निघणाऱ्या शाखा आहेत. उतारकोन β_1 पेक्षा मोठा असल्यास उच्छेद तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळानुसार होतो. या परिस्थितीत स्थैर्यगुणकाचे मूल्य *गपफ* या आलेखाच्या कोटीने मिळते. उतारकोन β_1 पेक्षा लहान असल्यास $अ_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य एका $अ_{\text{गा}}$ आलेखावरून ठरविता येते. यांपैकी प्रत्येक आलेख—उदाहरणार्थ, $अ_{\text{गा}} = १·५$ चा आलेख—प्रारंभी जवळजवळ आडवा आहे आणि नंतर तो उजवीकडे उभट होत जातो. रेखांकित क्षेत्रात असणाऱ्या प्रत्येक बिंदूने मध्यमा-वर्तुळावरून होणारा उच्छेद दाखविला जातो. रेखांकित क्षेत्रात असणाऱ्या प्रत्येक बिंदूने तळबिंदुगामी वर्तुळावरून होणारा उच्छेद आणि त्यावर असणाऱ्या बिंदूने उतारछेदी वर्तुळावरून होणारा उच्छेद दाखविला जातो. या सर्व उदाहरणांत कठिण थराचे पृष्ठ उच्छेद-वर्तुळाची स्पर्शरेषा ठरते.

(इ) $अ_{\text{गा}}$ चे मूल्य १·२ पेक्षा कमी असेल, तर उच्छेद तळबिंदुगामी किंवा उतारछेदी वर्तुळावरून होतो आणि कठिण थर अशा वर्तुळास स्पर्शरेषेप्रमाणे असतो. एखाद्या उदाहरणांत β आणि स्थैर्यगुणक $अ_{\text{स्थै}}$ यांतील संबंध दाखविणारा आलेख $अ_{\text{गा}} = १$ आणि $अ_{\text{गा}} = १·२$ या दोन आलेखांच्या मधील प्रांतात पडत असेल, तर तो आंतर्क्षेप पद्धतीने निश्चित करता येतो. रेखांकित क्षेत्रात पडणारा, अशा आलेखावरील प्रत्येक बिंदू तळबिंदुगामी वर्तुळावरून होणारा उच्छेद दाखवितो. या क्षेत्राच्या वरील भागात स्थित असलेले बिंदू उतारछेदी वर्तुळांवरून होणारे उच्छेद दाखवितात.

मध्यमा-लक्ष्मण-वर्तुळे पायथ्याजवळच्या समतल भूपृष्ठास उताराच्या तळबिंदूपासून $अ_{\text{क्ष}}च$ इतक्या अंतरावर छेदतात. अशा वर्तुळांचे मध्यबिंदू उताराच्या अर्ध्या उंचीतून जाणाऱ्या उभ्या रेषेवर असतात. तसेच कठिण थराचा पृष्ठभाग त्यांना स्पर्शरेषेप्रमाणे असतो. या दोन लक्षणांमुळे $अ_{\text{क्ष}}$ चे मूल्य माहीत झाले म्हणजे उच्छेद-वर्तुळाचे उताराच्या संदर्भातील स्थान ठरविता येते. हे मूल्य आकृती ४५ इ मधील आलेखांवरून मिळू शकते. या आलेखांच्या भुजा उतारकोन दाखवितात आणि कोटी गाधतागुणक दाखवितात. *प'फ'र'* या आलेखाच्या वर स्थित असलेल्या प्रत्येक बिंदूने एक मध्यमा-लक्ष्मण वर्तुळ दाखविले जाते. आधारभूमीतील कठिण थर या वर्तुळाला स्पर्शरेषेसारखा असतो

आणि त्याच्या बाबतीतील गाधतागुणक $अ_{\text{गा}}$ असतो. ढ आणि $अ_{\text{गा}}$ यांची मूल्ये माहीत असतील, तर तदनुषंगिक $अ_{\text{क्ष}}$ चे मूल्य $अ_{\text{क्ष}}$ = ० ते ३ या आलेखांच्या आधारे आवश्यक तर आंतर्क्षेप पद्धतीने मिळविता येते.

उच्छेद-प्रकार आणि स्थैर्यगुणक यांवर गाधतागुणकाचा जो प्रभाव पडतो त्याची कल्पना येण्यासाठी उतारकोन ढ = २०° असलेल्या उताराच्या बाबतीत संभवणारे उच्छेदाचे विविध प्रकार विचारार्थ घेऊ. ढ = २०° या भुजामूल्याला अनुषंगिक असे $अ_{\text{स्थै}}$ दर्शक दोन बिंदू आकृती ४५ अ मधील रेखांकित क्षेत्राच्या सीमांवर आपल्याला मिळतात. एक बिंदू $अ_{\text{गा}}$ = १·४ आलेखावर आहे आणि दुसरा $अ_{\text{गा}}$ = १·१८ आलेखावर आहे, असे दिसून येईल. $अ_{\text{गा}}$ चे मूल्य ∞ आणि १·४ या दोन मर्यादांत असते, तेव्हा स्थैर्यगुणकाचे मूल्य $अ_{\text{गा}}$ = ∞ च्या वेळी ५·५२ आणि $अ_{\text{गा}}$ = १·४ च्या वेळी ७ असे वाढत जाते आणि उताराचा उच्छेद मध्यमा-वर्तुळावरून होणारा असतो. $अ_{\text{गा}}$ चे मूल्य १·४ ते १·१८ एवढ्या मर्यादेत असते, त्या वेळी उताराचा उच्छेद तळबिंदुगामी वर्तुळावरून होतो व कठीण थराचा पृष्ठभाग त्याला स्पर्शरेषेवत् असतो. याच वेळी $अ_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य ७ पासून ७·९ पर्यंत वाढते. $अ_{\text{गा}}$ च्या १·१८ ते १·० या मूल्यांच्या वेळी उच्छेद उतारछेदी वर्तुळावरून होतो. आणि $अ_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य ७·९ पासून ($अ_{\text{गा}}$ = १·१८) ९·४ पर्यंत ($अ_{\text{गा}}$ = १) वाढते.

५९. ञ = ० परिस्थितीतील स्थैर्याचा विचार : स्थापत्य-व्यवहारात पुढील समस्यांना तोंड देण्याचा प्रसंग येण्याचा संभव असतो. (अ) चिकण मृत्तिकेच्या समाकर्षणाचे मूल्य आपल्याला माहीत आहे व विशिष्ट खोलीपर्यंत त्या मृत्तिकेत खोदाई करताना खोदाईचा उतार काय ठेवावा, हे ठरवावयाचे आहे; (आ) दरडीमध्ये घसरण घडून आली आहे आणि चिकण मृत्तिकेच्या घसरण-पूर्व अवस्थेतील समाकर्षणाचे सरासरी मूल्य ठरवावयाचे आहे आणि (इ) चिकण मृत्तिकेचा उतार उभा आहे, तसेच समाकर्षणाचे मूल्य माहीत आहे, परंतु ते सर्व ठिकाणी सारखे नाही आणि उताराचा अशा परिस्थितीतील सुरक्षिततांक आपल्याला ठरवावयाचा आहे.

आकृती ४५ अ मधील आलेखांत ग्रथित झालेल्या माहितीच्या साहाय्याने पहिली समस्या त्वरित सोडविता येणे शक्य आहे. ती कृती स्पष्ट होण्यासाठी आपण असे गृहीत धरू की, आपल्याला मृदू, चिकण मृत्तिकेत २० फूट खोल खोदाई करावयाची आहे. चिकण मृत्तिकेच्या स या कार्तनिक विरोधाचे मूल्य दर चौ. फुटास ५०० पौं. आहे आणि घनता दर घनफुटास १२० पौंड आहे. घसरणीच्या बाबतीत मिळणारा सुरक्षिततांक १·५ असेल, अशा बेताने खोदाईच्या बाजूंचा उतार ठेवला पाहिजे. सुरक्षिततेच्या अटींची पूर्तता करावयाची, तर समाकर्षणाचे लक्ष्मणमूल्य खालील मूल्यापेक्षा अधिक असून चालणार नाही.

$$स_{\text{ल}} = \frac{५००}{१·५} = ३३३ \text{ पौंड/चौ. फूट}$$

समीकरण ५८ (३) मध्ये $च = २०$ फूट, $घ = १२०$ पौंड/घ. फू. आणि $स_{ल} = ३३३$ पौंड/चौ. फू. ही मूल्ये नियुक्त करून खालील उत्तर मिळते.

$$स_{ल} = ३३३ = \frac{घ \times च}{अ_{स्थै}} = \frac{१२० \times २०}{अ_{स्थै}}$$

म्हणजेच

$$अ_{स्थै} = ७\cdot१८$$

हे मूल्य आकृती ४५ अ मधील प बिंदूच्या कोटीमूल्याहून अधिक आहे; तेव्हा स्वीकारार्ह असा उतारकोन गाधतागुणकावर अवलंबून असणार. चिकण मृत्तिकेच्या थराखालचा कठिण तळ आणि खोदाईचा तळ एकच असतील, तर $अ_{गा}$ या गाधतागुणकाचे मूल्य एक होते (समीकरण ५८ (५)). $अ_{गा} = १$ असताना आलेखावर $अ_{स्थै} = ७\cdot१८$ या मूल्याला अनुषंगिक भुजामूल्य $\beta = ३३^{\circ}$ आहे. $अ_{स्थै} = ७\cdot१८$ हा बिंदू रेखांकित क्षेत्राच्या वर पडत असल्यामुळे लक्ष्मणवर्तुळ उतारछेदी असेल. दुसऱ्या ठिकाणी चिकण मृत्तिकेच्या थराखालचा कठिण तळ खोदाईच्या तळापासून १० फुटांवर आहे असे समजू. तेथे गाधतागुणक $अ_{गा} = १\cdot५$ होतो आणि $अ_{स्थै}$ दर्शक आलेखावरील $अ_{स्थै} = ७\cdot१८$ या मूल्यास अनुषंगिक असणारे β चे मूल्य $१७^{\circ}\ ३०'$ असे मिळते. हा बिंदू रेखांकित क्षेत्राच्या सीमेपासून खाली फारच थोड्या अंतरावर आहे. अर्थातच लक्ष्मणवर्तुळ हे मध्यमा-वर्तुळ असेल व ते खोदाईच्या तळाला उताराच्या तळबिंदूपासून जवळच छेदील. उताराच्या मध्यातून जाणारी उभी रेषा कठिण तळाला जेथे मिळते, त्या बिंदूत हे वर्तुळ त्या थराला स्पर्शून जाईल.

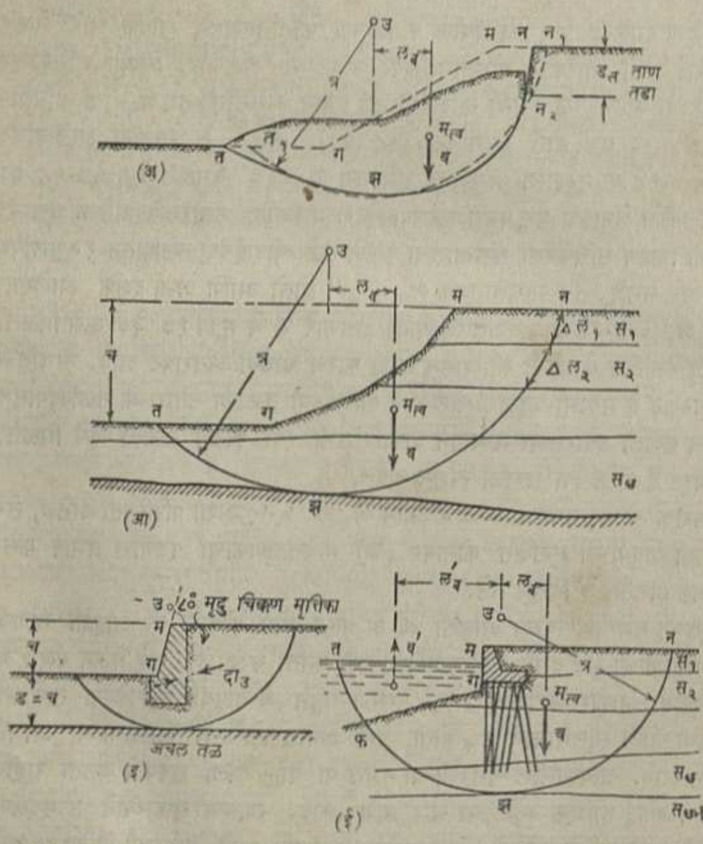
उपरोक्त उदाहरणावरून $\phi = ०$ आणि $अ_{स्थै} > ५\cdot५$ अशी परिस्थिती असेल, तर उताराला द्यावयाच्या सुरक्षित कोनावर (β) गाधतागुणकाचा पडणारा प्रभाव कसा निर्णायक असतो, हे दिसून येते.

दुसऱ्या समस्येचे स्वरूप आकृती ४६ अ वरून स्पष्ट होईल. ही आकृती म्हणजे एका घसरणीचा छेद आहे. चिकण मृत्तिकेची घनता घ आहे. खड्डे घेऊन *नझत* या घसरपृष्ठाचा आकार ठरविला आहे. घसरण घडून येण्यापूर्वी उद्भवलेल्या ताणजन्य तड्यांची खोली स्थूलमानाने $ह_{त}$ होती, हेही क्षेत्रात केलेल्या निरीक्षणाच्या आधारे माहीत आहे. प्रत्यक्षातील घसरणीच्या *नझत* या वक्र रेषेला शक्यतो जुळता राहील असा $न_{१}झत_{१}$ हा एक वर्तुळाचा चाप आपण काढू. त्याच्या साहाय्याने उच्छेदक्षणी घसरणीला विरोध करणारे $स_{आ}$ हे समाकर्षण ठरवायचे आहे. वर्तुळाची त्रिज्या त्र आहे आणि उ हा त्याचा मध्यबिंदू आहे. $न_{२}$ हा बिंदू उताराच्या माथ्यापासून $ह_{त}$ खोलीवर आहे आणि $न_{२}त_{१}$ या चापाची लांबी $ल_{चा}$ आहे. $स_{आ}$ हे समाकर्षण या चापावर कारक होते, असे आपण मानतो. $न_{२}झत_{१}$ या चापाच्या वर असलेल्या मृत्तिकाराशीचे एकांक

जाडीवरील वजन व आहे. उच्छेद घडण्यापूर्वी उ या भ्रमणकेंद्रापासून मोजलेली व ची भुजा $\text{ल}_{\text{व}}$ होती. अर्थातच आवश्यक समाकर्षणाचे मूल्य पुढील समीकरणाने मिळते.

$$\text{स}_{\text{आ}} = \frac{\text{व}\cdot\text{ल}_{\text{व}}}{\text{त्र}\cdot\text{ल}_{\text{चा}}} \qquad ५८\ (१)$$

तिसऱ्या प्रकारच्या समस्येतील उच्छेदात सलग असा एकच उतार नाही व त्याखालची मृत्तिकाही समांग नाही. आकृती ४६ आ वरून या उदाहरणातील कृती स्पष्ट होईल. आकृतीत मृदू, चिकण मृत्तिकेच्या सांधलेल्या उताराचा उभा छेद दाखविला



आकृती ४६ : (अ) खऱ्या घसररेषेऐवजी (सलग रेषा) वर्तुळाकार रेषेची नियुक्ती (आ ते ई) $\phi = 0$ असणाऱ्या चिकण मृत्तिकेतील आधारउच्छेद; (आ) उताराखाली थरयुक्त व समाकर्षणयुक्त मृत्तिका असताना; (इ) आधारभिंतीखालील; (ई) स्थूणांवर आधारित सागरी धक्याच्या भिंतीखालील.

आहे. अव्यंग नमुन्यावर प्रयोग करून मृत्तिकेचे प्राकृतिक गुणधर्म ठरविलेले आहेत. या प्रयोगांतून मिळालेल्या फलितांच्या आधारे या चिक्कण मृत्तिकेच्या एकूण उंचीत $स_१, स_२, \ldots स_छ$ अशा समाकर्षण मूल्यांचे निरनिराळे थर आहेत असे आपण गृहीत धरू. त्यानंतर आपण *नज्ञत* हा वर्तुळाचा चाप काढू. अधिकतर प्रमाणात मृदू असणाऱ्या थरांतून जाणाऱ्या भागांची लांबी शक्य तेवढी अधिक असेल, अशा पद्धतीने हा चाप काढला पाहिजे. उ हा वर्तुळाचा मध्यबिंदू आहे. चापाच्या वर असलेल्या *मनज्ञत* या मृत्तिकाखंडाचा गुरुत्वमध्य $म_{त्व}$ आहे आणि त्याचे एकांक जाडीवरील वजन $व$ आहे. या ठिकाणी $व.ल_व$ या विस्थापनकारी परिबलाला समाकर्षणजन्य $प_स$ हे परिबल विरोध करते.

$$प_स = त्र \sum_{१}^{छ} स_छ \cdot \Delta ल_छ$$

येथे $\Delta ल_छ$ म्हणजे ज्यातील समाकर्षण $स_छ$ आहे, त्या थरातील चापखंडाची लांबी आहे. *नज्ञत* या चापावरून घसरण व्हावयाची असेल, तर त्या बाबतीतील उताराचा सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे आहे.

$$सु = \frac{प_स}{व \cdot ल_व} = \frac{त्र \sum_{१}^{छ} स_छ \, \Delta ल_छ}{व \cdot ल_व} \qquad [१]$$

निरनिराळी वर्तुळे घेऊन हीच आकडेमोड पुनः केली पाहिजे आणि अशा आकडेमोडीतून प्राप्त होणारे सु चे लघुतम मूल्य म्हणजे उताराचा सुरक्षिततांक होय. ही पद्धत निखालसपणे 'प्रयत्नांती यश' अशा प्रकारची आहे.

उताराच्या स्थैर्याचा अभ्यास करण्याची उपरोक्त पद्धत आधारभिंतीसारख्या एखाद्या वास्तूने आधार दिलेल्या दरडीच्या किंवा तटाच्या उदाहरणासही लागू करता येते. आकृती ४६ इ मध्ये च उंचीच्या आधारभिंतीमागील समांग, मृदू, चिक्कण मृत्तिकेच्या उभ्या दरडीचा छेद दाखविला आहे. या चिक्कण मृत्तिकेखाली $ड = च$ खोलीवर कठिण थर आहे. म्हणून गाधतागुणक $अ_{गा}$ चे मूल्य २ आहे. न सरकता वा न कलंडता $दा_उ$ हा पार्श्वीय मृत्तिकादाब पेलण्याइतकी आधारभिंत समर्थ असेल, तर उतारउच्छेदाचा धोका असणार नाही; तेव्हा आधारभूमीसह उच्छेदाच्या शक्यतेचाच केवळ विचार करावयास हवा. स्थैर्याचे स्थूल प्राकलन करताना मृत्तिकेची घनता आणि आधारभिंतीची घनता यांतील फरक दुर्लक्षिला तरी चालते. घनतेची दोन्ही मूल्ये समान असतील, तर अधारभिंतीच्या स्थैर्यासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे आणि आधार न दिलेल्या दरडीचा आधारभूमीसह उच्छेद टाळण्यासाठी आवश्यक असलेली लक्षणे सारखीच होतात. गाधता-गुणकाचे मूल्य २ असल्यामुळे आकृती ४५ अ मधील $अ_{गा} = २$

या आलेखावरून मध्यमा-वर्तुळानुसार होणाऱ्या उच्छेदाच्या बाबतीतील स्थैर्य-गुणक मिळू शकतात. हा आलेख आकृतीच्या चौकटीला भिडेपर्यंत डावीकडे वाढवीत नेला (आकृतीत हे दाखविलेले नाही) तर आपल्याला असे आढळते की, उतार कोन $ब = ८०^\circ$ असताना स्थैर्य-गुणक ५·६० इतका आहे. या उताराच्या या परिस्थितीतील लक्ष्मणउंचीसाठी समीकरण ५८ (४)च्या साहाय्याने आपल्याला पुढील मूल्य प्राप्त होते:

$$च_{ल} = \frac{स}{घ} अ_{स्थै} = ५\cdot६ \frac{स}{घ}$$

आधारभिंत उच्छेदाला प्रतिबंध करण्याइतकी समर्थ असूनही तिची उंची $च_{ल}$ हून अधिक असेल तर तिचा उच्छेद मध्यमा-वर्तुळावरून होतो; आणि आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कठिण थराचा पृष्ठभाग या वर्तुळास स्पर्शरेषेप्रमाणे असतो. तसेच उ भोवती होणाऱ्या भ्रमणात्मक हालचालीमध्ये भिंत आणि तिच्यामागचा चिकण मृत्तिकाराशी या दोहोंचा अंतर्भाव होतो.

या उदाहरणातील भिंतीच्या लक्ष्मणउंचीचे मूल्य अधिक अचूकपणे मिळवावयाचे असेल, तर भिंतीच्या आकारमानाच्या मृत्तिका-खंडाचे वजन आणि भिंतीचे वजन यांतील फरक विचारात घेऊन गणित मांडावयास हवे. या अधिक असणाऱ्या वजनामुळे लक्ष्मण-वर्तुळाच्या मध्यबिंदूचे स्थान बदलते. तसेच स्थैर्यगुणकाचे मूल्यही काही प्रमाणात कमी होते. $अ_{स्थै}$ चे हे सुधारित मूल्य ठरविण्याची समस्या 'प्रयत्नांती यश' पद्धतीने सोडविणे शक्य असते.

आकृती ४६ ई मध्ये स्थूणांचा आधार दिलेली सागरी धक्क्याची भिंत दाखविली आहे. येथे स्थूणांच्या कार्तनिक सामर्थ्यामुळे नफ हे संभाव्य घसरपृष्ठ स्थूणा आड न येता पुढे जाते. भिंतीच्या डावीकडील पाणी म्हणजे $घ_{ज}$ घनतेचा व समाकर्षणाचा अभाव असलेला एक थर समजता येतो. मृत्तिका थरातील समाकर्षणांची मूल्ये $स_{१}$, $स_{२}$, इ. इ. आहेत. घसरपृष्ठाच्या वर असणाऱ्या सर्व वस्तूंचे एकांक लांबीवरील वजन व आहे. त्यांत भिंत, पाणी व मृत्तिका या सर्वांचा समावेश आहे. घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक समीकरण १ ने ठरविता येईल. पूर्वी आकृती ४६ आ च्या संबंधात वर्णिल्याप्रमाणे लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान 'प्रयत्नांती यश' पद्धतीने ठरविता येते. आकृती ४६ इ व ४६ ई यांमध्ये दाखविलेल्या वास्तूंवर कारक असणारा मृत्तिकादाब सुरक्षिततांक ठरविण्याच्या गणितात येत नाही; कारण हा दाब म्हणजे एक अंतर्गत बल आहे. विचारात घ्यावयास हवीत अशी बले म्हणजे फक्त व या वजनाने व्यक्त होणारी सर्व वास्तुविषयक बले आणि घसरपृष्ठाच्या वर स्थित असलेल्या मृत्तिकेवर जी काही बाहेरून कारक असतील ती बले हीं होत.

आकृती ४६ आ आणि ई यांमध्ये दाखविलेल्या थरांपैकी, एखादा थर इतरांपेक्षा फारच मृदू किंवा दुर्बल असेल, तर घसरपृष्ठ स्थूलमानानेसुद्धा वर्तुळाकार असत नाही.

अशा ठिकाणी संमिश्र आकाराचे घसरपृष्ठ गृहीत धरावे लागते. परिच्छेद ६३ मध्ये त्याविषयी विवरण केले जाईल.

शेवटचे उदाहरण म्हणून, आपण एखाद्या तलावातील किंवा धरणातील पाण्याची पातळी द्रुत गतीने उतरविली असता, अशा क्रियेचा तलावाच्या तटावर किंवा धरणाच्या उतारावर होणारा परिणाम अभ्यासासाठी घेऊ. त्यातील गणितात्मक कृती समजावून घेण्यासाठी आकृती ४६ ई मध्ये दाखविलेल्या छेदाचे साहाय्य घेऊ. या छेदात *नझफ* या घसरपृष्ठावरील मृत्तिका व पाणी यांचे भिंतीच्या एकांक लांबीवरील एकूण वजन *व* आहे, विस्थापनकारी परिबलांचे मूल्य $व \cdot ल_{ब}$ आहे आणि घसरणीच्या बाबतीतील समीकरण १ वरून मिळणारा सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे आहे.

$$सु = \frac{अ \sum_{१}^{छ} \cdot स_{छ} . \Delta ल_{छ}}{वल_{ब}}$$

पाण्याची पातळी फ बिंदूच्याही खाली उतरविली असता *नफत* या घसरपृष्ठावरील मृत्तिका व पाणी यांच्या *व* या वजनामध्ये *व'* एवढी घट होते. *व'* म्हणजे *मगफत* या जलराशीचे वजन होय. *व'* हे बल उ या भ्रमणकेंद्रापासून $ल'_{ब}$ इतक्या अंतरावर आहे. त्यामुळे पाण्याची पातळी उतरविण्याच्या क्रियेमुळे विस्थापनकारी परिबल $व \cdot ल_{ब}$ या त्याच्या मूळ मूल्यापासून $व \cdot ल_{ब} + व' \cdot ल'_{ब}$ या मूल्यापर्यंत वाढते. समीकरणातील उजव्या बाजूकडील अंशाच्या ठिकाणी मांडलेले समाकर्षणजन्य परिबल मात्र न बदलता, तसेच राहते. तेव्हा लक्ष्मणवर्तुळाच्या स्थानावर द्रुत रिक्तन क्रियेचा पडणारा प्रभाव दुर्लक्षावयाचा झाल्यास, अशा रिक्तनानंतरचा सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$सु' = \frac{अ \sum_{१}^{छ} स_{छ} \Delta ल_{छ}}{व \cdot ल_{ब} + व' \cdot ल'_{ब}} \qquad [२]$$

याहून अधिक अचूक उत्तर हवे असेल, तर द्रुत रिक्तनानंतरचे लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान पूर्वीच्या परिच्छेदांतून वर्णिल्याप्रमाणे स्वतंत्ररीत्या 'प्रयत्नांती यश' पद्धतीने ठरविले पाहिजे.

६०. ऌ > ० या परिस्थितीतील स्थैर्य-गुणक आणि लक्ष्मणवर्तुळ : ऌ हा कार्तनिक विरोधाचा कोन शून्याहून मोठा असल्यास मृत्तिकेचा विरोध कूलोमच्या पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = स + ए \, स्प \, ऌ$$

परिच्छेद ५६ मध्ये विशद केल्याप्रमाणे, घसरण एकतर नुसत्या उताराचा किंवा आधारभूमीसह उताराचा उच्छेद घडून आल्यामुळे होऊ शकते. उतार-उच्छेद तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळावरून घडून येतात. आकृती ४४ अ मध्ये *गन* हा कोणत्याही एका तळबिंदुगामी वर्तुळाचा चाप आहे. परिच्छेद ५८ मध्ये आकृती ४४ अ च्या संबंधात वापरलेली चिन्हे तशीच ठेवून, आकृतीतील भूमितीच्या आधारे विचार केला असता आपल्याला असे आढळते की, *गन* वरून होणाऱ्या घसरणीला प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असलेल्या समाकर्षणाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे असले पाहिजे.

$$\text{स}_{\text{आ}} = \text{घच}\,\frac{१}{\text{फ}\,(\text{ग}, \text{ञ}, \text{ठ}, \text{ω})} \qquad [१]$$

समीकरण ५८ (२ अ) सारखेच हे समीकरण आहे; फक्त छेदामधील पदात ω या कोनाची भर पडली आहे. तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान पुढील समीकरणांची पूर्तता केली असता निश्चित होते.

$$\frac{\partial\,\text{स}_{\text{आ}}}{\partial\,\text{ग}} = ० \text{ आणि } \frac{\partial\,\text{स}_{\text{आ}}}{\partial\,\text{ठ}} = ०$$

ही समीकरणे सोडवून तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळावरून होणारी घसरण रोखण्यासाठी आवश्यक असलेल्या $\text{स}_{\text{आ}} = \text{स}_{\text{ल}}$ या समाकर्षणाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{स}_{\text{ल}} = \frac{\text{घ}\cdot\text{च}}{\text{फ}\,(\text{ग}, \text{ञ}, \text{ठ}, \text{ω})} = \frac{\text{घ}\cdot\text{च}}{\text{अ}_{\text{स्थै}}} \qquad [२]$$

समीकरण ५८ (३) सारखेच हे समीकरण आहे. परंतु त्यातील $\text{अ}_{\text{स्थै}}$ हा स्थैर्यगुणक फक्त उतारकोनावरच नव्हे, तर ω या कोनावरही अवलंबून आहे. ω ची मूल्ये ४°, ५°, १०°, १५°, २०° आणि २५° असताना मिळणारा, उतारकोन ञ व स्थैर्यगुणक $\text{अ}_{\text{स्थै}}$ यांतील संबंध, आकृती ४५ अ मध्ये दाखविला आहे (फेलेनियस १९२७). समाकर्षण आणि उतारकोन दिलेले असल्यास समीकरण २ मधील $\text{स}_{\text{ल}}$ ऐवजी स आणि च ऐवजी लक्ष्मणउंची $\text{च}_{\text{ल}}$ घालून पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{च}_{\text{ल}} = \frac{\text{स}}{\text{घ}}\,\text{अ}_{\text{स्थै}} \qquad [३]$$

आकृती ४५ अ मधील $\text{पप}_{१.५}$ या बिंदुयुक्त आलेखाच्या उजव्या बाजूस स्थित असलेले सगळे बिंदू, तळबिंदूच्या पातळीहून ज्यांचा नीचतम बिंदू खाली आहे, अशा तळबिंदुगामी वर्तुळांना अनुषंगिक आहेत. उतारकोन आणि तदनुषंगिक तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाच्या नीचतम बिंदूचा गाधतागुणक यांतील संबंध आकृती ४५ इ मधील ω = ५°, ω = १०° अशी नावे दिलेल्या सरळ आलेखांनी दाखविला आहे. एखादे तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळ कठिण थराचा पृष्ठभाग छेदीत असेल, म्हणजेच

त्याचा गाधतागुणक भूपृष्ठाखालच्या कठिण किंवा अचल थराच्या पृष्ठभागाला अनुषंगिक असणाऱ्या गाधतागुणकापेक्षा अधिक असेल, तर या थराचा पृष्ठभाग म्हणजे स्पर्शरेषा ठरेल, अशा वर्तुळावरून घसरण होते. गाधतागुणकाचे लघुतम मूल्य एक इतके असू शकते. $\text{अ}_{\text{गा}}=१$ आणि $\text{ऌ}=५^{\circ}$ असल्यास $\text{अ}_{\text{गा}}=१$ अशी खूण केलेल्या व $\text{प}_{५}$ मधून जाणाऱ्या तुटक आलेखाने स्थैर्यगुणक दाखविले जातात. या मर्यादादर्शक आलेखाच्या कोटींची मूल्ये आणि $\text{ऌ}=५^{\circ}$ अशी खूण असलेल्या सलग आलेखाच्या कोटींची मूल्ये यांतील फरक क्षुल्लक आहे. ऌचे मूल्य जसे वाढते, तसा हा फरक कमी होतो. म्हणून ऌचे मूल्य लहान नसल्यास गाधतागुणकाचा स्थैर्यगुणकावर पडणारा प्रभाव दुर्लक्षिला तरी चालते.

उतारकोनाचे मूल्य तेच राहून ऌचे मूल्य वाढत गेल्यास $\text{अ}_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य वाढत जाते. ञ आणि ऌ यांच्या विवक्षित मूल्यांच्या वेळी $\text{अ}_{\text{स्थै}}$ चे मूल्य $\text{अ}_{\text{स्थै}\,\text{ऌ}}$ असे मानले आणि $\text{अ}_{\text{स्थै}\,०}$ हे $\text{ऌ}=०$ असताना *ग प फ म* या आलेखावरून मिळणारे मूल्य असले, तर पुढील गुणोत्तरास **घर्षण-निर्देशांक** असे म्हणतात.

$$\text{अ}_{\text{ऌ}}=\frac{\text{अ}_{\text{स्थै}\,\text{ऌ}}}{\text{अ}_{\text{स्थै}\,०}} \qquad [४]$$

ञ, स आणि ऌ यांची मूल्ये दिलेली असता लक्ष्मणउंचीवर पडणारा घर्षणजन्य विरोधाचा प्रभाव या निर्देशांकाच्या मूल्याने दाखविला जातो. $\text{च}_{\text{ल}\,०}$ ही $\text{ऌ}=०$ ला संगत अशी लक्ष्मणउंची असेल, तर ऌच्या दिलेल्या मूल्यास संगत असलेली $\text{च}_{\text{ल}\,\text{ऌ}}$ ही लक्ष्मणउंची पुढीलप्रमाणे असते.

$$\text{च}_{\text{ल}\,\text{ऌ}}=\text{च}_{\text{ल}\,०}\cdot\text{अ}_{\text{ऌ}} \qquad [५]$$

$\text{ञ}=\text{ऌ}$ असल्यास $\text{अ}_{\text{ऌ}}$ या घर्षणनिर्देशांकाचे मूल्य अनंत होते. च उंचीच्या उताराच्या तळबिंदूतून जाणाऱ्या वर्तुळावरून होणाऱ्या घसरणीला प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असलेले समाकर्षण पुढीलप्रमाणे असते.

$$\text{स}_{\text{ल}\,\text{ऌ}}=\frac{\text{घ}\cdot\text{च}}{\text{अ}_{\text{स्थै}\,\text{ऌ}}}$$

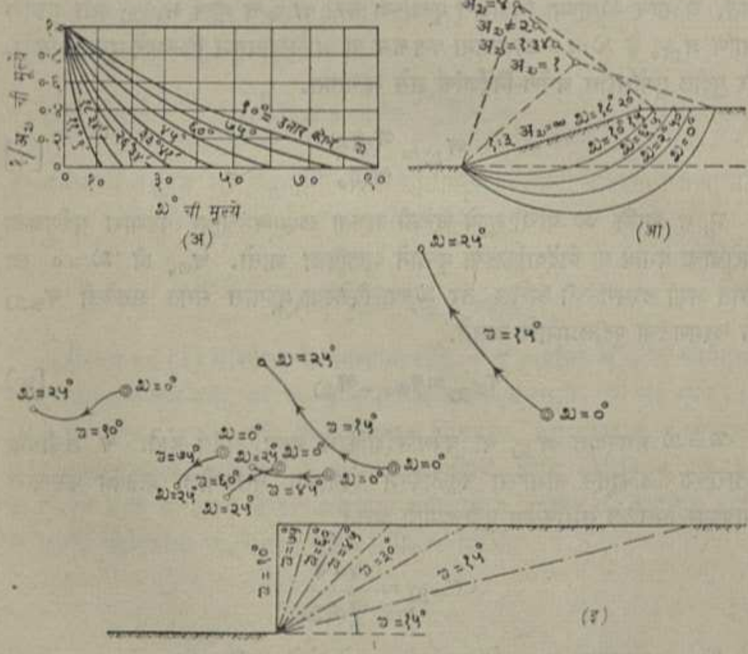
$\text{ऌ}=०$ असल्यास $\text{स}_{\text{ल}\,\text{ऌ}}$ चे मूल्य $\text{स}_{\text{ल}\,०}$ इतके होते आणि $\text{अ}_{\text{स्थै}\,\text{ऌ}}$ चे मूल्य $\text{अ}_{\text{स्थै}\,०}$ इतके होते, म्हणून पुढील समीकरण मांडता येईल.

$$\text{स}_{\text{ल}\,०}=\frac{\text{घ}\cdot\text{च}}{\text{अ}_{\text{स्थै}\,०}}$$

$\text{अ}_{\text{स्थै}\,\text{ऌ}}=\text{अ}_{\text{ऌ}}\cdot\text{अ}_{\text{स्थै}\,०}$ असल्यामुळे,

$$स_{ळ ळ} = \frac{अ_{स्थै ळ}}{घ.\ च} \times \frac{१}{अ_{ळ}} = \frac{१}{अ_{ळ}} स_{ळ ०} \qquad [६]$$

आहे. $अ_{ळ}$ची मूल्ये आणि लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान यांवर पडणारा ळ चा प्रभाव, या विषयाचे संशोधन फेलेनियसने केले आहे (१९२७). उ या उतारकोनाची निरनिराळी मूल्ये घेऊन मिळणारा ळ आणि १/$अ_{ळ}$ यांतील संबंध आकृती ४७ अ मध्ये दाखविला आहे. आकृती ४७ आ मध्ये उ=१८° २६′ (१ : ३ उतार) असताना तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाच्या मध्यबिंदूच्या स्थानावर पडणारा $अ_{ळ}$ चा प्रभाव दाखविला आहे. $अ_{ळ}$चे मूल्य जसे वाढत जाते; तसा उतार आणि उच्छेदपृष्ठ यांनी



आकृती ४७ : (अ) अंतर्गत घर्षणकोन ळ आणि घर्षण-निर्देशांक $अ_{ळ}$ चा व्युत्क्रमांक यांतील संबंध; (आ) उतारकोन दिला असता, ळ च्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार मिळणारे तळबिंदुगामी लक्ष्मण-वर्तुळाच्या मध्यबिंदूचे स्थान आणि तदनुषंगिक $अ_{ळ}$ चे मूल्य; (इ) उतारकोन उ च्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार ळ च्या मूल्यांचा तळबिंदुगामी लक्ष्मण-वर्तुळाच्या मध्यबिंदूवर पडणारा प्रभाव. (आधार : अ आणि आ रेखाकृती; फेलेनियस, १९२७ आणि इ : डी. डब्ल्यु. टेलर, १९३७)

सीमित होणारा मृत्तिकाराशी लहान होत जातो आणि $अ_{ञ} = \infty$ झाल्यास उच्छेदपृष्ठ आणि उतार एकरूप होतात. उतारकोनाचे मूल्य बदलत गेल्यास कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचा, तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाच्या मध्यबिंदूच्या स्थानावर पडणारा प्रभाव आकृती ४७ इ मध्ये दाखविला आहे. ही आकृती टेलरच्या (१९३७) संशोधनावर आधारलेली आहे.

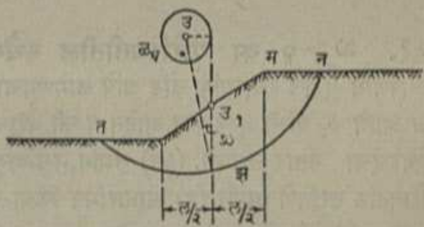
तिरकस उतारांच्या बाबतीत होणारा आधारभूमीसह उच्छेद मध्यमा वर्तुळांवरून होतो. अशा मध्यमा लक्ष्मणवर्तुळाचा मध्यबिंदू अशा स्थानी असतो की, उताराच्या $उ_1$ या मध्यबिंदूतून जाणारी क्षितिजलंब रेषा घर्षणवर्तुळाला स्पर्शरेषा ठरते. आकृती ४८ पाहा. या विधानाचा पडताळा परिच्छेद ५८ मध्ये मांडलेल्या आणि आकृती ४४ इ मध्ये स्पष्ट केलेल्या उपपत्तीच्या साहाय्याने पाहता येईल. घर्षण-वर्तुळाचे तत्त्व परिच्छेद ४० मध्ये वर्णिले आहेच.

मध्यमा लक्ष्मणवर्तुळावरून होणारी घसरण रोखण्यासाठी आवश्यक असणारे समाकर्षणाचे मूल्य $स_{ल}$ पुढील समीकरणाने मिळते.

$$स_{ल} = \frac{घ \cdot च}{अ_{स्थै}}$$

समीकरण २ सारखेच हे समीकरण आहे. $च_{ल}$ या लक्ष्मणउंचीच्या बाबतीत आपल्याला समीकरण ३ सारखे असणारे पुढील समीकरण मिळते.

$$च_{ल} = \frac{स}{घ} अ_{स्थै}$$



आकृती ४८ : $ञ > ०$ असतांना आधारभूमीसह उच्छेदाच्या परिस्थितीतील लक्ष्मणवर्तुळ (आधार : फेलेनियस १९२७).

$अ_{स्थै}$ या स्थैर्यगुणकाचे मूल्य, $ञ$ आणि $अ_{गा}$ यांवर अवलंबून असते. $ञ$, $उ$ आणि $अ_{गा}$ यांची निरनिराळी मूल्ये गृहीत धरून $अ_{स्थै}$चे मूल्य मिळविले असता असे आढळून आले की, उताराला आधार दिलेला नसूनही आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका नको असेल, तर कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे मूल्य सुमारे ५° पेक्षा कमी नसावे आणि उताराचा कोन १०° पेक्षा कमी नसावा.

एखाद्या उताराची स्थैर्यलक्षणे आकृती ४५ अ मधील $गप_{१०}$ या तुटक रेषेच्या उजव्या बाजूस असणाऱ्या बिंदूने दाखविली जात असतील, तर लक्ष्मणवर्तुळ हे मध्यमा वर्तुळ असण्याचा संभव असतो. तथापि $ञ$ चे मूल्य ५° अधिक असल्यास, हे मध्यमा वर्तुळ जवळजवळ तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळाशी एकरूप होते. $ञ = ५°$ असेल, तर या परिस्थितीतील स्थैर्यगुणक आकृती ४५ अ मधील $प_५$ या तुटक आलेखाच्या कोटींनी

दाखविला जातो. हा आलेख $\phi = 5^\circ$ असताना मिळणाऱ्या सलग आलेखाशी इतका मिळताजुळता आहे की, त्या दोहोंतील फरक दुर्लक्षिता येतो. ϕचे मूल्य याहून अधिक असेल, तर हा फरक अधिकच नगण्य असतो.

$\phi > 0$ असल्यास, फक्त स्थूणाधारी आधारभिंती किंवा सागरी धक्क्याच्या भिंती यासारख्या वास्तूंच्या खालूनच, वैशिष्ट्यपूर्ण असा आधारभूमीसह उच्छेद होतो. आकृती ४६ ई मध्ये तो दाखविला आहे. अशा वास्तूंच्या बाबतीत त्यांच्या पायाच्या वर उच्छेदाचा संभव नसतो. वैशिष्ट्यपूर्ण असा आधारभूमीसह उच्छेद घडून येण्यास अत्यंत आवश्यक असलेली गोष्ट म्हणजे ϕ या कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे मूल्य अतिशय लहान असणे ही होय. आकृती ४८ वरून स्पष्ट होणाऱ्या नियमानुसार मध्यमा लक्ष्मणवर्तुळाचा मध्यबिंदू ϕचे मूल्य वाढत गेल्यास उतारापासून दूर सरकत जातो. आणखीही एक गोष्ट आढळली आहे, ती म्हणजे ϕ चे मूल्य वाढत गेल्यास, हा मध्यबिंदू थोडा खालीही सरकतो. ϕ चे मूल्य काहीही असले, तरी २θ या केंद्रस्थ कोनाचे मूल्य १००° ते १३५° यादरम्यान असते.

६१. $\phi > 0$ या परिस्थितीतील स्थैर्याचे गणित : स्थापत्य-व्यवहारात आपणांस पुढील समस्यांना तोंड द्यावे लागण्याचा संभव असतो. (अ) जिच्या बाबतीत स आणि ϕ यांची मूल्ये ज्ञात आहेत व जी बरीचशी समांग आहे, अशा मृत्तिकेतील खोदाईचा उतार ठरविणे, (आ) समांग नसलेल्या मृत्तिकेतील दिलेल्या उताराचा सुरक्षिततांक ठरविणे आणि (इ) आधारभिंत किंवा सागरी धक्क्याची भिंत यांचा आधारभूमीसह उच्छेद होण्याची शक्यता असल्यास, त्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरविणे.

पहिल्या प्रकारातील समस्येचे एक उदाहरण परिच्छेद ५९ च्या आरंभी सोडविलेल्या समस्येत थोडा बदल करून प्राप्त होईल. त्या ठिकाणी कार्तनिक विरोधाचा कोन $\phi = 0$ गृहीत धरला होता, त्याऐवजी आता ६° गृहीत धरू; तसेच पुढील गोष्टीही गृहीत धरू : खोदाईची खोली २० फूट, समाकर्षण $स = ५००$ पौंड/चौ. फू., घनता $घ = १२०$ पौंड/घ. फू. आणि घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक $सु = १.५$. सुरक्षिततेच्या अटींची पूर्तता करावयाची, तर उपलब्ध समाकर्षणाऐवजी पुढील मूल्य घेतले पाहिजे.

$$स_{ल} = स / सु = ३३३ \text{ पौंड/चौ. फू.}$$

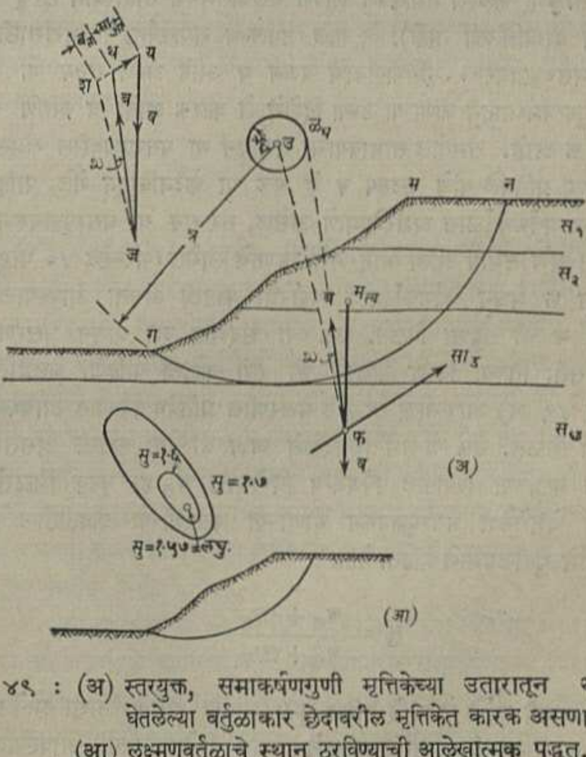
त्याचप्रमाणे $स्प\phi$ या उपलब्ध गुणकाऐवजी पुढील मूल्य घेतले पाहिजे.

$$स्प\phi_{ल} = \frac{१}{सु}\ स्प\phi = \frac{१}{१.५} \times ०.१०५ = ०.०७०$$

म्हणजेच $\phi_{ल} = ४^\circ$. समीकरण ६० (२) मध्ये $च = २०'$, $घ = १२०$ पौंड/घ. फू. आणि $स_{ल} = ३३३$ पौंड/चौ. फू. ही मूल्ये आदेशित करून $अ_{स्थै}$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$अ_{स्थै} = ७\cdot१८$$

आकृती ४५ अ मधील ϕ=४° या आलेखावर हे मूल्य, उतारकोन ञ=४२° असताना मिळते. ४२° इतक्या उभट उताराच्या बाबतीत आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका नसतो. उताराच्या तळाखाली थोड्याच खोलीवर कठिण थर असेल, तर यापेक्षाही थोड्या अधिक उभट उताराच्या बाबतीतही असा धोका असत नाही. म्हणून खोदाईचे उतार क्षितिजाशी ४२° चा कोन करीत असतील, तर सुरक्षिततेविषयी शंका राहात नाही, मग $अ_{गा}$ या गाधतागुणकाचे मूल्य काहीही असो. याउलट, ϕ=० असल्यास (परिच्छेद ५९) ग्राह्य मानता येण्याजोग्या उतारकोनाचे मूल्य $अ_{गा}$ = १ असतांना ३३° आणि $अ_{गा}$ = १·५ असता १७° ३०′ या दोन मर्यादांमध्ये पडते. या उदाहरणावरून कार्तनिक विरोधी कोन अगदी लहान असला, तरीही उताराच्या स्थैर्यावर त्याचा कसा निर्णायक प्रभाव पडतो, हे दिसून येईल. सुमारे २०° हून अधिक कोन करणाऱ्या उतारांच्या बाबतीत, आधारभूमीसह उच्छेदाचा धोका टाळण्यासाठी आवश्यक



आकृती ४९ : (अ) स्तरयुक्त, समाकर्षणगुणी मृत्तिकेच्या उतारातून यदृच्छया घेतलेल्या वर्तुळाकार छेदावरील मृत्तिकेत कारक असणारी बले; (आ) लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान ठरविण्याची आलेखात्मक पद्धत.

असणाऱ्या कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे मूल्य अतिशय लहान असते, ही वस्तुस्थितीच मुख्यतः ह्या प्रभावास कारणीभूत आहे. असाच प्रभाव स चे मूल्य खोलीनुसार थोडेसे जरी वाढले, तरी पडतो. म्हणून मृदू, चिक्कण मृत्तिकेच्या दरडीचा आधारभूमीसह उच्छेद दृष्टीस पडला, तर लगेच जाणावे की, त्या ठिकाणी स चे मूल्य खोलीनुसार वाढणारे नसावे आणि कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे मूल्यही अगदी कमी असावे.

बाळसर, चिक्कण मृत्तिकेच्या उताराचा छेद आकृती ४९ अ मध्ये दाखविला आहे. हा उतार वाकडातिकडा आहे आणि चिक्कण मृत्तिकेतील समाकर्षण खोलीनुसार बदलणारे आहे. कार्तनिक विरोधाच्या कोनाचे सरासरी मूल्य ϕ आहे. अपवादात्मक मृदुतेचा थर खोदाईच्या तळात नसल्यास व ϕ चे मूल्य ५° हून अधिक असल्यास लक्ष्मणवर्तुळ उताराच्या तळबिंदूतून जाते. परंतु हे उदाहरण या ठिकाणी लक्षात घेतले जाणार नाही. उपरोक्त उताराचा घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरवायचा आहे. त्यासाठी आपण तळबिंदूतून जाणारा *गन* हा चाप अशा रीतीने काढू की, मृदुतम थरातून जाणारा त्याचा भाग शक्य तितका लांब असेल. नंतर या चापावर कारक असणारे $सा_{उ}$ हे फलरूप समाकर्षण आपण बलप्रतिमेच्या साहाय्याने ठरवू (आकृतीत ही प्रतिमा दाखविलेली नाही). हे झाले उपलब्ध समाकर्षण. विचारासाठी घेतलेल्या *गन* या घसरपृष्ठावरील मृत्तिकाखंडाचे वजन *व* आहे आणि *गनम* या आकृतीच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्यातून जाणाऱ्या उभ्या दिशेने ते कारक आहे. व आणि $सा_{उ}$ यांचा छेदनबिंदू फ आहे. समतोल साधावयाचा तर *गन* या घसरपृष्ठावरील लंबरूप प्रतिबले व घर्षणजन्य प्रतिबले यांचे फलरूप *ब* हे बल या छेदनबिंदूतून गेले पाहिजे. *ब* हे फलरूप बल घर्षणवर्तुळास स्पर्शरेषेप्रमाणे असेल, तर *गन* या घसरपृष्ठावरून होणाऱ्या उच्छेदाचा क्षण समीप आला आहे असे म्हणावे लागेल (परिच्छेद ४० पाहा).

म्हणून फ मधून घर्षणवर्तुळाला स्पर्शरेषा काढली असता आपल्याला उच्छेदावस्थेतील *ब* ची दिशा मिळते. उफ च्या संदर्भात ज्या बाजूस घसरण होण्याचा संभव असतो तिच्या विरुद्ध बाजूकडे ही रेषा काढली पाहिजे. बलप्रतिमा काढून (आकृती ४९ अ) आपल्याला $सा_{आ}$ हे घसरणीस प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असणारे समाकर्षण मिळते. उफ ला समांतर दिशेने जश ही रेषा काढली असता, $सा_{उ}$ या समाकर्षण बलाच्या दिशेतील घर्षणजन्य विरोधाचा $ब_{त}$ हा घटक मिळतो. शेवटी, विचारार्थ घेतलेल्या घसरपृष्ठावरून होणाऱ्या घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक स्थूलमानाने पुढीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$सु = \frac{ब_{त} + सा_{उ}}{ब_{त} + सा_{आ}} \qquad [१]$$

निरनिराळी वर्तुळे घेऊन हे गणित पुनः मांडले पाहिजे. अशा प्रत्येक वर्तुळाच्या मध्यबिंदूला तदनुषंगिक सुरक्षिततांकाचे मूल्य दिले असता, आपल्याला आकृती

४९ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे सममूल्य सु-दर्शक वलये काढता येतात. ज्याच्या बाबतीत सुरक्षिततांक लघुतम असेल अशा बिंदूच्या ठिकाणी लक्ष्मणवर्तुळाचा मध्यबिंदू असतो.

एखाद्या उभ्या दरडीला स्थूणाधारी आधारभिंतीने किंवा सागरी धक्क्याच्या भिंतीने आधार दिलेला असेल, तर आधारभूमीसह उच्छेदाचा संभव फार कमी असतो. अर्थात अशा उदाहरणातसुद्धा पायाखालील थराच्या कार्तनिक कोनाचे मूल्य ५° पेक्षा कमी नसावे. आधारभूमीसह उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक मागील परिच्छेदांतून वर्णिलेल्या घर्षण-वर्तुळ पद्धतीने ठरविता येतो. प्रत्यक्ष घडलेल्या घसरणीच्या बाबतीत घसरपृष्ठाचे स्थान माहीत असल्यामुळे कार्तनिक कोन ठरविण्यासाठीही ही पद्धत वापरलेली आहे (फेलेनियस १९२७). परंतु $\varnothing = 0$ असताना मिळणारे घसरपृष्ठ आणि प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ यांतील फरक, $\varnothing$ चे मूल्य ० हून अधिक असल्यामुळे आलेला आहे, की खोल जावे तसे किंचित प्रमाणात वाढणाऱ्या समाकर्षणामुळे आलेला आहे, याचा उमज अशा विश्लेषणातील फलितांवरून पडत नाही.

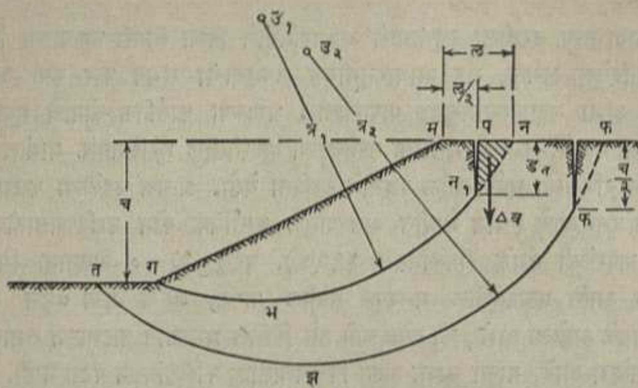
६२. ताणजन्य तड्यांमुळे होणाऱ्या चुकीचे निवारण : सुस्थितीत असलेल्या उभ्या कड्याच्या, खाली दिलेल्या लक्ष्मणउंचीपेक्षा त्यातील ताणजन्य तड्याची खोली अधिक असू शकणार नाही.

$$च_{स} = \frac{४स}{घ}\sqrt{ण} \qquad ५७(१)$$

येथे $ण = स्प^{2}(४५° + \varnothing/२)$ आहे. तथापि ताणजन्य तड्यांच्या खोलीच्या बाबतीत आणखीही काही मर्यादा आहेत. आकृती ५० मध्ये त्या दाखविल्या आहेत. तेथे *गभन* हा चाप तळबिंदुगामी लक्ष्मणवर्तुळ दाखवितो व *तझफ* हा चाप मध्यमा लक्ष्मणवर्तुळ दाखवितो. उतारातील प्रतिबल-परिस्थिती सामान्यतः च / २ पेक्षा अधिक खोलीचे ताणजन्य तडे पडण्यास अनुकूल नसते. तसेच ताणजन्य तडे व उताराची *म* ही माथ्याची कड यांतील अंतर, क्वचितच ही कड व लक्ष्मणवर्तुळाचे वरचे टोक *न*, यांतील अंतराच्या निम्म्यापेक्षा कमी असते. तेव्हा ताणजन्य तड्यांची खोली तळबिंदुगामी वर्तुळांच्या बाबतीत $ड_{त}$ पेक्षा (आकृती ५०) अधिक आणि मध्यमा-वर्तुळांच्या बाबतीत च / २ पेक्षा अधिक असण्याचा संभव नसतो, मग समीकरण ५७ (१) ने मिळणारे $च_{स}$ हे सैद्धांतिक, महत्तम मूल्य काहीही असो.

ताणजन्य तड्यांचा (आकृती ५० मधील $न_{1}प$) उताराच्या स्थैर्यावर होणारा परिणाम विविध असतो. तड्यांमुळे चापाच्या $नन_{1}$ या भागावरील समाकर्षणजन्य विरोध वगळला जातो हा पहिला परिणाम. अर्थातच उपलब्ध समाकर्षणाचे एकांक क्षेत्रावरील मूल्य *स* मानले, तर तड्यांमुळे एकूण समाकर्षण $स \times गन$ ऐवजी $स \times गन_{1}$ इतके होते.

गन वरील प्रत्यक्षातील समाकर्षण स ऐवजी पुढीलप्रमाणे गृहीत धरल्यास हाच परिणाम चापाची लांबी कमी न करता दाखविता येतो.



आकृती ५० : ताणजन्य तड्यांचा उताराच्या स्थैर्यावर पडणारा प्रभाव.

$$स_{उ} = स . \frac{गन_{१}}{गन} \qquad [१]$$

ताणजन्य तड्यांचा दुसरा परिणाम म्हणजे विस्थापनकारी परिबल कमी करणे. या परिबलाचे एकूण मूल्य घसरपृष्ठाच्या वर असलेल्या मृत्तिकाखंडाचे वजन × भ्रमणकेंद्रापासून त्याची भुजा, इतके आहे; त्यात नपन$_{१}$ या खंडाच्या $\Delta व$ या वजनाने उ$_{१}$ भोवती निर्मिलेल्या परिबलाइतकी घट होते. तिसरा परिणाम होतो तो तड्यांत साठणाऱ्या पाण्याच्या दाबामुळे. या दाबामुळे विस्थापनकारी परिबल वाढते. तथापि उपरोक्त शेवटच्या दोन परिणामांचा एकमेकांस जवळजवळ छेद जातो, असे त्यांचे गणित मांडल्यावर दिसून येते. तेव्हा स या मूळ समाकर्षणाऐवजी $स_{उ}$ हे समाकर्षणाचे प्रत्यक्षातील मूल्य (समीकरण १) आदेशित करून व तडे जणू नाहीतच असे समजून आपण उतारस्थैर्यांचा अभ्यास करू शकतो.

घसरपृष्ठ सरळ आहे, असे गृहीत धरून ही सुधारित कृती उभ्या दरडीच्या बाबतीत अवलंबिली, तर असे दिसते की, सुधारित समाकर्षण $स_{उ}$ (समीकरण १) हे उपलब्ध समाकर्षण स च्या निम्म्याइतके असते. समीकरण ५७ (२ अ) मध्ये स ऐवजी $स_{उ} = स / २$ आदेशित करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$च_{स} = ४ \frac{स_{उ}}{घ} = २ स / घ \qquad [२]$$

या समीकरणात तड्यांत साठलेल्या पाण्याचा परिणाम विचारात घेतलेला आहे. तड्यांमध्ये पाणी भरलेले नाही, असे गृहीत धरून आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त झाले होते.

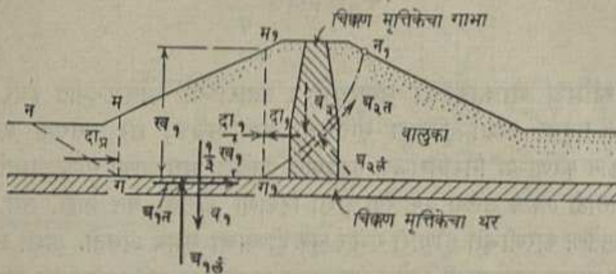
$$च'_{स} = १·६७ \frac{स}{घ} \qquad ५७(५)$$

६३. संमिश्र आकाराची घसरपृष्ठे : उताराच्या आधारभूमीत इतर थरांहून अतिशय मृदुतर अशा चिकण मृत्तिकेचा थर असेल, तर घसरपृष्ठ एकमेकांशी विशालकोन करणाऱ्या निरनिराळ्या तुकड्यांचे बनलेले असण्याचा संभव असतो. संपूर्ण घसरपृष्ठासाठी एकच सलग वक्र रेषा अशा ठिकाणी काढता येत नाही. तसे केल्यास असुरक्षिततेला कारणीभूत होणारी गंभीर चूक होण्याचा संभव असतो. अशा सांधलेल्या पृष्ठावरून घसरण व्हावयाची असेल, तर घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाराशीच्या निदान एका भागात तरी नम्य विसर्पण घडून आले आहे, अशी कल्पना करावी लागते. कारण सांधलेल्या पृष्ठावरून होणाऱ्या हालचालीसाठी उपरस्थ पदार्थात मोठीच विरूपता यावी लागते. या गुंतागुंतीमुळे संभाव्य घसरपृष्ठावरील मृत्तिकाराशीच्या अंतरंगात कारक असणाऱ्या बलांचा विचार केल्याविना अशा ठिकाणी भरावाचे स्थैर्य कितपत आहे, हे ठरविण्याची समस्या सोडविता येत नाही. आ. ५१ मध्ये ही बले दाखविली आहेत. या आकृतीत वाळूच्या धरणाचा छेद दाखविला आहे. त्याचा गाभा चिकण मृत्तिकेचा आहे आणि तलाव अद्याप भरावयाचा आहे. आधारभूमीत वाळूचे थर आहेत तसेच एक बारीक थर चिकण मृत्तिकेचाही आहे.

सममात्र आकाराच्या धरणातसुद्धा एका बाजूकडेच घसरण होते आणि अशा घसरणीची सममात्र पातळीच्या संदर्भातील दिशा बहुधा काही काकतालीय गोष्टींवर अवलंबून असते. आ. ५१ मध्ये दाखविलेल्या धरणाचा उच्छेद घडून आला, तर $नगग_१न_१$ सारख्या संमिश्र आकाराच्या पृष्ठावरून घसरण होते. घसरलेल्या राशीच्या $म_१ग_१न_१$ या उजव्या भागात उद्युक्त उच्छेद अपेक्षित असतो; कारण तेथील मृत्तिका केवळ तिच्या स्वतःच्याच वजनाच्या प्रभावाखाली आहे. या राशीचा $मगग_१म_१$ हा मधला भाग $ग_१म_१$ वर कारक असणाऱ्या उद्युक्त दाबामुळे $गग_१$ या पृष्ठावरून डावीकडे सरकतो. या पृष्ठावरचा विरोध लघुतम असतो. धरणाच्या डाव्या बाजूस चिकण मृत्तिकेच्या थरावर स्थित असलेल्या वाळूच्या थरात प्रतियोगी उच्छेद घडून येतो. पुढे सरकणाऱ्या मधल्या भागाकडून येणाऱ्या पार्श्वीय रेट्यामुळे हे घडते.

आ० ५१ मध्ये दाखविलेल्या धरणाच्या स्थैर्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचा अभ्यास आता करावयाचा आहे. त्यासाठी आपण प्रथम धरणाच्या डावीकडील पायथ्याच्या आसमंतात घेतलेल्या काही उभ्या छेदांवरील—उदाहरणार्थ, $गम$ या छेदावरील—$दा_{प्र}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाब ठरवू. $दा_{प्र}$ हा दाब आडव्या दिशेत कारक आहे, असे गृहीत

धरण्यास प्रत्यवाय नाही. त्यामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेत भरच टाकते. अशा छेदावरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाइतका किंवा त्याहून अधिक दाब लावल्याविना घसरू पाहणाऱ्या राशीचा *मगग*$_1$*म*$_1$ हा मधला भाग कदापि डावीकडे सरकू शकणार नाही.



आकृती ५१ : भरावाचा संमिश्र आकाराच्या घसरपृष्ठावरून होणारा उच्छेद

त्याचे वजन *व*$_1$ आहे आणि त्याच्या आडव्या दिशेतील विस्थापनाला होणारा एकूण विरोध *दा*$_1$ म्हणजे *दा*$_{प्र}$ हा प्रतियोगी दाब, *स*×$\overline{गग}_1$ हे समाकर्षण आणि *गग*$_1$ या पृष्ठावरील घर्षणजन्य विरोध *घ*$_{1त}$ यांची बेरीज होय. म्हणजेच

$$दा_1 = दा_{प्र} + घ_{1त} + स \times \overline{गग}_1$$

धरण उच्छेदसमीप अवस्थेत असल्यास हा विरोध *ग*$_1$*म*$_1$ छेदाच्या उजवीकडील मृत्तिकाराशीमुळे निर्माण झालेल्या उद्युक्त दाबाइतका किंवा त्याहून कमीच असला पाहिजे. *ग*$_1$*म*$_1$*न*$_1$ हा खंड त्याच्या पूर्ण उंचीमध्ये आडव्या दिशेने प्रसरण पावू शकत असल्यामुळे, उद्युक्त दाबाचे वितरण स्थिरजलदाबाच्या वितरणासारखे असेल. म्हणून त्याचा कारकबिंदू चिकण थराच्या पृष्ठभागापासून *ख*$_1$/३ उंचीवर स्थित असेल. *ग*$_1$*म*$_1$ वरील कार्तनिक प्रतिबले दुर्लक्षिली तरी चालेल; कारण त्यांच्यामुळे स्थैर्यवृद्धीलाच साहाय्य होते. *ग*$_1$*म*$_1$ वरील या उद्युक्त दाबाची तीव्रता "प्रयत्नांती यश" पद्धतीने ठरविता येते. त्यासाठी *ग*$_1$ मधून जाणारे *ग*$_1$*न*$_1$ हे घसरपृष्ठ चापरूपी आहे, असे गृहीत धरले पाहिजे. *ग*$_1$ बिंदूची निरनिराळी स्थाने गृहीत धरून (आ० ५१) ही आकडेमोड पुनः केली पाहिजे. ज्या घसरपृष्ठावर सुरक्षिततांक लघुतम येईल, ते प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ होय.

६४. भरावाचे प्रसरण होऊन उच्छेद : आकृती ५१ मध्ये दाखविलेला मृदू, चिकण मृत्तिकेचा थर भरावाच्या बैठकीलगतच असेल, तर अशा भरावाचा उच्छेद विसर्पणाने होण्याचा संभव असतो; आणि त्या परिस्थितीत भरावातील मृत्तिकेचा अंतर्गत घर्षणगुणांक काहीही असला, तरी भराव दोन्ही बाजूंस पसरतो. पसरण्यामुळे

होणारा अशा प्रकारचा उच्छेद, एक तर दोन्हीकडील पायथ्यांच्या परिसरापुरताच मर्यादित राहतो किंवा भरावाच्या बैठकीच्या पूर्ण रुंदीवर घडून येतो.

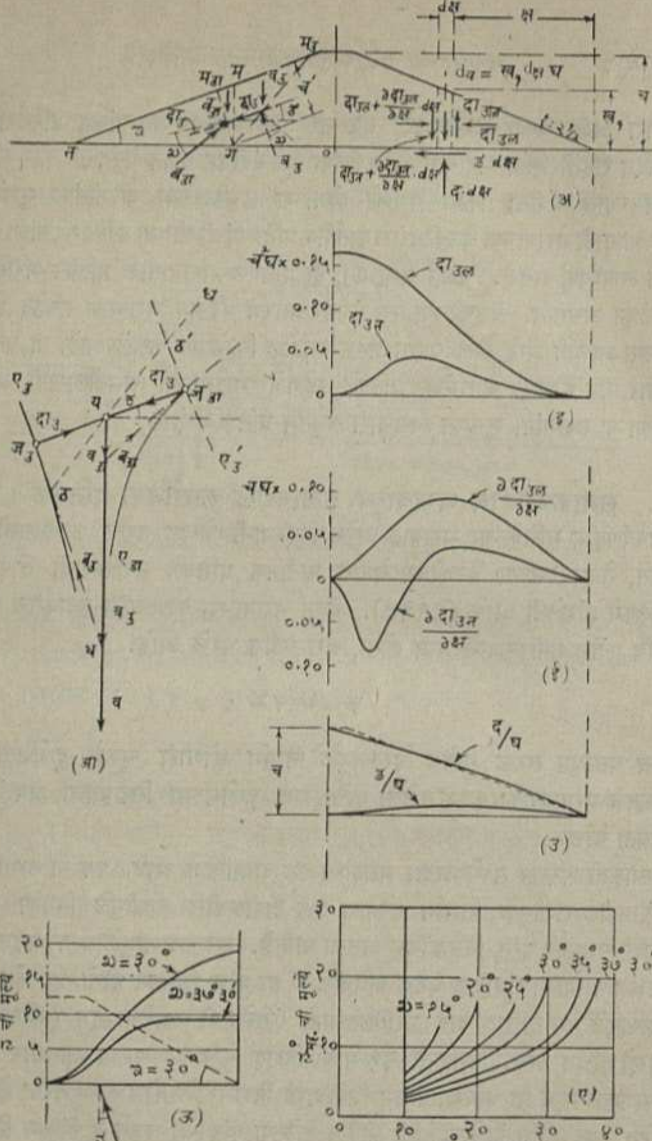
प्रसरणाने अंशतः किंवा पूर्णपणे होणाऱ्या उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरविण्यासाठी भरावाच्या बैठकीवरील कार्तनिक प्रतिबलांची तीव्रता व वितरण यांचा अभ्यास करणे आवश्यक असते. काही प्रमाणात, ही प्रतिबले भरावातील प्रतिबल-परिस्थितीवर अवलंबून असतात. बैठकीच्या पूर्ण रुंदीवर प्रसरण होऊन भरावाचा उच्छेद होण्याची अवस्था आलेली आहे असे गृहीत धरून खालील विश्लेषण केलेले आहे. या गृहीताच्या आधारे प्राप्त होणारी कार्तनिक प्रतिबले म्हणजे भरावाच्या समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांना सुसंगत असणारी लघुतम प्रतिबले होत.

६५. समाकर्षणहीन भरावाच्या तळावरील कार्तनिक प्रतिबले : एखाद्या समाकर्षणहीन मृत्तिकेच्या भरावात प्रत्येक बिंदुस्थानी जेव्हा उद्युक्त उच्छेदसमीपावस्था असते, तेव्हा त्याच्या बैठकीवर येणारी कार्तनिक प्रतिबले ठरविण्याची सोपी पद्धत रेंडुलिकने मांडलेली आहे (१९३८). अशा भरावाच्या कोणत्याही छेदावरील कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने प्राप्त होतो, असे गृहीत धरले आहे.

$$क = \sigma\ स्प\ \phi \qquad [१]$$

तसेच घसरपृष्ठ सरळ गृहीत धरल्यामुळे निर्माण होणारी चूकही दुर्लक्षिली आहे. अर्थातच भरावात कारक असलेला मृत्तिकादाब, कूलोमच्या सिद्धांताचा अवलंब करून ठरविता येईल.

आकृती ५२ अ मध्ये अशा भरावाचा छेद दाखविला आहे. *गम* या उभ्या छेदावर उजवीकडील राशीमुळे निर्माण होणारा दाब डावीकडील राशीमुळे निर्माण होणाऱ्या दाबाशी सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् असला पाहिजे. ह्या लक्षणामुळे *ग म* वरील फलरूप दाब आणि त्याचा लंबदिक् घटक यांमधील δ हा कोन निश्चित होतो. हा कोन माहीत नसल्यामुळे *गम* वरील दाब ठरविण्यासाठी एंगेसेरची आलेखपद्धत (परिच्छेद २५) वापरणे उचित ठरते. आकृती २१ मध्ये विशद केलेल्या या पद्धतीनुसार *गम* या उभ्या पृष्ठाच्या *ग* या पायथ्यापासून क्षितिजाशी निरनिराळे कोन करून सरळ छेद घेतले आहेत. *गम* आणि हे छेद यांनी सीमित केलेल्या खंडांची वजने *य* बिंदूतून निघणाऱ्या एका उभ्या रेषेवर (आकृती ५२ आ) अधस् दिशेने स्थित केली आहेत. उदाहरणार्थ, $व_{३}$ म्हणजे आकृती ५२ अ मधील $गमम_{३}$ या उजवीकडील खंडाचे वजन आहे. या खंडाच्या $गम_{३}$ या तळाचा उतार यदृच्छया निवडलेला आहे. $व_{३}$ वजनाच्या या खंडावर $ब_{३}$ ही प्रतिक्रिया व $दा_{३}$ हा मृत्तिकादाब कारक आहेत. $ब_{३}$ ही प्रतिक्रिया $ग\,म_{३}$ या तिरकस पृष्ठावरील लंबाशी ϕ कोन करते. आकृती ५२ आ मध्ये *थ* बिंदूतून $ब_{३}$ ही रेषा आकृती ५२ अ मधील $ब_{३}$ ला समांतर काढलेली आहे.



आकृती ५२ : (अ आणि आ) (अ) मध्ये दाखविलेल्या वालुका-भरावाच्या बैठकीवर येणारी कार्तनिक प्रतिबले ठरविण्याची कृती दाखविणाऱ्या आकृती. (इ ते उ) उपरोक्त कृतींची फलिते. (ऊ) भरावाच्या मध्यरेषेपासून अंतर वाढेल त्याप्रमाणे वालुकाभरावाच्या बैठकीवरील फलरूप प्रतिबले आणि क्षितिजलंब दिशा यांतील ट या कोनामध्ये होणारी वाढ. (ए) ω च्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार ट$_{महृ}$ (भरावाच्या तळबिंदूजवळ ट) आणि उतारकोन व यांमध्ये मिळणारा संबंध. (आधार : एल. रेंडुलिक १९३८.)

आकृती ५२ अ मधील *गम* च्या उजवीकडे क्षितिजाशी निरनिराळे कोन करणाऱ्या तळरेषा काढून प्राप्त होणाऱ्या प्रत्येक खंडाच्या बाबतीत वरील कृतीचा अवलंब करता येईल, आणि आकृती ५२ आ मध्ये तदनुषंगिक *ष* रेषा प्राप्त होतील. त्यांची अग्रे जोडून *गम* च्या उजवीकडील मृत्तिकाराशीला लागू पडणारा $ए_{उ}$ हा एंगेसेर वक्र प्राप्त होतो. याच रीतीचा अवलंब करून *गम*च्या डावीकडील मृत्तिकाराशीला लागू होणारा $ए_{डा}$ हा एंगेसेर वक्र आकृती ५२ आ मध्ये काढला आहे. एंगेसेर-पद्धतीच्या उपपत्तीनुसार (परिच्छेद २५) *गम* च्या उजवीकडील मृत्तिकेने *गम* वर टाकलेला मृत्तिकादाब आकृती ५२ आ मधील *य* बिंदूपासून मृत्तिकादाबाच्या दिशेत $ए_{उ}$ रेषेपर्यंत मोजलेल्या अंतराने दाखविला जातो. त्याचप्रमाणे $ए_{डा}$ या एंगेसेर रेषेने *गम* च्या डावीकडील मृत्तिकेमुळे येणाऱ्या मृत्तिकादाबाची तीव्रता कळते. समतोल साधावयाचा तर *गम* च्या उजवीकडील मृत्तिकादाब आणि डावीकडील मृत्तिकादाब हे सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् असले पाहिजेत. ही अट पुरी करण्यासाठी आपण आकृती ५२ आ मध्ये $ए'_{उ}$ ही साहाय्यक रेषा काढू. $ए_{उ}$ या रेषेवरील ठ सारख्या प्रत्येक बिंदूतून *ठय* ही *य* मधून जाणारी रेषा काढून तीवर *य* च्या दुसऱ्या बाजूस $\overline{ठ'य} = \overline{ठय}$ मोजून मिळणारे बिंदू जोडून ही रेषा प्राप्त होते. $ए'_{उ}$ ही साहाय्यक रेषा $ए_{डा}$ या रेषेला $ज_{डा}$ मध्ये छेदते.

परिच्छेद २५ मध्ये आणि आकृती २१ ई मध्ये विशद केल्याप्रमाणे आकृती ५२ आ मधील $यज_{उ}$ ही लांबी उजवीकडील राशीचा उद्युक्त मृत्तिकादाब दर्शविते, आणि $यज_{डा}$ ही लांबी तदनुषंगिक डावीकडून कारक होणारा दाब दर्शविते. $यज_{उ} = यज_{डा}$ असल्यामुळे हे दोन दाब सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् आहेत.

तेव्हा समीकरण २५ (१) मध्ये $\overline{गत}$ च्या ठिकाणी $यज_{उ}$ नियुक्त करून मृत्तिकादाबाची तीव्रता प्राप्त होणे शक्य आहे; तसे करून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$दा_{उ} = \frac{१}{२}\, घ \cdot च'\, \overline{यज_{उ}}$$

$दा_{उ}$ ची कारक दिशा आकृती ५२ आ मधील $ज_{उ}ज_{डा}$ या रेषेला समांतर असते. *गम* या उभ्या छेदावरील $दा_{उ}$ या मृत्तिकादाबाचे पुढीलप्रमाणे दोन घटक करता येतात; ते असे : (१) लंबदिक् घटक :

$$दा_{उल} = दा_{उ}\ \text{कोज्या}\ \delta$$

आणि (२) स्पर्शदिक् किंवा तद्दिक् घटक :

$$दा_{उत} = दा_{उ}\ \text{ज्या}\ \delta$$

भरावातील निरनिराळ्या उभ्या छेदांवरील $दा_{उल}$ आणि तदनुषंगिक $दा_{उत}$ यांची मूल्ये अनुक्रमे आकृती ५२ इ मधील $दा_{उल}$ आणि $दा_{उत}$ या आलेखांच्या कोटींनी दिली

जातात. भरावाच्या तळावरील कार्तनिक प्रतिबलांचे वितरण ठरविण्यासाठी आकृती ५२ अ मध्ये उजवीकडे दाखविलेल्या उभ्या मृत्तिका-शकलाच्या समतोलासाठी आवश्यक असणारी लक्षणे अभ्यासली पाहिजेत. या मृत्तिका-शकलाचे वजन $d\text{व} = \text{ख}_{१}\,\text{घ}\,d\text{क्ष}$ आहे. या शकलावर कारक असणारी बाह्य बले आकृतीत दाखविली आहेत. आडव्या घटकांचा समतोल साधावयाचा, तर पुढीलप्रमाणे समीकरणे मांडली पाहिजेत.

$$\text{ड}\,d\text{क्ष} = \frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उल}}}{\partial\,\text{क्ष}}\,d\text{क्ष} \quad \text{म्हणजेच} \quad \text{ड} = \frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उल}}}{\partial\,\text{क्ष}}$$

तसेच लंबदिक् घटकांच्या समतोलासाठी पुढील समीकरणे मांडली पाहिजेत.

$$\text{द}\,d\text{क्ष} = d\text{व} + \frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उत}}}{\partial\,\text{क्ष}}\,d\text{क्ष} = \text{घख}_{१}\,d\text{क्ष} + \frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उत}}}{\partial\,\text{क्ष}}\,d\text{क्ष}$$

म्हणजेच

$$\text{द} = \text{घ}\,\text{ख}_{१} + \frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उत}}}{\partial\,\text{क्ष}}$$

$\frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उल}}}{\partial\,\text{क्ष}}$ आणि $\frac{\partial\,\text{दा}_{\text{उत}}}{\partial\,\text{क्ष}}$ यांची मूल्ये आकृती ५२ ई मध्ये दिलेली आहेत. आकृती ५२ इ मधील आलेखांच्या साहाय्याने ही मूल्ये मिळविली आहेत. आकृती ५२ ई मधून मिळणाऱ्या माहितीच्या साहाय्याने द आणि ड यांची मूल्ये देणारी समीकरणे सोडविता येतात.

भरावाच्या बैठकीवरील लंबदिक् दाब आणि कार्तनिक प्रतिबले यांचे वितरण आ. ५२ उ मध्ये सलग रेषांनी दाखविले आहे; आणि उभ्या छेदांवर कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव असतो या गृहीतानुसार मिळणारे लंबदिक् दाबाचे वितरण तुटक रेषेने दाखविले आहे. बैठकीच्या कोणत्याही ठिकाणी असणारा लंबदिक् दाब जवळजवळ येथील भरावाच्या उंचीच्या सरळ प्रमाणात असतो; तसेच भरावाची मध्यरेषा आणि पायथा यांच्या दरम्यान असणाऱ्या एका बिंदुस्थानी कार्तनिक प्रतिबलांचे मूल्य महत्तम असते, असे या आकृतीवरून दिसते.

बैठकीवरील फलरूप प्रतिबल आणि त्याचा लंबदिक् घटक यांतील ट हा कोन भरावाच्या मध्यरेषेवर शून्य असतो. मध्यरेषेपासून दोन्ही पायथ्यांकडे त्याचे मूल्य वाढत जाऊन पायथ्याला ते महत्तम होते. ॐ ची दोन मूल्ये घेऊन प्रत्येकाच्या बाबतीत मध्यरेषेपासून पायथ्यापर्यंत ट मध्ये होणारी वाढ आ. ५२ ऊ मध्ये दाखविली आहे आणि आ. ५२ ए मध्ये उतारकोन ब, अंतर्गत घर्षणकोन ॐ आणि कोन $\text{ट}_{\text{मह}}$. यांतील संबंध दाखविले आहेत.

भरावाच्या बैठकीवरून पार्श्वीय विस्थापन झाले नाही, तर उद्युक्त उच्छेद होण्याच्या बेतात आहे, असे म्हणता येत नाही. अर्थातच तेथे उभ्या छेदांवरील पार्श्वीय दाब आणि बैठकीवरील तदनुषंगिक कार्तनिक प्रतिबले यांची मूल्ये पूर्वोक्त विश्लेषणातून मिळालेल्या मूल्यांहून बरीच अधिक असण्याचा संभव असतो. भराव उद्युक्त उच्छेद होण्याच्या बेतात नसेल, तर मृ या दाबगुणांकाचे मूल्य भराव बांधण्याच्या पद्धतीवर अवलंबून असते आणि प्रसंगी ते ०.६ इतके मोठे असते. मृत्तिकादाबगुणांक पुढील समीकरणाने प्राप्त होतो.

$$मृ = स्प^{२}(४५^{\circ} - ω'/२) \qquad [२]$$

येथे $ω'$ हा भरावाच्या अंतर्गत घर्षणापैकी जो अंश कार्यप्रवृत्त होतो त्याला अनुषंगिक असणारा घर्षणकोन आहे. $मृ$ चे मूल्य ०.४ आणि ०.६ यांच्या दरम्यान असेल, तर $ω'$ चे मूल्य २५° आणि १५° यांच्या दरम्यान असते. या परिस्थितीत भरावाच्या बैठकीवरील कार्तनिक प्रतिबलांची तीव्रता ठरवायची असेल, तर पूर्वोक्त विश्लेषणात $ω$ ऐवजी $ω'$ हे मूल्य घेतले पाहिजे.

बैठकीवरील कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येत असेल, $(ω_{१} < ω)$

$$क = स + द\, स्प\, ω_{१}$$

तर असे होण्याचा संभव आहे की, ज्या ठिकाणी $ड$ चे मूल्य महत्तम असते (आ. ५२ इ) त्या ठिकाणी कार्तनिक विरोध अपुरा आहे आणि पायथ्याजवळचा विरोध मात्र अतिरिक्त आहे. पूर्वोक्त विश्लेषणाचा विचार करता अशी परिस्थिती उद्भवणे त्यातील गृहीताशी विसंगत आहे. आ. ५२ उ ते ए मध्ये दाखविलेल्या भरावाच्या बैठकीवरील कार्तनिक प्रतिबलांच्या वितरणाविषयीचे निष्कर्षही त्या परिस्थितीत फोल ठरतील. तथापि भरावाच्या एखाद्या छेदावरील उद्युक्त मृत्तिकादाब त्याच्या जवळच्या भरावाच्या बैठकीवरील एकूण कार्तनिक विरोधापेक्षा अधिक झाल्याविना प्रसरण होऊन उच्छेद घडून येणार नाही हे उघड आहे. हे लक्षण आधारभूत मानून या समस्येचा अभ्यास करता येतो.

प्रकरण १०

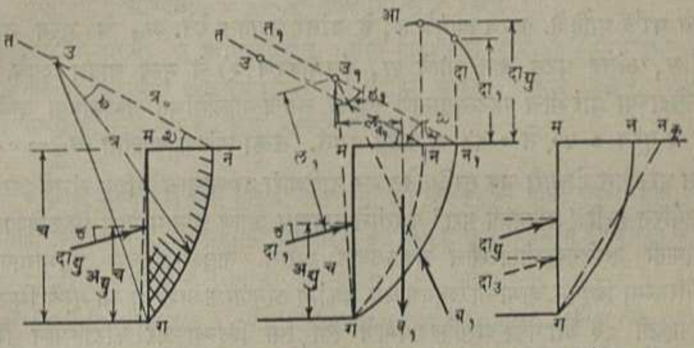
दरडी, भुयारे आणि विवरे यांना दिलेल्या तात्पुरत्या आधारांवरील मृत्तिकादाब

६६. आधारकाष्ठांमागील कार्तनिक उच्छेदाची सामान्य लक्षणे : स्थायी स्वरूपाच्या आधाराचे बांधकाम करण्यापूर्वी, खोदाईमुळे निर्माण होणाऱ्या दरडींना दिलेल्या तात्पुरत्या लाकडी आधारांना **आधार-काष्ठे** अशी संज्ञा दिली जाते. खणण्याचे आणि आधारकाष्ठे लावण्याचे कार्य चालू असताना दरडीच्या एकूण पृष्ठापैकी फारच थोडा भाग (आधाराविना) कामासाठी मोकळा ठेवलेला असतो. उरलेल्या भागाला सापेक्षतः पक्क्या असणाऱ्या सांगाड्याने आधार दिलेला असतो. अशा परिस्थितीत मृत्तिकेत छत्रक्रियेचा प्रादुर्भाव होतो, हे प्रकरण ५ मध्ये दाखविले आहे. छत्रक्रियेमुळे दोन गोष्टी घडून येतात. ज्या भागात मृत्तिकेला विचलित होण्याला अवसर मिळतो तेथील प्रतिबलात घट होते आणि आधाराजवळ—जेथे विचलनाला प्रतिबंध करण्याची प्रवृत्ती असते तेथील—प्रतिबले वाढतात. छत्रक्रियेचा प्रकार आणि तिचे प्राकृतिक परिणाम, खोदाईच्या प्रकारावर व बांधकामाच्या पद्धतीवर अवलंबून असतात.

६७. आदर्श वालुकेतील चरांच्या दरडीकडून आधारकाष्ठांवर येणारा मृत्तिकादाब : काष्ठबांधणीच्या आणि खोदाईच्या प्रचलित पद्धती अशा आहेत की, त्यामुळे खोदाईच्या दोन्ही बाजूंच्या मृत्तिकेतील पार्श्वीय विचलन, दरडीच्या माथ्याजवळ व्यवहारतः शून्य आणि तेथून वाढत जाऊन तळाशी किंवा तळापासून किंचित् वरच्या ठिकाणी महत्तम, अशा प्रकारचे असते. आकृती ५३ अ पाहा. खणण्याच्या पद्धतीने दरडीवर लादल्या जाणाऱ्या या विरूपता-लक्षणामुळे घसरपृष्ठ, *गन*, वक्र होते आणि वालुका-राशीच्या पृष्ठभागास स्थूल मानाने काटकोनात छेदते (परिच्छेद २० आणि आकृती १७ इ पाहा). दरडीला आधार देणाऱ्या या काष्ठांवरील पार्श्वीय दाबाविषयीचे पुढील गणित, ज्या गृहीतावर आधारित आहे, ते असे : *गमन* या उद्युक्त खंडाच्या तळाकडच्या भागातील वालुकेचे पार्श्वीय प्रसरण आणि माथ्याकडील भागाचे तदनुषंगिक अवपतन, *गन* या संभाव्य घसरपृष्ठाच्या संपूर्ण भागावर वालुकेचा कार्तनिक विरोध कार्यप्रवृत्त करण्यास पुरेसे आहे आणि हा विरोध दर एकांक क्षेत्रासाठी पुढील समीकरणाने दिला जातो.

$$क = ७ स्प ω \qquad ५(२)$$

एकूण दाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान दरडीच्या तळापासून $अ_{घु} \cdot च$ इतक्या उंचीवर आहे; आणि तो दाब आधारपृष्ठावरील लंबाशी δ कोन करतो, असेही गृहीत धरले आहे. छत्रक्रियेचा परिणाम म्हणून $अ_{घु}$ चे मूल्य १/३ पेक्षा अधिक असते. काही प्रमाणात हे मूल्य बांधकामाच्या पद्धतीवरही अवलंबून असते. तथापि स्वच्छ तसेच गाळमिश्रित वालुकांच्या बाबतीत ते मूल्य ०·४५ ते ०·५५ या मर्यादित कक्षेत पडते, हे आपल्याला सिद्धांताच्या आधारे तर माहीत आहेच, पण आपला अनुभवही तसाच आहे. अर्थात त्यासाठी दरडीचा तळ भूजलपातळीच्या वर असला पाहिजे (परिच्छेद २० पाहा).



(अ) (आ) (इ)

आकृती ५३ (अ) माथ्याची कड स्थिर राहून पार्श्वीय आधार कलल्यामुळे वालुकाराशीत होणारा घसरणरूपी उच्छेद; (आ) लघुगणकीय वक्राच्या कृतीचा अवलंब करून घसररेषेची निश्चिती; (इ) म स्थिर राहून पार्श्वीय आधार कलला असता मिळणारे घसरपृष्ठ सलग रेषेने दाखविले आहे व कूलोमच्या सिद्धांतानुसार मिळणारे घसरपृष्ठ खंडित रेषेने दाखविले आहे.

दरडीतील घसरपृष्ठ लघुगणकीय वलयाचा चाप असतो, असे गृहीत धरले, तर ते संभाव्य घसरपृष्ठाच्या खऱ्या आकाराशी बहुतांशी जुळणारे असते. या लघुगणकीय वलयाचे समीकरण पुढीलप्रमाणे असते.

$$त्र = त्र_{0} \in^{\theta\, स्प\, \omega} \qquad [१]$$

या लघुगणकीय वक्राचा उ हा नाभिबिंदू घसरपृष्ठाच्या माथ्याकडील न या कडेतून निघणाऱ्या व राशिपृष्ठभागाशी ω कोन करणाऱ्या नत या सरळ रेषेवर स्थित असतो (आकृती ५३ अ पाहा) (टेरझागी १९४१). त चे स्थान मिळविण्यासाठी समतल पृष्ठावर आपण $न_1$ हा कोणताही एक बिंदू घेऊ; आणि $न_1 त_1$ या रेषेवर $उ_1$ हा नाभी घेऊन दरडीचा तळ आणि $न_1$ यांतून जाणारा एक लघुगणकीय वक्र काढू. $गमन_1$ या

खंडावर कारक असणारी बले अशी आहेत : स्वतःचे वजन $व_1$; *मग* या पार्श्वीय आधाराची प्रतिक्रिया $दा_1$ आणि *गन*, या घसरपृष्ठावरील प्रतिक्रिया $ब_1$. वक्राच्या नाभीभोवतीच्या परिबलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे. $ब_1$ ही प्रतिक्रिया $उ_1$ मधून जाते (परिच्छेद ३९ पाहा), म्हणून $दा_1$ चे मूल्य खालील समीकरणाने ठरते.

$$दा_1 = \frac{व_1 ल_{व_1}}{ल_1} \qquad [२]$$

हे समीकरण सोडविण्यासाठी आकृती ५३ आ मधील $अ_{यु}$ साठी काहीतरी मूल्य गृहीत धरले पाहिजे. कारण त्यामुळे $ल_1$ हे अंतर ठरविता येते. $अ_{यु}$ चे मूल्य वाढेल तसे $ल_1$ अंतर घटत जाते आणि $दा_1$ (समीकरण २) चे मूल्य वाढत जाते. या परिच्छेदाच्या प्रारंभीच म्हटल्याप्रमाणे स्वच्छ तसेच गाळमिश्रित वालुकांच्या बाबतीत $अ_{यु}$ चे मूल्य ०·४५ ते ०·५५ या कक्षेत पडते. तेव्हा त्यांच्या बाबतीत $अ_{यु} = ०·५५$ गृहीत धरल्यास होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी ठरण्याचाच अधिक संभव असतो.

उर्वरित कृती 'प्रयत्नांती यश' पद्धतीने महत्तम आणि लघुतम मूल्य मिळविण्याच्या कोणत्याही आलेखकृतीसारखीच जवळजवळ असते. वालुकाराशीच्या पृष्ठभागावरील निरनिराळ्या बिंदूतून जाणाऱ्या लघुगणकीय वक्रांना अनुषंगिक अशी *दा* ची मूल्ये मिळवून ती आकृती ५३ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे त्या त्या बिंदूच्या वर कोटीरूपाने स्थित केली असता, आपल्याला *दा*–आलेख प्राप्त होतो. काष्ठांवरील $दा_{यु}$ या मृत्तिकादाबाचे मूल्य या आलेखावरील *आ* या उच्चतम बिंदूच्या कोटीमूल्याइतके असते आणि घसरपृष्ठ *आ* खाली असणाऱ्या *न* या बिंदूतून जाते. उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा $दा_{युल}$ हा लंबदिक् घटक

$$दा_{युल} = दा_{यु} \, कोज्या \, \delta$$

असून

$$मा_{यु} = \frac{दा_{युल}}{\frac{1}{2} \, व \, च^2} \qquad [३]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे काष्ठांवरील उद्युक्त **मृत्तिका-दाब-गुणक** होय. हा शुद्ध अंक आहे. पार्श्वीय आधाराच्या सरळ पृष्ठावरील समाकर्षणहीन मृत्तिकेच्या दाबाचे वितरण स्थिर-जलदाब-वितरणासारखे असू शकेल, अशी विरूपतालक्षणे असतील, तर उपरोक्त $मा_{यु}$ हा मृत्तिकादाबगुणक व समीकरण २३ (१ आ) ने मिळणारा, त्याच मृत्तिकेचा $मृ_{उ}$ हा उद्युक्त मृत्तिकादाब-गुणांक हे एकच असतात. इतर सर्व गोष्टी सारख्या असतील, तर

$$अ = \frac{मा_{यु}}{मृ_{उ}} \qquad [४]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे उद्युक्त मृत्तिकादाबावर पडणाऱ्या विरूपतालक्षणांच्या प्रभावाचे माप ठरते. अ चे मूल्य जेवढे अधिक तितकी आधारित वालुकाराशीच्या माथ्याजवळ तिच्या पार्श्वीय विस्थापनावर घातलेल्या बंधनामुळे मृत्तिकादाबात होणारी वाढही अधिक. ϕ आणि ड यांची मूल्ये दिलेली असतील, तर $अ_{घ}$ च्या वर्धमान मूल्यानुसार अ चे मूल्य वाढत जाते. $अ_{घ}$ म्हणजे दाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान ठरविणारा गुणक आहे, हे वर सांगितलेच आहे. $\phi = ३८^{\circ}$ आणि $ड = ०^{\circ}$ गृहीत धरल्यास, आपल्याला

$$अ_{घ} = ०\cdot४५ \text{ असताना } अ = १\cdot०३$$

$$\text{आणि } अ_{घ} = ०\cdot५५ \text{ असताना } अ = १\cdot११$$

अशी मूल्ये मिळतात. या उदाहरणातील घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या माथ्याची रुंदी तदनुषंगिक कूलोमप्रणीत खंडाच्या माथ्याच्या रुंदीहून पुष्कळच लहान असते. आकृती ५३ इ मध्ये ही रुंदी $गमन_{क}$ अशी दाखविली आहे.

$अ_{घ}$ चे मूल्य जसे कमी होईल, त्या प्रमाणात घसरपृष्ठाची वक्रता कमी होत जाते आणि $अ_{घ} = १/३$ असेल, तर आकृती १४ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ही वक्रता फारच कमी असते. तशातच भिंतीचा घर्षणकोन शून्य असला तर $अ_{घ} = १/३$ या परिस्थितीतील (परिच्छेद १४ पाहा) घसरपृष्ठ पूर्णपणे सरळ असते. तेव्हा $अ_{घ} = १/३$ आणि $ड = ०$ असल्यास घसरपृष्ठ लघुगणकीय वक्राच्या आकाराचे असते, (समीकरण १) असे गृहीत धरणे स्थूलमानानेसुद्धा योग्य होत नाही. तरीही $अ_{घ} = १/३$ आणि $ड = ०$ या परिस्थितीतील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे गणित या गृहीतानुसार मांडले असता होणारी चूक १० टक्यांपेक्षाही बरीच कमी असते, असेच नेहमी आढळते. $अ_{घ}$ चे मूल्य वाढत गेल्यास ही चूक शीघ्रतेने कमी होत जाते. $अ_{घ} = १/२$ असताना दरडीच्या आधारकाष्ठांवरील मृत्तिकादाब ठरविण्याचे लघुगणकीय वक्राचे गणित, आधार भिंतीवरील मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या कूलोमप्रणीत पद्धतीतील गणिताइतके तरी निदान अचूक असते.

वालुकेतील दरडीला दिलेल्या आधारकाष्ठांवरील मृत्तिकादाबाचे वितरण काही प्रमाणात बांधकाम-पद्धतीच्या बारकाव्यावर अवलंबून असते. आकृती १७ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे सामान्यतः हे वितरण कमीअधिक प्रमाणात परिवलयाकृती असते.

६८. आदर्श, समाकर्षणगुणी मृत्तिकेतील दरडीला लावलेल्या आधार-काष्ठांवर येणारा मृत्तिकादाब : मागील परिच्छेदात वर्णिलेली गणितात्मक कृती समाकर्षणगुणी मृत्तिकांतील दरडींनाही लागू पडते. अशा मृत्तिकांचा कार्तनिक विरोध कूलोमच्या पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = स + ७ स्प ɷ$$

या मृत्तिकांच्या बाबतीत यदृच्छया काढलेल्या एखाद्या घसरपृष्ठावरून (आकृती ५३ आ मधील $गन_1$) होणारी घसरण नुसत्या घर्षणानेच नव्हे, तर समाकर्षणानेही विरोधिली जाते. म्हणून लघुगणकीय वक्राच्या $उ_1$ या नाभीभोवतीची परिबले विचारात घेऊन समतोलाचे लक्षण पुढील समीकरणाद्वारे मांडता येईल.

$$दा_1 ल_1 = व_1 ल_{व_1} - प_स \qquad [१]$$

या ठिकाणी $प_स$ म्हणजे $उ_1$ भोवतीचे समाकर्षणाचे परिबल आहे. $प_स$ चे मूल्य समीकरण ४१ (४) च्या साहाय्याने ठरविता येते.

$$प_स = \frac{स}{२ स्प ɷ}(त्र_1^२ - त्र_0^२) \qquad ४१(४)$$

आकृती ५३ आ मधील $उ_1न_1$ आणि $उ_1ग$ ही अंतरे म्हणजे अनुक्रमे $त्र_0$ आणि $त्र_1$ ही पदे होत. समीकरण १ मध्ये $प_स$ चे मूल्य नियुक्त करून $दा_1$ साठी ते सोडविल्यास, आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$दा_1 = \frac{१}{ल_1}\left[व \cdot ल_{व_1} - \frac{स}{२ स्प ɷ}(त्र_1^२ - त्र_0^२)\right]$$

$दा_1$ हे बल म्हणजे $गन_1$ (आ० ५३ आ) या यदृच्छया निवडलेल्या पृष्ठावरून होणाऱ्या घसरणीला रोखण्यासाठी आवश्यक असलेला पार्श्वीय दाब आहे. $दा_{ध}$ हे $दा_1$ चे महत्तम मूल्य आहे. या लक्षणाची पूर्तता करील ते प्रत्यक्षातील घसरपृष्ठ असणार. आदर्श वालुकांच्या बाबतीत दा-आलेखाने (आ० ५३ आ) दाखविल्याप्रमाणे त्याचे स्थान आलेखात्मक पद्धतीने निश्चित करता येते. वरील समीकरणात $दा_1$ ऐवजी $दा_{ध}$ हे महत्तम मूल्य घालून आणि तदनुषंगिक प्रत्यक्षातील घसरणीला लागू पडणारी, अशी $व_1$, $त्र_1$, इ० ची मूल्ये घालून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$दा_{ध} = \frac{१}{ल}\left[वल_व - \frac{स}{२ स्प ɷ}(त्र_1^२ - त्र_0^२)\right] \qquad [२]$$

पार्श्वीय आधाराविना अल्पकाळ स्थिर राहू शकणारी, उभ्या दरडीची महत्तम उंची स्थूलमानाने पुढील समीकरणाने मिळते, हे आपण पूर्वी पाहिले आहे.

$$च_स = \frac{४ स}{घ} स्प \left(४५^\circ + \frac{ɷ}{२}\right) = \frac{४ स}{घ}\sqrt{ण} \qquad ५७ (१)$$

येथे $\text{ण} = \text{स्प}^{२} (४५^{\circ} + \omega/२)$ आहे; म्हणून

$$\text{स} = \frac{\text{घ}}{४\sqrt{\text{ण}}} \cdot \text{च}_{\text{स}}. \qquad [३]$$

आहे. समीकरण २ मध्ये हे मूल्य समाविष्ट करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{दा}_{\text{धु}} = \frac{१}{\text{ल}} \left[\text{व}\cdot\text{ल}_{\text{व}} - \text{च}_{\text{स}} \frac{\text{घ}}{८\sqrt{\text{ण}}\,\text{स्प}\,\omega} (\text{त्र}_{१}^{२} - \text{त्र}_{०}^{२}) \right]$$

उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा लंबदिक् घटक पुढीलप्रमाणे असतो.

$$\text{दा}_{\text{धु}} = \text{दा}_{\text{धुल}} \text{ कोज्या } \text{ठ}$$

आणि मृत्तिकादाबगुणक असतो पुढीलप्रमाणे :

$$\text{मा}_{\text{धु}} = \frac{\text{दा}_{\text{धुल}}}{\frac{१}{२}\text{घच}^{२}} = \left(२\frac{\text{व}}{\text{घच}^{२}} \cdot \frac{\text{ल}_{\text{व}}}{\text{ल}} + \frac{१}{४} \frac{\text{च}_{\text{स}}}{\text{च}} \frac{\text{त्र}_{१}^{२} - \text{त्र}_{०}^{२}}{\text{च}\cdot\text{ल}} \frac{१}{\sqrt{\text{ण}}\text{स्प}\,\omega} \right) \text{ कोज्या } \text{ठ} \qquad [४]$$

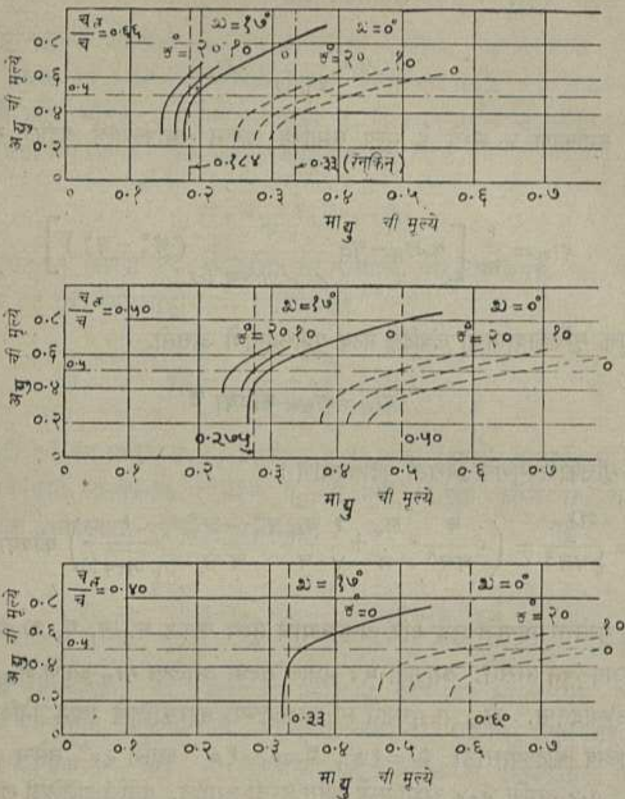
$\text{मा}_{\text{धु}}$ हे गुणोत्तर म्हणजे शुद्ध अंक असून त्याचे मूल्य केवळ $\text{च}_{\text{स}}/\text{च}$, ठ, ω आणि $\text{अ}_{\text{धु}}$ यांवर अवलंबून असते. आकृती ५४ मधील सलग आलेख $\text{मा}_{\text{धु}}$ आणि $\text{अ}_{\text{धु}}$ यांमधील संबंध दाखवितात. $\text{अ}_{\text{धु}}$ या मूल्याने मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान निश्चित होते. हे आलेख काढण्यासाठी $\omega = १७^{\circ}$, $\text{ठ} = ०$, १०° आणि २०° तसेच $\text{च}_{\text{स}}/\text{च} = ०\cdot६६$, $०\cdot५$ आणि $०\cdot४$ अशी मूल्ये गृहीत धरली आहेत. पूर्वीच वर्णिलेली लघुगणकीय वक्राची पद्धत वापरून आलेखासाठी लागणारी मूल्ये ठरविली आहेत.

दरडीवरील रॅन्किन्प्रणीत उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे समीकरण असे आहे.

$$\text{दा}_{\text{उ}} = \text{दा}_{\text{उल}} = -\frac{२\,\text{सच}}{\sqrt{\text{ण}}} + \frac{१}{२}\text{घच}^{२}\,\frac{१}{\text{ण}} \qquad १४\ (३)$$

वरील समीकरणात स ऐवजी समीकरण ३ मधील उजवीकडील पद नियुक्त केले आणि $\frac{१}{२}\text{घच}^{२}$ या पदाने त्यास भागले, तर या परिस्थितीतील मृत्तिकादाबगुणक आपल्याला मिळतो, तो असा :

$$\text{मा}_{\text{धु}} = \frac{\text{दा}_{\text{उल}}}{\frac{१}{२}\text{घच}^{२}} = \frac{१}{\text{ण}} \left(१ - \frac{\text{च}_{\text{स}}}{\text{च}} \right) \qquad [५]$$



आकृती ५४. लक्ष्मण-उंची $\text{च}_{\text{स}}$ आणि पार्श्वीय आधाराची एकूण उंची च यांतील गुणोत्तरांची तीन भिन्न मूल्ये व भिंत घर्षणाचा कोन δ यांची निरनिराळी मूल्ये घेऊन मिळणारा मृत्तिकादावगुणक $\text{मा}_{\text{यु}}$ आणि गुणोत्तर $\text{अ}_{\text{यु}}$ यांमधील संबंध. येथे $\text{अ}_{\text{यु}}$ म्हणजे समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेमधील फलरूप मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूचे स्थान ठरविणारा गुणक आहे. (प्रत्येक आकृतीत $\text{च}_{\text{ल}}$ ऐवजी $\text{च}_{\text{स}}$ वाचा.)

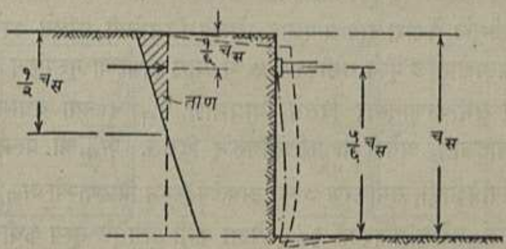
$\omega = १७^{\circ}$ घेऊन येणारे $\text{मा}_{\text{यु}}$ चे मूल्य आकृती ५४ मध्ये सलग आलेखांना छेदणाऱ्या तुटक उभ्या रेषांच्या भुजामूल्यांनी दाखविले जाते.

$\omega = ०$ परिस्थितीतील $\text{मा}_{\text{यु}}$ आणि $\text{अ}_{\text{यु}}$ यांमधील संबंध आकृती ५४ मधील तुटक आलेखांनी दाखविला जातो. तसेच त्याच परिस्थितीतील $\text{मा}_{\text{यु}}$ ची मूल्ये

(समीकरण ५) तुटक आलेखांना छेदणाऱ्या उभ्या रेषांच्या भुजांनी दिली जातात. $\omega = ०$ असतांना

$$मा_{धु} = १ - \frac{च_{स}}{च} \qquad [६]$$

$अ_{धु}$ चे मूल्य ०·५ च्या पुढे वाढत गेल्यास तुटक आलेखांनी व्यक्तविली जाणारी $मा_{धु}$ ची मूल्ये सापेक्षतः जरा शीघ्र गतीने वाढत जातात; म्हणून दरडीला लावलेल्या आधारकाष्ठांवर समाकर्षणगुणी मृत्तिकांकडून येणाऱ्या मृत्तिकादाबाचे अनुमान करताना $अ_{धु}$ चे गृहीत मूल्य रास्त असणे महत्त्वाचे असते. जर $च_{स} / च = ०$ आणि $\omega = ०$ असतील, तर दरडीमागच्या मृत्तिकेचे वर्तन एखाद्या द्रवासारखे असते आणि $अ_{धु}$ चे तदनुषंगिक मूल्य १ / ३ असते. याउलट, $च_{स} / च = १$ असेल, तर ती दरड अल्पकाळ पार्श्वीय आधाराविना उभी राहू शकते. या उदाहरणात दरड कोसळून होणाऱ्या अंतिम उच्छेदाला प्रतिबंध करण्यासाठी लागणारे धिरे दरडीच्या माथ्याजवळ द्यावे लागतात. ही रूढ पद्धत यशस्वी ठरण्याचे कारण आकृती ५५ वरून स्पष्ट होईल.



आकृती ५५ : $च_{स}$ या लक्ष्मण-उंचीच्या दरडीमध्ये ताणजन्य तडे निर्माण होऊ नयेत म्हणून लावली जाणारी आधारकाष्ठे.

या आकृतीत बाहेरून आधार न लावलेल्या उभ्या दरडीचा छेद दाखविला आहे. तिची उंची $च_{स}$ इतकी आहे. दरडीच्या माथ्याकडील भागात असलेली मृत्तिका ताणयुक्त परिस्थितीत आहे. मृत्तिकेच्या वजनाने येणारी विरूपता तुटक रेषेने दर्शविलेली आहे. समस्या सोपी व्हावी म्हणून आपण गृहीत धरू की, ताण-प्रतिबले रॅनकिन्‌च्या १२ (२) या समीकरणाने ठरविता येतात. या गृहीतानुसार भूपृष्ठाजवळ महत्तम असणारी ताण-प्रतिबले सरळरेषानियमानुसार घटत जाऊन विशिष्ट खोलीवर शून्य होतात. पुढील समीकरणाने मिळणारी ही खोली आकृतीत दाखविली आहे.

$$ख_{०} = \frac{२ स}{घ} = \frac{चस}{२}$$

म्हणून ताण-बलाचा कारक-बिंदू पृष्ठभागापासून $च_स / ६$ एवढ्या खोलीवर असतो. म्हणजेच $अ_{धु} = ५/६$ आहे. दरडीचा उच्छेद व्हायचा असेल, तर त्याला प्रारंभ होतो तो दरडीच्या कडेला समांतर दिशेत पडणाऱ्या ताणजन्य तड्यांनी. खोदाई चालू असताना माथ्याकडील भाग दाबयुक्त परिस्थितीत ठेवण्यासाठी ताणयुक्त बलाच्या कारक-बिंदूच्या स्थानी म्हणजेच $च_स / ६$ खोलीवर धिरे बसविले पाहिजेत. अशा पद्धतीने आधार दिल्यानंतर दरडीत येणारी विरूपता बिंदुयुक्त तुटक रेषेने दाखविली आहे.

एवंच, $अ_{धु}$ ची दोन टोकांची मूल्ये आपल्याला प्राप्त होतात; ती अशी : $च_ळ / च = १$ असताना $अ_{धु} = ५ / ६$ आणि $च_स / च = ०$ आणि $ळ = ०$ असताना $अ_{धु} = १ / ३$. पहिले सत्यसमीप उत्तर म्हणून $च_स / च$ आणि $अ_{धु}$ यांतील संबंध सरळ रेषेने व्यक्त करता येतो, असे गृहीत धरल्यास आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येईल.

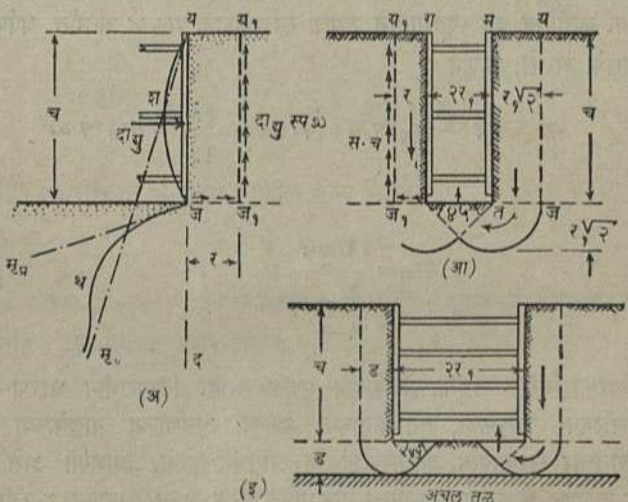
$$अ_{धु} = \frac{१}{३} + \frac{च_स}{च}\left(\frac{५}{६} - \frac{१}{३}\right) = \frac{१}{३} + \frac{१}{२}\,\frac{च_स}{च} \qquad [७]$$

$अ_{धु}$ चे मूल्य अधिक अचूकपणे ठरविण्याची पद्धत अद्याप उपलब्ध नाही. चिकण मृत्तिकेच्या दरडीमुळे येणारा दाब प्रत्यक्षात मोजून मिळालेली फलिते असे दाखवितात की, $अ_{धु}$ ची प्रत्यक्षातील मूल्ये समीकरण ७ ने प्राप्त होणाऱ्या मूल्यांहून काहीशी कमी असतात. परंतु समीकरणानुसार दिसते त्याप्रमाणे $च_स / च$ च्या वर्धमान मूल्यांनुसार $अ_{धु}$ ची मूल्ये वाढतात, असेही या फलितांवरून दिसते. $अ_{धु}$ ची प्रत्यक्षात मोजलेली मूल्ये, $\frac{१}{३}$ या मूल्यापेक्षाही, समीकरण ७ चा अवलंब करून मिळणाऱ्या $अ_{धु}$ च्या मूल्यांच्या जवळची असतात. तसेच प्रत्यक्षात १ / ३ पेक्षा कमी असलेले मूल्य कधीच प्राप्त झालेले नाही. म्हणून समीकरण ७ च्या अवलंबामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी आहे, असे दिसते; कारण $अ_{धु}$ चे मूल्य जितके अधिक तितका मृत्तिकादाबही अधिक ठरतो. या विषयात हे ध्यानात ठेवले पाहिजे की, $च_स / च = ०$ असताना मिळणारे रॅन्किन्-दाबाच्या बाबतीतील $अ_{धु}$ चे १ / ३ हे मूल्य कमी होत जाऊन $च_स / च = १$ असताना ते $-\infty$ इतके होते. म्हणून रॅन्किन्-दाबाचा कारकबिंदू खाली गेला, तर आधारकाष्ठांवरील दाबाचा कारकबिंदू वर सरकतो.

६९. **चराच्या तळाची स्थैर्य-लक्षणे** : एखाद्या चराच्या तळातून आडवा छेद घेतला, तर त्याच्या दोन्ही दरडीतील मृत्तिकेचा परिणाम, या छेदावर समप्रमाणवितरित अधिभार ठेवावा असा होतो. चराच्या तळात–जेथे असा अधिभार नसतो–या अधिभारामुळे मृत्तिका उफाळून वर येण्याचा संभव असतो. एखाद्या उताराचा आधार-भूमीसह उच्छेद होण्याशी या घटनेची तुलना करता येईल (परिच्छेद ५६ पाहा).

तथापि तळातील मृत्तिकेच्या भारधारणक्षमतेपेक्षा दोन्ही बाजूंतील मृत्तिकेच्या वजनाचा भार अधिक झाल्याविना असा उफाळून उच्छेद घडून येणे शक्य नसते. पुढील विवेचनासाठी दोन टोकांची उदाहरणे विचारात घेतली जातील, ती अशी : (१) आदर्श वालुकेतील चर आणि (२) आदर्श, समाकर्षणगुणी व जिचा कार्तनिक विरोधाचा कोन शून्य आहे अशा मृत्तिकेतील चर.

आकृती ५६ अ मध्ये आदर्श वालुकेतील चराचा उभा छेद दाखविला आहे. त्याचा तळ, भूमिगत जलपातळीच्या पुष्कळच वर आहे. आधारांच्या उभ्या काष्ठांची तळाकडची टोके चराच्या तळालगतच आहेत. म्हणून पार्श्वीय आधारावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब आडव्या दिशेतच कारक होतो ($दा_{यु} = दा_{युल}$). चराच्या बाजूंवरील पार्श्वीय दाबाचे वितरण स्थूलमानाने परिवलयाकृती असते. आकृती ५६ अ मध्ये ते *यशज* असे दाखविले आहे. दरडीच्या तळाच्या *ज* या कडेतून जाणाऱ्या *जद* या उभ्या छेदावरील लंबदिक् दाब कोणत्याही ठिकाणी प्रतियोगी मृत्तिकादाबापेक्षा अधिक असणार नाही. हा दाब, जलदाबाप्रमाणे खोली वाढेल तसा वाढत जातो. त्याची मूल्ये *जद* पासून डावीकडे मोजून स्थित केली असता आपल्याला $ज.मृ_{प्र}$ ही सरळरेषा मिळते.



आकृती ५६ : (अ) समाकर्षणहीन वालुकेतील चराच्या आधारकाष्ठांवर येणाऱ्या आडव्या दाबाचे वितरण. (आ) चिक्कण मृत्तिकेच्या हालचालीस कठीण थराकडून प्रतिबंध होत नसेल, तर मृदू, चिक्कण मृत्तिकेतील चराच्या तळाशी होणारा उत्क्षेप. (इ) (आ)-प्रमाणेच परंतु या ठिकाणी चिक्कण मृत्तिकेच्या खाली थोड्याच खोलीवर कठीण थर आहे.

चर खणण्यापूर्वी *यद* या उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबलाचे *ख* खोलीवरील मूल्य पुढीलप्रमाणे होते.

$$\sigma_{आ०} = मृ_{०} घ ख \qquad १० (१)$$

येथे $मृ_{०}$ हा स्तब्ध मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. $\sigma_{आ०}$ ची मूल्ये *यद* च्या डाव्या बाजूस स्थित केली असता आपल्याला $यमृ_{०}$ ही सरळ रेषा मिळते. खोल जावे तसा दरडीच्या खोदाईचा प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणारा प्रभाव कमी होत जातो. त्यामुळे *ज द* या उभ्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण दर्शविणारी *जथ* ही रेषा $यमृ_{०}$ या सरळरेषेला असंपाती पद्धतीने मिळू पाहते.

एवंच, दरडीच्या तळाच्या बाह्य कडांच्या परिसरातील प्रतिबल-परिस्थितीची सामान्य लक्षणे, ही अशी असतात. तळातील मृत्तिका उफाळून होणाऱ्या उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक जाणून घेण्यासाठी आपण दरडीच्या तळालगतच्या $जज_१$ (आकृती ५६ अ) या पट्टीच्या एकांक लांबीवर येणारा *भा* हा अधिभार प्रथम ठरवू. या पट्टीची रुंदी र आहे. यदृच्छया घेतलेल्या $यय_१ जज_१$ या समपार्श्वाचे घ·च·र हे वजन व त्याच्या उजव्या उभ्या सीमेवरील एकूण कार्तनिक बल यांतील फरक म्हणजे या पट्टीवरील भार होय. कार्तनिक बल स्थूलमानाने उद्युक्त मृत्तिकादाब, $दा_{यु} \times$ अंतर्गत घर्षणगुणांक, $स्प\, \phi$ इतके असते; म्हणून

$$भा = घ च र - दा_{यु} स्प\, \phi = घ·च·र - \frac{१}{२} च^{२} घ\, मा_{यु} स्प\, \phi$$

येथे

$$मा_{यु} = \frac{दा_{युल}}{\frac{१}{२} घ·च^{२}} \qquad ६७ (३)$$

हा आधारकाष्ठांवरील उद्युक्त मृत्तिकादाब-गुणक आहे. विचाराधीन धारण-क्षेत्राच्या वर असलेल्या वालुकेला, त्या क्षेत्राच्या खाली असणाऱ्या वालुकेच्या पार्श्वीय हालचालीनुसार सरकण्यास आधारकाष्ठांमुळे प्रतिबंध होतो. आणखी असे की, ही भारयुक्त वालुका केवळ एका बाजूसच विस्थापित होऊ शकते. म्हणून र रुंदीच्या या पट्टीच्या एकांक लांबीवरील $भा'_{ड}$ ही भारधारणक्षमता स्थूलमानाने, वाळूवर ठेवलेल्या, २ र रुंदीच्या व खडबडीत तळ असलेल्या पट्टिकापादकाच्या $भा_{ड}$ या भारधारण-क्षमतेच्या निम्मी असेल. $भा_{ड}$ चे मूल्य समी. ४६ (५) ने ठरविता येते. $स = ०$ आणि $ड_{पा}$ (पायाची खोली) = ०, असे या समीकरणात आदेशित करून आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$भा_{ह}=२र^{२}.\ घ.\ प_{ध}$$

आणि

$$भा'_{ह}=\frac{१}{२}भा_{ह}=र^{२}.\ घ\ प_{ध}$$

$प_{ध}$ या धारण-गुणकाचे मूल्य आकृती ३८ इ मधील आलेखावरून ($प_{ध}$ आलेख) मिळू शकते. तळ उफाळून उच्छेद होण्याच्या बाबतीत मिळणारा सुरक्षिततांक आता पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$सु=\frac{भा'_{ह}}{भा}$$

त्याच्या लघुतम मूल्यासाठी पट्टीच्या र या रुंदीचे मूल्य पुढील समीकरणाची पूर्तता करणारे असले पाहिजे.

$$\frac{d\ सु}{d\ र}=०$$

म्हणजेच

$$\frac{d}{d र}\ \frac{र^{२}.\ घ.\ प_{ध}}{घ\ च\ र-\frac{१}{२}घ\ च^{२}.\ मा_{घु}\ स्पω}=०$$

हे समीकरण सोडवून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$र=च.\ मा_{घु}\ स्पω$$

$ऽ=०$ आणि $अ_{घु}=०.५$ असल्यास $मा_{घु}$ चे मूल्य स्थूलमानाने खाली दिलेल्या उद्युक्त रॅन्किन् दाब-गुणांकाइतकेच असते.

$$मा_{उ}=स्प^{२}\ (४५^{\circ}-ω/२)$$

म्हणून

$$र=च\ स्प^{२}\ (४५^{\circ}-ω/२)\ स्पω=अ_{र}.\ च \qquad [१]$$

येथे $अ_{र}$ हा शुद्ध अंक असून त्याचे मूल्य केवळ ω या अंतर्गत घर्षणकोनावर अवलंबून आहे. ω चे मूल्य ३०° ते ४०° या कक्षेत असल्यास $अ_{र}$ चे मूल्य ०.१९ आणि ०.१८ मध्ये पडते. सु या सुरक्षिततांकाचे लघुतम मूल्य पुढील समीकरणाने मिळते.

$$सु=\left[\frac{भा'_{ह}}{भा}\right]_{र=अ_{र}च}=२प_{ध}\ अ_{र} \qquad [२]$$

या समीकरणावरून असे दिसून येते की, तळाचा उफाळून उच्छेद होण्याच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक दरडीच्या खोलीवर अवलंबून नसून केवळ ॐच्या मूल्यावरच अवलंबून असतो. जर ॐ $=$ ३०° पासून ४०° पर्यंत वाढला, तर सुरक्षिततांक सुमारे ८ पासून ५० पर्यंत वाढतो.

आकृती ५६ आ म्हणजे आदर्श, समाकर्षणगुणी मृत्तिकेच्या दरडीचा उभा छेद आहे. या मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध *स* आहे; कारण ॐ हा कार्तनिक विरोधाचा कोन शून्य आहे. दरडीच्या तळाखालीही बऱ्याच खोलीपर्यंत मृत्तिका समांग आहे. तसेच आधारकाष्ठांपैकी उभी काष्ठे दरडीच्या तळापर्यंत आहेत. यदृच्छया घेतलेल्या आणि र रुंदी असलेल्या आडव्या पट्टीच्या एकांक लांबीवरील *भा* हा उभा दाब स्थूलमानाने पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$भा = घ\cdot च\cdot र - चस = र\cdot च\left(घ - \frac{स}{र}\right) \qquad [३]$$

यावरून असे दिसते की, र चे मूल्य वाढले, तर त्यानुसार *भा* चे मूल्यही वाढते.

कार्तनिक विरोधाचा कोन ॐ शून्य आहे आणि दरडीच्या तळाच्या वरील मृत्तिका तिच्या तळाखालील मृत्तिकेत होणाऱ्या पार्श्वीय विचलनानुसार सरकण्यास आधारकाष्ठांमुळे प्रतिबंध होत असतो. या परिस्थितीमुळे खडबडीत तळाच्या पट्टिकापादकावरील भाराप्रमाणे उपरस्थ मृत्तिकेचे वर्तन होते. म्हणून पट्टीच्या एकांक क्षेत्रावरील $भ_{इ}$ ही भारधारणक्षमता पुढील समीकरणाने ठरविता येते.

$$भ_{इ} = ५\cdot७\,स \qquad ४६(७इ)$$

ही धारणक्षमता र या रुंदीवर अवलंबून नाही. यावरून दरडीच्या तळाचा उफाळून होणाऱ्या उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक पुढील गुणोत्तराने मिळतो.

$$सु = \frac{भा_{इ}}{भा} = \frac{र\cdot भ_{इ}}{भा} = \frac{१}{च}\cdot\frac{५\cdot७\,स}{घ - स/र}$$

र चे मूल्य वाढेल तसे *सु* चे मूल्य कमी होते. घसरपृष्ठाच्या आकारावरून र चे संभाव्य, महत्तम मूल्य ठरते. ॐ $=$ ० असल्यामुळे या पृष्ठाचा वक्र भाग म्हणजे *त* हा मध्यबिंदू कल्पून काढलेल्या वर्तुळाचा चाप असतो. *तज* म्हणजे एखाद्या खडबडीत पादकाचा तळ मानलेला आहे, तेव्हा घसरपृष्ठाचा प्रारंभ ज मधून काढलेल्या उभ्या स्पर्शरेषेपासून झाला पाहिजे (परिच्छेद ४५ पाहा). घसरपृष्ठाचा सरळ भाग क्षितिजाशी ४५° कोन करतो. या भौमितिक रचनेमुळे र ही रुंदी

$र_१\sqrt{२}$ पेक्षा अधिक असू शकत नाही. हे मूल्य वरील समीकरणात आदेशित केल्यास आपल्याला पुढील मूल्य प्राप्त होते.

$$सु = \frac{१}{च} \frac{५\cdot७ स}{घ - \frac{स}{र_१\sqrt{२}}} \qquad [४]$$

जेव्हा

$$च = च_१ = \frac{५\cdot७ स}{घ - \frac{स}{र_१\sqrt{२}}} \qquad [५]$$

अशी परिस्थिती असते तेव्हा सुरक्षिततांकाचे मूल्य एक येते. म्हणून चर $च_१$ पेक्षा अधिक खोल खणल्यास खोदाईच्या दोन्ही अंगांची मृत्तिका आधारकाष्ठांसह अधस दिशेने विचलित होते आणि दरडीचा तळ वर येतो. $\phi = ०$ असल्यास उभ्या दरडीची लक्ष्मणउंची स्थूलमानाने पुढीलप्रमाणे असते.

$$च_स = \frac{४ स}{घ} \qquad ५७ (२ अ)$$

म्हणून

$$स = \frac{१}{४} घ च_स \quad .$$

हे मूल्य समीकरण ५ मध्ये घालून आपणांस पुढील समीकरण मिळते.

$$च_१ = च_स \frac{५\cdot७}{४ - \frac{च_स}{र_१\sqrt{२}}} \qquad [६]$$

$र_१ = च_स / ५\cdot६५$ असल्यास $च_१$ चे मूल्य अनन्त होते. $र_१$ चे मूल्य वाढेल तसे $च_१$ चे मूल्य कमी होते. याउलट, $र_१ = \infty$ असल्यास आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$च_१ = १\cdot४२ च_स \simeq \tfrac{३}{२} च_स$$

याचा अर्थ असा की, अति रुंद तळाच्या चराची उंची $३/२ \times$ लक्ष्मणउंची ($च_स$) पेक्षा अधिक होताच, तळाचा उच्छेद होईल. अर्थात या ठिकाणी मृत्तिका बऱ्याच खोलीपर्यंत समांग असली पाहिजे. मृदू मृत्तिकेत घेतलेल्या चराच्या खाली ढ खोलीवर कठीण थर असेल, तर तळाचा उच्छेद आकृती ५६ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे होतो. खचणाऱ्या

पट्टीची रुंदी ड इतकी असते. आकृती ५६ आ मधील खचणाऱ्या पट्टीची रुंदी $र_1 \sqrt{२}$ आहे. समी० ६ मध्ये तिच्याऐवजी ड घातल्यास ज्या उंचीला चराच्या तळाचा उफाळून उच्छेद होईल, ती उंची पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$च_1 = च_स \frac{५{\cdot}७}{४ - \frac{च_स}{ड}} \qquad [७]$$

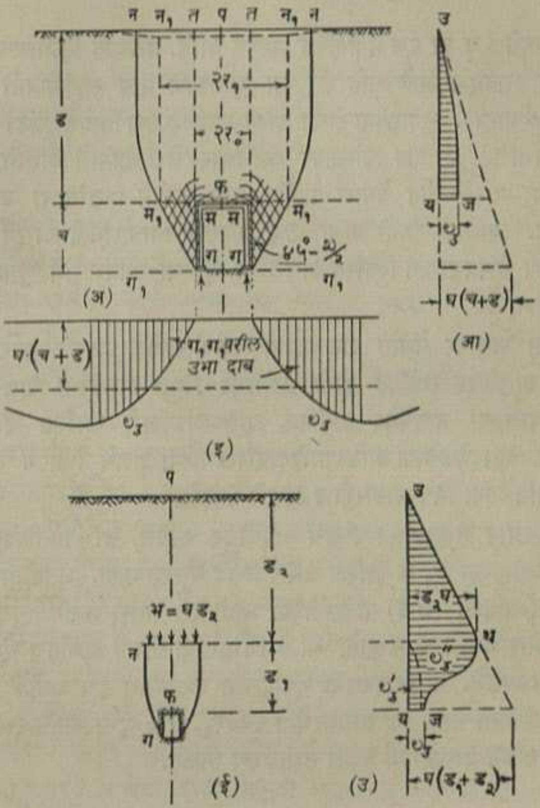
हे मूल्य चराच्या रुंदीवर अवलंबून नाही.

चराच्या तळाच्या खाली $ड_1$ खोलीपर्यंत फलक-स्थूणा ठोकून त्यांचा आधार चराच्या खोदाईला दिलेला असेल, तर अशा उदाहरणात तळ उफाळून उच्छेद होण्याच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक अनुमानण्याची पद्धत योग्य प्रकारे सुधारून घेतली पाहिजे. त्याची सोपी रीत म्हणजे फलकस्थूणांच्या तळाशी घेतलेल्या छेदावरील उभा भार काढणे ही होय. तळाचा उत्क्षेप दोन्हीकडील फलकस्थूणांच्या भूमिगत खोलीमध्ये स्थित असलेल्या मृत्तिकेच्या वजनानेच केवळ विरोधला जातो असे नव्हे, तर ही मृत्तिका आणि फलकस्थूणा यांतील विषमाकर्षणामुळेही तो विरोधला जातो.

७०. वालुकेतील भुयारे : आकृती ५७ अ मध्ये एका वालुकाथराचा छेद व त्यात खोदले जाणारे भुयार दाखविले आहे. भूजलपातळी भुयाराच्या तळाच्याही खाली आहे. ओलसरपणामुळे वालुकाकणांमध्ये जो काही क्षीण बंध आणि तज्जन्य समाकर्षण निर्माण होते, त्याहून अधिक समाकर्षण वालुकेमध्ये गृहीत धरलेले नाही. तथापि आपला अनुभव असा आहे की, या समाकर्षणाच्या अस्तित्वामुळे लहान टप्प्यांत खोदाई करताना पार्श्वीय आधार न देताही उभा पृष्ठभाग प्रत्यक्षात मिळू शकतो. भुयाराच्या दिशेने होणारे वालुकेचे विचलन अंशतः भुयाराचे तोंड आकृतीतील छेदातून पुढे सरकते तेव्हा होते, आणि उरलेले आधाराची लाकडे ठोकल्यानंतर होते. लाकडांलाकडांतील सांधे काही प्रमाणात चांगले नसणे, तसेच उभ्या लाकडांच्या पायांखाली दमनीय आधार असणे या कारणांमुळे काष्ठाधारात होणारे विचलन एवढे असते की, त्यामुळे लाकडांवर येणारा वालुकादाब कमी होऊन जवळजवळ कार्तनिक उच्छेदाच्या क्षणी येणाऱ्या दाबाइतका होतो. ही परिस्थिती आणि खचणाऱ्या पट्टीवरील वालुकाराशीतील प्रतिबल-परिस्थिती यांत साम्य असते. भुयाराच्या उभ्या बाजूंच्या परिसरातील वालुकाही तिला लावलेल्या पार्श्वीय आधारात होणाऱ्या विचलनामुळे खचते. खचणाऱ्या विभागाच्या तिरक्या सीमारेषा $४५^\circ + \text{ॠ}/२$ एवढा कोन करून वर जातात. त्यामुळे भुयाराच्या छपराच्या पातळीला खचणाऱ्या पट्टीची रुंदी स्थूलमानाने पुढीलप्रमाणे असते.

$$२ र_1 = २ [र_० + च\, स्प\, (४५^\circ - \text{ॠ}/२)] \qquad [१]$$

परिच्छेद २० मध्ये वर्णिलेल्या कृतीनुसार $म_1म_1$ या खचणाऱ्या पट्टीच्या बाहेरच्या दोन्ही कडांतून जाणारी संभाव्य घसरपृष्ठे उभी असतात असे गृहीत धरले जाईल.



आकृती ५७ : (अ) उथळ भुयाराच्या आधारकाष्ठांचा उच्छेद होण्याच्या क्षणी भुयाराकडे होणारी वालुकेची हालचाल. (आ) भुयाराच्या मध्यरेषेच्या वरील भागात असणाऱ्या वालुकेतील उभा दाब खोलीनुसार स्थित केला आहे. (इ) भुयाराच्या तळातून जाणाऱ्या आडव्या छेदावर पडणाऱ्या उभ्या दाबाचे वितरण. भुयार फार खोलीवर असल्यास (अ) ऐवजी (ई) आणि (आ) ऐवजी (उ) रेखाकृती मिळतात.

आकृतीत $म_1न_1$ या तुटक रेषांनी ही पृष्ठे दाखविली आहेत. या गृहीतानुसार $म_1म_1$ (आकृती ५७ अ) या $२र_1$ रुंदीच्या आडव्या छेदावरील उभा दाब समीकरण २०(५) चा अवलंब करून ठरविता येतो. या समीकरणात ख चे मूल्य ड आणि $र\,र_1$ चे (समीकरण

१) नियुक्त करून आपल्याला या दाबाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{७}_{\text{उ}}=\frac{\text{घ}\,\text{र}_{1}}{\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega}\left(\text{१}-\in^{-\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega\cdot\text{ड}/\text{र}_{1}}\right) \qquad [\text{२}]$$

या समीकरणातील मृ हा एक प्रयोगसिद्ध गुणांक आहे. प्रत्यक्षात मिळालेल्या फलितांच्या आधारे असे आढळून आले आहे की, या गुणांकाचे मूल्य स्थूलमानाने एक असते (परिच्छेद २० पाहा). भुयाराच्या दोन्ही उभ्या बाजूंलगतच्या त्रिकोणी खंडांच्या माथ्यावर येणारा उपरोक्त $\text{७}_{\text{उ}}$ हा दाब त्यांच्यावर अधिभार ठेवल्याप्रमाणे असतो. भुयाराच्या बाजूंवर अशा परिस्थितीत येणारा पार्श्वीय दाब कूलोम–सिद्धांताचा अवलंब करून ठरविता येतो. त्यासाठी दोन्ही उभ्या बाजू म्हणजे आधारभिंती असून त्यांच्यामागे असणारे भरण समप्रमाणात वितरित असलेल्या $\text{७}_{\text{उ}}$ या अधिभाराने युक्त आहे, असे गृहीत धरले जाते.

भुयाराच्या छतावर येणारा दाब उभ्या खांबांखालील पादकांच्याद्वारे भुयाराच्या तळाखालील वालुकेवर संक्रमित होतो. छतावर स्थित असलेल्या वालुकेचे उर्वरित वजन आसपासच्या वालुकेवर कार्तनिक प्रतिबलांच्याद्वारे संक्रमित होते. म्हणून भुयाराच्या तळातून घेतलेल्या आडव्या छेदावरील उभ्या दाबाचे वितरण आकृती ५७ इ मध्ये दाखविलेल्या वितरणासारखेच असले पाहिजे.

भुयाराचे स्थान भूपृष्ठापासून बऱ्याच खोलीवर असेल, तर छत्रक्रियेचा परिणाम भुयाराच्या छतापासून ड_{1} या विशिष्ट उंचीपलीकडे पसरत नाही. भूपृष्ठ आणि ही उंची यांमधील ड_{2} (आकृती ५७ ई) या जाडीच्या भागातील वालुका छत्रक्रियायुक्त विभागावर साध्या अधिभाराप्रमाणे कारक होते. या अधिभाराची तीव्रता अर्थातच एकांक क्षेत्रावर $\text{घ}\cdot\text{ड}_{2}$ इतकी असते. या उदाहरणात भुयाराच्या छतावरील दाब समी० २०(४) च्या साहाय्याने ठरविता येतो. या समीकरणात $\text{र}=\text{र}_{1}$, $\text{भ}=\text{ड}_{2}\,\text{घ}$ आणि $\text{ख}=\text{ड}_{1}$ अशी मूल्ये नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{७}_{\text{उ}}=\frac{\text{घ}\cdot\text{र}_{1}}{\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega}\left(\text{१}-\in^{-\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega\cdot\text{ड}_{1}/\text{र}_{1}}\right)+\text{घ}\cdot\text{ड}_{2}\in^{-\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega\cdot\text{ड}_{1}/\text{र}_{1}}$$

वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन, ω, निदान ३०° इतका असतो आणि प्रयोगांती असे आढळले आहे की, मृ चे मूल्य निदान एक तरी असते. अशा खोल भुयाराचे छत खचल्यास छत्रक्रिया विभागाची ड_{1} ही उंची वाढते, आणि ड_{2} कमी होते. ड_{1} ही उंची $\text{ड}_{1}+\text{ड}_{2}$ या एकूण उंचीच्या २० टक्के इतकी होताच वरील समीकरणातील उजवीकडील दुसऱ्या पदाचे मूल्य क्षुल्लक होते. ड_{1} चे मूल्य कोणतेही असले, तरी पहिले पद $\text{घ}\text{र}_{1}/\text{मृ}\,\text{स्प}\,\omega$ पेक्षा लहान असते. म्हणून शुष्क वालुकेत खोलवर स्थित असलेल्या

भुयारावरील दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ महत्तम मूल्य एका परम मर्यादेपलीकडे जात नाही. ही मर्यादा पुढीलप्रमाणे असते.

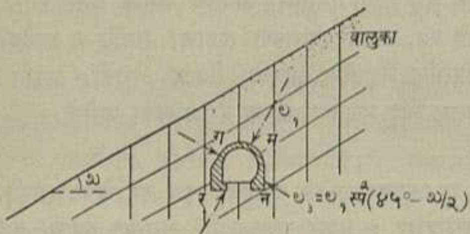
$$\text{ए}_{\text{उ}\infty} = \frac{\text{घ} \cdot \text{र}_1}{\text{मृ} \cdot \text{स्प}\,\omega} \qquad [३]$$

या वेळीही छत्रक्रिया भुपृष्ठापर्यंत पसरत नाही. भुयाराच्या मध्यरेषेच्या वर घेतलेल्या आडव्या छेदांवरील उभ्या दाबाची मूल्ये आकृती ५७ ड मध्ये *उथज* या आलेखाच्या भुजांनी व्यक्तविली जातात. हा आलेख आकृती १८ ई मधील *०गत* सारखा आहे.

वालुकेतील भुयारांच्या तळांच्या स्थैर्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांचा शोधही मागील परिच्छेदात वर्णिलेल्या पद्धतीचा अवलंब करून घेता येतो. या अभ्यासाचा निष्कर्ष असा आहे की, अशा भुयाराच्या तळाचा उफाळून उच्छेद घडून येण्याच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक नेहमीच आवश्यक तेवढा असतो. अर्थात त्यासाठी संभाव्य घसरपृष्ठाचा नीचतम बिंदू भूजलपातळीच्या वर असला पाहिजे.

७१ भुयाराच्या अस्तरावरील वालुकादाब ठरविण्यासाठी रॅन्किन्प्रणीत सिद्धांताचा उपयोग : भुयार खणण्यापूर्वी समतल पृष्ठाचा वालुकाराशी पार्श्वीय दिशेने बद्ध असतो, व त्यातील उभ्या आणि आडव्या दाबांतील गुणोत्तर मृ_0 या स्तब्धमृत्तिकादाब–गुणांका एवढे असते. उद्युक्त रॅन्किन् अवस्था प्रस्थापित करण्यासाठी या संपूर्ण वालुकाराशीचे पार्श्वीय विस्तरण झाले पाहिजे. तसेच हे विस्तरण एकांक रुंदीवर काहीएक किमान मूल्याचे असले पाहिजे. हे किमान मूल्य वालुकेच्या घनतेवरच तत्त्वतः अवलंबून असते. रॅन्किन्प्रणीत मृत्तिकादाब-सिद्धांताच्या या मूलभूत लक्षणाशी न जुळणारी परिस्थिती भुयाराच्या खोदाईत निर्माण होते; कारण या खोदाईमुळे निर्माण होणारे पार्श्वीय विस्तरण भुयाराच्या दोन्ही बाजूंस मर्यादित क्षेत्रापलीकडे जात नाही. या क्षेत्राच्या पलीकडे आडव्या दिशेत विकृती जवळजवळ नसतेच. या प्रकारची विरूपता रॅन्किन्–सिद्धांताशी विसंगत आहे. परंतु या सर्वसामान्य नियमाला एक अपवाद आहे. क्षितिजाशी वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणकोनाइतक्या किंवा किंचित् कमी मूल्याचा कोन करणाऱ्या उताराखाली, फार खोलवर नसलेल्या भुयाराच्या आधारकाष्ठांवरील दाब जेथे ठरवायचा असतो ते उदाहरण म्हणजे हा अपवाद होय. या उदाहरणात उताराच्या एकूण उंचीच्या लहानशा भागात भुयार खणण्यापूर्वीच उद्युक्त प्रकारची उच्छेदसमीपता असते; आणि ती आकृती ९ आ व इ मध्ये दाखविलेल्या उद्युक्त रॅन्किन् अवस्थेसारखीच असते. उतारकोन $\text{ब} = \omega$ असल्यास संभाव्य घसरपृष्ठांचा एक संच उतारास समांतर आणि दुसरा उभा असतो. बांधकामास प्रारंभ करण्यापूर्वी वालुका नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असल्यामुळे भुयाराच्या आधारकाष्ठांकडून

हीच परिस्थिती टिकून धरण्यापलीकडे काही विशेष घडून येणे शक्य नसते. म्हणून आधाराच्या माथ्याकडील भागावर येणारा मृत्तिकादाब स्थूलमानाने उद्युक्त रॅन्‌किन् दाबाइतका असतो. उदाहरणार्थ, भुयाराचा आकार व स्थान आकृती ५८ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असेल, तर त्याच्या *गमन* या बाह्य पृष्ठांशावर येणारे लंबदिक् दाब रॅन्‌किन्-सिद्धांतानुसार, मोहूर-रेखाकृतीच्या साहाय्याने अनुमानिता येणे शक्य असते. या पृष्ठांशाच्या आसपास असणाऱ्या वालुकेतील ७_1 आणि ७_3 या प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा आकृतीत काढलेल्या बाणांनी दाखविल्याप्रमाणे असतात. बांधकाम चालू असताना भुयाराच्या तळात असणाऱ्या वालुकेतील प्रतिबल शून्यापर्यंत घटलेले असते. बांधकामाला प्रारंभ होण्यापूर्वी *गर* या पृष्ठांशावर कारक असणाऱ्या कार्तनिक प्रतिबलांची दिशा बांधकाम चालू असताना उलटी होते. म्हणून रॅन्‌किन्‌चा सिद्धांत



आकृती ५८ : विरामकोन करून चढत जाणारा पृष्ठभाग असलेल्या समाकर्षणहीन वालुकाराशीतील भुयार.

गमन या पृष्ठांशावरील दाब ठरविण्यासाठीच फक्त वापरला पाहिजे. *गर* या पृष्ठांशावरील दाब कूलोमच्या सिद्धांतानुसार काढणे शक्य असते.

भुयाराचे स्थायी स्वरूपाचे अस्तर आकृती ५८ मध्ये दाखविलेल्या मृत्तिकादाब-विषयक परिस्थितीला अनुरूप असावे, या उद्देशाने लोहमार्गासाठी बांधलेल्या काही भुयारांच्या अस्तराचा आकार आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे विषमरूपी ठेवलेला आहे (बीरबॉमर १९१३).

ω हा उतारकोन ϕ या अंतर्गत घर्षणकोनापेक्षा किंचित् लहान असला, तरीही आकृती ५८ मध्ये दिलेली कृती आपण वापरू शकतो, परंतु त्यासाठी अंतर्गत घर्षणकोन उतारकोनाइतकाच आहे, असे गृहीत धरावे लागते. ω हा उतारकोन ϕ पेक्षा फारच लहान असेल, तर मात्र रॅन्‌किन् सिद्धांत लागू करता येत नाही.

७२. समाकर्षणगुणी मृत्तिकेतील भुयारे : परिच्छेद ७० मध्ये वर्णिलेली विश्लेषणाची पद्धत समाकर्षणगुणी मृत्तिकेतील भुयारांनाही लागू करता येते. अशा मृत्तिकेच्या बाबतीत संभाव्य घसरपृष्ठाच्या एकांक क्षेत्रावरील कार्तनिक विरोध

पुढीलप्रमाणे असतो.

$$क = स + ७ \, स्प \, \omega \qquad ५ \, (१)$$

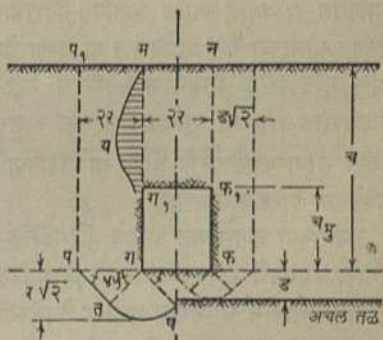
परिच्छेद ७० मधील समीकरणांना आधारभूत असलेली सुकरतादायी गृहीते तशीच ठेवली, तर समीकरण २० (३)चा अवलंब करून आपण भुयारांच्या छतावरील दाबाचे अनुमान करू शकतो. या समीकरणात र ऐवजी $र_१$ (समीकरण ७० (१)) आणि ख ऐवजी ह अशी मूल्ये नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते. या ठिकाणी र म्हणजे आकृती ५७ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भुयाराच्या छताच्या पातळीला मोजलेली छत्रक्रिया विभागाची अर्धी रुंदी आहे; आणि ह म्हणजे भुयाराच्या छताची भूपृष्ठापासून मोजलेली खोली आहे.

$$७_{उ} = र_१ \frac{घ - \frac{स}{र_१}}{मृ \, स्प \, \omega} \left(१ - \in^{-मृ \, स्प \, \omega \cdot ह / र_१} \right) \qquad [२]$$

या समीकरणानुसार मिळणारा, कोणत्याही खोलीवरच्या छतावरील दाब शून्य असू शकेल, मात्र त्यासाठी पुढील समीकरणाची पूर्तता झाली पाहिजे.

$$र_१ \gtrless \frac{स}{घ} \qquad [२]$$

परंतु हे ध्यानात ठेवले पाहिजे की, छत्रक्रियाविभागात घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबले सर्व ठिकाणी सममूल्य असतात, या सुकरतादायी गृहीतावर समीकरण २०(३) आधारित आहे. प्रत्यक्षात ज्यांच्यावर लंबदिक् दाब सममूल्य असतो, अशी पृष्ठे छत्राप्रमाणे वक्र असतात. परिणामी शून्यमूल्य दाबाचे हे पृष्ठ भुयाराच्या सममात्रतेच्या पातळीला छताच्या वर काही अंतरावर छेदते. या अंतरापर्यंत मृत्तिका ताणयुक्त अवस्थेत असते. ताणयुक्त विभागाच्या माथ्याच्या सीमेवर ताणजन्य उच्छेद झाला, तर त्यामुळे छत्राकार मृत्तिकाखंड छतातून सुटून खाली पडतो. अशा अपघाताला प्रतिबंध व्हावा



आकृती ५९ : मृदू, चिक्कण मृत्तिकेतील भुयाराच्या तळात होणारा उत्क्षेप. चिक्कण मृत्तिका अतिशय खोलवर अस्तित्वात असेल, तेव्हाची परिस्थिती डाव्या बाजूकडे दाखविली आहे आणि चिक्कण थर फारसा जाड नसून कठीण थरावर स्थित असेल, तेव्हाची उजवीकडे दाखविली आहे.

म्हणून समाकर्षणगुणी मृत्तिकेतील भुयाराच्या अनाधारित छताचा आकार नेहमी छत्रासारखा ठेवला पाहिजे.

भुयाराची रुंदी स/घ पेक्षा (समीकरण २) अधिक असेल, तेव्हा छतास आधार दिलाच पाहिजे. छपरावर येणारा दाब उभ्या काष्ठांच्या पादकांतून भुयाराच्या तळावर संक्रमित होतो. भुयाराच्या तळातून घेतलेल्या आडव्या छेदावर या परिस्थितीत येणाऱ्या लंबदिक् दाबाचे वितरण आकृती ५७ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते. काही टोकाच्या उदाहरणांत दाखविलेला विषम प्रमाणात वितरित होणारा भार सहन करण्यास मृत्तिका असमर्थ ठरली, तर भुयाराचा तळ उफाळून येऊ शकतो. हे टाळावयाचे तर तळालाही पक्का आधार दिला पाहिजे, किंवा गोल आकार दिला पाहिजे.

समाकर्षणगुणी मृत्तिकेत खणलेल्या भुयाराच्या तळाची स्थैर्यविषयक लक्षणे तत्त्वतः परिच्छेद ६९ मध्ये वर्णिलेल्या व ५६ आ आणि इ या आकृतींद्वारा स्पष्ट केलेल्या लक्षणांसारखीच आहेत. भुयाराचा तळ पुरेशा प्रमाणात कठीण असेल, तर छतासाठी वापरलेल्या तात्पुरत्या अस्तराचे आधार, तळाच्या दोन्ही बाजूंस पादकावर ठेवता येतात. ते शक्य नसल्यास सर्व भागाला आधार देणाऱ्या कवचांचा उपयोग करून भुयार बांधावे लागते (टेरझागी १९४२ अ). या पद्धतीत बांधकामाचा खर्च बराच वाढतो. त्यामुळे भुयार-तळाची भारधारणक्षमता हा व्यावहारिक दृष्ट्या फार महत्त्वाचा घटक ठरतो.

२र रुंदी असलेल्या व भूपृष्ठापासून फार खोल नसलेल्या भुयाराचा उभा छेद आकृती ५९ मध्ये दाखविला आहे. भुयाराभोवतालच्या मृत्तिकेची घनता घ आहे. समाकर्षण स आहे आणि कार्तनिक विरोधाचा कोन शून्य आहे. भुयाराच्या उभ्या बाजूंतून जाणाऱ्या गम आणि फन या उभ्या छेदांवरील एकूण लंबदिक् दाब, स्थूलमानाने त्याच मृत्तिकेतील तितकीच खोली व रुंदी असलेल्या चराला लावलेल्या आधार-फलकावरील $दा_{ख}$ या मृत्तिकादाबाइतका असतो. मग, $फ_{1}$न या मृत्तिकाखंडाचे कार्य तेथील आधारकाष्ठांसारखे होते. या खंडाच्या उभ्या बाजूवरील लंबदिक् दाब मयग, या दाबक्षेत्राने दाखविला आहे.

भुयाराच्या छताखाली आडवे धीरे दिलेले नसल्यामुळे भुयाराच्या दोन्ही बाजूंकडील मृत्तिका सहजपणे भुयाराच्या दिशेने विस्थापित होऊ शकते. त्यामुळे पग या पट्टीवरील मृत्तिका, पूर्णत्वाने घर्षणहीन तळावर ठेवलेल्या अधिभारासारखी ठरते. या परिस्थितीत पट्टीची भारधारणक्षमता पुढील समीकरणाने मांडली जाते.

$$भ_{ह} = ५\cdot१४\ स \qquad ४६\ (९\ ऊ)$$

ही भारधारणक्षमता पट्टीच्या रुंदीवर अवलंबून नाही. पट्टीखालील मृत्तिकेत नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या विभागाच्या आकारमानावर भुयाराच्या रुंदीमुळे ज्या मर्यादा पडतात; त्यामुळे विचलित होणाऱ्या पट्टीची रुंदी सीमित होते. $\omega = ०$ असल्यामुळे

नम्य समतोलाच्या अवस्थेतील विभागाची सीमा *पत* हा चाप आणि *तप* ही सरळ रेषा यांची बनलेली आहे. आकृती ५९ च्या डाव्या बाजूस दाखविल्याप्रमाणे *तप* ही रेषा क्षितिजाशी ४५° कोन करून वर जाते. म्हणून *गप* या पट्टीची रुंदी २र आहे.

या पट्टिकेवरील एकूण उभ्या भाराची खालची मर्यादा म्हणजे पुढील दोन मूल्यांतील फरक होय. (१) भुयाराची सममात्रता पातळी आणि $पप_१$ हा उभा छेद या दोहोंमध्ये असलेल्या मृत्तिकाखंडाचे ३ $घ \cdot र \cdot च - घर \cdot च_{भु}$ हे वजन आणि (२) $पप_१$ या उभ्या छेदावरील $च \cdot स$ हा एकूण कार्तनिक विरोध. तेव्हा *गप* या पट्टीच्या एकांक क्षेत्रावरील उभा दाब पुढील मूल्यापेक्षा कमी असणार नाही.

$$भ = \frac{घ}{२}(३च - च_{भु}) - \frac{च \cdot स}{२र}$$

आणि तळ उफाळून येण्याच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे असेल.

$$सु = \frac{भ_{तु}}{भ} = \frac{५\cdot१४ स}{\frac{घ}{२}(३च - च_{भु}) - \frac{चस}{२र}} \qquad [३]$$

जेथे

$$च = च_१ = \frac{५\cdot१४ स + ०\cdot५ घच_{भु}}{१\cdot५ घ - \frac{स}{२र}} \qquad [४]$$

असेल तेथे सुरक्षिततांकाचे मूल्य एक होते. $च_स = \frac{४स}{घ}$ (समी. ५७ (२ अ)) हे लक्ष्मण-उंचीचे मूल्य या समीकरणात नियुक्त केल्यास आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$च_१ = च_स \frac{५\cdot१४ + २\left(\frac{च_{भु}}{च_स}\right)}{६ - \frac{च_स}{२र}} \qquad [५]$$

भूपृष्ठ आणि भुयारतळ यांतील उभे अंतर $च_१$ हून अधिक असेल, तर भुयारतळ उफाळेल आणि भुयाराचे छत खचेल.

आकृती ५९ च्या उजव्या भागातील तुटक रेषा म्हणजे नम्य समतोलाच्या अवस्थेतील विभागाची खालची सीमा आहे. तेथे मृदू मृत्तिकेच्या तळाखाली $ह < र\sqrt{२}$ खोलीवर कठीण थर आहे, असे गृहीत धरले आहे. या थराच्या अस्तित्वामुळे

खचणाऱ्या विभागाची रुंदी २र पासून इ $\sqrt{२}$ इतकी घटते व त्यामुळे आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$च_१ = च_स \frac{५\cdot१४ + २\left(\dfrac{च_भु}{च_स}\right)}{२\left(\dfrac{इ\sqrt{२}}{र} + १\right) - \dfrac{च_स}{२र}} \qquad [६]$$

आधारासाठी लावलेल्या कमानी किंवा उभे धीरे यांच्या पादकांना अपुरा आधार असेल, तर त्यामुळेसुद्धा अशा तात्पुरत्या आधाराचा उच्छेद होऊ शकतो. भुयाराच्या एकांक लांबीत असलेल्या पादकांवर येणारा भार खालील भारांच्या फरकाइतका तरी निदान असतो. ते भार असे: (१) $मग_१फ_१न$ या मृत्तिकाखंडाचे वजन आणि (२) $मग_१$ आणि $नफ_१$ या उभ्या छेदांवर निर्माण होणाऱ्या कार्तनिक विरोधी बलांच्या बाबतीत शक्य असणारे $२स(च - च_भु)$ हे महत्तम मूल्य. आधाराच्या कमानी जर एखाद्या सलग पट्टिकापादकावर आधारित असतील व त्या प्रत्येकाची रुंदी २ल असेल, तर अशा पादकाच्या एकांक लांबीवर पडणाऱ्या भाराचे मूल्य निदान खालील प्रमाणे असेल.

$$भ = \frac{घर(च - च_भु) - (च - च_भु)स}{२ल} = \frac{१}{२ल}(च - च_भु)(घर - स)$$

पादकांचा तळ खडबडीत असल्यामुळे त्यांची भारधारणक्षमता पुढील समीकरणाने मिळते.

$$भ_इ = ५\cdot७ स \qquad ४६ (७ इ)$$

भारधारणक्षमता $भ_इ$ भागिले आवश्यक एवढा सुरक्षिततांक सु या भागाकारापेक्षा पादकावरील भ हा भार अधिक असता कामा नये; म्हणून—

$$भ = \frac{१}{२ल}(च - च_भु)\ (घर - स) = \frac{५\cdot७स}{सु}$$

म्हणजेच

$$२ल = \frac{च - च_भु}{५\cdot७स}\ (घ\cdot र - स)सु \qquad [७]$$

आधाराखालच्या पट्टिका-पादकांची रुंदी निदान वरील २ल इतकी ठेवणे शक्य असेल किंवा त्यांना समान असणारी चौरस पादके ठेवणे शक्य असेल, तरच येथे गृहीत धरलेली भुयार-खोदाईची पद्धत अवलंबिता येते.

७३. **वेधनविवरांच्या भोवतीची प्रतिबल-परिस्थिती :** दंडगोलाकृती विवरांभोवतीच्या मृत्तिकेतील नम्य समतोल विषयक समस्यांचा ऊहापोह करताना हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, वेधनविवरांसारखी लहान विवरे आणि कूपांसारखी मोठी विवरे यांत भेद आहे. वेधन-विवराचा व्यास काही इंचांहून अधिक नसतो; उलटपक्षी, कूपाच्या खोदाईचा व्यास निदान कित्येक फूट तरी असतो.

समाकर्षणगुणी मृत्तिकेच्या थरात एखादे लहान वेधन-विवर घेतले जाते, त्या वेळी त्याची भिंत पार्श्वीय आधाराविना उभी राहण्याचा संभव असतो; परंतु त्याच मृत्तिकेत १० फूट व्यासाचा कूप खोदू गेल्यास त्याची भिंत आधाराशिवाय कोसळण्याचा संभव असतो. लहान विवरांच्या भोवती जी प्रतिबल-परिस्थिती असण्याचा संभव असतो तिचा ऊहापोह पुढील विश्लेषणात केला आहे. विवराची गर्भरेषा व ज्यांचा अक्ष एकरूप आहेत, अशा छेदांसाठीच **दंडगोलाकृती छेद** ही संज्ञा निरपवादपणे वापरली जाईल. समजा,

$घ$ = मृत्तिकेची घनता,

$मृ_{०}$ = स्तब्धावस्थेतील मृत्तिकादाबगुणांक असून त्याचे मूल्य मृत्तिकेचे स्वरूप आणि तिची भूस्तरीय कुळकथा यांवर अवलंबून आहे;

$σ_{त्र}$, $σ_{ठ}$ आणि $σ_{ख}$ = अनुक्रमे आडवे त्रिज्यादिक् प्रतिबल, आडवे परिघस्थ प्रतिबल आणि उभे प्रतिबल असून सर्वच लंबरूप आहेत;

$ड$ = $σ_{त्र}$ आणि $σ_{ख}$ ही लंबदिक् प्रतिबले जीवर कारक आहेत त्या पातळीवरील कार्तनिक प्रतिबल,

$σ_{१}$ आणि $σ_{३}$ = अनुक्रमे ज्येष्ठ आणि कनिष्ठ प्रधान प्रतिबले असून ती विवरवेधनानंतर अस्तित्वात येतात;

$σ_{त्र_{०}}$ = विवराच्या भिंतीवरील $ख$ खोलीवरचे लंबदिक् प्रतिबल,

$त्र_{०}$ = विवराची त्रिज्या आणि

$त्र_{बा}$ = $ख$ खोलीवरच्या नम्य समतोल विभागाचा बाहेरचा व्यास आहेत. मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध कूलोमच्या पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो.

$$क = स + σ\,स्प\,ω$$

येथे $स$ हे समाकर्षण, $σ$ हा कार्तनिक पातळीवरील लंबदिक् दाब आणि $ω$ हा कार्तनिक विरोधाचा कोन आहे. या मृत्तिकेच्या बाबतीतील नम्य समतोलाची लक्षणे समी. ७(३) ने व्यक्त करता येतात.

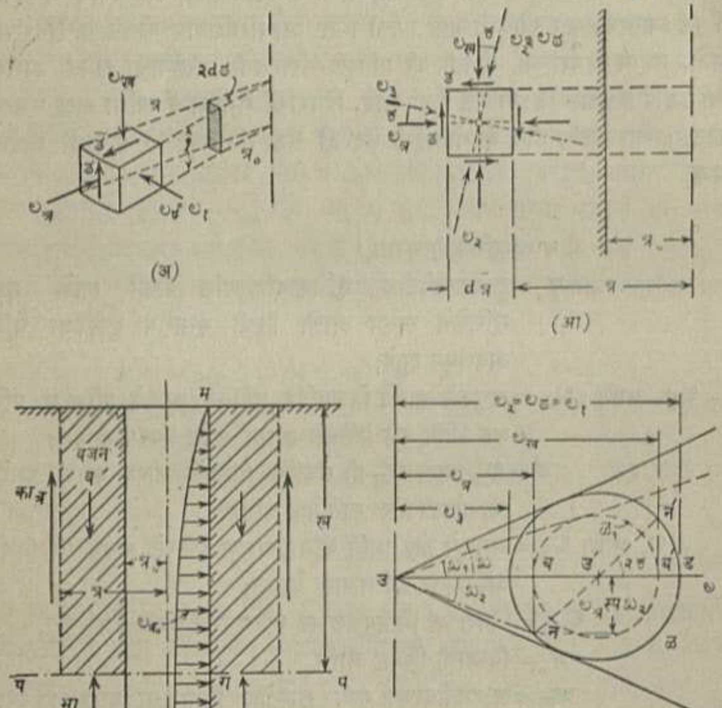
$$σ_{१} = २स\sqrt{ण} + σ_{३}ण \qquad (१)$$

येथे $ए_{१}$ हे ज्येष्ठ प्रधान प्रतिबल आणि $ए_{३}$ हे कनिष्ठ प्रधान प्रतिबल आहे आणि

$$ण = स्प^{२}(४५^{\circ} + \omega/२)$$

आहे.

आकृती ६० अ मध्ये त्र या यदृच्छया घेतलेल्या त्रिज्येच्या दंडगोलाकृती छेदाचा परिसर आणि त्यातील एका मृत्तिकाखंडावर कारक असलेली प्रतिबले दाखविली आहेत.



आकृती ६० : (अ आणि आ) कूपाच्या मध्यरेषेपासून त्र या यदृच्छया घेतलेल्या अंतरावरील लहानशा मृत्तिकाखंडाच्या बाजूंवर कारक असणारी प्रतिबले. (इ आणि ई) कूपाच्या अस्तरावर येणारा मृत्तिकादाब ठरविण्याच्या कृतीमागील गृहीते दाखविणाऱ्या रेखाकृती.

विवराच्या गर्भरेषेतून जाणाऱ्या उभ्या छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले शून्यमूल्य असल्यामुळे $ए_{ठ}$ हे परिघस्थ प्रतिबल, प्रधान प्रतिबल ठरते.

आकृती ६० अ मध्ये दाखविलेले ड हे कार्तनिक प्रतिबल नगण्य असू शकते, हे वेस्टरगार्डने (१९४०) उदाहरण म्हणून आकडेमोड करून दाखविले आहे. ही अट पुरी झाल्यास $ए_{त्र}$ हे त्रिज्यादिक् प्रतिबल जवळजवळ $ए_{३}$ या कनिष्ठ प्रधान प्रतिबलाइतकेच होते. तेव्हा नम्य समतोलाचे लक्षण (समीकरण १) आपण त्याप्रमाणे बदलून पुढील-प्रमाणे मांडू शकतो.

$$ए_{ठ} = २\,स\,\sqrt{ण} + ण\cdot ए_{त्र} \qquad (२)$$

$ए_{त्र}$ आणि $ए_{ठ}$ ही दोन्ही प्रतिबले आडवी असल्यामुळे वेधन-विवराच्या भिंतीचा उच्छेद आडव्या पातळीवरील नम्य विसर्पणाने घडून येईल. समीकरण २ आणि समीकरण १७ (३) एकत्र करून वेस्टरगार्डने (१९४०) या समस्येतील सीमा-लक्षणांची पूर्तता करतील, अशी प्रतिबल-समीकरणे ठरविली. त्यांनुसार प्रतिबले पुढीलप्रमाणे मांडता येतात.

$$ए_{त्र} = \left(ए_{त्र०} + \frac{२\,स\,\sqrt{ण}}{ण - १}\right)\left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right)^{ण - १} - \frac{२\,स\,\sqrt{ण}}{ण - १} \qquad [३\ अ]$$

आणि

$$ए_{ठ} = ण\left(ए_{त्र०} + \frac{२\,स\,\sqrt{ण}}{ण - १}\right)\left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right)^{ण - १} - \frac{२\,स\,\sqrt{ण}}{ण - १} \qquad [३\ आ]$$

ही समीकरणे मूलभूत तत्त्वापासून प्रारंभ करूनही सिद्ध करता येतात. त्यासाठी समीकरण २ आणि दुसरे एक समीकरण यांचा संयोग करावा लागतो. आकृती ६० अ मध्ये दाखविलेल्या खंडावर कारक असणाऱ्या व त्याच्या, मध्यबिंदूतून जाणाऱ्या सर्व आडव्या त्रिज्यादिक् बलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे (टेरझागी १९१९), ही परिस्थिती ज्याने व्यक्त होते ते समीकरण म्हणजे उपरोक्त दुसरे समीकरण होय.

समीकरण ३ चा अवलंब करून नम्य आणि स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असणाऱ्या विभागांच्या सीमेवरील प्रतिबले मिळविली, तर या सीमेपलीकडे असणाऱ्या मृत्तिकेतील स्थितिस्थापक समतोलासाठी आवश्यक असणाऱ्या लक्षणांची पूर्तताही या प्रतिबलांच्याद्वारे झाली पाहिजे. स्थितिस्थापक विभागातील प्रतिबले ठरविण्यासाठी वापरावयाची समीकरणे परिच्छेद १४५ मध्ये सिद्ध केली जातील. ही समीकरणे व समीकरण ३ यांचा संयोग करून व $मृ_{०} = १$ गृहीत धरून $त्र_{बा}$ या त्रिज्येसाठी वेस्टरगार्डने पुढील समीकरण मिळविले. $त्र_{बा}$ म्हणजे पृष्ठभागापासून मोजलेल्या ख या खोलीवरील नम्य समतोलावस्थेत असणाऱ्या विभागाची बाह्य त्रिज्या होय.

$$त्र_{बा} = त्र_{०}\left\{\frac{२\,[(ण - १)\,घ\,ख + २\,स\sqrt{ण}]}{(ण + १)\,[(ण - १)\,ए_{त्र०} + २\,स\sqrt{ण}]}\right\}^{\frac{१}{ण - १}} \qquad [४]$$

ही समीकरणे समाकर्षणहीन मृत्तिकांना लागू करावयाची असतील, तर समीकरणे २, ३ व ४ यांमध्ये $स = ०$ नियुक्त केले पाहिजे. तसे करून आपल्याला पुढील समीकरणे मिळतील.

$$\sigma_{ठ} = ण . \sigma_{त्र} \qquad [५]$$

$$\sigma_{त्र} = \sigma_{त्र०} \left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right)^{ण - १} \qquad [६अ]$$

$$\sigma_{ठ} = ण . \sigma_{त्र०} \left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right)^{ण - १} \qquad [६आ]$$

आणि

$$त्र_{बा} = त्र_{०} \left[\frac{२ \; ^{घ}ख}{\sigma_{त्र०} \cdot (ण + १)}\right]^{१/(ण - १)} \qquad [७]$$

वेधन-विवराच्या भिंतीवर कारक असणाऱ्या $\sigma_{त्र०}$ या त्रिज्यादिक् प्रतिबलाचे मूल्य धन असेतोपर्यंत प्रत्येक वेळी नम्य समतोल विभागाच्या $त्र_{बा}$ या त्रिज्येसाठी (समीकरण ७) आपल्याला परिमित मूल्य मिळते. हा निष्कर्ष वालुकेत घेतलेल्या वेधनविवरांच्या बाबतीत येणाऱ्या प्रत्यक्षातील अनुभवाशी सुसंगत आहे. चिखलाच्या अस्तरामुळे निर्माण होणारा अत्यल्प प्रमाणातील पार्श्वीय विरोध वेधन-विवर कोसळू न देता स्थिर ठेवण्यास पुरेसा होतो, असे नेहमीच अनुभवास येते.

दुसरे उदाहरण म्हणून आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेतील वेधनविवराच्या परिसरातील प्रतिबल-परिस्थितीचा विचार करू. येथे कार्तनिक विरोधाचा कोन, ϕ, शून्य आहे. समीकरण २ मध्ये

$$ण = स्प^{२} (४५^{\circ} + \phi/२) = १$$

हे मूल्य नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$\sigma_{ठ} = \sigma_{त्र} + २स \qquad [८]$$

$\phi = ०$ या गृहीतानुसार समीकरण ३ आणि ४ सोडविली, तर आपल्याला पुढील मूल्ये मिळतात.

$$\sigma_{त्र} = २ स \cdot लघु \left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right) + \sigma_{त्र०} \qquad [९ अ]$$

$$\sigma_{ठ} = २ स \left[लघु \left(\frac{त्र}{त्र_{०}}\right) + १\right] + \sigma_{त्र०} \qquad [९ आ]$$

आणि

$$त्र_{बा} = त्र_{०} \in^{(घख - स - \sigma_{त्र०})/२ स} \qquad [१०]$$

वेधनविवराच्या भिंतीला आधार नसेल, तर त्यावर कारक असणारे $ϑ_{त्र_{०}}$ हे लंबदिक् प्रतिबल शून्य असते, आणि $त्र_{बा}$ चे मूल्य खालीलप्रमाणे होते.

$$त्र_{बा} = त्र_{०} \in^{(घख - स) / २स} \qquad [११]$$

पृष्ठभागापासून खाली दिलेल्या खोलीपर्यंतच्या भागात $त्र_{बा}$ चे मूल्य $त्र_{०}$ पेक्षा लहान असते.

$$ख_{बा} = स / घ \qquad [१२]$$

याचा अर्थ असा की, या खोलीपर्यंत स्थितिस्थापक विभाग विवराच्या भिंतीपर्यंत पसरतो. $ख$ चे मूल्य याहून अधिक होत जाते, तशी नम्य समतोलाच्या विभागाची त्रिज्याही वाढत जाते. तथापि $ख$ हे पद जोपर्यंत परिमित मूल्याचे असते, तोपर्यंत $त्र_{बा}$ चे मूल्यही परिमित असते. तेव्हा $स$ चे आणि $ख$ चे मूल्य काही असले, तरी चिक्कण मृत्तिकेत घेतलेल्या वेधन-विवरांच्या भिंतींना पार्श्वीय आधाराची आवश्यकता भासू नये. अनुभवही असाच आहे की, कठीण किंवा मध्यम प्रतीच्या चिक्कण मृत्तिकांतील वेधन-विवरांच्या भिंतींना प्रत्यक्षात पार्श्वीय आधार देण्याची आवश्यकता नसते. हा अनुभव पूर्वोक्त निष्कर्षाशी सुसंगत असाच आहे. परंतु चिक्कण मृत्तिकेत घेतलेल्या कूपाच्या भिंतींना मात्र पुरेसा आधार दिलेला नसल्यास त्या कोसळण्याचा संभव असतो, असाही अनुभव आहे. याचाच अर्थ असा की, पूर्वोक्त विश्लेषण कूपांच्या बाबतीत लागू पडत नाही. वालुकेत घेतलेल्या कूपाच्या भिंतीवर येणाऱ्या मृत्तिकादाबाचे विवेचन पुढील परिच्छेदात करीत असताना या घटनेमागच्या कारणांची चर्चा केली जाईल.

७४. भूजलपातळीच्या वर स्थित असलेल्या कूपाच्या भिंतीशेजारील वालुकेच्या समतोलाची लक्षणे : आकृती ६० इ मध्ये एका वालुका-राशीचा छेद दाखविला आहे. त्याची उंची $ख$, त्रिज्या $त्र$ आणि वजन $व$ आहे. त्याच्या आत $त्र_{०}$ त्रिज्येचा एक दंडगोलाकृती कूप आहे. या वालुकाराशीच्या बाह्य पृष्ठावर $का_{त्र}$ हे कार्तनिक बल आणि तळावर $भा$ हा उभा भार कारक आहेत. खंडाच्या समतोलाचे लक्षण पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$व = भा + का_{त्र} \qquad (१)$$

मागील परिच्छेदात असे गृहीत धरले होते की, दंडगोलाकृती छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले क्षुल्लक असतात आणि आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबले ही मध्यम प्रधान प्रतिबले असतात. विवराचा व्यास काही इंचच असतो, तेव्हा $ϑ_{त्र_{०}}$ ही त्याच्या भिंती-वरील त्रिज्यादिक् प्रतिबले फारच लहान असली, तरी उपरोक्त लक्षणांची बहुतांशाने पूर्तता झालेली असते. त्यामुळे वालुकेतील वेधनविवरांच्या बाबतीत विश्लेषणातून

मिळणारी फलिते आणि प्रत्यक्ष अनुभव यांत एकवाक्यता आढळते. आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबलेही मध्यम, प्रधान प्रतिबले असतात असे गृहीत धरल्यामुळे वेधन विवराभोवतालच्या वालुकेतील प्रतिबले गणितसिद्ध करण्याची समस्या ही द्विमितीतील नम्यताविषयक समस्या ठरली.

जेव्हा वालुकेत रुंद कूप खोदावयाचा असतो, तेव्हा बांधकामातील अनुभव विचारात घेता आधारकाष्ठांवर बराच मोठा मृत्तिकादाब येईल अशी आपली अपेक्षा असते. ही काष्ठे हा भार सोसण्यास समर्थ नसतील, तर ती कोसळतात आणि परिणामी कूपमुखाच्या भोवतालचा पृष्ठभाग खचतो. कूपाभोवतालच्या वालुकेतील या प्रकारची विरूपता स्थूलमानाने दंडगोलाकृती छेदानुसार होणारा कार्तनिक उच्छेद दाखविते. तसेच आडव्या छेदांवरील लंबदिक् प्रतिबले वालुकेच्या सामर्थ्यापेक्षा अधिक आहेत असेही या घटनेवरून निदर्शनास येते. म्हणून अशा कूपाच्या भिंतीवरील मृत्तिकादाब ठरविण्या-साठी मागील परिच्छेदातील विश्लेषण वापरता येत नाही.

कूपाच्या अस्तरावरील मृत्तिकादाबाची तीव्रता व त्याचे वितरण काही अंशी तरी निःसंशयपणे बांधकामाच्या पद्धतीवर अवलंबून असते. बांधकामपद्धतीचा परिणाम लक्षात घेऊन एतद्विषयक गणित मांडण्याइतकी आपल्या ज्ञानाची प्रगती अद्याप झालेली नाही. कूपाचा व्यास, त्याची खोली आणि वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन यांचा मृत्तिका-दाबावर जो प्रभाव पडतो, त्याची निदान काहीतरी माहिती मिळावी या उद्देशाने आपण पुढील समस्या स्थूलमान पद्धतीने सोडवू. ज्याची खोली अनंत आहे अशा एका कूपाच्या भिंतीवर आपण (आकृती ६० इ पाहा) $\sigma_{\text{त्र}_{0}}$ मूल्याचा त्रिज्यादिक् दाब लावू आणि मग त्याच्या भिंती न ढासळता उभ्या राहण्यासाठी या दाबास जे लघुतम मूल्य द्यावयास हवे, त्याचे अनुमान करू. हा दाब आदर्श अस्तराच्या विरोधाने पेलणे शक्य असल्यामुळे $\sigma_{\text{त्र}_{0}}$ यास संक्षिप्तपणे मृत्तिकादाब म्हणण्यात येईल.

आकृती ६० अ व ६० आ मध्ये त्र या यदृच्छया घेतलेल्या त्रिज्येच्या दंडगोलाकृती छेदालगतच्या पाचरीच्या आकाराच्या खंडावर कारक असणारी प्रतिबले दाखविली आहेत. मागील परिच्छेदात वर्णिल्याप्रमाणे $\sigma_{\text{ठ}}$ हे परिघस्थ प्रतिबल म्हणजे ज्येष्ठ, प्रधान प्रतिबल आहे आणि उर्वरित दोन प्रधान प्रतिबले त्रिज्यादिक् पातळीवर कारक आहेत. तेथे असेही दाखविण्यात आले की, ड $=$ ० असताना $\sigma_{\text{त्र}}$ हे त्रिज्यादिक् प्रतिबल म्हणजे लघुतम प्रधान प्रतिबल असते. कूपांच्या बाबतीत ड हे कार्तनिक प्रतिबल दुर्लक्षिता येत नाही. म्हणून $\sigma_{३}$ हे लघुत्तम प्रधान प्रतिबल क्षितिजाशी ड॑ हा लहानसा कोन करते (आकृती ६० आ पाहा). कूपाची भिंत ढासळताना होणारी वालुकेची हालचाल असे दाखविते की, $\sigma_{२}$ या दुसऱ्या प्रधान प्रतिबलाचे मूल्य नम्य समतोलाच्या लक्षणांशी सुसंगत असे महत्तम मूल्य असते. मोहरच्या भंजन-सिद्धांतानुसार (परिच्छेद ७) हे मूल्य ज्येष्ठ, प्रधान प्रतिबलाइतके असते; जे या उदाहरणात $\sigma_{\text{ठ}}$ इतके आहे. येथील उच्छेदास आवश्यक असणारी प्रतिबल-परिस्थिती आ. ६० ई मध्ये मोहरच्या रेखाकृतीने

दाखविली आहे. समी. ७(५) मध्ये $\sigma_{२} = \sigma_{१}$ नियुक्त करून आपल्याला उच्छेदसमीप अवस्थेसाठी पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$\sigma_{२} = \sigma_{\text{ठ}} = \sigma_{३} \cdot \text{ण}$$

म्हणून

$$\frac{\sigma_{२}}{\sigma_{३}} = \text{ण} \qquad [१]$$

येथे $\text{ण} = \text{स्प}^{२} (४५^{\circ} + \omega/२)$ आहे; आकृती ६० ई मधील $\sigma_{\text{त्र}}$ आणि $\sigma_{\text{ख}}$ ही प्रधान प्रतिबले नाहीत, तेव्हा $\sigma_{\text{ख}}/\sigma_{\text{त्र}} = \text{अ}$ या गुणोत्तराचे मूल्य $\sigma_{२}/\sigma_{३} = \text{ण}$ या गुणोत्तराहून लहान असणार. भौमितिक संबंधानुसार मोहरच्या आकृतीवरून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{\sigma_{\text{ख}}}{\sigma_{\text{त्र}}} = \text{अ} = \text{स्प}^{२} \left(४५^{\circ} + \frac{\omega_{१}}{२} \right) \qquad [२]$$

$\omega_{१}$ या कोनाचे मूल्य δच्या मूल्यावर अवलंबून असते. ते ω हून अर्थातच लहान आहे. आकृतीवरून आणखी असेही दिसते की, $\omega_{१}$ चे मूल्य दिलेले असल्यास दंडगोलाकृती छेदावर कारक असणारे कार्तनिक प्रतिबल खालील मूल्याहून मोठे असणार नाही.

$$\text{क} = \sigma_{\text{त्र}} \, \text{स्प} \, \omega_{२} \qquad [३]$$

शेवटी आकृती ६० ई वरून आपणांस दिसून येते की, $\frac{\sigma_{\text{ठ}}}{\sigma_{\text{त्र}}}$ हे गुणोत्तर $\sigma_{\text{ख}}/\sigma_{\text{त्र}} = \text{अ}$ या गुणोत्तरापेक्षा काहीसे मोठे आहे. म्हणून आपण $\sigma_{\text{ठ}} \approx \sigma_{\text{ख}}$ गृहीत धरले, तर म्हणजेच —

$$\frac{\sigma_{\text{ठ}}}{\sigma_{\text{त्र}}} \approx \frac{\sigma_{\text{ख}}}{\sigma_{\text{त्र}}} = \text{स्प}^{२} \left(४५^{\circ} + \frac{\omega_{१}}{२} \right) = \text{अ} \qquad [४\text{अ}]$$

असे मानले, तर आपल्या गणितात एक लहानशी चूक समाविष्ट होते. पण ती सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते. पुढे करावयाच्या विश्लेषणात येणारे $\text{अ} = \sigma_{\text{ठ}}/\sigma_{\text{त्र}}$ हे गुणोत्तर समीकरण ७३ (६) मध्ये येणाऱ्या $\text{ण} = \sigma_{\text{ठ}}/\sigma_{\text{त्र}}$ या गुणोत्तरासारखेच आहे.

$\sigma_{\text{ठ}}$, $\sigma_{\text{त्र}}$ आणि $\sigma_{\text{त्र}_{०}}$ यांतील संबंध समीकरण ७३ (६) ने ठरविता येतो. या समीकरणातील ण या मूल्याऐवजी अ नियुक्त केल्यास आपल्याला त्रिज्यादिक् आणि परिघस्थ प्रतिबलांच्या बाबतीत अनुक्रमे पुढील मूल्ये मिळतात.

$$\sigma_{\text{त्र}} = \sigma_{\text{त्र}_{०}} \left(\frac{\text{त्र}}{\text{त्र}_{०}} \right)^{\text{अ} - १} \qquad [४\text{आ}]$$

आणि

$$\sigma_{\text{ठ}} = \text{अ} \, \sigma_{\text{त्र}} \left(\frac{\text{त्र}}{\text{त्र}_{०}} \right)^{\text{अ} - १} \qquad [४\text{इ}]$$

त्रिज्यादिक् आणि परिघस्थ या दोन्ही प्रकारांच्या प्रतिबलांची मूल्ये त्र/त्र० चे मूल्य कमी होईल, त्याप्रमाणे कमी होतात, हे या समीकरणांवरून दिसून येते. म्हणजेच दुसऱ्या शब्दांत, सर्व प्रतिबलांची तीव्रता त्रिज्येच्या दिशेने कूपाकडे यावे तशी घटत जाते. ही प्रतिबल-परिस्थिती **कंकण-क्रिया** म्हणून संबोधिली जाईल.

समी० २ आणि ४ आ यांवरून आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येते.

$$ष_ख = अ ष_त्र = अ\, ष_{त्र_०} \left(\frac{त्र}{त्र_०}\right)^{अ-१} \qquad [४ ई]$$

आकृती ६१ अ मध्ये कूपाच्या मध्यरेषेतून जाणारा एक उभा छेद दाखविला आहे. कंकणक्रिया अस्तित्वात नसती, तर कूपाच्या भिंतीवरील पार्श्वीय दाब उद्युक्त रॅन्किन् दाबापेक्षा कमी झाला नसता. पृष्ठापासून ख खोलीवर उद्युक्त दाब पुढीलप्रमाणे असतो.

$$ष_उ = घ\, ख\, स्प^२ \left(४५^\circ - \frac{\phi}{२}\right) = घख\, \frac{१}{ण}$$

हा दाब आकृती ६१ अ मध्ये *तग* आणि *तमृ*$_उ$ या रेषांतील आडव्या अंतराने दाखविला आहे. कंकणक्रियेमुळे तो खूपच कमी होतो. *तग* वर प्रत्यक्षात येणारा पार्श्वीय दाब *तगम* या दाबक्षेत्राने दाखविला आहे. कूपाच्या माथ्याजवळील *त* या बिंदुस्थानी *तमृ*$_उ$ ही दाब-रेषा *तम* या रेषेस स्पर्शरेषेप्रमाणे असली पाहिजे. आकृती ६१ अ मध्ये कूपाच्या उजवीकडील *भनर* हे दाबक्षेत्र त्र त्रिज्येच्या दंडगोलाकृती छेदावरील पार्श्वीय दाबाचे वितरण दाखविते. कूप खणण्यापूर्वी ख खोलीवर या छेदावरील दाब पुढील-प्रमाणे होता.

$$ष_० = मृ_० .\, घ .\, ख$$

येथे $मृ_०$ हा स्तब्धावस्थेतील मृत्तिकादाब-गुणांक आहे. आकृती ६१ अ मध्ये ष० हा दाब *भन* आणि *भमृ*$_०$ या रेषांमधील आडव्या अंतराने दाखविला जातो. कूप खणल्यानंतर दाबरेषा तिच्या मूळस्थानापासून *भर* या स्थानाकडे सरकते.

आकृती ६१ आ मध्ये कूपाशेजारी भूपृष्ठापासून ख खोलीवर कारक असणारी प्रतिबले दाखविली आहेत. या आकृतीतील आलेख काढण्यासाठी घेतलेले प्रमाण आकृती ६१ अ मध्ये वापरलेल्या प्रमाणापेक्षा लहान आहे. या आकृतीत कूपाच्या मध्यरेषेपासून मोजलेली त्र ही अंतरे भुजा असून खालच्या आलेखाच्या कोटी त्रिज्यादिक् प्रतिबले आणि वरच्या आलेखाच्या कोटी परिघस्थ प्रतिबले आणि उभी प्रतिबले दाख-वितात. नम्य विभाग आणि स्थितिस्थापक विभाग यांतील सीमा प्रतिबल-आलेखाच्या आकारात होणाऱ्या बदलाने दाखविली जाते. नम्य विभागातील $ष_त्र$ आणि $ष_ठ$ ही प्रतिबले अनुक्रमे समीकरणे ४ आ व ४ इ यांच्या साहाय्याने ठरविता येतात.

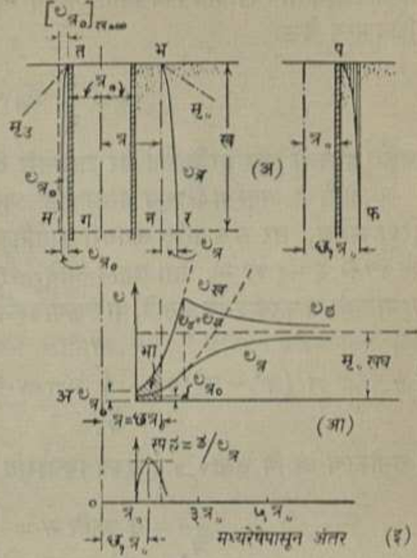
कूपाची भिंत आणि त्र अंतरावर घेतलेला दंडगोलाकृती छेद यांमध्ये असणाऱ्या वालुकेचे, ख खोलीवरील आडव्या छेदावर येणारे एकूण वजन पुढीलप्रमाणे :

$$व = \pi (त्र^2 - त्र_0^2) घ \cdot ख$$

आणि $\pi (त्र^2 - त्र_0^2)$ या कंकणाकृती क्षेत्रावरील एकूण दाब पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$भा = \int_{त्र_0}^{त्र} 2\pi त्र \cdot \sigma_{ख} dत्र$$

आकृती ६१ आ मध्ये भा हा दाब रेखांकित क्षेत्राने दाखविला आहे. व आणि भा या बलांतील फरक आकृती ६१ अ मधील भन या दंडगोलाकृती पृष्ठावर कारक असणाऱ्या कार्तनिक प्रतिबलांच्याद्वारे तोलला गेला पाहिजे. पुढील विवेचनावरून हे दिसून येईल की, दंडगोलाकृती छेदावरील त्रिज्यादिक् प्रतिबलांतील वाढीचा वेग भूपृष्ठापासून खोली वाढेल, तसा कमी होत जातो. आकृती ६१ अ मधील भर या दाब-रेषेच्या वक्रतेवरून हे दिसून येते. म्हणून भन या दंडगोलाकृती छेदावर कारक असणाऱ्या



आकृती ६१ : (अ) वालुकेतील कूपाच्या अस्तरावर येणाऱ्या $\sigma_{त्र_0}$ या त्रिज्यादिक् दाबाचे वितरण आणि त्र त्रिज्येच्या दंडगोल छेदावरील $\sigma_{त्र}$ या त्रिज्यादिक् प्रतिबलांचे वितरण; ज्या विभागात दंडगोल छेदांवरील कार्तनिक प्रतिबले जवळजवळ वालुकेच्या कार्तनिक विरोधाइतकी असतात तो विभाग उजवीकडील आकृतीत रेखांकित केला आहे; (आ) ख खोलीवरील आडव्या छेदावर अस्तित्वात असणाऱ्या त्रिज्यादिक, परिधीय आणि उभ्या दिशेतील लंबदिक् प्रतिबले ($\sigma_{त्र}$, $\sigma_{ठ}$ आणि $\sigma_{ख}$) यांचे आसन्नमानाने दाखविलेले वितरण, (इ) दंडगोल छेदाची त्रिज्या आणि स्प ठ चे सरासरी मूल्य यांमधील संबंध. या छेदावरील ख खोलीच्या वरील फलरूप प्रतिबले आणि त्रिज्येची दिशा यांमधील कोन म्हणजे ठ कोन होय.

त्रिज्यादिक् दाबाचे सरासरी मूल्य पुढील दोन मूल्यांच्या दरम्यान असते; पहिले $\sigma_{त्र}$ म्हणजे ख खोलीवर घेतलेल्या छेदावरील लंबदिक् दाब आणि दुसरे $१/२ \cdot \sigma_{त्र}$ म्हणजे सरासरी लंबदिक् दाब. हे दुसरे मूल्य, खोलीच्या सरळ प्रमाणात दाब वाढतो या गृहीतावर आधारित आहे. दंडगोलाकृती छेदावरील तदनुषंगिक $क_स$ हा सरासरी कार्तनिक विरोध $\sigma_{त्र}$ स्प ϕ_2 आणि $१/२ \cdot \sigma_{त्र}$ स्प ठ यांच्या

दरम्यान असतो. खालील विवेचनात आपण $\text{क}_{\text{स}}$ साठी या दोहोंपैकी लहान असणारे पुढील मूल्य घेऊ.

$$\text{क}_{\text{स}} = \frac{१}{२}\,\text{ए}_{\text{त्र}}\,\text{स्प}\,\omega_{२} \qquad [५]$$

त्यामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते.

समतोलाची अवस्था टिकवून धरण्यासाठी जर कार्तनिक विरोधाचा काही अंशच पुरेसा असेल, तर *भन* वरील सरासरी कार्तनिक प्रतिबल $\frac{१}{२}\cdot\text{ए}_{\text{त्र}}\,\text{स्प}\,\text{ठ}$ इतके असते. येथे $\text{स्प}\,\text{ठ}$ हे पद $\text{स्प}\,\omega_{२}$ पेक्षा लहान आहे. *भन* वरील एकूण कार्तनिक बल *व* आणि *भा* या बलांच्या फरकाइतके असावे, या लक्षणावरून $\text{स्प}\,\text{ठ}$ चे मूल्य ठरविता येते. म्हणजेच

$$\text{वं} - \text{भा} = \pi\,(\text{त्र}^{२} - \text{त्र}_{०}^{२})\,\text{घख} - \int_{\text{त्र}_{०}}^{\text{त्र}} २\pi\cdot\text{त्र}\cdot\text{ए}_{\text{ख}}\cdot d\text{त्र} = २\,\pi\,\text{त्रख}\,\frac{१}{२}\,\text{ए}_{\text{त्र}}\,\text{स्प}\,\text{ठ}$$

हे समीकरण आणि समी० ४ ई एकत्र विचारात घेऊन आणि

$$\frac{\text{त्र}}{\text{त्र}_{०}} = \text{छ} \text{ आणि } \text{म} = \frac{\text{ए}_{\text{त्र}_{०}}}{\text{घत्र}_{०}} \qquad [६\text{ अ}]$$

अशी मूल्ये नियुक्त करून आपल्याला पुढील मूल्य प्राप्त होते.

$$\text{स्प}\,\text{ठ} = \frac{\text{छ}^{२} - १}{\text{मछ}^{\text{अ}}} - \frac{२\,\text{अ}}{\text{अ} + १}\cdot\frac{\text{त्र}_{०}}{\text{ख}}\cdot\frac{\text{छ}^{\text{अ}+१} - १}{\text{छ}^{\text{अ}}} \qquad [६\text{ आ}]$$

$\text{स्प}\,\text{ठ}$ चे मूल्य महत्तम असताना मिळणारे $\text{छ}_{१}$ हे मूल्य पुढील अटीची पूर्तता करून मिळते.

$$\frac{d\,\text{स्प}\,\text{ठ}}{d\,\text{छ}} = ०$$

म साठी हे समीकरण सोडवून आपणांस पुढील मूल्य प्राप्त होते.

$$\text{म} = \frac{\text{ख}}{\text{त्र}_{०}}\cdot\frac{\text{अ} + १}{२\,\text{अ}}\cdot\frac{\text{अ} - (\text{अ} - २)\,\text{छ}_{१}^{२}}{\text{अ} + \text{छ}_{१}^{\text{अ}+१}} \qquad [७]$$

ठ हा कोन म्हणजे दंडगोलाकृती छेदावरील फलरूप प्रतिबल आणि तदनुषंगिक लंबदिक् प्रतिबल $\text{ए}_{\text{त्र}}$ यांतील कोन होय. $\omega_{१}$ या कोनाचे मूल्य दिलेले असेल, तर आकृती ६० ई मधील मोहरच्या रेखाकृतीनुसार ठ चे महत्तम मूल्य $\omega_{२}$ असते. समी० ६ आ मध्ये छ ऐवजी $\text{छ}_{१}$ आणि $\text{स्प}\,\text{ठ}$ ऐवजी $\text{स्प}\,\omega_{२}$ नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\text{स्प}\,\omega_{२} = \frac{\text{छ}_{१}^{२} - १}{\text{मछ}_{१}^{\text{अ}}} - \frac{२\,\text{अ}}{\text{अ} + १}\cdot\frac{\text{त्र}_{०}}{\text{ख}}\cdot\frac{\text{छ}_{१}^{\text{अ}+१} - १}{\text{छ}_{१}^{\text{अ}}} \qquad [८]$$

$ख = ०$ असल्यास त्याच्यासह $छ_१ = १$ असल्याविना समीकरण ८ ची पूर्तता होत नाही. तेव्हा

$$ख = ०,\ छ_१ = १ \text{ आणि } म = \frac{ख}{अत्र_०} \qquad [९]$$

असले पाहिजे. $ख$ चे मूल्य वाढत जाते, तसे $छ_१$ आणि $म$ ही दोन्हीही वाढत जातात. $ख = \infty$ असल्यास समी० ८ वरून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$म = \frac{छ_१^२ - १}{छ_१^{अ} स्प\, ᘐ_२}$$

समीकरण ७ मध्ये हे मूल्य नियुक्त करून आणि $छ_१$ साठी ते सोडवून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

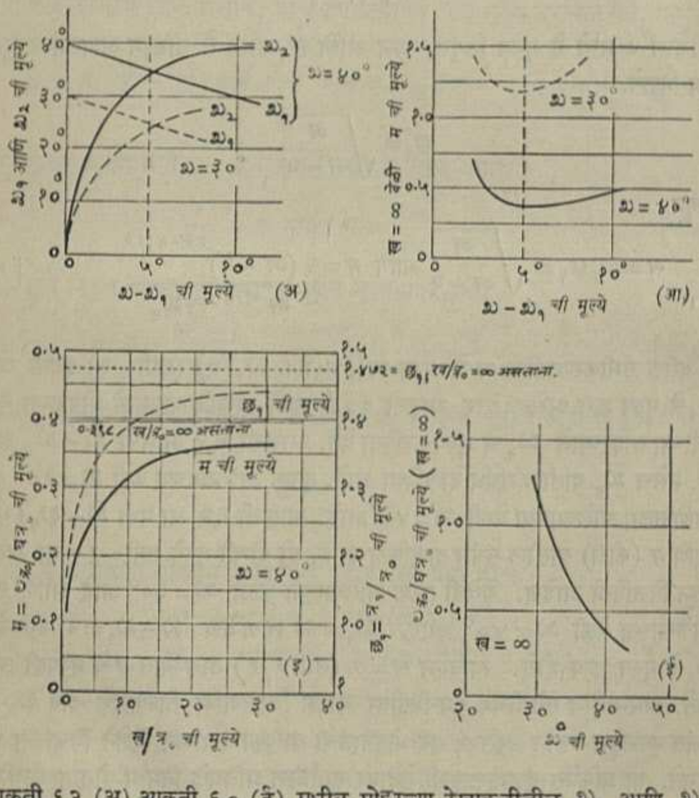
$$छ_१ = \sqrt{\frac{अ}{अ - २}}$$

म्हणून

$$ख = \infty,\ छ_१ = \sqrt{\frac{अ}{अ - २}} \text{ आणि } म = \frac{२\,(अ - २)^{(अ-२)/२}}{अ^{अ/२}\, स्प\, ᘐ_२} \qquad [१०]$$

वरील समीकरणातील $अ$ चे मूल्य $स्प^२(४५° + ᘐ_१/२)$ (समी० २) इतके आहे. $ᘐ_१$ चे मूल्य ज्ञात असेल, तर आकृती ६० ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे मोहूरच्या रेखाकृतीच्या साहाय्याने $ᘐ_२$ चे मूल्य ठरविता येते. आकृती ६२ अ मध्ये $ᘐ - ᘐ_१$ आणि $ᘐ_१$ तसेच $ᘐ_२$ यांतील संबंध दाखविला आहे. तुटक आलेखाच्या वेळी $ᘐ = ३०°$ आहे आणि सलग आलेखाच्या वेळी $ᘐ = ४०°$ आहे. आकृती ६२ आ मध्ये $ᘐ - ᘐ_१$ (भुजा) आणि $म$ (कोटी) यांतील संबंध दाखविला आहे. ही दोन्ही मूल्ये समी० १० चा अवलंब करून मिळविली आहेत. येथेही तुटक आलेखाच्या वेळी $ᘐ = ३०°$ आहे आणि सलग आलेखाच्या वेळी $ᘐ = ४०°$ आहे. $ᘐ_१ = ᘐ$ म्हणजेच $ᘐ - ᘐ_१ = ०$ असल्यास $ᘐ_२$ चे मूल्य शून्य होते. त्यावरून $ख = \infty$ (समी० १) असल्यास $म$ चे मूल्यही अनंत होते. अनन्तमूल्य खोलीवर कूप-भिंतीवर कारक असणारा त्रिज्यादिक् दाब $ᘓ_{त्र०}$ हा अनंत मूल्याहून लहान असेल, तर भोवतालची वालुका कूपाच्या दिशेने विचलित होऊ लागते. या प्रक्रियेत दंडगोलाकृती छेदावर कार्तनिक प्रतिबले निर्माण होतात आणि या छेदावर कारक असणारी त्रिज्यादिक् प्रतिबले $ᘓ_{त्र}$ (आकृती ६० आ) यापुढे प्रधान प्रतिबले राहात नाहीत. कार्तनिक प्रतिबले जशी वाढत जातात, तसे $ᘐ_१$ या कोनाचे मूल्य कमी होते; $ᘐ_२$ हा कोन वाढत जातो आणि $म = ᘓ_{त्र०}/घत्र०$ चे मूल्य कमी होते (आकृती ६२ आ पाहा). अर्थातच उपरोक्त विचलन रोखण्यासाठी आवश्यक असणारा

$\sigma_{त्र_0}$ = घ त्र० म हा त्रिज्यादिक् दाबसुद्धा कमी होतो. ϕ_1 साधारणपणे $\phi-५^\circ$ इतका होताक्षणीच या दाबाचे मूल्य लघुतम होते. कूपाच्या शेजारी नम्य समतोलाची अवस्था टिकवून धरण्यासाठी लागणारा त्रिज्यादिक् दाब $\sigma_{त्र_0}$ आपणांस शोधावयाचा होता; तोच हा लघुतम दाब होय. आकृती ६२ अ प्रमाणे $\phi_1 = \phi - ५^\circ$ या मूल्यास अनुषंगिक असणारे ϕ_2 चे मूल्य स्थूलमानाने $\phi - ५^\circ$ इतकेच आहे. ϕ चे मूल्य ३०° ते ४०° च्या दरम्यान असेल, तर $\phi_1 = \phi - ५^\circ$ असताना θ हा कोन (आकृती ६० अ मधील σ_3 या लघुतम, प्रधान प्रतिबलाच्या दिशेचा कोन) सुमारे १५° इतका असतो.



आकृती ६२ (अ) आकृती ६० (ई) मधील मोह्रच्या रेखाकृतीतील ϕ_1 आणि ϕ_2 या कोनांची मूल्ये आणि $\phi - \phi_1$ यांतील संबंध. (आ) ख = ∞ असताना म = $\sigma_{त्र_0}$ / घत्र० च्या मूल्यावर पडणारा $\phi - \phi_1$ चा प्रभाव. (इ) $\phi = ४०^\circ$ असताना, म आणि गाधता-गुणोत्तर ख/त्र० यांतील संबंध. (ई) ख = ∞ असताना म = $\sigma_{त्र}$/घत्र० आणि ϕ यांमधील संबंध.

तेव्हा ϕ चे मूल्य ३०° ते ४०° यांमध्ये असताना कूपाची भिंत कोसळण्यास प्रतिबंध करण्यासाठी आवश्यक असणारा कोणत्याही खोलीवरील $ए_{त्र०}=घत्र०म$ हा लघुतम, त्रिज्यादिक् दाब समी० ७ व ८ तसेच पुढील मूल्ये यांच्या साहाय्याने गणितसिद्ध करता येतो.

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi - ५^\circ \qquad [११]$$

ϕ च्या मूल्याच्या उपरोक्त मर्यादा म्हणजे वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणकोनाची दोन टोकांची मूल्ये आहेत. $\phi = ४०^\circ$ $(\phi_1 = ४०^\circ - ५ = ३५^\circ)$ असताना ख/त्र०* बदलत गेल्यास मिळणारी $म$ आणि $छ_1$ या पदांची मूल्ये पुढील कोष्टकात दिली आहेत.

ख/त्र०	०	३·१	८·३	११·८	१८·२	२९·४	७६·००	∞
$म = \frac{ए_{त्र०}}{घ_{त्र०}}$	०	०·२३	०·३०	०·३३	०·३५	०·३६	०·३७	०·३९८
$छ_1$	१	१·३	१·३८	१·४०	१·४२	१·४४	१·४६	१·४७२

आकृती ६२ इ मध्ये, भुजांनी ख/त्र० ची मूल्ये व सलग आलेखाच्या कोटींनी तदनुषंगिक $म$ ची मूल्ये आणि तुटक आलेखाच्या कोटींनी $छ_1$ ची मूल्ये दाखविली आहेत. ख/त्र० चे मूल्य वाढते तसे दोन्ही आलेख आडव्या दिशेने अनुक्रमे ०·३९८ आणि १·४७२ या मूल्यांप्रत असंपाती पद्धतीने जातात. तसेच कूपाच्या भिंतीवरील मृत्तिकादाब ८ त्र० (व्यासाच्या चौपट) पेक्षा अधिक असलेल्या खोलीनंतर फारच सावकाश वाढतो. कूप-भिंतीचा पार्श्वीय आधार कोसळणार असेल, तर ज्या भागातील वालुका अधस् दिशेने खचते त्याची त्रिज्या $छ_1$ त्र० मानल्यास ती कूपाच्या त्रिज्येच्या सुमारे १·५ पट असते.

ϕ चे कोणतेही मूल्य घेऊन असे आलेख काढता येतील. अशा आलेखांच्या साहाय्याने कूपभिंतीवरील मृत्तिकादाब त्वरित मिळू शकतो. समजा, आपल्याला २ त्र० = २० फूट व्यासाचा दंडगोलाकृती कूप वालुकाथरात खणावयाचा आहे. या वालुकेची घनता दर घनफुटास घ = ११० पौंड आहे आणि भूपृष्ठापासून ख = १०० फूट या खोलीवर कूपभिंतीवर येणारा मृत्तिकादाब आता आपल्याला ठरवावयाचा आहे.

* समी० ८ सोडविण्यासाठी $स्प\,\phi_2 - स्प\,\phi_1 = स्प\,३५^\circ$ गृहीत धरून व त्याच समीकरणाच्या साहाय्याने $छ_1$ च्या निरनिराळ्या मूल्यांसाठी $म$ ची मूल्ये गणितसिद्ध करून आणि समी० ७ च्या साहाय्याने ख/त्र० ची तदनुषंगिक मूल्ये गणितसिद्ध करून या कोष्टकातील मूल्ये मिळविली आहेत.

$ख/त्र_0 = १०० / १० = १०$ आहे, तेव्हा आकृती ६२ इ वरून आपल्याला $म = ०\cdot३१५$ मिळतो.

$$म = \frac{ए_{त्र0}}{घ\, त्र_0} = ०\cdot३१५ = \frac{ए_{त्र0}}{११० \times १०}$$

आहे; म्हणून १०० फूट खोलीवर कूपभिंतीच्या एकांक क्षेत्रावर कारक असणारा दाब पुढीलप्रमाणे असेल.

$$ए_{त्र0} = ०\cdot३१५ \times ११० \times १० = ३४५ \text{ पौंड / चौ. फू.}$$

आकृती ६२ इ मध्ये $ख/त्र_0 = १०$ या मूल्याला अनुषंगिक असे $छ_1$ चे मूल्य १·३९ आहे. तेव्हा दंडगोलाकृती छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले आणि लंबदिक् प्रतिबले यांतील गुणोत्तराचे मूल्य कूपाच्या मध्यरेषेपासून $छ_1 त्र_0 = १४$ फूट अंतरावर म्हणजेच कूपभिंतीपासून ४ फूट अंतरावर महत्तम असेल. $छ_1 त्र_0$ ची मूल्ये आणि खोलीचे मूल्य यांचा संबंध आलेखाने दाखवू गेल्यास आपल्याला घुमटाकृती पृष्ठ मिळते. आकृती ६१ अ च्या उजव्या बाजूला या पृष्ठाचा अक्ष पफ या रेषेने दाखविला आहे. या पृष्ठाच्या वर रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेल्या भागात दंडगोलाकृती छेदावर कारक असणारा वालुकेचा कार्तनिक विरोध पूर्णपणे क्रियाशील आहे. या भागाच्या पलीकडे दंडगोलाकृती छेदांवरील कार्तनिक प्रतिबलांचे मूल्य त्याच्या महत्तम मूल्यापासून त्वरेने कमी होत जाते.

कूप जर पूर्णपणे भूजलपातळीखाली असेल, आणि तो व्यवस्थितपणे जलाभेद्य केलेला असेल, तर संपूर्ण जलदाब आणि वालुकादाब यांच्या बेरजेइतका दाब भिंतीवर पडतो. भूजलपातळीखाली १०० फूट खोलीवर जलदाब $१०० \times ६२\cdot५ = ६२५०$ पौंड/चौ. फू. इतका असतो. वालुकादाब ठरविण्यासाठी आपल्याला उपरोक्त समीकरणामध्ये घ ऐवजी घ' ही निमज्जित घनता आदेशित करावी लागेल. घ' = ७० पौंड गृहीत धरून आपल्याला हा दाब पुढीलप्रमाणे मिळतो.

$$ए_{त्र0} = ०\cdot३१५ \times ७० \times १० = २२१ \text{ पौंड / चौ. फू.}$$

हा दाब जलदाबाच्या तुलनेने क्षुल्लक आहे.

समी० १० वरून मिळणारा $ख = \infty$ या परिस्थितीतील ϕ (वालुकेचा अंतर्गत घर्षणकोन) आणि $म = ए_{त्र0} / घत्र_0$ यांतील संबंध आकृती ६२ ई मध्ये दाखविला आहे. या परिस्थितीतील $ए_{त्र0}$ चे मूल्य म्हणजे विशिष्ट वाळूमध्ये, विशिष्ट व्यासाच्या कूपभिंतीवर येणाऱ्या एकांक क्षेत्रस्थ दाबाचे महत्तम मूल्य होय.

आकृती ६२ इ वरून असे दिसते की, $\phi = ४०^\circ$ आणि $ख/त्र_0 = \infty$ असताना $छ_1$ या गुणोत्तराचे मूल्य १·४७ इतके असते. $\phi = ३०^\circ$ असल्यास समी० १० वरून $छ_1 = २\cdot३०$ असे मूल्य मिळते. या मूल्यांवरून असे दिसते की, ज्या विभागामध्ये दंडगोलाकृती छेदांवरील कार्तनिक विरोध पूर्णतया क्रियाशील असतो, त्याची रुंदी फारच

थोडी असते. म्हणूनच कूपतळाच्या परिसरात असणारी काहीशी वेगळी प्रतिबल-परिस्थिती आपण दुर्लक्षिली, ते योग्यच होते. कूपतळापासून वर थोड्याच अंतरावरची प्रतिबल-परिस्थिती व्यवहारतः नेहमीप्रमाणेच असली पाहिजे.

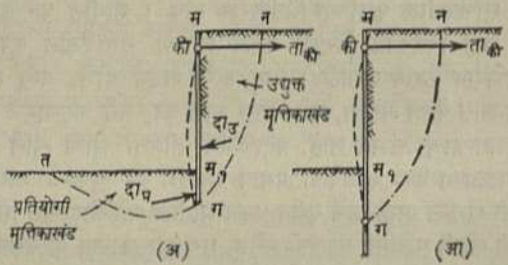
मागील गणितात्मक कृतीतून मिळणारी फलिते आणि वालुकेतील कूपांच्या अस्तरावर येणारे प्रत्यक्षातील दाब यांत काही विसंवाद असल्याचा पुरावा अद्याप तरी मिळालेला नाही. ही वस्तुस्थिती बहुधा असे दाखविते की, कूपखननाच्या रूढ पद्धतींमध्ये खोद-कामाची प्रगती होत असतानाच वालुकेतील कार्तनिक विरोध पूर्णपणे कार्यान्वित होत असतो. तसेच वरील गणितात्मक कृतीतून मिळणाऱ्या फलनिष्पत्तीनुसार असे म्हणता येईल की, वालुकेत खणलेल्या कूपाच्या अस्तरावर येणारा दाब खोली वाढेल त्याप्रमाणे एका निश्चित आणि सापेक्षतः लहान असणाऱ्या मूल्याप्रत जातो.

७५. **चिक्कण मृत्तिकेतील कूपांच्या भिंतीवरील दाब :** मागील परिच्छेदात वर्णिलेली गणितात्मक कृती किरकोळ फेरफार करून चिक्कण मृत्तिकेतील कूपांच्या भिंतीवर येणारा मृत्तिकादाब ठरविण्यासाठीही लागू करणे शक्य होते. परंतु त्या दृष्टीने या समस्येचा अभ्यास केला असता, असे दिसून आले की, तसे करण्यामुळे होणाऱ्या चुका फार मोठ्या असण्याचा संभव आहे. प्रतिबलांची तीव्रता आणि त्यांचे वितरण यांवर पडणारा कूपतळाखालील मृत्तिकेचा प्रभाव मूलतः या चुकांना कारणीभूत होतो. कूपाची खोली अनन्त आहे असे गृहीत धरून मागील परिच्छेदातील सिद्धांत मांडलेला आहे. कूपाची खोली परिमित मूल्याची असेल, तर कूपतळाच्या परिसरातील मृत्तिकेमुळे निर्माण होणाऱ्या त्रिज्यादिक् दाबाचा अंश कूपतळाखाली स्थित असलेल्या मृत्तिकेवर कार्तनिक प्रतिबलांच्याद्वारे संक्रमित होतो. या दाब-संक्रमणामुळे तळाच्या वर विशिष्ट उंचीपर्यंत–ही उंची स्थूलमानाने नम्य समतोलावस्थेत असणाऱ्या विभागाच्या रुंदीइतकी असते–भिंतीवरील दाबात होणारी घट फार महत्त्वाची असते. कूप वालुकेत घेतलेला असेल, तर या विभागाची रुंदी फार थोडी असते; म्हणून तळापासून थोड्याच अंतरावर कूपाच्या भिंतीवरील दाब व्यवहारतः अनन्त खोलीच्या कूपाच्या भिंतीवरील दाबा-इतकाच असतो. याउलट, चिक्कण मृत्तिकेत कूपाच्या तळाजवळ नम्य समतोलावस्थेतील विभागाची रुंदी स्थूलमानाने कूपाच्या खोलीइतकीच असते. म्हणून वर वर्णिलेल्या दाबसंक्रमणामुळे मृत्तिकादाबात होणारी घट कूप-खोलीच्या अधिकांश भागापर्यंत पसरते. या प्रभावामुळे, चिक्कण मृत्तिकेत घेतलेल्या परिमित खोलीच्या कूपाच्या भिंतीवर येणारा प्रत्यक्षातील मृत्तिकादाब गणितात्मक कृतीतून मिळणाऱ्या दाबापेक्षा पुष्कळच कमी असला पाहिजे. खरे सांगायचे, तर अशा एका गणितात्मक कृतीतून मिळणारी दाबमूल्ये आणि क्षेत्रात प्रत्यक्ष दाब मोजून प्राप्त झालेली मूल्ये यांची तुलना करता असे दिसून आले की, मोजलेला दाब गणितसिद्ध दाबाच्या १/२ पेक्षा कोठेही अधिक नव्हता. अधिक अचूक अशा गणितात्मक कृती अद्याप उपलब्ध नाहीत.

प्रकरण ११

कीलकबद्ध फलकभिंती

७६. व्याख्या आणि गृहीते : फलकभिंती आणि आधारभिंती यांचे कार्य सारखेच असते; परंतु आधारभिंतींचे वजन घसरू पाहणाऱ्या मृत्तिकाखंडाच्या वजनाच्या मानाने मोठे असते, तर फलकभिंत म्हणजे फलकस्थूणांची केवळ एक रांग असून तिचे वजन तुलनेने फारच थोडे असते. या स्थूणांचे खालचे टोक भूमीत ठोकलेले असते. त्यांच्यावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब दोन गोष्टींनी पेलला जातो. आकृती ६३ मध्ये

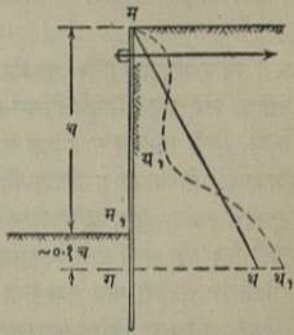


आकृती ६३ : कीलकबद्ध फलकभिंत. (अ) मुक्त मृत्तिकाधार; (आ) बद्ध मृत्तिकाधार. तुटक रेषांनी संभाव्य घसरपृष्ठे दाखविली आहेत.

दाखविल्याप्रमाणे माथ्यापासून थोड्या अंतरावर *की* या ठिकाणी फलकस्थूणांना बांधलेला कीलकबाहू, या दाबापैकी काही अंश घेतो आणि उरलेला अंश फलकस्थूणांच्या भूमीत रुतलेल्या भागाच्या डाव्या बाजूकडील मृत्तिकेत निर्माण होणाऱ्या प्रतियोगी विरोधाने पेलला जातो. कीलकबाहू स्वस्थानी स्थिर राहावा, या हेतूने भरणामध्ये भिंतीपासून बऱ्याच अंतरावर कीलक (किंवा खुटवा) स्थापलेला असतो.

आधारभिंत आणि फलकभिंत यांतील दुसरा एक फरक म्हणजे फलकभिंतीचा लवचिकपणा हा होय. माथ्याकडील भागाचे कीलकबंधन व तळभागाला होणारा प्रतियोगी विरोध या गोष्टींमुळे फलकभिंतीची वरची आणि खालची, अशा दोन्ही कडा बद्ध झाल्यासारख्याच असतात. त्यामुळे दाबाच्या रेट्याखाली नमावयाचे तर आडव्या दिशेत वक्रता येऊनच ते शक्य होते; आणि तदनुषंगिक महत्तम विचलन उंचीच्या मध्यावर येते. विचलनाची ही पद्धत आणि आतापर्यंत मागील प्रकरणांत वर्णिलेल्या अन्य पार्श्वीय आधारांचे विचलन यांत मूलतःच भेद आहे, हे यावरून स्पष्ट होईल. वालुकेतील चरामध्ये लावलेल्या आधारकाष्ठांमुळे तेथील दरडीचे विस्थापन माथ्याजवळ शून्य

आणि तळाकडे महत्तम, अशा प्रकारचे असते; आणि दाबाचे आधारकाष्ठांवरील वितरण परिवलयाकृती म्हणता येईल असे असते. आधारभिंतीचे विचलन साधारणपणे तळ स्वस्थानी राहून कलंडल्यामुळे घडते आणि उद्युक्त दाबाचे भिंतीवरील वितरण स्थिर जलदाबाच्या वितरणासारखे असते. फलकभिंतीच्या वरच्या भागाजवळ असलेल्या मृत्तिकेचे विचलन उपरोक्त आधारकाष्ठांमागील मृत्तिकेच्या विचलनासारखे, आणि खालच्या भागातील विचलन कलंडणाऱ्या आधारभिंतीमागील भरणाच्या विचलनासारखे असते. या विरूपता-लक्षणांमुळे फलकभिंतीवरील उद्युक्त दाबाचे वितरण, दरडीला लावलेली आधारकाष्ठे आणि आधारभिंत यांच्या बाबतीत मिळणाऱ्या वितरणांच्या समन्वयाने मिळते. आकृती ६४ मधील *मगथ,य,* या दाबक्षेत्राने ते दाखविले आहे.



आकृती ६४ : बद्ध मृत्तिकाधाराच्या कीलकबद्ध फलकभिंतीवरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे वितरण; गृहीत धरले जाणारे (सलग रेषा) आणि प्रत्यक्षातील (तुटक रेषा).

आधारित मृत्तिकेचे कार्तनिक विरोधाचे सामर्थ्य संभाव्य घसरपृष्ठावर—उदाहरणार्थ, आकृती ६३ अ मधील *गन* या पृष्ठावर—पूर्णपणे कार्यप्रवण होईल, इतक्या प्रमाणात फलकभिंतीचा मध्यभाग विचलित होईल, असे एतद्विषयक समस्यांत नेहमी गृहीत धरले जाते. तिच्या भूमीत पुरलेल्या भागावरील मृत्तिकादाबाची तीव्रता आणि त्याचे वितरण या दोन्ही गोष्टी फलकस्थूणा भूमीत किती खोलवर ठोकलेल्या आहेत, त्यावर अवलंबून असतात.

फलकभिंतीचा पूर्वकल्प सिद्ध करताना आपल्याला पुढील प्रश्न सोडवावे लागतात. भूमिगत भागाला पुरेसा पार्श्वीय आधार नक्की मिळण्यासाठी फलकस्थूणा किती खोल ठोकाव्या? कीलक-ग्राहूवर येणाऱ्या बलाची तीव्रता काय असते? फलकस्थूणांवर येणाऱ्या महत्तम परिबलाचे मूल्य काय असते?

विषयाची मांडणी सुबोध व्हावी यासाठी पुढील विवेचन वालुकाराशीतील सरळ आणि उभ्या फलकभिंतींपुरते मर्यादित केले आहे. ही वालुका आदर्श आणि समांग आहे व तिचे कार्तनिक विरोधाचे सामर्थ्य पुढील समीकरणाने व्यक्त होते.

$$क = ७\ स्प\ \omega \qquad ५\ (२)$$

कीलकाच्याद्वारे लागणारा ताण आडवा आहे; फलकस्थूणांचा तळ भूजलपातळीच्या वर आहे आणि आधारित वालुकेवर कोणताही अधिभार नाही असे गृहीत धरले आहे. तथापि फलकभिंतीमागील मृत्तिका अंशतः किंवा पूर्णतः निमज्जित किंवा स्तरबद्ध

किंवा समाकर्षणगुणी असेल, तसेच कीलकबाहू क्षितिजाशी कोन करीत असेल, तरीही पुढील परिच्छेदांत वर्णिलेल्या गणितात्मक कृती कोणतेही मूलभूत फरक न करता वापरता येतात. पाझरजन्य बलांचा फलकभिंतीच्या स्थैर्यावर पडणारा प्रभाव परिच्छेद ९२ मध्ये वर्णिला जाईल.

७७. अग्र-आधाराची लक्षणे : स्थूणा फारच थोड्या खोलीपर्यंत ठोकलेल्या असतील, तर फलकभिंतीचे विचलन आकृती ६३ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे होते. हे विचलन, जिचे खालचे *ग* हे अग्र बद्ध नसून मुक्ताधार पद्धतीचे आहे, अशा सरळ, उभ्या व स्थितिस्थापक तुळईच्या विचलनाप्रमाणे आहे. ज्या फलकभिंतींना हे लक्षण लागू पडते त्यांना **मुक्त मृत्तिकाधार पद्धतीच्या फलकभिंती** असे म्हणतात. याउलट, आकृती ६३ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे स्थूणा बऱ्याच खोलीपर्यंत ठोकलेल्या असतील, तर भिंतीची तळाची कड स्वस्थानी बद्ध झाल्याप्रमाणे असते. कारण आसपासच्या वालुकेकडून होणारा विरोध फलकस्थूणांना त्यांच्या मूळ उभ्या स्थानापासून जवळजवळ मुळीच विचलित होऊ देत नाही. म्हणून अशा फलकभिंतीना **बद्ध मृत्तिकाधार पद्धतीच्या फलकभिंती** असे म्हणतात. पुरेशा प्रमाणात कीलकबद्ध केलेली फलकभिंत मुक्त मृत्तिकाधारी असेल, तर तिचा उच्छेद एकतर वक्रीकरणाने होऊ शकतो किंवा *म*, *ग* या स्पर्शपृष्ठाजवळील वालुकेचा *गत* या वक्र घसरपृष्ठावरून कार्तनिक उच्छेद झाल्याने होऊ शकतो. तथापि तीच फलकभिंत बद्ध मृत्तिकाधारी असेल तर तिचा उच्छेद वक्रीकरणानेच केवळ होऊ शकतो.

७८. उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे फलकभिंतीवरील वितरण : परिच्छेद ७६ मध्ये वर्णिलेल्या सीमास्थ विरूपता-लक्षणांमुळे उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे फलकभिंतीवरील वितरण जलदाब-वितरणाप्रमाणे असू शकत नाही. सैद्धान्तिक संशोधनातील फलिते (शोएनवेलर १९२९, ओहृदे १९३८) आणि अनुभव या दोहोंवरून असे दिसते की, हे वितरण आकृती ६४ मध्ये *मय*$_१$*थ*$_१$ या तुटक वक्र रेषेने दाखविल्याप्रमाणे असते. तसेच सैद्धान्तिक फलिते आणि अनुभव या दोहोंवरून हेही माहीत आहे की, फलकभिंतीवरील एकूण उद्युक्त मृत्तिकादाब स्थूलमानाने आधारभिंतीच्या बाबतीत कूलोम पद्धतीने मिळणाऱ्या दाबाइतका असतो. हा दाब समीकरण २३ (१) ते ठरविता येतो. परंतु दाबाचे वितरण ठरविण्यासाठी शोधलेल्या कृतींत मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्व-गुणाचा विचार केला जात नाही. हा महत्त्वाचा घटक दुर्लक्षिल्यामुळे होणाऱ्या चुकीचे गांभीर्य अद्याप तरी अज्ञातच आहे. एवढेच नव्हे तर या कृतींतील अवडंबरामुळे त्यांत आधारभूत मानलेली अनेकविध स्वैर गृहीते अंधारात राहतात आणि मिळणाऱ्या फलितांच्या विश्वासार्हतेविषयी असमर्थनीय असा आत्मविश्वास निर्माण होतो. तेव्हा या विषयाच्या ज्ञानात आणखी भर पडेपर्यंत, हे वितरण जलदाब-वितरणाप्रमाणे नसते या

गोष्टीचा $प_०$ या परिबलाच्या महत्तम मूल्यावर काय प्रभाव पडतो, याचा अंदाज मृत्तिकादाबाविषयीच्या आपल्या व्यावहारिक ज्ञानाच्या आधारे केवळ करावा, असे ग्रंथकर्त्यास सुचवावेसे वाटते. पुढील उपपरिच्छेदात याचे विवरण केले आहे.

एका बद्ध मृत्तिकाधारी फलकभिंतीचा उभा छेद आकृती ६४ मध्ये दाखविला आहे. *ग* या बिंदूच्या खाली फलकभिंतीचे पार्श्वीय विचलन क्षुल्लक आहे. त्याच्या वरच्या भागात फलकभिंतीच्या उजवीकडील पृष्ठावर उद्युक्त मृत्तिकादाब कारक आहे. त्याचे फलकभिंतीवरील वितरण बऱ्याच प्रमाणात आधारित मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वगुणावर अवलंबून असते. मृत्तिकाराशी जर बारीक-कणयुक्त आणि जलसाधित पद्धतीने बांधल्यामुळे द्रवसदृश अवस्थेत असेल, तर दाबवितरण स्थिरजलदाबवितरणासारखे म्हणजेच, आकृतीतील *मगथ* या त्रिकोणासारखे असते. अर्थातच तसे वितरण गृहीत धरून गणितसिद्ध केलेले परिबलाचे महत्तम मूल्य $प_०$ आणि प्रत्यक्षातील महत्तम मूल्य जवळजवळ सारखीच असतात. याउलट, फलकभितीच्या मागे, या प्रकरणात गृहीत धरल्याप्रमाणे, स्वच्छ वालुकाराशी असेल, तर पार्श्वीय दाबाचे वितरण *मय,थ,ग* या दाबक्षेत्राने दाखविल्याप्रमाणे असते; आणि प्रत्यक्षात स्थूणांमध्ये निर्मिल्या जाणाऱ्या परिबलाचे *प* हे महत्तम मूल्य जलदाबासारखे वितरण गृहीत धरून ठरविलेल्या $प_०$ या महत्तम मूल्याच्या निम्म्यापेक्षा अधिक नसते.

७९. सर्वसामान्य कृती : पूर्वकल्पांच्या रूढ पद्धतींमध्ये (लोहमेयेर १९३०, ब्लूम १९३०) फलकभिंतीवरील उद्युक्तदाबाचे वितरण जलदाबासारखे नसते, या गोष्टीकडे दुर्लक्ष केलेले आहे. त्यामुळे फलकस्थूणांतील परिबलाचे गणितसिद्ध मूल्य हे प्रत्यक्षातील मूल्यापेक्षा फारच अधिक असते. वरील परिच्छेदात हे स्पष्ट केले आहेच. याउलट, फलकभिंत भूमीत किती खोल नेली असता पुरेसा पार्श्वीय आधार मिळेल, या गोष्टीवर मात्र दाबवितरण-पद्धतीचा फारसा प्रभाव पडत नाही. त्यामुळे या खोलीचे मूल्य रूढ पद्धतींचा अवलंब करून ठरविले असता फारशी चूक होत नाही.

उपरोक्त सर्वसामान्य प्रथेचा अवलंब करून फलकभिंतीच्या पृष्ठावरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा $द_{उल}$ हा आडवा घटक पुढील समीकरणाने मिळतो असे गृहीत धरले जाईल.

$$द_{उल} = घ\, ख\, मृ_{उ} \qquad १५\ (१)$$

येथे $मृ_{उ}$ हा उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. भूमीत पुरलेल्या भागावरील $द_{प्रल}$ या प्रतियोगी दाबाच्या आडव्या घटकाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे धरले जाते.

$$द_{प्रल} = घ\, ख'\, मृ_{प्र} \qquad १५\ (३)$$

येथे $मृ_{प्र}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा गुणांक असून *ख'* ही पुरलेल्या भागाची खालच्या भूपृष्ठापासून मोजलेली खोली आहे. $मृ_{उ}$ आणि $मृ_{प्र}$ यांची मूल्ये ठरविण्याच्या पद्धतींचे विवेचन अनुक्रमे प्रकरण ६ व ७ मध्ये केले आहे. ही मूल्ये अंतर्गत घर्षणकोन ϕ व

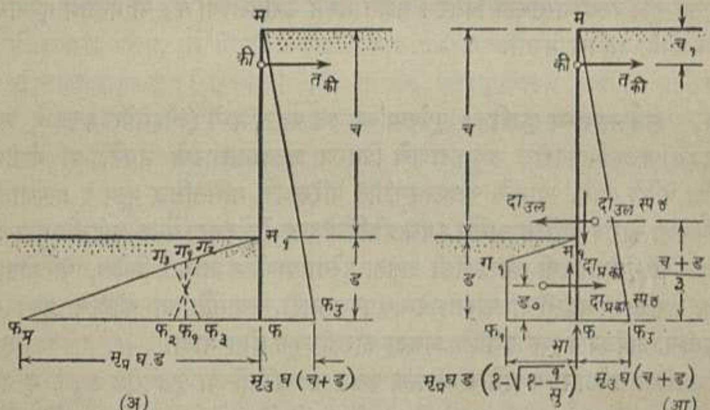
भिंत घर्षणकोन δ यांवर अवलंबून असतात. समस्येतील परिस्थितीनुसार δचे मूल्य निवडले पाहिजे. फलकभिंतीवर कारक असणाऱ्या बाह्य बलांच्या तुलनेत तिचे वजन दुर्लक्षिण्याइतके कमी असल्यामुळे प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा घर्षणजन्य घटक उद्युक्त मृत्तिकादाबाच्या तसल्याच घटकापेक्षा फारसा मोठा असत नाही. $\delta = ०$ असल्यास मृ$_{उ}$ आणि मृ$_{प्र}$ यांची मूल्ये अनुक्रमे पुढे दिलेल्या रॅनकिन् मूल्यांइतकीच होतात.

$$मृ_{उ} = स्प^{२}\,(४५^{\circ} - \phi/२) = १/ण \qquad १५\,(२)$$

आणि

$$मृ_{प्र} = स्प^{२}\,(४५^{\circ} + \phi/२) = ण \qquad १५\,(४)$$

८०. मुक्त मृत्तिकाधारी फलकभिंती : एका मुक्त मृत्तिकाधारी फलकभिंतीचा छेद आकृती ६५ मध्ये दाखविला आहे. तिच्या उजव्या बाजूच्या पृष्ठावरील उद्युक्त मृत्तिकादाबाचे वितरण जलदाबासारखे गृहीत धरले आहे. मफफ$_{उ}$ या त्रिकोणी दाबक्षेत्राने हे वितरण दाखविले आहे. फलकस्थूणांची ड ही भूमिगत खोली निश्चित करण्याची रीत अशी : ही खोली अशी असावी की, फलकभिंतीला आधार देण्यासाठी आवश्यक



आकृती ६५ : (अ) अग्राचा आधार मुक्त असल्यास फलकभिंतीच्या भूमिगत भागावर येणाऱ्या प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या वितरणाबाबतची विविध गृहीते. (आ) अशा फलकभिंतीवर कारक होणाऱ्या बलांच्या बाबतीतील रूढ गृहीते.

असणाऱ्या प्रतियोगी विरोधाचे मूल्य प्रतियोगी मृत्तिकादाब $\times \frac{१}{सु}$ या मर्यादेपेक्षा अधिक नसावे. आकृती ६५ मध्ये म$_{१}$फफ$_{प्र}$ या त्रिकोणाकृती दाबक्षेत्राने प्रतियोगी मृत्तिकादाब दाखविला आहे. आणि सु म्हणजे फलकभिंतीच्या तळाकडील भागाच्या उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक आहे.

$फ_1ग_1$, $फ_2ग_2$ आणि $फ_3ग_3$, (आकृती ६५ अ) या रेषा म्हणजे $म_1फफ_प्र$, या एकूण प्रतियोगी दाबाचा जो अंश कार्यप्रवण होतो, त्याचे निरनिराळ्या मतांनुसार येणारे क्षेत्र दाखविणाऱ्या रेषा आहेत. बहुतेक संशोधक $ग_1फ_1$ ही उभी रेषा पत्करतात; कारण त्यामुळे पुढील गणित सोपे होते (क्रै. १९३६).

कार्यप्रवृत्त होणारा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा अंश $म_1ग_1फ_1फ$ (आकृती ६५ अ) या समलंब चौकानाने दिला जातो, असे गृहीत धरून फलकभिंतीवर कारक असणारी बले आकृती ६५ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे मांडता येतील. समजा,

$दा_{उल} = \dfrac{(च+ड)^2}{२}\, वमृ_उ$ = उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा आडवा घटक;

$दा_{प्रका} = \dfrac{१}{सु}\, दा_{प्रल} = \dfrac{१}{सु} \cdot \dfrac{ड^2}{२} \cdot वमृ_प्र$ = प्रतियोगी मृत्तिकादाबाच्या आडव्या घटकाचा कार्यप्रवृत्त भाग;

$स्प\, ऽ$ = भिंतघर्षणाचा गुणांक;

$त_{की}$ = फलकभिंतीच्या एकांक लांबीत असणाऱ्या कीलक-बाहूतील ताण;

$भा$ = भिंतीच्या तळापैकी दर एकांक लांबीवर मृत्तिकेकडून येणारी उर्ध्वदिक् प्रतिक्रिया

$ड_0 = म_1 ग_1 फ_1 फ$ या दाबक्षेत्राच्या गुरुत्वमध्याची स्थूणेच्या तळापासून मोजलेली उंची.

या सर्व रचनेचा समतोल साधावयाचा असेल, तर भिंतीवरील उभ्या व आडव्या बल-घटकांची बेरीज आणि कोणत्याही—उदाहरणार्थ, की—बिंदूभोवती घेतलेल्या परिबलांची बेरीज, या सर्वांची मूल्ये शून्य असली पाहिजेत. म्हणून,

$$दा_{उल}\, स्प ऽ_उ - दा_{प्रका}\, स्प ऽ_प्र - भा = 0 \qquad [१\ अ]$$

$$त_{की} + दा_{प्रका} - दा_{उल} = 0 \qquad [१\ आ]$$

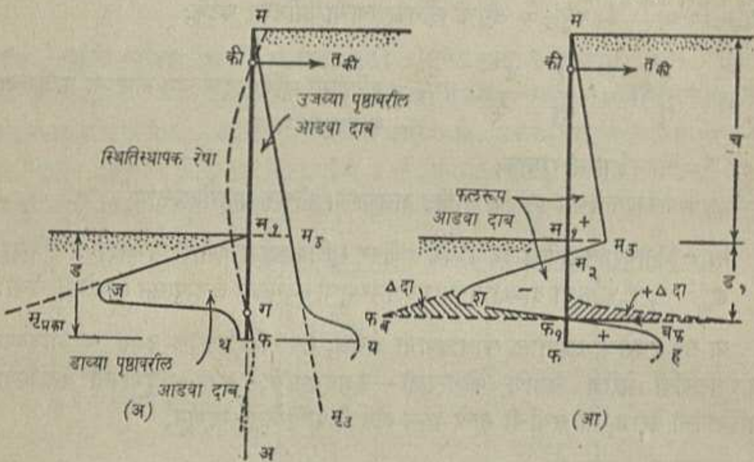
आणि

$$दा_{उल}\left[\frac{२}{३}(च+ड) - च_1\right] - दा_{प्रका}\,(च + ड - च_1 - ड_0) = 0 \qquad [१\ इ]$$

फलकस्थूणांची भूमीत पुरलेली खोली, ड आणि कीलकबाहूतील ताण, $त_{की}$, यांची मूल्ये समी. १ आ व १ इ सोडवून मिळतात. सुरक्षिततांकाचे मूल्य $सु = २$ असावे, असा नेहमीचा प्रघात आहे. समीकरण १ अ मधील $भा$ या मृत्तिकेच्या प्रतिक्रियेच्या महत्तेविषयी काहीच माहिती उपलब्ध नाही. परंतु $मृ_उ$ आणि $मृ_{प्रका}$ यांच्या मूल्यांवर या प्रतिक्रियेचा बराच प्रभाव पडतो असे दिसते. $भा = 0$ धरून समीकरण १ अ ची पूर्तता करावयाची असल्यास भिंतघर्षण-कोनाचे मूल्य प्रतियोगी दाबाच्या वेळी जास्त व उद्युक्त दाबाच्या वेळी कमी असले पाहिजे; किंवा दोन्ही वेळा ते शून्य असले पाहिजे. $भा = 0$ गृहीत धरण्यामुळे होणारी चूक सुरक्षिततेच्या बाजूने व्हावी, या उद्देशाने

पुष्कळवेळा $\delta = 0$ गृहीत धरले जाते. फलकभिंत उभी असेल, तर या गृहीतानुसार मृत्तिकादाबाची कूलोमप्रणीत मूल्ये आणि रँकिनप्रणीत मूल्ये सारखीच होतात. रँन्‌किन्‌प्रणीत मूल्ये समीकरणे १५ (२) आणि १५ (४) यांचा अवलंब करून मिळतात.

८१. **बद्ध मृत्तिकाधारी फलकभिंती** : अशा भिंतीचा छेद आ. ६६ मध्ये दाखविला आहे. स्थितिस्थापक रेषेचा आकार आ. ६६ अ मध्ये तुटक रेषेने दाखविल्याप्रमाणे होईल, इतक्या खोलीपर्यंत स्थूणा ठोकलेल्या असतील, तर फलकभिंतीच्या तळाची कड बद्ध आहे, असे गृहीत धरता येते. या रेषेचा नागमोडी (S) आकार हा



आकृती ६६ अ मध्ये तुटक रेषेने दाखविल्याप्रमाणे

फलकस्थूणांचा लवचिकपणा आणि खोलपर्यंत पुरलेली लांबी या दोहोंचा संयुक्त परिणाम आहे. उद्युक्त मृत्तिकादाबामुळे कीलकताणाचे स्थान आणि मृत्तिकाधाराचे स्थान यांमधील लांबीत वक्रता येते आणि फलकभिंतीचे विचलन डाव्या बाजूस होते. परिणामी रचनेचा समतोल राखण्यास पुरेसा होणारा प्रतियोगी मृत्तिकादाब, $म_1फ$ पैकी $म_1ग$ या वरच्या भागाजवळील वालुकेत कार्यप्रवण होतो.

याउलट, $म_1$ आणि फ मध्ये पडणाऱ्या $ग$ या बिंदूनंतर खाली स्थूणांना मूळ स्थानाच्या उजवीकडे वक्रता आली पाहिजे. कारण फलकस्थूणांची लांबी भरपूर असेल, तर स्थितिस्थापक रेषा शेवटी $मअ$ या सरळ उभ्या रेषेशी एकरूप होते. $मअ$ शी असंपाती पद्धतीने एकरूप व्हावयाचे, तर स्थितिस्थापक रेषा आळीपाळीने उजवीकडे व डावीकडे वक्र झाली पाहिजे व हळूहळू खोली वाढेल, त्याप्रमाणे मूळ स्थानापासूनचे विचलन कमीकमी होत शेवटी नाहीसे झाले पाहिजे. स्थितिस्थापक रेषेचे मूळ स्थानापासूनचे विचलन डावीकडे झाले की, स्थूणांच्या डाव्या बाजूवर प्रतियोगी मृत्तिकादाब कार्यप्रवृत्त

होतो, आणि उजव्या बाजूस उद्युक्त मृत्तिकादाब कारक होतो. विचलन जेव्हा उजव्या बाजूस होते, तेव्हा याच्या उलट परिस्थिती निर्माण होते. पृष्ठभागापासून निरनिराळ्या खोलीवर येणाऱ्या मृत्तिकादाबाच्या मूल्यांच्या परम मर्यादा ठरविण्यासाठी पुढीलप्रमाणे उपपत्ती मांडली जाते. फलकभिंतीच्या उजव्या बाजूवर येणाऱ्या मृत्तिकादाबाचे लघुतम मूल्य म्हणजे उद्युक्त मृत्तिकादाब हेच असणार. या दाबाचा आडवा घटक $मभमृ_{उ}$ (आकृती ६६ अ) या दाबक्षेत्राने दाखविला जातो. भूमीत पुरलेल्या $म_१फ$ या भागामुळे लगतच्या मृत्तिकेवर पडणारा दाब कोणत्याही स्थानी प्रतियोगी दाबाच्या $द_{प्रल}$ या आडव्या घटकाला $सु$ या सुरक्षिततांकाने भागून मिळणाऱ्या मूल्यापेक्षा अधिक असू शकणार नाही. $म_१$ पासून मोजलेल्या $ख'$ या कोणत्याही खोलीवरील दाब पुढीलप्रमाणे असेल.

$$द_{प्रल} = घख'मृ_{प्र}$$

येथे $मृ_{प्र}$ हा प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. स्थैर्याची अट पुरी व्हावयाची म्हणजे आडव्या दिशेतील दाबाचे मूल्य पुढील मूल्यापेक्षा अधिक असू नये.

$$द_{प्रका} = \frac{१}{सु} द_{प्रल} = घख'मृ_{प्रका}$$

येथे

$$मृ_{प्रका} = \frac{१}{सु} मृ_{प्र}$$

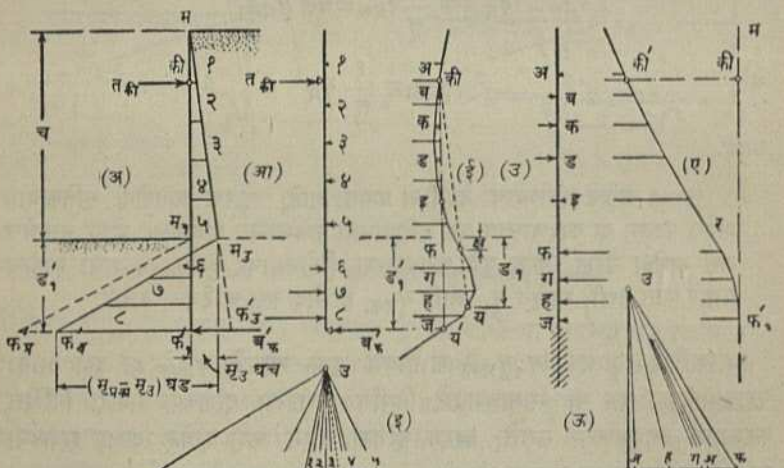
आहे.

$सु = १$ असेच मानण्याचा नेहमीचा प्रघात आहे; कारण प्रतियोगी मृत्तिकादाब अपुरा पडला, या कारणास्तव बद्ध मृत्तिकाधारी फलकभिंत पडण्याचा धोका नसतोच असे म्हणता येईल. परंतु पुढे करावयाच्या विश्लेषणावर $सु$च्या मूल्याचा काहीच प्रभाव पडत नाही; म्हणून $मृ_{प्र}$ आणि $मृ_{प्रका}$ हा भेद तसाच ठेवला जाईल.

आकृती ६६ अ मध्ये $म_१मृ_{प्रका}$ या रेषेच्या भुजा म्हणजे $द_{प्रका}$ हा दाब आहे. फलकभिंतीच्या $गफ$ या भागाच्याद्वारे निर्माण होणाऱ्या दाबाच्या मर्यादा निश्चित करण्याची आवश्यकता नसते; कारण मृत्तिका सहन करू शकेल अशा दाबाच्या मानाने हा दाब फारच लहान असतो.

भिंतीच्या दोन्ही पृष्ठांवरील आडव्या दाबांची महत्ता आणि त्यांचे वितरण यांवर होणारा भिंतीच्या विचलनाचा परिणाम आकृती ६६ अ मध्ये दाखविलेला आहे. उजव्या बाजूसाठी, भिंत आणि $ममृ_{उ}यफ$ ही रेषा यांतील क्षेत्र व डाव्या बाजूसाठी $म_१जयफ$ हे दाबक्षेत्र, यांनी हा परिणाम दाखविला आहे. भिंतीच्या एकांक क्षेत्रावर येणारा फलरूप दाब आकृती ६६ आ मधील $मफ$ या उभ्या रेषेपासून $ममृ_{उ}शह$ रेषेपर्यंत मोजलेल्या भुजांच्या मूल्यांनी दिला जातो. आकृती ६६ अ मधील $ममृ_{उ}य$ आणि $म_१जय$ या रेषांच्या भुजांची बीजगणितीय बेरीज करून या रेषेच्या भुजा मिळतात.

आकृती ६६ अ मध्ये दाखविलेली स्थितिस्थापक रेषा मिळण्यासाठी स्थूणा किती खोली-पर्यंत ठोकल्या पाहिजेत हे ठरविणे ही आपल्यापुढची पहिली समस्या आहे. समस्येची उकल सोपी व्हावी यासाठी आकृती ६६ आ मधील म$_3$शह या आलेखाच्या भुजांनी दाखविलेल्या दाब-मूल्यांमध्ये रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेल्या दोन समान मूल्यांचे परंतु विरुद्ध दिशेत कारक असणारे दाब मिळवू. तसेच $+\Delta$ दा या रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेल्या दाबासकट फलकभिंतीच्या तळाकडील भागावर कारक असणारा एकूण धन दाब काढून त्याऐवजी त्याचाच फलरूप दाब ब$_{फ}$ नियुक्त करू. या फलरूप दाबाचा कारकबिंदू स्थूल-मानाने फ$_1$ या बिंदूजवळ असतो. या सर्व कृतीचे फलित म्हणून म$_2$शफ$_1$ आणि फ$_1$हफ या मूळच्या वक्ररेषायुक्त दाब–आकृतींऐवजी आपल्याला फलकभिंतीच्या म$_1$फ या भागाच्या डाव्या बाजूस म$_2$फ$_3$फ$_1$ ही त्रिकोणी दाबआकृती आणि उजव्या बाजूस ब$_{फ}$ हे एक केंद्रित बल मिळते. ब$_{फ}$ या बलाच्या कारकबिंदूच्या खाली असलेला फलकभिंतीचा फ$_1$फ हा भाग बद्ध आहे असे गृहीत धरले आहे. फलकस्थूणांची पुरेली खोली आलेखपद्धतीने मिळविण्याची कृती आकृती ६७ मध्ये स्पष्ट केली आहे.



आकृती ६७ : बद्ध मृत्तिका-आधारी कीलकबद्ध फलकभिंतीच्या बाबतीतील कीलक-ताण आणि महत्तम विनामक परिबल ठरविण्याची स्थितिस्थापक रेषा-पद्धत.

समस्या सोडविण्यास आपण प्रारंभ करतो तेव्हा फ$_1$ या बिंदूची ड$_1$ ही खोली (आकृती ६६ आ) ज्ञात नसते. तेव्हा एक पहिले अनुमान म्हणून ही खोली ड$'_1$ = म$_1$फ$'_1$ (आकृती ६७ अ) इतकी आहे असे गृहीत धरू. नंतर फलकभिंतीवरील वितरित

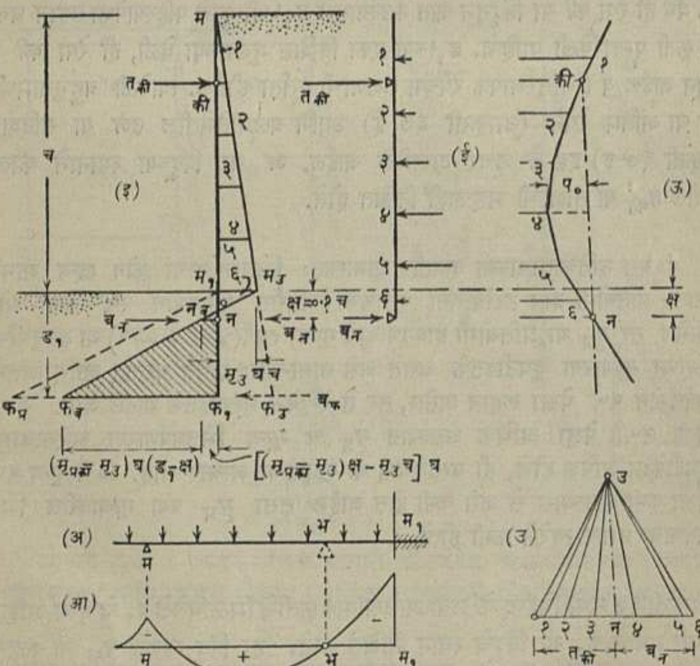
बलाऐवजी १ ते ८ ही अलगअलग बले नियुक्त करू. (आकृती ६७ आ पाहा.) या बलरचनेला अनुषंगिक अशी बलप्रतिमा (आकृती ६७ इ) आणि रज्जूबहुभुज (आकृती ६७ ई) मिळवू. आकृती ६७ अ मध्ये दाखविलेल्या बलव्यूहाला अनुषंगिक असणारी स्थितिस्थापक रेषा तेथील *की* या बिंदूतून गेली पाहिजे. या लक्षणाची पूर्तता होते की नाही हे समजण्यासाठी स्थितिस्थापक रेषा काढून पाहणे आवश्यक आहे. आलेख-स्थैतिकीतील पद्धतींच्या साहाय्याने हे करता येईल. (उदाहरणार्थ : मालकम १९०० पाहा.) रज्जूबहुभुजाच्याद्वारे सीमित झालेल्या (आकृती ६७ ई) क्षेत्राने आडवे दाब दाखविले जातात असे गृहीत धरता येईल. *कीय'* या अंतिम रेषेच्या डाव्या बाजूस असलेल्या क्षेत्राने धन दाब व उजव्या बाजूकडील क्षेत्राने ऋण दाब दाखविला जातो. या दाबांचे प्रत्यक्ष मूल्य गृहीत धरण्याची आवश्यकता नसते; कारण शून्य विचलनाचा बिंदू या गोष्टीवर अवलंबून नसतो. आकृती ६७ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे बितरित दाबाऐवजी *अ* ते *ज* या अलगअलग बलांची योजना करू आणि तदनुषंगिक रज्जूबहुभुज काढू. (आकृती ६७ ए पाहा.) रज्जूबहुभुजाने फलकस्थूणेची स्थितिस्थापक रेषा दाखविली जाते. येथे ही रेषा *की* या बिंदूतून जात नसल्यामुळे $ड_1'$ ची मूल्ये पहिल्यापेक्षा लहान धरून हीच कृती पुन्हा केली पाहिजे. $ड_1'$ च्या एका विशिष्ट मूल्याच्या वेळी, ही रेषा *की* या बिंदूतून जाईल व स्थितिस्थापक रेषेच्या लक्षणाची पूर्तता होईल. त्यावेळी बहुभुजामधील *कीय* या अंतिम रेषेने (आकृती ६७ ई) आणि बलप्रतिमेतील *उज* या सदिशाने (आकृती ६७ इ) इष्ट ते उत्तर दाखविले जाईल. *ज* या बिंदूच्या स्थानाने कीलक बाहूतील $त_{की}$ या ताणाची महत्ताही निश्चित होते.

उद्युक्त मृत्तिकादाबाच्या बाबतीत सामान्यतः भिंतघर्षणाचा कोन शून्य मानला जातो; प्रतियोगी दाब ठरवितांना मृत्तिकेचा अंतर्गत घर्षणकोन २५° पेक्षा मोठा असेल, तर $मृ_{प्र}$ या प्रतियोगी दाबगुणांकाचे मूल्य, $स्प^2(४५° + \phi/२)$ या तदनुषंगिक रॅन्किन् मूल्याच्या दुपटीइतके असते असे सामान्यतः गृहीत धरतात आणि अंतर्गत घर्षणकोन २५° पेक्षा लहान असेल, तर ते रॅन्किन् मूल्याइतके मानले जाते. ϕ चे मूल्य २५° पेक्षा अधिक असल्यास $मृ_{प्र}$ चे मूल्य भिंतघर्षणाच्या अस्तित्वामुळे दुपटीपेक्षा अधिक होते, ही वस्तुस्थिती या गृहीताचा आधार आहे. ϕ चे मूल्य २५° पेक्षा कमी असल्यास ते जसे कमी होत जाईल तसा $मृ_{प्र}$ च्या मूल्यावरील भिंत-घर्षणाचा प्रभाव त्वरेने कमी होतो.

आकृती ६७ मध्ये विशद केलेल्या आलेखात्मक कृतीने मिळविलेले $ड_1$ चे मूल्य आकृती ६६ *आ* मधील $फ_1$ या बिंदूचे स्थान निश्चित करते. हा बिंदू म्हणजे $प_फ$ या बलाचा कारकबिंदू होय. फलकस्थूणांची तळाची कड या कारकबिंदूच्या खाली आहे. अधिक चिकित्सा न करता, व्यवहारात $फफ_1 = ०\cdot२\ ड_1$ गृहीत धरण्यास प्रत्यवाय नसतो. अर्थातच बद्ध आधारासाठी $ड = १\cdot२ड_1$ इतक्या खोलीपर्यंत फलकस्थूणा ठोकल्या पाहिजेत.

८२. समस्वरूपी तुळईची पद्धत : समस्वरूपी तुळईची पद्धत म्हणजे मागील परिच्छेदात वर्णिलेल्या स्थितिस्थापक रेषाधिष्ठित पद्धतीलाच दिलेले सोपे रूप आहे. अचूकतेच्या बाबतीत थोडासा कमीपणा पत्करावा लागला, तरी या पद्धतीने वेळ आणि श्रम यांची पुष्कळच बचत होते. या पद्धतीला आधारभूत असणारी तत्त्वे आकृती ६८ अ आणि ६८ आ मध्ये दाखविली आहेत. आकृती ६८ अ मध्ये एक भारयुक्त तुळई दाखविली आहे. तिचे $म_1$ हे टोक बद्ध आणि $म$ हे दुसरे टोक मुक्त आहे. या परिस्थितीतील परिबल-आलेख आकृती ६८ आ मध्ये काढलेला आहे. स्थितिस्थापक रेषेचा व्यावर्तन-बिंदू $भ$ आहे. $भ$ बिंदूत तुळई तोडून तेथे एक मुक्त आधार लावला, तर $मभ$ या लांबीतील परिबलांची मूल्ये तशीच राहतात. $मभ$ ही तुळई म्हणजे $म_1म$ तुळईच्या $मभ$ या तुकड्याला समस्वरूपी तुळई आहे, असे म्हटले जाते (ब्लूम १९३०).

याच उपपत्तीचा उपयोग बद्धाधारी फलकभिंतींच्या पूर्वकल्पात कसा करता येतो, हे आकृती ६८ इ आणि ६८ ऊ यांमध्ये स्पष्ट केले आहे. आ. ६७ अ मध्ये फलकभिंतीवर



आकृती ६८ : बद्ध मृत्तिकाधारी कीकलबद्ध फलकभिंतीच्या बाबतीतील कीलक-ताण आणि महत्तम विनामक परिबल ठरविण्याची समस्वरूपी तुळई पद्धत.

कारक असलेला बल-व्यूहच आकृती ६८ इ मध्ये दाखविला आहे आणि ६८ ऊ मध्ये तदनुषंगिक परिबल-आलेख दाखविला आहे.

विचाराधीन समस्येला समस्वरूपी तुळईची पद्धत लागू करण्यासाठी प्रथम फलक-भिंतीमधील शून्य परिबलाच्या बिंदूचे स्थान निश्चित केले पाहिजे. आकृती ६८ ऊ मधील परिबल-आलेख आणि रज्जुबहुभुजाची अंतिम रेषा यांचा न हा छेदन-बिंदू म्हणजेच हा बिंदू होय. तो भूपृष्ठाखाली क्ष खोलीवर आहे. फलकभिंतीचे गणित स्थितिस्थापक रेषा-पद्धतीने (आकृती ६७) मांडले असता मिळणारी क्ष ची मूल्ये पुढे दिली आहेत. ω चे मूल्य प्रत्येक वेळी निराळे आहे.

ω =	२०°	३०°	४०°
क्ष =	०·२५ च	०·०८ च	−०·००७ च

वालुकायुक्त भरणाचा अंतर्गत घर्षणकोन स्थूलमानाने ३०° असतो. तदनुषंगिक क्ष चे मूल्य सुमारे ०·१ च एवढे आहे; म्हणून आकृती ६८ इ मध्ये $म_१फ_१$ रेषेच्या डाव्या बाजूची भूमी आणि उजव्या बाजूचे भरण वालुकायुक्त असेल, तर फारशी मोठी चूक न होता, आपण क्ष = ०·१ च गृहीत धरू शकतो. या गृहीताचा अवलंब केला असता आपल्यापुढील समस्या आकृती ६८ अ आणि ६८ आ यांमध्ये स्पष्ट केलेल्या समस्वरूपी तुळईच्या पद्धतीने सोडविणे शक्य होते. त्यासाठी $मम_उफ_बफ_१$ हे दाबक्षेत्र काढून झाल्यानंतर $म_१$ बिंदूच्या खाली क्ष = ०·१च मोजून त्या ठिकाणी, म्हणजे न या बिंदूत (आकृती ६८ इ) फलकस्थूणा तोडल्या आहेत असे समजू. नंतर तेथील कार्तनिक बलाऐवजी $ब_न$ हे प्रतिक्रियात्मक बल लावू. तसेच मन वरील वितरित मृत्तिकादाबाऐवजी १ ते ६ ही अलगअलग बले नियुक्त करू. आकृती ६८ ई पाहा. नंतर या परिस्थितीतील बलप्रतिमा काढू (आकृती ६८ उ) व तदनुषंगिक रज्जुबहुभुज काढू (आकृती ६८ ऊ). त्यासाठी कीन ही अंतिमरेषाही काढून घेऊ. या रेषेला बलप्रतिमेमध्ये समांतर अशी उन रेषा काढली असता आपल्याला $ब_न$ या प्रतिक्रियाबलाचे मूल्य तसेच $त_{की}$ या कीलकताणाचे मूल्य प्राप्त होते. आकृती ६८ उ पाहा. फलकस्थूणांतील $प_०$ हे महत्तम परिबल रज्जुबहुभुजावरून ठरविता येते (आकृती ६८ ऊ).

फलकस्थूणांच्या $ड_१ -$ क्ष या लांबीच्या $नफ_१$ या तळाकडील भागावर $ब_न$ ही वरची प्रतिक्रिया, $न_बफ_ब$ आणि $नफ_१$ (आकृती ६८ इ) यांनी सीमित केलेल्या दाब-आकृतीने दाखविला जाणारा मृत्तिकादाब आणि तळाकडची प्रतिक्रिया $ब_फ$ इतकी बले कारक आहेत. कोणत्याही बिंदूभोवती—उदाहरणार्थ, आकृती ६८ इ मधील $फ_१$ भोवती—घेतलेल्या परिबलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे, या लक्षणाच्या पूर्तीसाठी पुढील समीकरण मांडले पाहिजे.

$$\frac{(ड_1-क्ष)^2}{२}(मृ_{प्रका}-मृ_{उ})\frac{ड_1-क्ष}{३}घ+[(मृ_{प्रका}-मृ_{उ})क्ष-मृ_{उ}च]\times \frac{(ड_1-क्ष)^2}{२}घ=ब_{न}(ड_1-क्ष)$$

हे समीकरण सोडविले असता $ड_1$ चे पुढील मूल्य प्राप्त होते.

$$ड_1=\frac{३}{२}च\frac{मृ_{उ}}{मृ_{प्रका}-मृ_{उ}}-\frac{क्ष}{२}+\sqrt{\frac{६\,ब_{न}}{(मृ_{प्रका}-मृ_{उ})घ}+\frac{९}{४}\left(क्ष-च\frac{मृ_{उ}}{मृ_{प्रका}-मृ_{उ}}\right)^2} \quad [१]$$

वर्गमुळातील दुसरे पद पहिल्याच्या तुलनेत फारच लहान असल्यामुळे वगळता येईल. तसे करून आपल्याला पुढील मूल्य मिळते.

$$ड_1=\frac{३}{२}च\frac{मृ_{उ}}{मृ_{प्रका}-मृ_{उ}}-\frac{क्ष}{२}+\sqrt{\frac{६\,ब_{न}}{(मृ_{प्रका}-मृ_{उ})घ}} \quad [२]$$

फलकस्थूणा $ड=१{\cdot}२\,ड_1$ इतक्या खोलीपर्यंत ठोकल्या जातात त्याचे कारण मागील परिच्छेदात दिले आहेच.

८३. फलकभिंतीचे स्थैर्य ठरविण्याच्या पद्धतींची तुलना : स्थितिस्थापक रेषेवर आधारलेली पद्धत किंवा समस्वरूपी तुळईची पद्धत (परिच्छेद ८१ व ८२) यांपैकी कोणत्याही पद्धतीने बद्ध आधारी फलकभिंतीची भूमिगत खोली ठरविली असता, ती मुक्ताधारी भिंतीच्या (परिच्छेद ८०) बाबतीत मिळणाऱ्या खोलीपेक्षा फारच अधिक असते. उदाहरणार्थ, पुढील कोष्टकातील आकडे पाहा (रिमस्टाड १९३७).

कोष्टक १

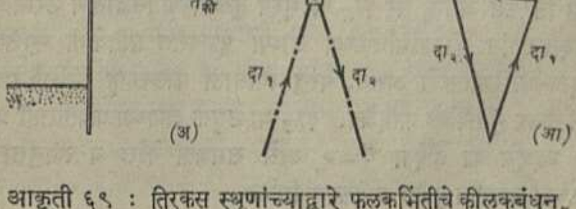
गणित-कृती	स्थूणेची भूमिगत खोली ड (फूट)	कीलकबाहूतील ताण पौंड / फूट	महत्तम परिबल फूट-पौंड
१. मुक्त मृत्तिकाधार (आकृती ६५ मधील कृती)	६·०	६३००	१८५५०
२. बद्ध मृत्तिकाधार (आकृती ६७ मधील स्थिति-स्थापक रेषेची पद्धत)	१२·०	५१८०	१४०००
३. बद्ध मृत्तिकाधार (आकृती ६८ मधील समस्वरूपी तुळईची पद्धत)	१२·२	५१८०	१४०००

वरील उदाहरणात फलकभिंतीची उंची $ч=२३'$ गृहीत धरलेली आहे आणि तिच्यामागील भरणावर ८ फूट जाड मृत्तिकाथराइतके वजन असणारा पट्टिका अधिभार आहे. स्थितिस्थापक रेषा पद्धतीने किंवा समस्वरूपी तुळई पद्धतीने प्राप्त होणारी फलिते जवळजवळ सारखीच आहेत. फलकभिंतीसाठी लागणाऱ्या पोलादाचा हिशेब केला असता, मुक्ताधारी भिंतीला बद्धाधारी भिंतीपेक्षा काहीसे कमी पोलाद लागते असे आढळते. अर्थात त्यासाठी आकडेमोड करताना दोन्ही भिंतींच्या बाबतीत रूढ सुरक्षिततांक आधारभूत मानलेले असावेत. तथापि बद्धाधारी पद्धतीत होणारा लाभ असा आहे की, तेथे फलकभिंतीच्या पुरलेल्या भागावर येणारा मृत्तिकेचा पार्श्वीय विरोध अपुरा पडून होणाऱ्या उच्छेदाची शक्यता टाळता येते.

फलकभिंतीवरील दाबाचे जलदाबासारखे नसणारे वितरण आणि उद्युक्त मृत्तिका-दाबाच्या कारकबिंदूची ऊर्ध्व दिशेने होणारी हालचाल यांचा अन्योन्य संबंध आहे असे दिसते. तेव्हा जलदाबासारखे वितरण गृहीत धरण्यामुळे, परिच्छेद ८० ते ८२ मधील कृतींचा अवलंब करून मिळणारा कीलकबाहूतील ताण प्रत्यक्षापेक्षा कमी ठरविला जाण्याची शक्यता असते. खरे सांगायचे, तर ग्रंथकर्त्यांच्या निदर्शनास आलेल्या फलक-भिंतीच्या बहुतेक उच्छेदांचे कारण अपुरी कीलकबद्धता हेच होते. दुर्दैवाने मृत्तिकादाबाच्या कारकबिंदूच्या स्थानाविषयी कोणतीच विश्वासार्ह माहिती उपलब्ध नाही. आपल्या ज्ञानात भर पडेपर्यंत गणितसिद्ध केलेला कीलकबाहूतील ताण निदान २०% ने तरी वाढविणे श्रेयस्कर ठरेल.

८४. फलकभिंतींचे कीलकबंधन आणि कीलक-भित्तिकांचा विरोध :

आकृती ६३ मध्ये दाखविलेले फलकभिंतीचे कीलकबाहू तिरक्या स्थूणांचा आधार दिलेल्या अलगअलग ठोकळ्यात गुंतविता येतात. तसेच भूमिगत भित्तिका किंवा भूमिगत पाट यांतही ते गुंतविता येतात. त्यांचे पार्श्वीय विस्थापन करू म्हटल्यास त्याला भोवता-लच्या मृत्तिकेकडून विरोध होतो. या विरोधाचे साहाय्य घेऊन त्यांना स्वस्थानी रोखून ठेवता येते. आकृती ६९अ मध्ये दोन तिरकस स्थूणांवर आधारित असलेला एक कीलक-ठोकळा दाखविला आहे. कीलकबाहूने निर्माण केलेल्या $त_{की}$ या बलामुळे डाव्या



आकृती ६९ : तिरकस स्थूणांच्याद्वारे फलकभिंतीचे कीलकबंधन.

स्थूणेत भूमीमध्ये खोलवर जाण्याची आणि उजवीत उपसून वर येण्याची प्रवृत्ती निर्माण होते. या स्थूणांवर कारक असणारी $दा_{१}$, $दा_{२}$ ही बले बलप्रतिमेच्या साहाय्याने ठरविता येतात (आकृती ६९ आ). स्थूणांची भारधारणक्षमता या विषयाचा ऊहापोह परिच्छेद ५१ मध्ये केला आहेच.

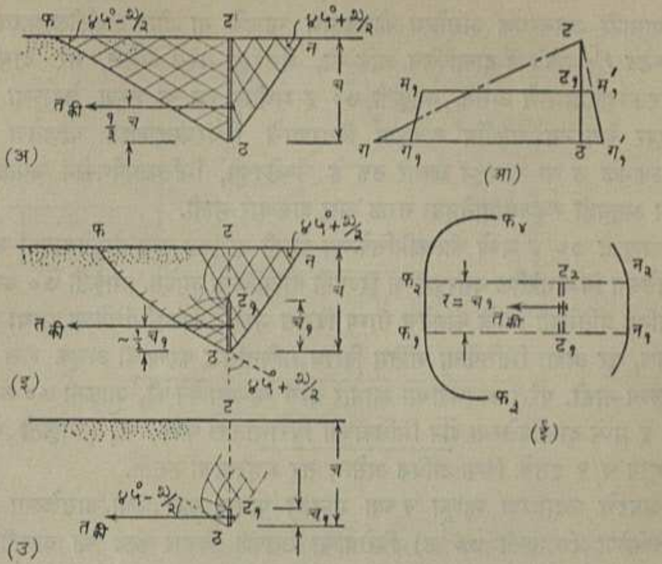
विरोध करण्यासाठी प्रतियोगी मृत्तिकादाबावरच पूर्णतया अवलंबून असणाऱ्या कीलकभित्तिका आणि कीलक-पाट या पद्धतींत कीलकांची मापे अशी असली पाहिजेत की, कीलकबाहूंत निर्माण होणारा ताण अशा कीलकांच्या उच्छेदासाठी आवश्यक असणाऱ्या ताणाच्या विशिष्ट हिश्शाचा असावा. कीलकबाहूतील ताण, $त_{की}$ आणि कीलकाच्या उच्छेदास आवश्यक असणारा ताण यांचे गुणोत्तर म्हणजे कीलकाचा सुरक्षिततांक होय.

आकृती ७० अ आणि ७० इ यांमध्ये कीलकभित्तिकांचे उभे छेद दाखविले आहेत. आकृती ७० अ मधील भित्तिकेचा माथा भूपृष्ठालगत आहे. अशा ठिकाणी अतिरिक्त ताणामुळे कीलकाचा उच्छेद झाल्यास टठफ हा त्रिकोणाकृती वालुकाखंड ठफ या तिरकस पृष्ठावरून वरच्या बाजूस सरकतो. त्याच वेळी भित्तिकेच्या मागे उद्युक्त पद्धतीचा उच्छेद होतो. तेथेही एका तिरकस घसरपृष्ठावरून वालुका सरकते. भित्तिकेच्या डाव्या बाजूच्या वालुकाराशीत ऊर्ध्व दिशेने सरकण्याची वृत्ती असल्यामुळे प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचा उभा घटक भित्तिकेला भूमीतून उपटण्याच्या दृष्टीने साहाय्यभूत होतो. भित्तिकेचे वजन आणि उद्युक्त खंडाच्या सान्निध्यातील तिच्या उजव्या पृष्ठावरील घर्षण या दोहोंच्या बेरजेपेक्षा या बलाचे मूल्य अधिक असण्याची शक्यता नसते. वजन आणि घर्षण ही उभयता फारच कमी मूल्याची असतात. म्हणून आपण असे गृहीत धरतो की, प्रतियोगी दाबाचा उभा घटक $दा_{प्र}$ स्प ठॅ जवळजवळ शून्य आहे. म्हणजेच ठॅ = ० आहे. या परिस्थितीतील घसरपृष्ठ आकृती ७० अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे जवळजवळ सरळ असते. भित्तिकापृष्ठ सरळ आणि ठॅ = ० असल्यास प्रतियोगी मृत्तिकादाब पुढील समीकरणाने ठरविता येतो :

$$दा_{प्र} = \frac{१}{२}\, घ\ च^{२} स्प^{२} \left(४५^{\circ} + \frac{ऊ}{२} \right)$$

भित्तिकापृष्ठ तिरकस असेल, तर $दा_{प्र}$ चे मूल्य कूलोमच्या सिद्धांताने ठरविता येते.

दोन्ही उदाहरणांत कीलकभित्तिकेच्या डाव्या पृष्ठावरील प्रतियोगी मृत्तिकादाबाचे वितरण जलदाब-वितरणासारखे असते. परंतु त्यासाठी कीलकबाहू भित्तिकेच्या तळापासून १/३ उंचीवर गुंतविलेले पाहिजेत. $दा_{उ}$ या उद्युक्त दाबाच्या बाबतीतही प्राथमिक, स्थूल गृहीत म्हणून का होईना ठॅ = ० असे समजता येईल व त्यानुसार उभ्या कीलकभित्तिकेच्या बाबतीत पुढील समीकरण मिळेल.



आकृती ७० : (अ) कीलकभित्तिकेलगतच्या वालुकेतील कार्तनिक प्रतिमा; (आ) (अ) मधील टठ आणि (इ) मधील $ट_१ठ$ या कीलकभित्तिकांच्या दोन्ही बाजूंवरील दाबाचे वितरण; (इ) जिची माथ्यावरची कड भूपृष्ठाच्या खाली आहे, अशा कीलक-भित्तिकेजवळील वालुकेतील कार्तनिक प्रतिमा; (ई) चौरस कीलकपाटाचा उच्छेद झाल्यावर वालुकेच्या पृष्ठभागावर दिसणाऱ्या घसरपृष्ठाच्या खुणा; (उ) कीलकतुळई-जवळील वालुकेतील कार्तनिक प्रतिमा.

$$दा_{उ} = \tfrac{१}{२} घच^{२} स्प (४५° - \varnothing/२)$$

फलकभिंतीच्या एकांक लांबीत असलेल्या कीलकबाहूंतील ताण $त_{की}$ असल्यास आणि सु हा कीलकबंधनाच्या बाबतीत आवश्यक असणारा सुरक्षिततांक असेल, तर कीलक-भित्तिकेची च ही उंची, पुढील समीकरणाची पूर्तता होईल अशी असली पाहिजे.

$$त_{की} = \frac{१}{सु}(दा_{प्र} - दा_{उ}) \qquad [१]$$

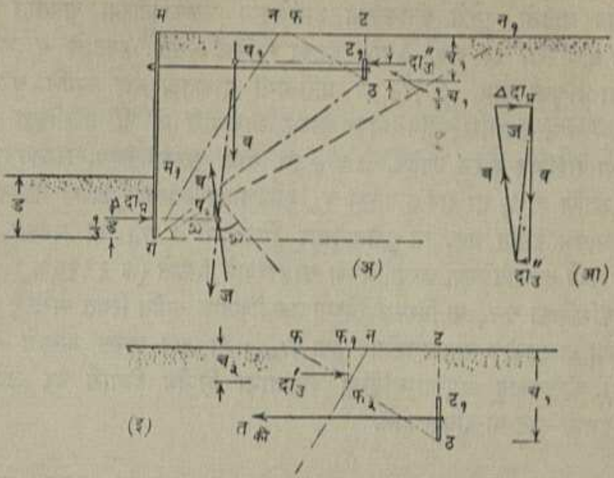
आकृती ७० इ मध्ये आणखी एका कीलकभित्तिकेचा छेद दाखविला आहे. भूपृष्ठ आणि भित्तिकेचा तळ यांमधील अंतराच्या सुमारे निम्म्याने भित्तिकेची उंची आहे. या कीलकभित्तिकेच्या डाव्या अंगावरील प्रतियोगी दाबाचे वितरण आ. ७० आ मध्ये $ट_१म_१ग_१ठ$ या दाबक्षेत्राने दाखविले आहे आणि उजव्या अंगावरील उद्युक्त दाबाचे वितरण $ट_१म'_१ग'_१ठ$ या दाबक्षेत्राने दाखविले आहे. कीलकबंधनाचा उच्छेद

होण्यासाठी आवश्यक असलेला कीलकताण म्हणजे या दोन दाबांतील फरक होय. परिच्छेद १५ मध्ये हे दाखविलेच आहे की, घसरपृष्ठ सरळ असेल, तर दाबवितरण स्थिरजलदाबाप्रमाणे असते. आकृती ७० इ मधील टठ या उभ्या छेदाच्या डाव्या बाजूवर येणाऱ्या पार्श्वीय दाबाच्या वितरणाचे स्थिरजलदाबाशी कोणतेच साम्य नसल्यामुळे ठ या तळातून जाणारे ठफ हे उच्छेदपृष्ठ, भित्तिकाघर्षणकोन जवळ जवळ शून्य असूनही स्थूलमानानेसुद्धा सरळ असू शकणार नाही.

आकृती ७० इ मध्ये कीलकभित्तिकेच्या दोन्ही बाजूंकडे नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असलेल्या विभागांतील घसरपृष्ठांच्या दिशाही दाखविल्या आहेत. आकृती ७० अ मधील कार्तनिक प्रतिमेशी त्यांचे कोणतेच साम्य दिसत नाही. कीलकभित्तिकेचा माथा भूमिगत असेल, तर अशा भित्तिकेचा अंतिम विरोध गणितसिद्ध करण्याची अचूक रीत अद्याप उपलब्ध नाही. परंतु अनुभवाच्या आधारे असे म्हणता येते की, आकृती ७० अ आणि ७० इ मध्ये दाखविलेल्या दोन भित्तिकांच्या विरोधांतील फरक, $च_1$ (आकृती ७० इ) चे मूल्य च/२ इतके किंवा अधिक असेल, तर महत्त्वाचा नसतो.

शेवटचे उदाहरण म्हणून च च्या मानाने फारच कमी उंची असलेल्या कीलकभित्तिकेच्या (आकृती ७० उ) विरोधाचा आपण विचार करू. या बाबतीत असे अपेक्षिता येईल की, भूपृष्ठभागापर्यंत पोचणारा कार्तनिक उच्छेद न घडून येता भूमीतच ओढला जाऊन कीलक विचलित होईल. हे विस्थापन वक्र घसरपृष्ठावरून होते (आकृती ७० उ) आणि या विस्थापनाची दिशा $टट_1$ छेदाच्या उजव्या बाजूला असणाऱ्या प्रसरणशील विभागाकडे असते; कारण या विभागात विस्थापित झालेल्या पदार्थाच्या आगमनाला होणारा विरोध लघुतम असतो. $च_1$ उंचीच्या अशा कीलकतुळईला ओढण्यासाठी लागणारे बल, स्थूलमानाने पृष्ठभागापासून $च - च_1/२$ खोलीवर ज्याचा तळ आहे व ज्याची रुंदी $च_1$ आहे, अशा पट्टिका-पादकाच्या भारधारणक्षमतेइतके असते. ही भारधारणक्षमता ठरविण्याची रीत परिच्छेद ४६ मध्ये वर्णिली आहे.

८५. फलकभिंत आणि कीलकभित्तिका यांतील अंतर : कीलकभित्तिकेजवळील प्रतियोगी खंडाच्या ठफ ह्या तळाने (आकृती ७१ अ) फलकभिंतीलगतच्या उद्युक्त खंडाचा *गन* हा तळ छेदू नये, ही अट पुरी केली असता फलकभिंत आणि कीलकभित्तिका यांतील लघुतम अंतर ठरविता येते. ही अट पुरी झाली नाही, तर आकृती ७१ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्रतियोगी खंडाचा $नफफ_2$ हा एक भाग उद्युक्त खंडामध्ये समाविष्ट झालेला आहे असे दिसेल. या विभागात वालुका आडव्या दिशेने प्रसरण पावत असते आणि ही गोष्ट प्रतियोगी अवस्थेशी नेमकी विसंगत आहे. अशा प्रकारे या विभागांची क्षेत्रे एकावर एक पडू लागली, तर त्या गोष्टीचा कीलकभित्तिकेच्या विरोधावर काय परिणाम होतो त्याचे अनुमान करण्यासाठी $फ_1फ_2$ (आकृती ७१ इ) या उभ्या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थितीचे विश्लेषण केले पाहिजे.



आकृती ७१ : (अ आणि आ) वालुकेचा नैसर्गिक उतार दर्शविणारी रेषा गन, हिच्या वर स्थित असलेल्या कीलकभित्तिकेत बद्ध केलेल्या फलकभिंतीच्या समतोलाची लक्षणे; (इ) कीलकभित्तिकेच्या तळकडेतून निघणारे घसरपृष्ठ फलकभिंतीच्या तळकडेतून निघणाऱ्या घसरपृष्ठास छेदीत असेल, अशा परिस्थितीतील कीलकभित्तिकेच्या समतोलाची लक्षणे.

जर टठफ हा खंड उद्युक्त खंडाच्या पूर्णपणे बाहेर असता, तर $फ_1फ_2$ या छेदावर कारक असणारा प्रतियोगी मृत्तिकादाब

$$दा'_{प्र} = \frac{1}{2} च_2^2 घ\, स्प^2(४५^\circ + \omega/२) \qquad [१]$$

इतका असता; परंतु आकृती ७१ इ मधील उदाहरणात $फ_1फ_2$ वरील दाब

$$दा'_{उ} = \frac{1}{2} च_2^2 घ\, स्प^2(४५^\circ - \omega/२) \qquad [२]$$

या उद्युक्त दाबापेक्षा फारसा वेगळा असणार नाही. म्हणून फलकभिंत आणि कीलकभित्तिका यांत पुरेसे अंतर नसल्यास, कीलकबंधनातून निर्माण होऊ शकणारा विरोध स्थूलमानाने $दा'_{प्र} - दा'_{उ}$ इतका कमी होतो.

पुष्कळदा असेही विहीत केले जाते की, कीलकभित्तिकेचा माथा $गन_1$ या (आकृती ७१ अ) तिरकस रेषेच्या खाली असावा. ही रेषा फलकभिंतीच्या $ग$ या तळापासून निघणारी असून ती क्षितिजाशी ω कोन करते. आकृती ७१ अ मधील कीलक-भित्तिकेने ही अट पुरी केलेली नाही. परिणामी $मगठट$ या वालुकाराशीमध्ये $गठ$ या तिरकस पृष्ठावरून अधस् दिशेने घसरण्याची प्रवृत्ती राहते. या प्रवृत्तीमुळे $म_1ग$ च्या डावीकडचा

मृत्तिकादाब वाढतो. पुरेसे कीलकबंधन असलेल्या फलकभिंतीच्या बाबतीत निर्माण होणाऱ्या दाबापेक्षा हा दाब, Δ *दा*$_{प्र}$ इतका अधिक असतो. स्वतःचे *व* हे वजन, *दा*$''_{उ}$ हा उद्युक्त दाब, Δ *दा*$_{प्र}$ ही प्रतियोगी दाबातली वाढ आणि *गठ* वरील लंबाशी ϕ कोन करणारी आणि त्यावर कारक असणारी *ज* ही प्रतिक्रिया ही बले *मगठट* या राशीवर कारक आहेत. Δ *दा*$_{प्र}$ हा दाब फलकभिंतीच्या तळापासून *ह*/३ उंचीवर आणि *दा*$''_{उ}$ हा दाब ठ पासून च$_{१}$/३ उंचीवर आडव्या दिशेत कारक आहे, असेही आपण गृहीत धरू. या गृहीतानुसार मिळणारी Δ *दा*$_{प्र}$ ची महत्ता आकृती ७१ आ मध्ये दाखविलेल्या बलप्रतिमेच्या साहाय्याने मिळते (क्रे १९३६).

कीलकभित्तिका *गन*$_{१}$ या तिरकस रेषेच्या उजवीकडील भूमीत स्थित असेल, तर *म*$_{१}$*ग* च्या डाव्या बाजूकडील वालुकाराशीवर फक्त *दा*$_{प्रका}$ हा दाब कारक असतो (आकृती ६५ आ). कीलकबाहू अपुऱ्या लांबीचा असताना निर्माण होणारी वर उल्लेखिलेली Δ *दा*$_{प्र}$ इतकी वाढ या दाबात होते.

८६. कीलकपाटांचा विरोध : आकृती ७० इ मध्ये दाखविलेले कीलकबंधन सलग भिंतीच्या रूपात नसून रुंदी र = उंची च$_{१}$ या मापाच्या अलगअलग पाटांचे असेल, तर अशा पाटांच्या सान्निध्यातील वाळूत होणारा प्रतियोगी उच्छेद र पेक्षा अधिक रुंदीच्या भागात पसरतो. आकृती ७० ई मध्ये फ$_{३}$फ$_{४}$ या रेषेने हे दाखविले आहे. कीलकबाहूच्याद्वारे ताण लावण्यापूर्वी वालुका स्तब्ध अवस्थेत असते. या अवस्थेतील मृत्तिकादाबगुणांक स्थूलमानाने ०·५ मानता येईल आणि भरणात घेतलेल्या कोणत्याही छेदावरील घर्षणजन्य विरोध म्हणजे स्तब्धावस्थेतील मृत्तिकादाबाचा लंबरूप घटक $\times$ *स्प* ϕ, हा अंतर्गत घर्षणाचा गुणांक, एवढा असेल. कीलकताण लागताच पाटापासून डाव्या बाजूस पसरलेल्या व स्थूलमानाने त्रिकोणाकृती असणाऱ्या विभागात तत्पूर्वी असणाऱ्या आडव्या दाबात वाढ होते. प्रतियोगी खंडातून जाणाऱ्या आणि ट$_{१}$फ$_{१}$ आणि ट$_{२}$फ$_{२}$ यांनी दाखविलेल्या उभ्या छेदांवर (आकृती ७० ई) एकूण येणारा आडवा दाब कीलकताण लावण्यापूर्वी *दा*$_{०}$ म्हणजे स्तब्ध मृत्तिकादाबाइतका असतो. त्या परिस्थितीत या पृष्ठावरील कार्तनिक विरोध *दा*$_{०}$ *स्प* ϕ इतका असतो. जसजसा कीलकताण वाढत जातो, तसतसा या दोन छेदांवरील दाब आणि तदनुसारी कार्तनिक विरोध बऱ्याच प्रमाणात वाढतात. त्यामुळे कीलकताणाने निर्माण केलेल्या दमनयुक्त विभागाच्या बाह्य सीमांच्या अनुरोधाने घसरण होते. या घसरणीचे पृष्ठ भरणाच्या पृष्ठभागास जेथे छेदते त्या फ$_{३}$फ$_{४}$ या छेदाचा आकार अर्धचंद्राकृती असतो. अशा पृष्ठाच्या रुंद तिरकस बाजूवरील कार्तनिक विरोध निःसंशयपणे ट$_{१}$फ$_{१}$ आणि ट$_{२}$फ$_{२}$ या उभ्या छेदांवरील २ *दा*$_{०}$ *स्प* ϕ या मूळच्या विरोधापेक्षा मोठा असतो; म्हणून प्रत्येक कीलकपाटाच्या बाबतीतील *ता*$_{की}$ या अनुज्ञेय ताणाचे मूल्य खालीलप्रमाणे असते.

$$\text{ता}_{\text{की}} = \text{त}_{\text{की}} \times \text{र} + \frac{\text{२ दा}_{\circ}}{\text{सु}} \text{स्पऊ} \qquad [१]$$

येथे $\text{त}_{\text{की}}$ कीलकभिंतीच्या एकांक लांबीवरील कीलकताण आहे (समीकरण ८४ (१) सु हा आवश्यक मानलेला सुरक्षिततांक आहे आणि $\text{दा}_{\circ}$ हा प्रतियोगी खंडातील उभ्या छेदावरील स्तब्ध मृत्तिकादाब आहे.

तृतीय खंड

मृत्तिकांतील घन भाग आणि पाणी यांच्या परस्परांवरील बलात्मक क्रिया

प्रकरण १२

आदर्श वालुकेतील समतोलाच्या लक्षणांवर होणारा क्षरणाचा परिणाम

८७. **संपृक्त वालुकेचा कार्तनिक विरोध :** संपृक्त वालुकेचा कार्तनिक विरोध पुढील समीकरणाने मांडला जातो :

$$\text{क} = (\text{ए} - \text{उ}_{\text{ज}})\ \text{स्प}\,\text{ऌ} \qquad ६\ (५)$$

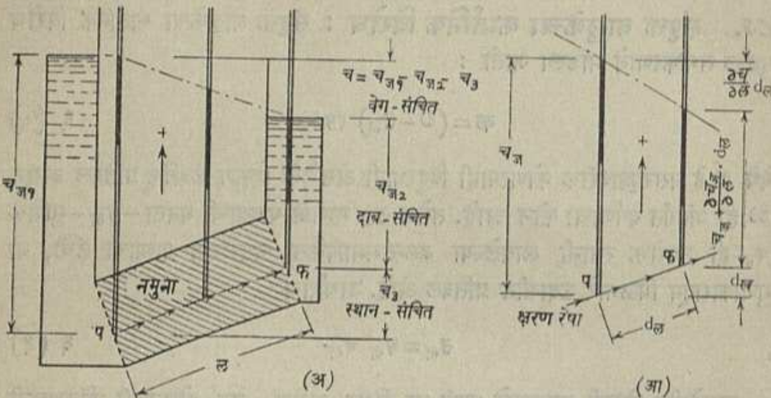
येथे ए हे घसरपृष्ठावरील कोणत्याही बिंदुस्थानी असलेले एकूण लंबदिक् प्रतिबल असून ऌ हा अंतर्गत घर्षणाचा कोन आहे. तसेच $\text{उ}_{\text{ज}}$ म्हणजे पाण्याची घनता – $\text{घ}_{\text{ज}}$ – गुणिले $\text{च}_{\text{ज}}$ ही उपरोक्त स्थानी लावलेल्या जलस्तंभमापिकेत चढलेल्या पाण्याची उंची, या गुणाकारातून मिळणारे उदासीन प्रतिबल आहे. अर्थातच

$$\text{उ}_{\text{ज}} = \text{घ}_{\text{ज}}\ \text{च}_{\text{ज}} \qquad ६\ (१)$$

वालुकेतील पोकळी व्यापणारे पाणी जर स्थिर असेल, तर कोणत्याही बिंदुस्थानी ठेवलेल्या मापिकेत ते एकाच पातळीपर्यंत चढते आणि $\text{च}_{\text{ज}}$ हे संचित म्हणजे उपरोक्त बिंदूची या पातळी पासून मोजलेली खोली असते. कार्यसाधक प्रतिबले आणि एखाद्या वालुकाराशीचे स्थैर्य यांवर स्थिर पाण्यातील उदासीन प्रतिबलांचा पडणारा प्रभाव परि० ८ आणि ११ मध्ये वर्णिला आहे. स्थिर स्थितीऐवजी, पाणी वालुकेतील पोकळीतून झिरपत असेल, तर निरनिराळ्या बिंदुस्थानी ठेवलेल्या मापिकांत ते निरनिराळ्या उंचीपर्यंत चढते. अशा प्रवाही अवस्थेतील पाण्याने निर्मिलेली उदासीन प्रतिबले ठरवावयाची असतील, तर अशा पाझरणाऱ्या वालुकाराशीच्या सीमांवर अस्तित्वात असलेल्या स्थैतिक जललक्षणांचा विचार करणे आवश्यक असते. ही समस्या व्यावहारिक जलशास्त्रातली आहे. केशाकर्षण-क्रियेमुळे निर्माण होणाऱ्या उदासीन प्रतिबलांचा मृत्तिकांच्या उच्छेदकालीन प्रतिबल-परिस्थितीवर होणारा परिणाम प्रकरण १४ मध्ये चर्चिला जाईल. प्रस्तुत प्रकरणात केशाकर्षणजन्य बले दुर्लक्षिली जातील.

८८. **मृत्तिकांमधून होणारे पाण्याचे क्षरण :** एखादा जलबिंदू मृत्तिका-राशीतून ज्या मार्गाने प्रवास करतो, त्या मार्गास क्षरण-रेषा असे म्हणतात. जर क्षरणरेषा सरळ आणि एकमेकींस समांतर असतील, तर त्या क्षरणास **रेखात्मक क्षरण** म्हणतात. वालुकेच्या आडव्या थरातून अधोमुख दिशेने होणारे क्षरण हे या प्रकारच्या क्षरणाचे एक उदाहरण म्हणून सांगता येईल. जलबिंदूंचा प्रवास वक्र रेषांनुसार होत असेल

आणि या रेषा समांतर पातळ्यांवर असतील, तर अशा क्षरणास **द्विमिति-क्षरण** म्हणतात. इतर सर्व प्रकारांचे क्षरण, विहिरींमध्ये झिरपून येणाऱ्या पाण्यासारखे **त्रिमिति-क्षरण** असते. आधारभूमीविषयक समस्यांमध्ये आपल्याला स्वारस्य असते, ते मुख्यत: क्षरणाच्या द्विमिति प्रकारात. एखाद्या धरणाखालच्या भूमीतून पाझरणारे पाणी म्हणजे अशा क्षरणाचाच एक प्रकार होय.



आकृती ७२ : क्षरण-सिद्धांतात वापरल्या जाणाऱ्या संज्ञा व चिन्हे यांचे अर्थ. (अ) रेखात्मक क्षरण आणि (आ) वक्र रेषांनुसार होणारे द्विमिति किंवा त्रिमिति-क्षरण; *dल* हा अशा रेषेचा एक तुकडा आहे.

निश्चित परिमाणांच्या नमुन्यात रेखात्मक क्षरण प्रस्थापित करण्यासाठी विविध प्रकारांची उपकरणे उपलब्ध आहेत. त्यांपैकी एकाचा छेद आ. ७२ अ मध्ये दाखविला आहे. तेथे समपार्श्व आकाराच्या एका पेटीत मृत्तिकेचा नमुना भरलेला आहे. त्याची लांबी ल आणि छेदक्षेत्र *आ* आहे. पेटीच्या बाजू जलाभेद्य असून दोन्ही तोंडे मात्र सच्छिद्र आहेत. त्यामुळे या तोडांशी असलेले पाणी आणि पेटीतील मृत्तिका यांचा संपर्क सहज साधला जातो. पफ ही रेषा म्हणजे एक क्षरणरेषा आहे. प आणि फ या बिंदुस्थानांची उदासीन प्रतिबले अनुक्रमे पुढीलप्रमाणे मांडता येतील :

$$उ_{ज_1} = घ_{ज} च_{ज_1} \qquad [१]$$

$$उ_{ज_2} = घ_{ज} च_{ज_2} \qquad [२]$$

प आणि फ येथील मापिकांत पाणी एकाच पातळीपर्यंत चढलेले असेल, तर पाणी स्थिर अवस्थेत आहे असे म्हणता येते, मग $उ_{ज_1}$ आणि $उ_{ज_2}$ ही उदासीन प्रतिबले अगदी भिन्न का असेनात. मृत्तिकेतून पाणी झिरपू लागण्यासाठी च (आ. ७२ अ) हे

संचिताधिक्य प्रस्थापित करणे आवश्यक असते. त्यामुळे एका मापिकेतील जलदाब, त्याच पातळीवरील दुसऱ्या मापिकेतील दाबापेक्षा $च घ_{ज}$ इतका वाढतो. हे जलदाबाधिक्य म्हणजेच पाण्यास प्रवाही करणारे बल होय. खाली दिलेले

$$म_{द} = घ_{ज} \frac{च}{ल} \qquad [३]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे प आणि फ या बिंदूंमधील जलदाब-प्रक्रम आहे. त्याची परिमाणे घनतेच्या परिमाणांसारखीच म्हणजे ग्रॅम सेंमी$^{-३}$ अशी असतात.

$$म = \frac{म_{द}}{घ_{ज}} = \frac{च}{ल} \qquad [४]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे जलीय प्रक्रम असून तो एक शुद्ध अंक आहे.

क्षरणदिशेला लंबरूप असलेल्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रातून प्रत्येक एकांक काळात झिरपणारे पाणी म्हणजे स्रावाचा वेग होय. सूक्ष्मकणयुक्त वालुका आणि त्यांहून सूक्ष्मकणांच्या मृत्तिका यांच्या बाबतीत $म_{द}$ हा दाबप्रक्रम आणि तदनुषंगिक $ग$ हा स्राववेग यांतील संबंध

$$ग = \frac{झ'}{स्न} \cdot म_{द} \qquad [५]$$

या समीकरणाने प्रायः अचूकपणे व्यक्त होतो. येथे $स्न$, (ग्रॅम, सेंमी$^{-२}$, सेकंद) हा झिरपणाऱ्या द्रवाचा स्निग्धता-गुणांक असून $झ'$ (सेंमी^{२}) हा एक प्रायोगिक अंक आहे. $स्न$ चे मूल्य काही प्रमाणात द्रवाच्या तपमानावर आणि $झ'$ चे मूल्य पदार्थाच्या सच्छिद्रतेवर तसेच रंध्रांच्या आकारावर आणि आकारमानावर अवलंबून असते. पदार्थविज्ञानात $झ'$ ला पाझर-गुणांक म्हणतात. समी. ४ व ५ एकत्र करून आपल्याला

$$ग = \frac{झ'}{स्न} घ_{ज} म$$

हे समीकरण मिळते.

क्षरणविषयक समस्यांत पाणी या एकाच द्रवाशी स्थापत्यविशारदांचा संबंध येतो. क्षेत्रातील परिस्थितीत ज्या मर्यादेतील तपमान अनुभवास येते, तीत $स्न$ (स्निग्धता) आणि $घ_{ज}$ (पाण्याची घनता) यांची मूल्ये जवळजवळ स्थिर असतात; म्हणून स्थापत्यशास्त्रात ही दोन्हीही मूल्ये स्थिर आहेत, असे मानण्याचा प्रघात आहे. त्यानुसार वरील समीकरणात पुढील पद नियुक्त केले जाते :

$$झ = \frac{झ'}{स्न} घ_{ज} \qquad [६]$$

त्यातूनच पुढील समीकरण मिळते :

$$ग = झम = झ \frac{च}{ल} \qquad [७]$$

झ ला सुद्धा **पाझर-गुणांक** म्हणतात; परंतु त्याची परिमाणे विज्ञानात वापरल्या जाणाऱ्या *झ*'च्या परिमाणांपेक्षा निराळीं—म्हणजेच वेगाच्या परिमाणांसारखी सेंमी, सेकंद$^{-1}$ अशी—असतात. *म* या जलीय प्रक्रमाचे मूल्य १ असताना मिळणारा स्राववेग त्याने व्यक्त होतो. समी. ७ ने व्यक्त झालेला नियम **डार्सीचा नियम** (डार्सी १८५६) म्हणून प्रसिद्ध आहे. आ. ७२ अ मध्ये दाखविलेल्या नमुन्यातून या नियमानुसार एकांक कालात वाहणारे पाणी म्हणजेच स्राव पुढीलप्रमाणे मांडला जातो :

$$स्त्र = आ \bar{ग} = आ झ म$$

समी. ६ च्या संबंधात हे आवर्जून सांगितले पाहिजे की, एखाद्या सच्छिद्र पदार्थाची पाझरविषयक वैशिष्ट्ये *झ*' (सेंमी^{2}) नेच व्यक्त होतात, *झ* ने (सेंमी सेकंद$^{-1}$) नव्हे; कारण *झ*' झिरपणाऱ्या द्रवाच्या घनतेवर किंवा स्निग्धतेवर अवलंबून नसतो, परंतु *झ* मात्र या घटकांवर अवलंबून असतो. या ग्रंथात केलेला किंवा स्थापत्यशास्त्रात सार्वत्रिकपणे केला जाणार *झ* चा असाधारण असा हा वापर केवळ सोय म्हणूनच समर्थनीय म्हणता येईल.

एखाद्या नमुन्यात असणारे पाणी मृत्तिकेच्या एकांक अवकाशापैकी छ इतकाच भाग व्यापते. म्हणून जलबिंदूंच्या क्षरणरेषांना समांतर दिशेतील प्रवासाचा सरासरी वेग पुढीलप्रमाणे मांडला जातो.

$$ग_{ण} = \frac{१}{छ} ग \qquad [८]$$

त्यास **क्षरणवेग** म्हणतात.

आ. ७२ अ मध्ये दिलेल्या माहितीच्या आधारे आपल्याला पुढील समीकरणे मांडता येतात. $च_{ज१}$ आणि $च_{ज२}$ ही पदे अनुक्रमे *प* आणि फ येथील दाबसंचिते आहेत. म्हणून च हे संचित पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$च = च_{ज१} - च_{ज२} - च_{३} \qquad [९]$$

येथे जलीय प्रक्रम खालीलप्रमाणे आहे :

$$म = \frac{च}{ल} = \frac{च_{ज१} - च_{ज२}}{ल} - \frac{च_{३}}{ल} \qquad [१०]$$

$च_{ज_1} = उ_{ज_1} / घ_ज$ आणि $च_{ज_2} = उ_{ज_2} / घ_ज$ असल्यामुळे समी. १० खालील स्वरूपातही मांडता येते.

$$म = \frac{१}{घ_ज} \cdot \frac{उ_{ज_1} - उ_{ज_2}}{ल} - \frac{च_3}{ल} \qquad [११]$$

प्रवाहाची दिशा उभी असेल, तर समी. १० आणि ११ यांमध्ये $च_3 = ल$ होईल आणि त्यामुळे

$$म = \frac{च_{ज_1} - च_{ज_2}}{च_3} - १ = \frac{१}{घ_ज} \frac{उ_{ज_1} - उ_{ज_2}}{च_3} - १ \qquad [१२]$$

होईल.

$म$ चे मूल्य धन असेल, तर अशा जलीय प्रक्रमामुळे निर्माण होणारा प्रवाह ऊर्ध्वमुख आहे, असा अर्थ होतो.

आ. ७२ आ मधील पफ ही रेषा म्हणजे एका वक्र क्षरणरेषेचा तुकडा आहे. या तुकड्याची लांबी $dल$ आहे. त्याच्या प या एका टोकाकडील मापिकेत प पासून $च_ज$ उंचीपर्यंत पाणी चढते आणि फ या दुसऱ्या टोकाला ते $च_ज + \frac{\partial च_ज}{\partial ल} \cdot dल$ उंचीपर्यंत चढते.

प आणि फ या मापनबिंदूंच्या पातळ्यांतील फरक $dख$ आहे. समी. १० मध्ये $ल = dल$, $च/ल = -\frac{\partial च}{\partial ल}$, $च_{ज_1} = च_ज$, $च_{ज_2} = च_ज + \frac{\partial च_ज}{\partial ल} \cdot dल$ आणि $च_3 = dख$ ही मूल्ये नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$म = -\frac{\partial च}{\partial ल} = -\frac{\partial च_ज}{\partial ल} - \frac{\partial ख}{\partial ल} \qquad [१३]$$

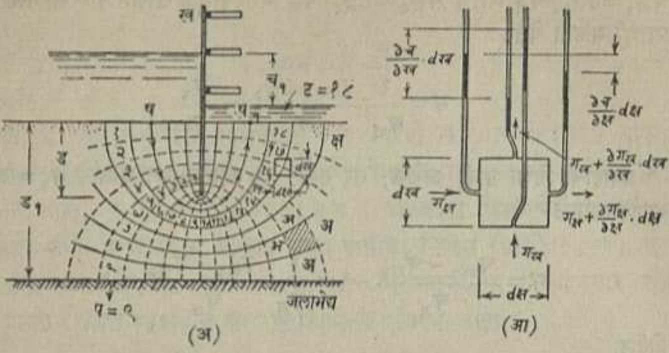
$उ_ज = च_ज\, घ_ज$ म्हणजेच $च_ज = उ_ज / घ_ज$ आणि $\partial च_ज / \partial ल = १/घ_ज \times \partial उ_ज / \partial ल$ असल्यामुळे

$$म = -\frac{१}{घ_ज} \cdot \frac{\partial उ_ज}{\partial ल} - \frac{\partial ख}{\partial ल} \qquad [१४]$$

असेही आपण लिहू शकतो.

दाबाचा प्रक्रम पुढीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$म_द = -घ_ज \cdot \frac{\partial च}{\partial ल} = घ_ज म \qquad [१५]$$



आकृती ७३ : (अ) समांग वालुकेत ठोकलेल्या फलकस्थूणांच्या एका रांगेखालून होणारा पाण्याचा पाझर; (आ) अ मध्ये दाखविलेल्या वालुकेतील एका खंडाच्या चार बाजूंवर येणाऱ्या जलदाबाची लक्षणे.

८९. **क्षरणजाल** : आकृती ७३ अ मध्ये वक्र रेषांनुसार होणारे क्षरण दाखविलेले आहे. या रेषा आकृतीतील छेदाला समांतर आहेत. आकृतीत एका जलाभेद्य आडव्या तळावरील $ड_1$ जाडीचा थर दाखविला आहे. थरातील वालुका समांग असून एक जलाभेद्य पडदा तीत ड खोलीपर्यंत गेलेला आहे. पडद्याच्या दोन्ही अंगांस असलेल्या जलपातळ्यांमध्ये सातत्याने $च_1$ इतका फरक राहतो, असे गृहीत धरले आहे. $च_1$ या संचिताधिक्याच्या अस्तित्वामुळे उगमदिशेकडून पाणी भूमीत प्रवेश करते, अधोमुख होऊन पडद्याखालून वाहत जाऊन ऊर्ध्वमुख होते व प्रवाहदिशेकडे भूपृष्ठावर येते. भूमीतील एक समपार्श्व खंड आ. ७३ आ मध्ये मोठ्या आकारात दाखविला आहे. तो एक समांतरपृष्ठक असून dक्ष, dय आणि dख या त्याच्या बाजू आहेत. पाणी आकृतीतील छेदाला समांतर वाहत आहे. समजा,

$ग_{क्ष} = ग$ या स्राववेगाचा आडव्या दिशेतील घटक,

$म_{क्ष} = \dfrac{\partial च}{\partial क्ष}$ त्याच दिशेतील जलीय प्रक्रम,

$ग_{ख}$ आणि $म_{ख} = \dfrac{\partial च}{\partial ख}$ म्हणजे उभ्या दिशेतील तशीच पदे आहेत.

प्रत्येक एकांक काळात या खंडात प्रवेश करणारे पाणी आणि बाहेर पडणारे पाणी अनुक्रमे खालीलप्रमाणे आहेत.

येणारे पाणी : $ग_{क्ष} \cdot dख \cdot dय + ग_{ख} dक्ष \cdot dय$

जाणारे पाणी : $ग_{क्ष} \cdot dख \cdot dय + \frac{\partial ग}{\partial क्ष} \cdot dक्ष \cdot dय \cdot dख + ग_{ख} \cdot dक्ष \cdot dय$

$$+ \frac{\partial ग_{ख}}{\partial ख} . dख \cdot dय \cdot dक्ष$$

पाणी पूर्णत्वाने अदमनीय असून खंडातील त्याने व्यापलेला अवकाश बदलत नाही, असे आपण गृहीत धरल्यास, आत येणारे आणि बाहेर जाणारे पाणी सारखेच असले पाहिजे. म्हणून

$$\frac{\partial ग_{क्ष}}{\partial क्ष} . dक्ष \cdot dय \cdot dख + \frac{\partial ग_{ख}}{\partial ख} \cdot dख \cdot dक्ष \cdot dय = 0$$

म्हणजेच
$$\frac{\partial ग_{क्ष}}{\partial क्ष} + \frac{\partial ग_{ख}}{\partial ख} = 0 \qquad [१]$$

या समीकरणाने प्रवाहाच्या सातत्याचे लक्षण व्यक्त होते. डार्सीच्या नियमानुसार (समी. ८८ (७)) स्राववेगाचे दोन घटक पुढीलप्रमाणे आहेत :

$$ग_{क्ष} = - झ \frac{\partial च}{\partial क्ष} \text{ आणि } ग_{ख} = - झ \frac{\partial च}{\partial ख}$$

येथे $-\frac{\partial च}{\partial क्ष}$ आणि $-\frac{\partial च}{\partial ख}$ हे अनुक्रमे क्ष आणि ख या दिशांतील जलीय प्रक्रम आहेत.

झ·च या गुणाकारास पाझर-संचित म्हणतात आणि ते असे मांडतात :

$$ਫ = झ \cdot च$$

म्हणून
$$ग_{क्ष} = - \frac{\partial ਫ}{\partial क्ष} \text{ आणि } ग_{ख} = - \frac{\partial ਫ}{\partial ख}$$

आणि समी. १ पुढील स्वरूपात मांडता येते.

$$\frac{\partial^2 ਫ}{\partial क्ष^2} + \frac{\partial^2 ਫ}{\partial ख^2} = 0 \qquad [२]$$

या समीकरणाचे उत्तर म्हणून एकमेकींस काटकोनांत छेदणाऱ्या वक्र रेषांचे दोन संच आपल्याला मिळतात. यांपैकी एका संचातील रेषांना क्षरणरेषा आणि दुसऱ्या संचातील

रेषांना **समसंचितरेषा** म्हणतात. एखाद्या समसंचितरेषेवरील कोणत्याही स्थानी परीक्षणकूप घेतले, तर त्यांत पाणी एकाच उंचीपर्यंत चढते. या व्याख्येनुसार उगमदिशेकडील भूपृष्ठ म्हणजे एक समसंचितरेषा ठरते व प्रवाहदिशेकडील भूपृष्ठ हेही तशीच एक रेषा ठरते.

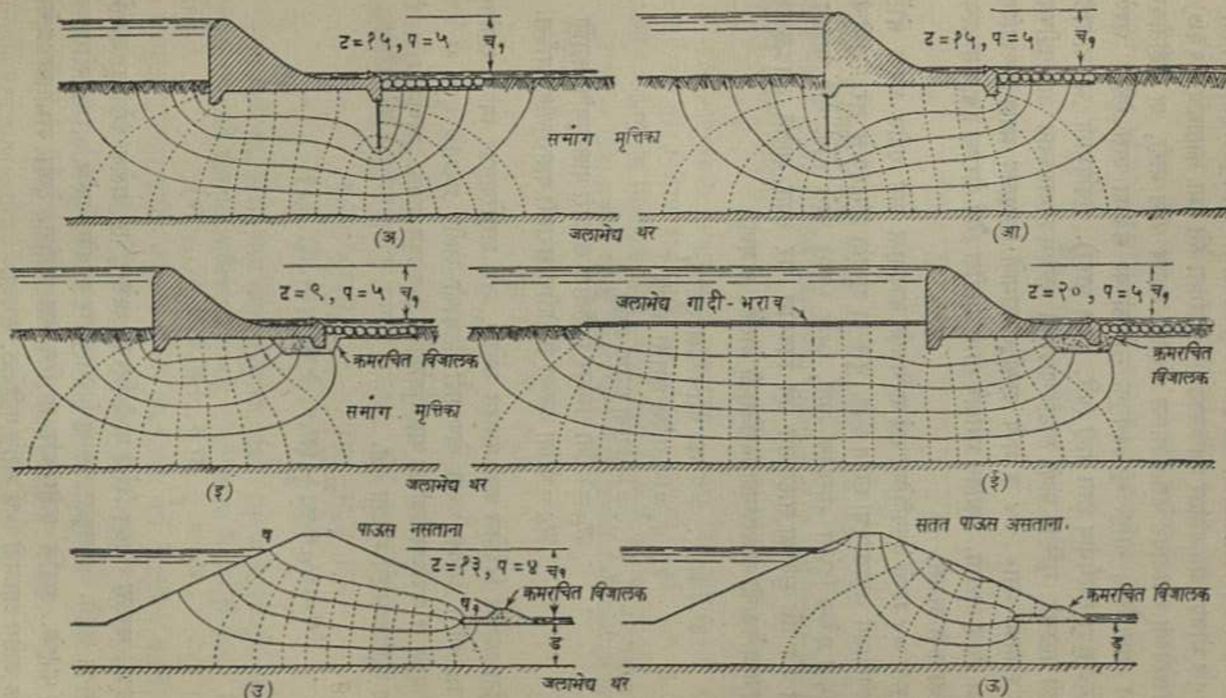
याच अनुरोधाने विचार केल्यास पडद्याच्या भूमिगत भागाच्या दोन्ही बाजू दाखविणाऱ्या रेषा क्षरणरेषा ठरतात. एवढी पक्षभूत माहिती म्हणजे क्षरणजन्य प्रवाहाची **जलीय सीमालक्षणे** होत आणि त्यांच्या आधारे समी. २ चे उत्तर मिळू शकते. आकृती ७३ अ मध्ये हे उत्तर क्षरणजाल काढून आलेखपद्धतीने मिळविले आहे. समी. २ आणि जलीय सीमालक्षणे या दोहोंची पूर्तता याद्वारे होते (फॉर्शहैमर १९१७). क्लिष्ट प्रकरणांमध्ये क्षरणजाल काढण्यासाठी 'प्रयत्नांती यश' अशा प्रकारची आलेखपद्धत, जलयुक्त प्रारूप-प्रयोगपद्धत किंवा क्षरणजन्य प्रवाह आणि वीजप्रवाह यांतील साम्यांवर बसविलेली वैजिक पद्धत यांचा अवलंब करता येतो. या सर्व पद्धतींचे संक्षिप्त समालोचन प्रकाशित झालेले आहे (आ. कासाग्रांद १९३७). तसेच या विषयाचा परिपूर्ण ऊहापोह करणारे ग्रंथही उपलब्ध आहेत (मस्कट १९३७).

आलेखपद्धत वापरताना मार्गदर्शक ठरतील अशी काही क्षरणजाले आ. ७४ मध्ये काढून दाखविली आहेत. क्षरणजाल सिद्ध करणाऱ्या वक्र रेषा नेहमी अशा प्रकारे काढल्या जातात की, उपरोक्त दोन संचांतील रेषांनी सीमित होणारी क्षेत्रे स्थूलमानाने चौरसाकृती असावीत. त्यामागील कारणांचे विवरण पुढील परिच्छेदात केले जाईल.

आकृती ७४ अ ते ई यांमध्ये निरनिराळे छेदप्रकार असलेल्या कॉंक्रीटच्या धरणांच्या आधारभूमीतून होणाऱ्या क्षरणाचे प्रकार दाखविले आहेत. प्रत्येक उदाहरणात आधार-भूमीची पाझरक्षमता सर्व ठिकाणी सारखीच आहे. आकृती ७४ इ आणि ई यांमध्ये दाखविलेल्या क्रमरचित विजालकांची पाझरक्षमता नैसर्गिक भूमीच्या पाझरक्षमतेपेक्षा फारच अधिक आहे, असे गृहीत धरले आहे; म्हणून भूमी आणि विजालक यांच्यांतील स्पर्शक्षेत्र हे पाणी सहजपणे बाहेर जाऊ देणारे पृष्ठ मानता येते. आकृती ७४ अ ते ई यांमधील प्रत्येक उदाहरणात क्षरण-विभागाच्या सीमा आणि पाझरक्षम थरांच्या सीमा एकच आहेत. त्यामुळे थराच्या सीमा आणि त्यांवरील मुक्त पाण्याच्या पातळ्या यांवरून जलीय सीमालक्षणे ठरतात.

आकृती ७४ उ म्हणजे एकविभागी पद्धतीने बांधलेल्या मातीच्या धरणाचा छेद आहे. भरावाचा प्रवाहदिशेकडील पायथा वालुकेच्या क्रमरचित आडव्या विजालकावर ठेवलेला आहे. या विजालकाची पाझरक्षमता भरावाच्या पाझरक्षमतेपेक्षा पुष्कळच अधिक आहे; त्यामुळे तो पायथ्याजवळील निस्सारण-नालीप्रमाणे कार्य करू शकतो. कब_1 ही सर्वांत वरची क्षरणरेषा सामान्यतः **संपृक्तीरेषा** किंवा **क्षरणशिरोरेषा** म्हणून ओळखली जाते. क्षरणविभागाची वरची सीमा तिने दाखविली जाते.

झिरपणारे पाणी उगमदिशेच्या उतारातून धरणात प्रवेश करते आणि विजालकाच्या डाव्या सीमेकडे वाहत जाते. कब_1 या सीमेचे स्थान अगोदर माहीत नसल्यामुळे



आकृती ७४ : (अ ते ई) काँक्रीटच्या धरणांच्या आधारभूमीतील समांग वाळुकेतून होणारे क्षरण, (उ आणि ऊ) अती बारीक आणि स्वच्छ वाळुकेच्या एकविभागी धरणातून होणारे क्षरण (आधार : आ. कासाग्रांद)

क्षरणजाल सिद्ध करण्याची समस्या क्लिष्ट होते. परंतु ही सीमा म्हणजेसुद्धा एक क्षरणरेषाच असल्यामुळे थोड्या प्रयत्नांनंतर आलेखपद्धतीने ठरविता येते (आ. कासाग्रांद १९३७). क्षरणशिरोरेषेच्या स्थानावर केशाकर्षणाचा काहीही प्रभाव पडत नाही, या गृहीतावर ही पद्धत आधारलेली आहे. सूक्ष्मकणयुक्त मृत्तिकांच्या संबंधात असे गृहीत धरणे स्थूलमानानेसुद्धा समर्थनीय ठरत नाही (परि. १११ पाहा). एकविभागी भरावासाठी वापरलेली वाळसर मृत्तिका पाणी साठविण्याइतकी जलाभेद्य असल्यास अतिवृष्टीच्या काळात त्यामध्ये आ० ७४ ऊ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे क्षरणजन्य प्रवाह प्रस्थापित होण्याचा संभव असतो. अर्थातच भरावाचे या काळातील स्थैर्य कोरड्या हवामानातल्या स्थैर्यापेक्षा कमी असते.

आकृती ७४ मध्ये दाखविलेली सर्व क्षरणजाले काढताना असे गृहीत धरले होते की, क्षरणविभाग जलीयदृष्ट्या समांग आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे तर, भूमीची पाझरक्षमता प्रत्येक दिशेत सारखीच आहे, असे गृहीत धरले होते. खरे पाहता, निसर्गात जेथे जेथे मृत्तिका साठते तेथे तेथे तिच्यात थर तयार झालेले आढळतात आणि त्या प्रत्येकाची पाझरक्षमता निरनिराळी असते. समजा,

$\text{झा}_{१}, \text{झा}_{२} \ldots =$ एकेका थराचे पाझरगुणांक,

$\text{ड}_{१}, \text{ड}_{२} =$ त्या प्रत्येक थराची जाडी,

$\text{ड} = \text{ड}_{१} + \text{ड}_{२} + \ldots =$ निक्षेपाची एकूण जाडी,

$\text{झा}_{\text{स}} =$ थरांना समांतर दिशेतील सरासरी पाझरगुणांक आणि

$\text{झा}_{\text{लं}} =$ थरांना लंबरूप दिशेतील सरासरी पाझरगुणांक आहेत.

थरांना समांतर दिशेनेच पाणी पाझरत असेल, तर क्षरणरेषासुद्धा त्यांना समांतर असतात; आणि प्रत्येक थरात कोणत्याही ठिकाणी जलीय प्रक्रमाचे मूल्य म हेच असते आणि ते थरांच्या वैयक्तिक पाझरगुणांकावर अवलंबून नसते. म्हणून सरासरी स्राववेग खालीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$\text{ग} = \text{झा}_{\text{स}}\,\text{म} = \frac{\text{म}}{\text{ड}} \left(\text{झा}_{१}\text{ड}_{१} + \text{झा}_{२}\text{ड}_{२} + \ldots\ldots \text{इ०}\right)$$

म्हणजेच

$$\text{झा}_{\text{स}} = \frac{१}{\text{ड}} \left(\text{झा}_{१}\text{ड}_{१} + \text{झा}_{२}\text{ड}_{२} + \ldots\ldots \text{इ०}\right) \qquad [३]$$

याउलट, थरांना लंबरूप दिशेने पाणी झिरपत असेल, तर प्रत्येक जलबिंदू क्रमाने सर्व थरांतून जातो. प्रवाहसातत्याच्या नियमानुसार स्राववेग प्रत्येक थरात सारखाच असला पाहिजे. थरांचे पाझरगुणांक तर भिन्नभिन्न आहेत, तेव्हा अर्थातच प्रत्येक थरातील जलीय प्रक्रमही भिन्न असले पाहिजेत. समजा,

$म_1, म_2 \ldots\ldots$ इ. = एकेका थरातील जलीय प्रक्रम,
च = एकूण जाडीतील संचित-क्षय आणि
$ड = ड_1 + ड_2 \ldots$ इ० = निक्षेपाची एकूण जाडी आहेत

समीकरण ८८ (७) च्या आधारे येथील स्रावयेग पुढीलप्रमाणे मांडता येतो :

$$ग = \frac{च}{ड} \cdot झ_{लं} = झ_1 म_1 = झ_2 म_2 \ldots\ldots इ.\ इ.$$

यावरून पुढील उत्तर मिळते :

$$झ_{लं} = \frac{ड}{\frac{ड_1}{झ_1} + \frac{ड_2}{झ_2} + \ldots\ldots + \frac{ड_{छ}}{झ_{छ}}} \qquad [४]$$

समी. ३ आणि ४ यांची तुलना केली असता, असे दिसून येते की, स्तरयुक्त भूमीत स्तरांस लंबरूप दिशेतील पाझरगुणांक समांतर दिशेतील पाझरगुणांकापेक्षा नेहमी लहानच असला पाहिजे.

हीच गोष्ट खालील उदाहरणानेही स्पष्ट होईल. आपण असे गृहीत धरू की, ड जाडीच्या एका निक्षेपात दोन समांग थर असून त्यांची जाडी प्रत्येकी १/२ ड आहे. त्यांचे पाझरगुणांक भिन्नभिन्न असून त्यांची मूल्ये $झ_1$ आणि $झ_2$ अशी आहेत. समी. ३ आणि ४ यांचा उपयोग करून एकूण निक्षेपाच्या पाझरगुणांकांची मूल्ये पुढीलप्रमाणे मिळतील :

$$झ_{स} = \tfrac{1}{2}\,(झ_1 + झ_2)$$

$$झ_{लं} = \frac{2 झ_1 झ_2}{झ_1 + झ_2}$$

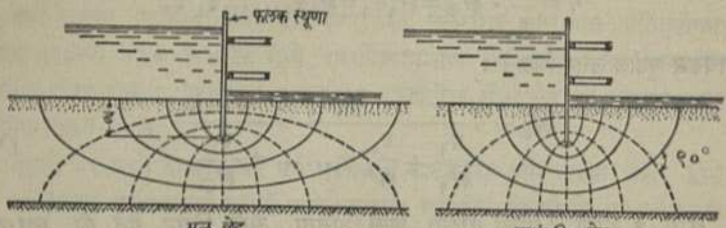
आणि त्यांवरून पुढील गुणोत्तर मांडता येईल :

$$\frac{झ_{लं}}{झ_{स}} = \frac{4 झ_1 झ_2}{(झ_1 + झ_2)} = 1 - \left(\frac{झ_1 - झ_2}{झ_1 + झ_2}\right)^2$$

अर्थातच $झ_{लं}$ हा $झ_{स}$ पेक्षा लहानच असला पाहिजे. एखाद्या निक्षेपामध्ये भिन्नभिन्न पाझरगुणांकांचे दोनापेक्षा अधिक थर असले, तरीही असाच निष्कर्ष निघतो.

थरयुक्त मृत्तिकाराशीतील क्षरणाचे गणित मांडण्याच्या सर्व सैद्धांतिक पद्धती एका सुकरतादायी गृहीतावर आधारित आहेत, ते असे : अशा राशीत कोणत्याही ठिकाणी $झ_{स}$ आणि $झ_{लं}$ यांची मूल्ये तीच असतात परंतु ती समान नसतात. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे तर तिर्यक् विषमदैशिकत्व हे अशा निक्षेपाचे वैशिष्ट्य असते. ही विषमदैशिकता क्षरणजालाच्या रेखात्मक विरूपतेस कारणीभूत होते. अशा विषमदैशिक

माध्यमात क्षरणजाल सिद्ध करावयाचे असल्यास, क्षरणविभागाचे थरांना समांतर दिशेतील माप $\sqrt{\text{ज्ञ}_{\text{लं}}/\text{ज्ञ}_{\text{स}}}$ या प्रमाणात लहान करावे (सामसियो १९३१) व मिळणारा रूपांतरित राशी समदैशिक आहे, असे समजून क्षरणजाल सिद्ध करावे. नंतर क्षरणजालासहित सर्व मापे पूर्ववत मूळ प्रमाणात आणावीत. आ. ७५ मध्ये ही कृती स्पष्ट केली आहे. बारीक वालुकेच्या निक्षेपात ठोकलेल्या फलकस्थूणांच्या एका रांगेचा छेद या



मूळ छेद (नैसर्गिक प्रमाण)

रूपांतरित छेद (रूपांतरित प्रमाण, आडवे प्र. $=\sqrt{\dfrac{\text{ज्ञ}_{\text{लं}}}{\text{ज्ञ}_{\text{स}}}}\times$ उभे प्र. $=0{\cdot}63\times$ उभे प्रमाण)

आकृती ७५ : वालुकेचे उभ्या आणि आडव्या दिशांतील पाझरगुणांक ($\text{ज्ञ}_{\text{लं}}$, $\text{ज्ञ}_{\text{स}}$) भिन्न असताना रूपांतरित छेदाच्या साहाय्याने क्षरणजाल रेखाटण्याची कृती.

आकृतीत दाखविला आहे. या निक्षेपाचा $\text{ज्ञ}_{\text{स}}$ हा समांतर दिशेतील पाझरगुणांक लंबदिशेतील $\text{ज्ञ}_{\text{लं}}$ या गुणांकाच्या २.५ पट आहे. फलकस्थूणांच्या डाव्या बाजूस पाणी साठविलेले आहे आणि ते पायामधून झिरपत आहे. या उदाहरणातील क्षरणजाल आता आपल्याला काढावयाचे आहे. प्रथम आडव्या मापांना $\sqrt{\dfrac{\text{ज्ञ}_{\text{लं}}}{\text{ज्ञ}_{\text{स}}}}=0{\cdot}63$ ने गुणू; अशा प्रकारे प्राप्त झालेल्या रूपांतरित छेदामध्ये पूर्वोक्त पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करून क्षरणजाल काढू; नंतर $\sqrt{\dfrac{\text{ज्ञ}_{\text{स}}}{\text{ज्ञ}_{\text{लं}}}}=1{\cdot}58$ ने गुणून क्षरणजालासहित आडवी मापे पूर्ववत करू. या कृतीतून आ. ७५ मध्ये डाव्या बाजूस दाखविलेले क्षरणजाल आपल्याला मिळते. वक्र रेषांच्या ज्या दोन संचांतून हे क्षरणजाल सिद्ध झाले ते संच येथे एकमेकांस काटकोनात छेदत नाहीत.

ज्या उपपत्तीच्या आधारे समी. २ प्राप्त झाले, तीच उपपत्ती पाझरणाऱ्या समांग पदार्थातील त्रिमिति-प्रवाहालाही लागू करता येते. तसे करून

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial \text{क्ष}^2}+\frac{\partial^2\varpi}{\partial \text{य}^2}+\frac{\partial^2\varpi}{\partial \text{ख}^2}=0 \qquad [५]$$

हे समीकरण मिळते आणि त्याचे उत्तर म्हणून वक्र पृष्ठांचे तीन संच मिळतात. त्यांपैकी एक संच असा असतो की, त्यावरील संचिताची मूल्ये सारखी असतात. समसंचित रेषांचे वैशिष्ट्यही हेच असते. उरलेल्या दोन संचांतील पृष्ठांच्या छेदनरेषा झिरपणाऱ्या पाण्याचा मार्ग दाखवितात. अपवादात्मकरीत्या सोप्या असलेल्या प्रकरणांतच केवळ समी. ५ सोडविता येते. द्विमितीतील क्षरणजाल सिद्ध करण्याच्या पद्धतींसारख्या सोईस्कर आलेखात्मक किंवा प्रायोगिक पद्धती त्रिमितीतील इतर समस्यांसाठी उपलब्ध नाहीत. म्हणून त्रिमिति-क्षरणाच्या बहुतांश समस्या थोड्याफार प्रमाणात स्वैर आणि सुकरतादायी गृहीतांच्या आधारेच केवळ आणि तेही अतिशय स्थूलमानाने सोडविणे शक्य होते. सुदैवाने स्थापत्यातील बहुतांश समस्यांमध्ये द्विमिति-क्षरणाचाच संबंध येतो.

९०. **स्रावाचे प्रमाण :** मागील परिच्छेदात उल्लेखिलेल्या पद्धतींपैकी एकीचा अवलंब करून क्षरणजाल सिद्ध केल्यानंतर, डार्सीच्या नियमाच्या आधारे स्रावाचे प्रमाण ठरविता येते.

$$ग = झम \qquad ८८ (७)$$

येथे नेहमीप्रमाणे $ग$ हा स्राववेग, $झ$ हा पाझरगुणांक आणि $म$ हा जलीय प्रक्रम आहे. क्षरणजाल काढण्याची कृती सोपी होण्यासाठी ते असे काढावे की, शेजारी असणाऱ्या दोन क्षरणरेषांमध्ये होणारा संचितक्षय पुढे दिल्याप्रमाणे एकाच मूल्याचा असावा.

$$\Delta च = \frac{च_१}{ट} \qquad [१]$$

या समीकरणात $च_१$ हे एकूण संचित आहे आणि ट हा संचितक्षयाचे टप्पे दाखविणारा अंक आहे. त्याचे सोयीस्कर असे कोणतेही मूल्य घ्यावे. आ. ७३ अ काढतांना ट चे मूल्य १८ धरले होते. संचितक्षयाचे हे टप्पे क्रमशः १ ते १८ आकड्यांनी दाखविले आहेत.

क्षरणरेषा समसंचित रेषांना काटकोनात छेदतात. दोन क्षरणरेषांतील क्षेत्रास क्षरण-पात्र असे म्हणतात. जलबिंदू क्षरणरेषांनुसार वाहात असल्यामुळे प्रवेशस्थान आणि निर्गमनस्थान याशिवाय इतर ठिकाणी पाणी आतही येत नाही किंवा बाहेरही जात नाही. परंतु पात्राची रुंदी आणि तदनुषंगिक स्रावाचे प्रमाण या दोन गोष्टी पात्राच्या लांबीत स्थानागणिक भिन्न असतात.

एकमेकींशेजारी असणाऱ्या दोन समसंचित रेषांमध्ये पडणारा क्षरणपात्राचा भाग म्हणजे क्षरणजालातील क्षेत्र होय. पंधरा क्रमांकाच्या संचितक्षयाच्या विभागात असलेले एक क्षेत्र आकृतीत रेखांकित केले आहे. या क्षेत्राच्या दोन समसंचित रेषांतील अंतर $अ$ असेल, तर त्या क्षेत्रातील सरासरी जलीय प्रक्रम $म = \Delta च/अ$ होतो आणि त्यातून

एकांक काळात आणि क्षरणपात्राच्या एकांक रुंदीतून वाहणारे पाणी पुढील समीकरणाने मांडता येते.

$$झम = झ \frac{\Delta च}{अ}$$

क्षेत्राला सीमित करणाऱ्या क्षरणरेषांमधील अंतर ब (आकृतीत अ दाखविले आहे, त्याऐवजी) असेल, तर त्या क्षेत्रातून वाहणारे पाणी

$$ब . झम = झ \frac{\Delta च}{अ} . ब$$

इतके असेल.

वाहणाऱ्या पाण्याचा राशी क्षरणपात्राच्या लांबीमध्ये प्रत्येक ठिकाणी सारखाच असल्यामुळे ब/अ या गुणोत्तराचे मूल्यही स्थिर राहिले पाहिजे. स्रावाचे गणित सोपे होण्यासाठी क्षरणजाल अशा प्रकारे काढतात की, त्यातील क्षेत्रे चौरसाकृती व्हावीत. परिणामी ब/अ = १ होते. म्हणून प्रत्येक क्षरणपात्रातील स्राव पुढीलप्रमाणे होतो :

$$\Delta स्रा = झ \Delta च \frac{अ}{अ} = झ . \frac{च_1}{ट} \qquad [२]$$

एकंदर क्षरणपात्रे प असतील, तर एकूण स्राव पुढीलप्रमाणे मांडता येतो :

$$स्रा = झ \cdot च_1 \cdot \frac{प}{ट} \qquad [३]$$

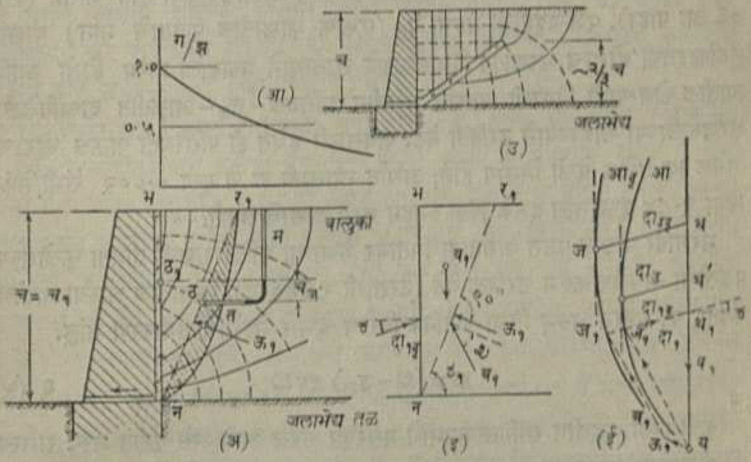
क्षरणजालातील क्षेत्रे चौरस असल्यामुळे पचे मूल्य ट वर अवलंबून राहते. आपण ट दुप्पट केला, तर प ही दुप्पट केला पाहिजे. आ. ७२ अ मध्ये प ची संख्या ९ आहे.

क्षरणभूमी विषमदैशिक असते, म्हणजेच थरपृष्ठांना समांतर दिशेतील पाझरगुणांक $झ_{स}$ आणि लंब दिशेतील $झ_{लं}$ असतो, तेव्हा रूपांतरित छेदाच्या साहाय्याने क्षरणजाल काढता येते हे आपण आ. ७५ मध्ये पाहिले (सामसियो १९३१). अशा उदाहरणात स्रावाचे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडले जाते :

$$स्रा = च_1 \cdot \frac{प}{ट} \cdot \sqrt{झ_{स} झ_{लं}} \qquad [४]$$

पुढील परिच्छेदांतून क्षरणाचा मृत्तिकादाबावर आणि उतार-स्थैर्यावर होणारा परिणाम दाखविणारी उदाहरणे दिलेली आहेत. सुबोधतेसाठी, ज्यांचे समाकर्षण नगण्य आहे अशा मृत्तिकांचीच उदाहरणे तेथे विचारात घेतली आहेत.

९१. आधारभिंतींवरील मृत्तिकादाबावर होणारा पर्जन्यवृष्टीचा परिणाम : आकृती ७६ अ मध्ये एका गुरुत्वाधारी आधारभिंतीचा छेद दाखविला आहे. भिंतीमागच्या भरणाचा तळ जलाभेद्य असून भिंत आणि भरण यांमध्ये भरड कणांचा एक विजालक घातलेला आहे. भिंतीच्या पायथ्याजवळील निस्सारण-छिद्रांशी हा विजालक जोडलेला आहे. पाऊस पडत असताना भरणाच्या पृष्ठभागावर पडणाऱ्या पाण्याचा काही अंश भरणात शिरतो आणि विजालकाकडे वाहत जातो. येथे भरणाचा पृष्ठभाग म्हणजे समसंचित रेषा ठरते आणि तळ ही क्षरणरेषा ठरते. भरण आणि विजालक यांमधील उभ्या स्पर्शपृष्ठावर प्रत्येक ठिकाणी उदासीन प्रतिबल शून्य असते. या सर्व जलीय लक्षणांना अनुसरून काढलेले क्षरणजाल आ. ७६ अ मध्ये दाखविले आहे.



आकृती ७६ : (अ, इ आणि ई) आधारभिंतीच्या पाठीशी भरड वाळूचा निस्सारणार्थी थर अस्तित्वात असेल, तर पर्जन्यवृष्टीच्या काळात भिंतीवर येणारा दाब ठरविण्याची आलेखात्मक कृती; (आ) पृष्ठभागाजवळचा स्राववेग आणि पाझरगुणांक यांमधील गुणोत्तराचे वितरण; (उ) पर्जन्यवृष्टीच्या काळात होणारी मृत्तिकादाबातील वाढ टाळण्यासाठी तिरक्या विजालकाची योजना.

एकांक काळात प्रत्येक क्षरणपात्रातून होणारा स्राव सारखाच असून त्याचा वेग पुढीलप्रमाणे असतो, हे मागील परिच्छेदात पाहिले आहेच.

$$ग = झम = झ.\ \frac{\Delta च}{अ}\ .$$

येथे Δच म्हणजे एका समसंचित रेषेपासून दुसरीपर्यंत घडून येणारा संचितक्षय आहे आणि अ ही क्षरणजालातील चौरसाची एक बाजू आहे. भ या बिंदूच्या (आ. ७६ अ) पुढून भरणात शिरणारे पावसाचे पाणी जवळजवळ अधोमुख दिशेने वाहते आणि भ पासून dl या अतिशय थोड्या अंतरावर पृष्ठभाग सोडते (हे आकृतीत दाखविलेले नाही). संचितक्षय dl आहे आणि पाण्याच्या प्रवासाचे अंतरही dl आहे; म्हणून म = १ होऊन स्राववेगाचे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडता येते :

$$ग_{०} = झम = झ$$

येथे झ हा भरणाचा पाझरगुणांक आहे. भ पासून उजवीकडे एकमेकींशेजारी असणाऱ्या दोन समसंचित रेषांमधील अंतर क्रमाने वाढत जाते, परंतु संचितक्षय तोच म्हणजे Δ च इतकाच राहतो. अर्थातच या परिस्थितीत स्राववेग उजवीकडे कमी होत जातो (आ. ७६ आ पाहा). पर्जन्यवृष्टीची महत्ता $ग_{वृ}$ (एकांक काळातील पावसाचे मान) पाझर-गुणांकाइतकी होताच भरणातून विजालकाकडे सातत्याने प्रवाहाला प्रारंभ होतो आणि त्यातील कोणत्याही ठिकाणी असणारे उदासीन प्रतिबल – $उ_{ज}$ – आकृतीत दाखविलेल्या क्षरणजालाच्या साहाय्याने ठरविता येते. पावसाळी हवेत ही परिस्थिती पाऊस जोराचा असेल त्या प्रत्येक वेळी निर्माण होते; अर्थात त्यासाठी झ चे मूल्य ०·००२ सेंमी/सेकंद किंवा २·८४ इंच/तास इतके किंवा त्याहून कमी असावे लागते.

भरणावर पाऊस पडत असताना भिंतीवर येणाऱ्या मृत्तिकादाबाची तीव्रता कूलोमच्या पद्धतीचा अवलंब करून ठरविता येते (टेरझागी १९३६ ड). भरणातील ओल्या मातीची घनता, घ, गृहीत धरून तिचा कार्तनिक विरोध देणारे नेहमीचे समीकरण मांडू.

$$क = (ऍ - उ_{ज})\ स्प \phi \qquad ६\ (५)$$

कूलोमच्या पद्धतीत सांगितल्याप्रमाणे घसरपृष्ठ सरळ आहे असे गृहीत धरू. समस्या सोडविण्याचा प्रारंभ म्हणून आपण भरणाच्या पायथ्यातून जाणारे $नर_{१}$ (आ. ७६ अ आणि इ) हे कोणतेही एक घसरपृष्ठ विचारात घेऊ. या पृष्ठावरील मृत्तिकाखंडाचे वजन $व_{१}$ आहे आणि त्यावर कारक असणारी इतर बले अशी आहेत : $ऊ_{१}$ हा जलदाब – $नर_{१}$ पृष्ठाला लंबरूप; $ब_{१}$ ही प्रतिक्रिया – $नर_{१}$ वरील लंबाशी ϕ कोन करणारी; $दा_{१वृ}$ हा भिंतीवरील दाब – लंबाशी δ कोन करणारा.

$ऊ_{१}$ म्हणजे $नर_{१}$ या पृष्ठावरील $उ_{ज}$ या उदासीन प्रतिबलांचे फलरूप बल आहे. उदासीन प्रतिबलविषयक समी. ६ (१) प्रमाणे

$$उ_{ज} = ^{घज}\ च_{ज}$$

आहे. या उदाहरणात $च_{ज}$ म्हणजे ठ या कोणत्याही बिंदूचे स्थान आणि त्यातून जाणारी समसंचित रेषा, विजालकाच्या उभ्या पृष्ठास मिळते, ते $ठ_{१}$ हे स्थान यांच्या

उंचीतील फरक आहे. $र_1न$ वरील प्रत्येक ठिकाणाचे उदासीन प्रतिबल त्या पृष्ठाला काटकोनात स्थित केले असता $नतर_1$ ही जलदाबरेषा मिळते. $नतर_1$ या क्षेत्राने हे उदासीन बल दाखविले जाते आणि त्याची दिशा या दाबक्षेत्राच्या गुरुत्वमध्यातून जाते.

$ब_1$ (आ. ७६ इ) ही प्रतिक्रिया म्हणजे $नर_1$ वरील कार्यसाधक प्रतिबलांचे फलरूप बल आहे; म्हणून ती त्या पृष्ठावरील लंबाशी ॐ कोन करते. $भनर_1$ हा खंड समतोल अवस्थेत आहे, त्याअर्थी तदनुषंगिक बलप्रतिमा बंदमुखी असली पाहिजे. हे लक्षण आणि $ब_1$ आणि $दा_{1वृ}$ या अज्ञात मूल्यांच्या बलांच्या ज्ञात दिशा यांच्या साहाय्याने $नर_1$ वरून होणारी घसरण (आ. ७६ अ) रोखण्यास आवश्यक असणाऱ्या दाबाचे मूल्य $दा_{1वृ}=थ_1ज_1$ (आ. ७६ ई) असे ठरते. पाऊस थांबल्यानंतर हे उदासीन बल लगेच कमी होते आणि शेवटी केशाकर्षणामुळे (प्रकरण १५ पाहा) ऋण होते. केशाकर्षणजन्य बले आणि अंशतः झालेल्या निस्सारणामुळे घनतेत होणारी घट या दोन्ही गोष्टी दुर्लक्षिल्या, तर $नर_1$ वरून होणाऱ्या घसरणीस प्रतिबंध करण्यास आवश्यक असणारा पार्श्वीय दाब $दा_1=\overline{थ_1ज'_1}$ (आ. ७६ ई) होतो.

$नर_1$ सारख्याच स्वेच्छया घेतलेल्या $नर_2$, $नर_3$ इ. अन्य छेदांसाठी (आकृतीत दाखविलेले नाहीत) याच कृतीची पुनरावृत्ती करून खऱ्या घसरपृष्ठाचे स्थान निश्चित करता येते. अशा छेदांची $व_2$, $व_3$ ही वजने आ. ७६ ई मध्ये $य$ पासून वरच्या बाजूस स्थित करून शेवटी या कृतीतून प्राप्त होणारे $ज_2$,$ज_3$ इ. बिंदू (आकृतीत न दाखविलेले) $आ_{वृ}$ या आलेखावर स्थित असतात. या वक्र रेषेस $यथ$ ला समांतर स्पर्शरेषा काढल्यास ज बिंदू मिळतो. $थज$ हे अंतर म्हणजे पर्जन्यकालातील उद्युक्त मृत्तिकादाब $दा_{उवृ}$ होय. त्याचा कारकबिंदू भरणाच्या तळापासून च/३ पेक्षा थोड्या अधिक उंचीवर स्थित असतो. पावसानंतरचा $दा_उ$ हा उद्युक्त मृत्तिकादाब आ. ७६ ई मध्ये दाखविल्या-प्रमाणे कुलमानप्रणीत कृतीने ठरविता येतो (परि. २४ पाहा). या सर्व कृतीतून निष्पन्न होणाऱ्या फलितांनुसार असे दिसते की, भिंतीमागील निस्सारण-व्यवस्था कितीही कार्यक्षम असली, तरीही पार्श्वीय दाबाच्या तीव्रतेवर होणारा पर्जन्यवृष्टीचा परिणाम फार महत्त्वाचा असतो. संभाव्य घसरपृष्ठाचा उतारकोन पर्जन्यवृष्टीमुळे कमी होतो, असेही आढळून आले आहे. जर $घ=११५$ पौं./घ.फू., $ॐ=३८^\circ$, $ठ=१५^\circ$ आणि $च=१४$ फू. असेल, तर पुढीलप्रमाणे उत्तरे मिळतात :

पावसापूर्वी : $दा_उ=३{\cdot}६$ टन/चौ.फू. $ठ=६२^\circ$

पावसात : $दा_उ=४{\cdot}८$ टन/चौ.फू. $ठ=५४^\circ-३०'$

आधारभिंतींच्या पूर्वकल्पविषयक रूढ पद्धतींमध्ये पर्जन्यवृष्टीचा मृत्तिकादाबावरील परिणाम दुर्लक्षिला जातो. खरे पाहता, वरील आकड्यांनी दाखविल्याप्रमाणे पावसामुळे मृत्तिकादाब ३३% इतका वाढू शकतो. तेव्हा आधारभिंतींचे उच्छेद मुसळधार

पावसाच्या काळातच साधारणतः घडून येतात, यात काही आश्चर्य नाही. असे उच्छेद भिंतींमागील अपुऱ्या निस्सारण-व्यवस्थेमुळेच केवळ घडतात, या प्रचलित मतातील चूकही या विवेचनावरून दिसून येते.

पर्जन्यवृष्टीचा मृत्तिकादाबावर होणारा परिणाम समसंचित रेषांच्या वक्रतेमुळे होतो, हे आ. ७६ अ वरून दिसून आले. या वक्रतेमुळेच भिंतीच्या पायथ्यातून जाणाऱ्या संभाव्य घसरपृष्ठावर पाण्याचा दाब निर्माण होतो. आ० ७६ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे विजालक तिरपा असेल, तर घसरू पाहणाऱ्या खंडातील सर्व समसंचित रेषा आडव्या होतात. त्यामुळे जलदाब वगळला जाऊन पर्जन्यकाळातील मृत्तिकादाब रूढ पद्धतींचा अवलंब करून मिळणाऱ्या दाबाइतकाच होतो.

९२. पर्जन्यवृष्टी आणि भरती-ओहोटी यांचा कीलकबद्ध फलकभिंतींच्या स्थैर्यावर होणारा परिणाम : प्रकरण ११ मध्ये वर्णिलेल्या कीलकबद्ध फलक-भिंतींचे पूर्वकल्प करण्याच्या पद्धती, मृत्तिकेचा कार्तनिक विरोध

$$क = ए\, स्प\, ळ$$

या समीकरणाने ठरविता येतो, या गृहीतावर आधारलेल्या आहेत. ए हे संभाव्य घसरपृष्ठावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगावयाचे तर उदासीन प्रतिबले क्षुल्लक असतात असे तेथे गृहीत धरले होते. एकमेकींशेजारच्या फलकस्थूणां-मध्ये राहून गेलेल्या फटींमुळे किंवा अशाच अन्य कारणांमुळे फलकभिंतीतून पाणी झिरपू शकले, तर तिच्या वरच्या भागावर येणारा उपुक्त मृत्तिकादाब पावसामुळे वाढण्याचा संभव असतो; परंतु तळाकडच्या भागाला आधार देणाऱ्या मृत्तिकेचा प्रतियोगी विरोध मात्र अशा वेळी कमी होत नाही. याउलट, स्थूणांमधील फटी गाळाने भरल्यामुळे किंवा स्थूणा प्रबलित कॉंक्रीटच्या असून त्यांतील फटींमध्ये सूचिकाभरणाने सीमेंट भरल्यामुळे, फलकभिंत व्यवहारतः जलाभेद्य आहे असे मानता येत असेल, तर भरणातील पावसाचे पाणी स्थूणांच्या खालून वाहात जाऊन तळाकडील आधार देणाऱ्या भूमीमध्ये शिरते. आकृती ७७ अ मध्ये असे एक उदाहरण दाखविले आहे. तेथे जलाभेद्य तळावरील बारीक वाळूच्या थरात फलकस्थूणा ठोकलेल्या आहेत. स्थूणांची टोके जलाभेद्य तळापर्यंत गेलेली नाहीत. पावसापूर्वी भूमिगत जलपातळी *तस* आहे. पर्जन्यकाळातील परिस्थिती क्षरणजाल काढून दाखविली आहे. हे क्षरणजाल काढताना नैसर्गिक थराची आणि भरणाची पाझरक्षमता सारखीच असून फलकभिंत पूर्णपणे जलाभेद्य आहे असे गृहीत धरले आहे.

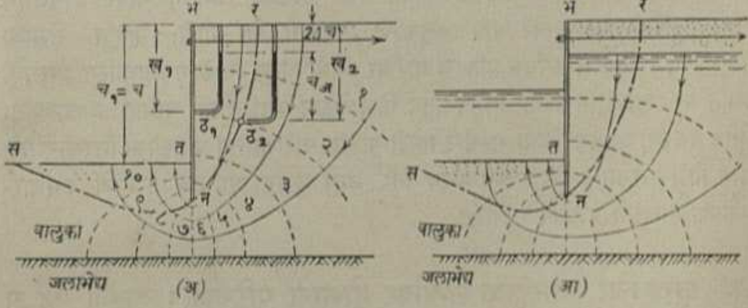
वालुकेच्या कार्तनिक विरोधाचे नेहमीचे समीकरण खाली मांडले आहे.

$$क = (ए - उ_{ज})\, स्प\, ळ \qquad ६\ (५)$$

$उ_ज$ या उदासीन प्रतिबलाची मूल्ये क्षरणजालावरून मिळतात. तद्विषयक कृती मागील परिच्छेदात विशद केली आहेच. उदासीन प्रतिबलांमुळे फलकभिंतीच्या वरच्या भागावर येणारा मृत्तिकादाब वाढतो आणि खालच्या भागावरील पार्श्वीय विरोध कमी होतो. प्रत्येक ठिकाणी $उ_ज = घ_ज\ च_ज$ असते. या पद्धतीचा वापर कसा करतात, हे पाहण्यासाठी क्रमांक २ च्या समसंचितरेषेवरील $ठ_1$ आणि $ठ_2$ (आ. ७७ अ) येथील उदासीन प्रतिबले ठरवू. प्रवेशपृष्ठ आणि निर्गमनपृष्ठ यांतील संचितक्षयाचे एकूण टप्पे $ट = १०$ आहेत; म्हणून एका समसंचितरेषेपासून दुसरीपर्यंत होणाऱ्या प्रवाहात घडून येणारा संचितक्षय या उदाहरणात पुढीलप्रमाणे आहे.

$$\Delta च = \frac{च_1}{ट} = \frac{च_1}{१०} = \frac{च}{१०}$$

त्याचप्रमाणे पृष्ठभाग आणि $ठ_1 ठ_2$ ही रेषा यांतील संचितक्षय $२\Delta च$ आहे; म्हणून $ठ_1$ येथील उदासीन प्रतिबल $= घ_ज\ (ख_1 - २\Delta च)$ आहे आणि $ठ_2$ येथील $घ_ज\ (ख_2 - २\Delta च)$ आहे. या पद्धतीने वालुकेतील कोणत्याही छेदावरील – उदा., नर आणि नस



आकृती ७७ : (अ) जलाभेद्य फलकभिंतीमागील बारीक वाळूच्या भरणातील पर्जन्यकालीन क्षरण; *तस* ही भूजलपातळी आहे, (आ) समुद्रतटावरील फलकभिंतीच्या मागील वाळूतील ओहोटीच्या वेळेचे क्षरण.

(आ. ७७ अ) या संभाव्य घसरपृष्ठांवरील – उदासीन प्रतिबले आपण ठरवू शकू. पूर्वीच सांगितल्याप्रमाणे ही प्रतिबले भिंतीच्या वरच्या भागावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब वाढवितात आणि खालच्या भागावरील प्रतियोगी दाबजन्य विरोध कमी करतात. या दोन्ही घटनांची प्रवृत्ती फलकभिंतीचा सुरक्षिततांक कमी करण्याकडे आहे. प्रकरण ११ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींपैकी एकीला, मागील परिच्छेदात विशद केलेल्या पद्धतीची जोड देऊन हा सुरक्षिततांक ठरविता येतो.

भरती-ओहोटीचे फरक जेथे मोठ्या प्रमाणावर घडून येतात, अशा समुद्राच्या काठी बांधलेल्या जलाभेद्य फलकभिंतीचा छेद आ. ७७ आ मध्ये दाखविला आहे. तेथील मृत्तिकाविषयक परिस्थिती आ. ७७ अ प्रमाणेच आहे, असे गृहीत धरले आहे. भरतीच्या काळात स्थूणांची खालची कड आणि जलाभेद्य तळ यांमधील भूमीतून समुद्राचे पाणी भरणामध्ये शिरते. या क्षरणामुळे स्थूणांच्या खालच्या भागावरील प्रतियोगी दाबजन्य विरोध वाढतो आणि त्याचबरोबर सुरक्षिततांकही वाढतो. तथापि ओहोटीच्या काळात आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे याच्या उलट क्रिया घडतात. फलकभिंतीच्या वरच्या भागावर येणारा उद्युक्त मृत्तिकादाब वाढतो आणि खालच्या भागावरील विरोध कमी होतो.

फलकभिंतींच्या सुरक्षिततांकावर उपर्युक्त घडामोडींचा असा निर्णायक प्रभाव पडत असल्यामुळे, अशा भिंतीच्या तळाकडील भागाला आधार देणाऱ्या वाळूकडे, भिंती-मागच्या भरणाकडून येणाऱ्या अल्पकालीन जलप्रवाहाची संभाव्य उगमस्थाने आणि त्यांचे बलात्मक परिणाम, यांचा शोध आणि विश्लेषण अगोदर केल्याविना कोणत्याही फलकभिंतीचा पूर्वकल्प तयार करू नये. फलकभिंतीच्या बाबतीतील क्षरणजाल बऱ्याच अंशी नैसर्गिक निक्षेपातील स्तररचनेचा तपशील, तसेच त्या निक्षेपाचा सरासरी पाझर-गुणांक व भरणाचा पाझरगुणांक यांचे परस्परांशी असणारे प्रमाण, यांवर अवलंबून असते. यांपैकी कोणतीही बाब अचूकपणे ठरविता येत नाही; म्हणून संभाव्य असणाऱ्या, अधिकात अधिक प्रतिकूल गोष्टींवर स्थैर्यविषयक विश्लेषण आधारित असावे. अर्थात या गोष्टी मृत्तिकेच्या अन्वेषणातून मिळालेल्या माहितीशी सुसंगत असाव्यात. बहुतेक प्रकरणी पाऊस किंवा भरती-ओहोटी यांच्या परिणामांचा घातकपणा निस्सारणाचे उपाय योजून बऱ्याच अंशी कमी करता येतो. असे उपाय आ. ७६ उ मध्ये आधार-भिंतीच्या बाबतीत दाखविले आहेत.

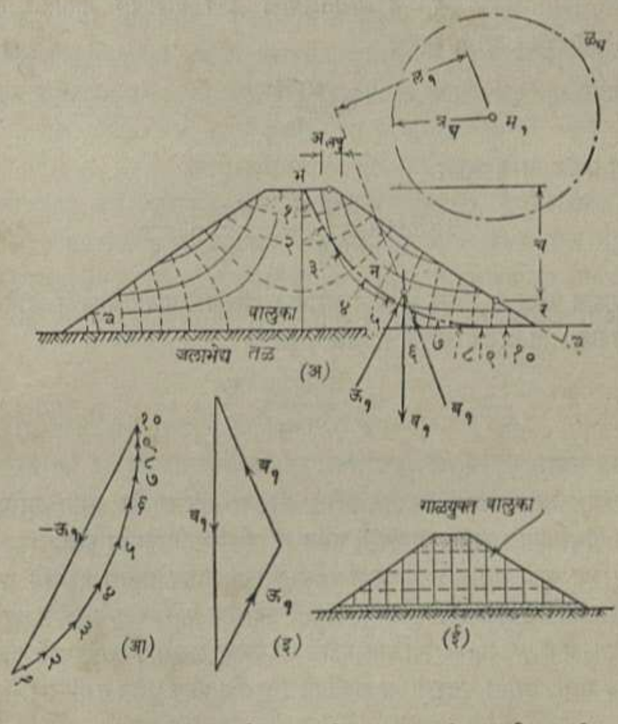
९३. क्षरणाचा उतारांच्या स्थैर्यावर होणारा परिणाम : आकृती ७८ अ मध्ये एका एकविभागी भरावाचा छेद दाखविला आहे. भरावाची बैठक व्यवहारतः जलाभेद्य मानता येईल अशा थरावर आहे. भरावासाठी वापरलेली मृत्तिका बारीक कणयुक्त असून तिचे समाकर्षण क्षुल्लक आहे. म्हणून वालुका समजून तिचा कार्तनिक विरोध

$$क = (ए - उ_{ज})\,स्प\,\phi \qquad ६\,(५)$$

असा मांडता येईल. नेहमीप्रमाणे ए हे संभाव्य घसरपृष्ठावरील लंबदिक् प्रतिबल असून $उ_{ज}$ हे उदासीन प्रतिबल आहे. सूक्ष्मकण-मृत्तिका दीर्घ काळ संपृक्त राहतात त्यामुळे आर्द्र घनता व्यवहारतः स्थिरमूल्य आहे असे मानता येते. उन्हाळ्यात रंध्रांतील पाणी केशाकर्षणामुळे धरून ठेवले जाते त्यामुळे त्यावेळी उदासीन प्रतिबले ऋण

असतात (प्रकरण १४ पाहा). $उ_{ज}$ शून्य असताना मिळणाऱ्या सुरक्षिततांकापेक्षा ऋण असतांना मिळणारा सुरक्षिततांक अधिकच असल्यामुळे उन्हाळयातील उदासीन प्रतिबलांचा विचार पुढील विश्लेषणात केला जाणार नाही.

मोठ्या पावसाच्या वेळी काही पाणी भरावाच्या माथ्यातून आणि उताराच्या वरच्या भागातून प्रवेश करते आणि खालच्या भागातून बाहेर पडते. उरलेले पाणी उताराच्या पृष्ठावरून वाहत जाते. आ. ७८ अ मध्ये दाखविलेले त्यावेळेचे क्षरणजाल काढण्यासाठी पुढील जलीय सीमालक्षणांचा उपयोग केला आहे. भरावाची बैठक दाखविणारी रेषा आणि त्याचे सममात्रत्व स्पष्ट करणारी मध्यरेषा या क्षरणरेषा आहेत; माथ्याची रेषा ही समसंचित रेषा आहे आणि उतारावरील कोणत्याही ठिकाणी उदासीन प्रतिबल शून्य आहे.



आकृती ७८ : (अ) सूक्ष्मकण वालुकेत बांधलेल्या भरावातील पर्जन्यकालीन क्षरण, (आ आणि इ) घर्षणवर्तुळ पद्धतीने स्थैर्याचे गणित मांडण्यासाठी आवश्यक असलेले बलांचे बहुकोन; (ई) भरावाच्या तळावर भरड वाळूचा विजालक वापरून पर्जन्यकालीन उच्छेदास प्रतिबंध करण्याची पद्धत.

भरावातून पाण्याचा पाझर सतत राहण्यासाठी पर्जन्याची तीव्रता $ग_{वृ}$ (एकांक क्षेत्रावर, एकांक कालात पडणारा पाऊस) क्षरणजालाने निश्चित होणारा संतत-प्रवाह टिकविण्यास पुरेशी हवी. क्षरणजालातील प्रत्येक क्षरणपात्रातून वाहणारे पाणी ($\Delta त्रा$) सारखेच असते (परि० ९० पाहा); म्हणून ज्या क्षरणपात्राची रुंदी पाऊस पडणाऱ्या पृष्ठाजवळ लघुतम असेल, त्यातून आत शिरणाऱ्या पाण्याचे प्रमाण (दर एकांक क्षेत्री व एकांक काळात) महत्तम असेल हे स्पष्ट आहे. अशी परिस्थिती भरावाच्या माथ्याच्या कडांजवळ असते. तेथे दोन क्षरणरेषांमधील अंतर लघुतम ($अ_{लघु}$) असते. या क्षरणपात्रातील एकूण संचित-क्षय च आहे (आ० ७८ अ पाहा) आणि प्रत्येक टप्प्यातील संचितक्षय

$$\Delta च = \frac{च}{ट} \qquad ९० (१)$$

आहे, असे गृहीत धरू. येथे ट ने संचितक्षयाचे टप्पे दाखविले जातात. पात्राच्या प्रवेशाची रुंदी $अ_{लघु}$ आहे; म्हणून

$$म = \frac{\Delta च}{अ_{लघु}}$$

हा जलीय प्रक्रम आहे आणि

$$ग = मझ = झ\frac{\Delta च}{अ_{लघु}} = \frac{झ}{अ_{लघु}} \cdot \frac{च}{ट}$$

म्हणजे एकांक काळात, एकांक क्षेत्रातून भरावात शिरणारे पावसाचे पाणी आहे.

हा प्रवाह सातत्याने टिकावयाचा असेल, तर

$$ग_{वृ} \geqq \frac{झ}{अ_{लघु}} \cdot \frac{च}{ट} \qquad [१]$$

असावयास हवा.

अति बारीक वालुकेच्या पाझरगुणांकापेक्षा ज्यांचा पाझरगुणांक कमी आहे, अशा मृत्तिकांत बांधलेल्या भरावांत पावसाळी हवेत ही परिस्थिती निर्माण होते.

उताराच्या सुरक्षिततांकावर पडणारा पर्जन्यवृष्टीचा प्रभाव प्रकरण ९ मध्ये वर्णिलेल्या घर्षणवर्तुळ पद्धतीने ठरविता येतो. पावसापूर्वी उदासीन प्रतिबल शून्य गृहीत धरले जाते. समाकर्षण क्षुल्लक असल्यामुळे त्या अवस्थेतील लक्ष्मणवर्तुळ आणि उताररेषा एकच होतात (परि. ६० पाहा) आणि घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक पुढील समीकरणाने मिळतो.

$$सु = \frac{स्प\, ळ}{स्प\, ऊ}$$

येथे ऊ हा उतारकोन आहे (आ. ७८ अ).

पर्जन्यकाळात लक्ष्मणवर्तुळाची त्रिज्या निश्चित मूल्याची होते आणि त्याचे उताराच्या संदर्भातील स्थान प्रयत्नांती मिळते. प्रारंभ म्हणून भराबाच्या दृढ तळास स्पर्श करणारे एक वर्तुळ (आ. ७८ अ) आपण विचारार्थ घेऊ. त्याचा केंद्रबिंदू $म_1$ आहे आणि तदनुषंगिक $ळ_घ$ या घर्षणवर्तुळाची त्रिज्या $त्र_घ$ आहे. *भनर* हे तात्पुरते गृहीत धरलेले घसरपृष्ठ आहे. त्यावरील उदासीन प्रतिबले नेहमीप्रमाणे

$$उ_ज = प_ज \; च_ज \qquad ६ (१)$$

या समीकरणाने मिळतील. *भनर* वरील उदासीन प्रतिबलांचे $ऊ_1$ हे फलरूप बल बल-प्रतिमेच्या साहाय्याने ठरविता येते (आ. ७८ आ पाहा). तेथील $ऊ_1$ला समांतर रेषा काढून मिळणारी त्याची कारक दिशा वर्तुळाच्या $म_1$ या केंद्रातून जाते. मृत्तिकाखंडाचे $व_1$ हे आर्द्र वजन $ऊ_1$ आणि $ष_1$ या दोन बलांनी पेलले जाते (आ. ७८ इ पाहा). त्यांपैकी $ऊ_1$ हे बल ज्ञात आहे. सुरवातीस सांगितल्याप्रमाणे हे बल म्हणजे *भनर* वर कारक असणाऱ्या उदासीन दाबांचा फलरूप दाब आहे. $ष_1$ हे दुसरे बल म्हणजे त्याच पृष्ठावरील कार्यसाधक प्रतिबलांचे फलरूप बल आहे. $ऊ_1$ आणि $व_1$ या बलांच्या छेदन-बिंदूतून ते गेले पाहिजे. $ष_1$ दाखविणारी रेषा लांबविली असता, तिचे $म_1$ पासून मोजलेले अंतर $ल_1$ आहे. उतारामध्ये घसरण होण्याची प्रवृत्ती, $ल_1$ चे मूल्य वाढेल त्याप्रमाणे वाढत जाते. म्हणून $त्र_घ / ल_1$ हे गुणोत्तर उताराच्या स्थैर्याचे गमक समजता येईल. $ल_1 = त्र_घ$ असेल, तर $ष_1$ ची दिशा घर्षणवर्तुळास स्पर्शरेषेप्रमाणे होते आणि त्यावेळी सुरक्षिततांक $त्र_घ / ल_1 = १$ होतो. $ल_1 = ०$ असल्यास, सुरक्षिततांक अनंत मूल्याचा होईल. *भनर* वरील घसरणीचा पर्जन्यकाळातील सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$सु_वृ = \frac{त्र_घ}{ल_1}$$

आकृती ७८ अ मध्ये दाखविलेल्या उदाहरणात $सु_वृ$ चे मूल्य एकापेक्षा कमी आहे; परंतु *भनर* हे पृष्ठ लक्ष्मणवर्तुळच असेल, असे मात्र नव्हे. त्यामुळे क्षरणजालाने दाखविलेली संतत प्रवाहाची अवस्था, पर्जन्यवृष्टीने प्रस्थापित करण्यापूर्वीच घसरण होण्याचा संभव आहे. याउलट, $सु_वृ$ चे मूल्य एकाहून अधिक आढळल्यास, आणखी वर्तुळे काढून या कृतीची पुनरावृत्ती केली पाहिजे व लक्ष्मणवर्तुळाचे स्थान पुढील लक्षणाची पूर्ती करून ठरविले पाहिजे.

$$सु_वृ = \frac{त्र_घ}{ल_1} = \text{लघुतम मूल्य}$$

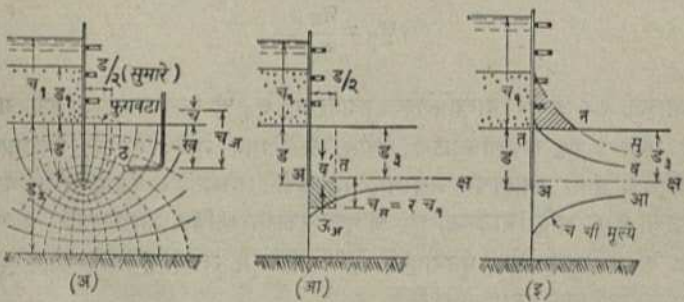
भराबाच्या तळाशी आपण भरड कणांचा विजालक घातला, तर सर्व समसंचित रेषा क्षितिजसमांतर होतात आणि क्षरणरेषा उभ्या होतात (आ. ७८ ई पाहा). परिणामी

भरावात सर्व ठिकाणी उदासीन प्रतिबल शून्य होते आणि पर्जन्यवृष्टीमुळे उताराचे स्थैर्य कमी होण्याला प्रतिबंध होतो. त्यामुळे अशा विजालकाची योजना म्हणजे रस्त्यांच्या किंवा लोहमार्गांच्या भरावांचे स्थैर्य वाढविण्याचा सोपा आणि स्वस्त उपाय ठरतो.

आकृती ७८ अ मध्ये दाखविलेली आलेखात्मक कृती कोणताही फरक न करता, ज्यातून तलावातील पाणी झिरपत आहे, अशा मातीच्या धरणाचा (आ. ७४ उ) सुरक्षिततांक ठरविण्यासाठी वापरता येते. क्षरणजाल सिद्ध केले की, ऊ, हे उदासीन प्रतिबल त्याच्या साहाय्याने ठरविता येते आणि संभाव्य घसरपृष्ठावरील मृत्तिकेच्या व, या वजनाबरोबर त्याचा विचार करता येतो.

भरावाच्या प्रतिबल-परिस्थितीत होणाऱ्या बदलांगणिक मृत्तिकेतील ओलाव्यात तात्काळ फरक पडतो, या गृहीतावर उपरोक्त पद्धत आधारलेली आहे; म्हणून ती, दमनीय व अल्प पाझरक्षमतेच्या मृत्तिकांत—उदा., चिकण मातीत—बांधलेल्या भरावाला किंवा धरणाला लागू करता येत नाही.

९४. बिलक्रियेचे स्वरूप आणि तदनुषंगिक लक्ष्मण-संचित : आकृती ७९ अ मध्ये एका एकेरी भिंतीच्या कुंडन-बांधाचा छेद दाखविला आहे. फलकस्थूणांच्या एका रांगेला तीर आणि धीरे यांच्याद्वारे पार्श्वीय आधार देऊन ही भिंत बांधलेली आहे. आधारभूमीमध्ये ड, जाडीचा एक भरड वाळूचा थर आणि ड₂ जाडीचा बारीक वाळूचा थर आहे. ही वाळू समांग आणि दृढ आहे. वरच्या थराचा पाझरगुणांक खालच्या थराच्या पाझरगुणांकाच्या मानाने फार मोठा आहे. फलकस्थूणांची खालची कड दुसऱ्या थरामध्ये ड खोलीपर्यंत गेलेली आहे. फलकस्थूणा ठोकून झाल्यानंतर कुंडनबांधाच्या



आकृती ७९ : समांग वाळूचा बिलक्रियेच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक ठरविण्याची आलेखात्मक पद्धत. एकभिंत कुंडनबांधाने सीमित केलेल्या खड्ड्यातून पाणी उपसले असता, बिलक्रियेचा धोका निर्माण होतो. (अ) क्षरणजाल; (आ) जेथे फुगवट्याचा संभव आहे, अशा भागातील वाळूवर कारक असणारी उदासीन आणि कार्यसाधक बले; (इ) सुरक्षिततेचे विवक्षित प्रमाण टिकविण्यासाठी आवश्यक असणारा भार ठरविण्याची पद्धत.

आतल्या बाजूस असलेल्या भरड वाळूचा थर काढून टाकला आहे. त्याचप्रमाणे तेथील पाणी उपसून टाकले आहे. बाहेरील बाजूस पाण्याची पातळी पूर्वीइतकीच आहे. त्यामुळे आतले पाणी उपसून टाकण्याचे काम चालू असताना बाहेरच्या बाजूने आत पाणी येत राहते. वरचा थर अतिशय पाझरक्षम असल्यामुळे त्याचा अडथळा होत नाही. पाण्याचे हे क्षरण स्थूलमानाने द्विमितीतील आहे, असे गृहीत धरून आ. ७९ अ मधील क्षरणजाल काढले आहे.

प्रारूप प्रयोगांवरून आपल्याला हे माहीत आहे की, वेगसंचिताचे $च_१$ हे मूल्य एका विवक्षित लक्ष्मणमूल्याहून कमी असेल, तरच फलकस्थूणांच्या सान्निध्यातील वाळू समतोल अवस्थेत राहते (टेरझागी १९२२). तथापि, संचित या लक्ष्मणसंचिताजवळ आले की, संचितात ज्या मानाने वाढ होते, त्याहून अधिक शीघ्रतेने स्रावात वाढ होते. याचा अर्थ असा करावा लागतो की, त्यावेळी वाळूच्या सरासरी पाझरगुणांकामध्ये वाढ होत असावी. त्याच वेळी सुमारे ड/२ इतक्या रुंदीच्या पट्टयामध्ये वाळूचा पृष्ठभाग फुगून वर येतो (आ. ७९ अ पाहा); आणि शेवटी वाळू आणि पाणी यांचे मिश्रण बाहेर पडते. या घटनेला **बिलक्रिया** असे म्हणतात आणि त्यावेळचे संचित म्हणजे **लक्ष्मणसंचित** $च_{बि}$ होय. पायातील बिलक्रियेमुळे कुंडनबांधाचा उच्छेद होण्याचा संभव असतो. आकृती ७९ अ मध्ये दाखविलेल्या कुंडनबांधाचा बिलक्रियेच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक आपणांस आता ठरवावयाचा आहे. पाण्याची बाहेरची पातळी आणि आतली पातळी यांमधील फरक $च_१$ आहे.

वर सांगितल्याप्रमाणे, फलकस्थूणांचा पुरलेला भाग आणि त्याच्या प्रवाहदिशेकडील सुमारे ड/२ इतके अंतर, या भागातील वाळू फुगून बिलक्रियेला प्रारंभ होतो. फुगवट्याच्या मागोमाग त्यातून वाळू बाहेर ढकलली जाते. वाळूच्या वजनावर जलदाबाने मात केल्याशिवाय अशी घटना घडणे शक्य नाही. या उचलल्या गेलेल्या वालुकाखंडाचा आकार समपार्श्वासारखा आहे; त्याची रुंदी ड/२ आहे आणि त्याचा आडवा तळ पृष्ठभागापासून ड/१ खोलीवर आहे, असे आपण गृहीत धरले, तर फारशी चूक होत नाही. स्वतःचे वजन आणि उभ्या बाजूंवरील घर्षण यांमुळे हा खंड उचलण्याच्या क्रियेला विरोध होतो. उच्छेदक्षणी या समपार्श्वाच्या बाजूंवरील कार्यसाधक आडवा दाब आणि तदनुषंगिक घर्षणजन्य विरोध व्यवहारतः शून्य असतात; म्हणून जलदाब त्याच्या आर्द्र घनतेइतका होताच हा समपार्श्व उचलला जातो. त्यावेळचे संचित म्हणजे लक्ष्मणसंचित $च_{बि}$ होय. हे मूल्य लघुतम असले पाहिजे, या लक्षणाची पूर्ती करून या समपार्श्वाच्या तळाचे स्थान ठरविता येते. कारण समपार्श्वाचा तळ कोणत्या का ठिकाणी असेना, ज्या क्षणी तो जलदाबामुळे उचलण्यास प्रारंभ होतो त्याच क्षणी बिलक्रिया घडलेली असते. आ. ७९ आ मध्ये हा तळ $ड_३$ खोलीवर दाखविला आहे.

समपार्श्वाच्या तळावरील जलदाब ठरविण्यासाठी ठ या बिंदूची प्रतिबल-परिस्थिती आपण प्रथम विचारात घेऊ. नेहमीप्रमाणे उदासीन प्रतिबल $= घ_{ज}\ च_{ज}$ असे मांडता

येईल. $च_ज$ या उंचीचे ख आणि च असे दोन भाग करता येतील आणि म्हणून ठ या बिंदुस्थानाचे उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$उ_ज = खघ_ज + चघ_ज \quad [१]$$

$खघ_ज$ हा पहिला भाग म्हणजे पाण्याचे उद्धरण आहे (परि. ८). त्याचा बलात्मक परिणाम म्हणून वाळूची घनता घ ऐवजी घ' (निमज्जित घनता) होते. $चघ_ज$ हा दुसरा भाग म्हणजे प्रवाहदिशेकडील मुक्त जलपातळीच्या संदर्भातील अतिरिक्त दाब आहे आणि च म्हणजे त्या पातळीपासून वर मोजलेले संचित आहे. म्हणून आ. ७९ आ मधील वाळूचा समपार्श्व उचलला जाण्याचे लक्षण असे सांगता येईल की, समपार्श्वाच्या तळावरील एकूण अतिरिक्त जलदाब त्याच्या निमज्जित वजनापेक्षा म्हणजेच $\frac{१}{२}$ $डड_३घ'$ पेक्षा जास्त असला पाहिजे.

ज्या विभागातून पाणी झिरपत असते, त्यातील कोणत्याही ठिकाणाचा अतिरिक्त जलदाब क्षरणजालाच्या साहाय्याने ठरविता येतो. क्षरणजालाच्या सिद्धांतानुसार (परि. ८९) एका समसंचितरेषेपासून दुसऱ्या तशाच रेषेपर्यंत होणारा संचितक्षय पुढीलप्रमाणे असतो.

$$\Delta च = \frac{च_१}{ट}$$

येथे ट ही क्षरणपात्रातील एकूण क्षेत्रांची संख्या आहे. म्हणून ठ (आ. ७९ अ) येथील संचित खालीलप्रमाणे आहे.

$$च = ट_१ \cdot \Delta च = \frac{ट_१}{ट} च \quad [२]$$

येथे $ट_१$ म्हणजे एकूण ट क्षेत्रांपैकी, ठ आणि स्रावाचा निर्गमनबिंदू यांमधील क्षेत्रांची संख्या आहे. या समीकरणाच्या साहाय्याने आ. ७९ आ मधील समपार्श्वाच्या तळावर असणारे संचिताचे वितरण ठरविता येते. आकृती काढण्यासाठी घेतलेल्या प्रमाणानुसार हे वितरण *आ* या आलेखाच्या कोटींनी व्यक्त केले जाते. समपार्श्वाच्या *अत* या तळावरील सरासरी संचित $च_स$ मानल्यास, त्यावरील अतिरिक्त दाब पुढीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$ऊ_{अति} = \frac{१}{२} घ_ज ड च_स$$

वाळूतील कोणत्याही ठिकाणाचे संचित समी. २ च्या साहाय्याने ठरविता येते; ते असे :

$$च = \frac{ट_१}{ट} \cdot च_१ = च_१ \times अंक$$

येथे $ट_1/ट$ हा अंक केवळ त्या बिंदूच्या क्षरणजालातील स्थानावर अवलंबून आहे; म्हणून *आ* या आलेखाच्या कोटी $च_1$ च्या सरळ प्रमाणात वाढतात आणि $च_स$ हे सरासरी संचित खालीलप्रमाणे मांडता येते.

$$च_स = र\,च_1 \qquad [३]$$

येथे र चे मूल्य संचितावर अवलंबून नाही. $च_स$ आणि $च_1$ यांची मूल्ये आकृतीवरून मोजता येतात. त्यावरून $र = \frac{च_स}{च_1}$ हे गुणोत्तरही ठरविता येते.

समपार्श्व उचलला जावयाचा, तर त्याच्या *अत* या तळावरील $ऊ_{अति}$ हा अतिरिक्त जलदाब त्याच्या निमजित वजनाइतका असला पाहिजे, हे आपण पाहिले आहे; म्हणजेच

$$\tfrac{1}{2}\,ड\,च_स\,घ_ज = \tfrac{1}{2}\,ड\,ड_3\,घ'$$

म्हणून

$$च_स = ड_3\,\frac{घ'}{घ_ज} \qquad [४]$$

ज्या क्षणी समपार्श्व उचलला जातो, तेव्हा समी. ३ मधील $च_1$ चे मूल्य बिलकारी संचिताइतके होते; म्हणून समी. ४ मध्ये $च_स$ ऐवजी $र\,च_{बि}$ नियुक्त करता येईल.

$$र\,च_{बि} = ड_3 . \frac{घ'}{घ_ज}$$

म्हणून

$$च_{बि} = \frac{ड_3}{र} . \frac{घ'}{घ_ज} \qquad [५]$$

$ड_3$ चे मूल्य बदलून मिळणाऱ्या निरनिराळ्या आडव्या छेदांच्या बाबतीत हेच गणित पुनः मांडून $च_{बि}$ चे लघुतम मूल्य ठरविता येते. तेच प्रत्यक्षातील बिलकारी संचित ठरते. तदनुषंगिक पातळीस **बिलपृष्ठ** म्हणतात. बिलक्रियेच्या प्राथमिक अवस्थेत जी वाळू उचलली जाते, तिचा तळ या पृष्ठाने दाखविला जातो. आकृती ७९ आ मध्ये दाखविलेल्या फलकस्थूणांच्या भिंतींचा अभ्यास केला असता, असे दिसून आले आहे की, हे पृष्ठ स्थूणांच्या खालच्या कडेलाच लागून जाते; म्हणजेच $ड_3 = ड$ असते. उलटपक्षी, एखाद्या धरणाच्या पायात फलकस्थूणांच्या एकाहून अधिक रांगा ठोकून पाझर-प्रतिबंध केला असेल किंवा आ० ७४ अ ते ई मधील उदाहरणांप्रमाणे काँक्रीटच्या धरणाच्या प्रवाहदिशेकडील पायथ्याला एखादी रांग ठोकलेली असेल, तर तेथील

विलपृष्ठाचे स्थान ठरविण्यासाठी बराच प्रयत्न करावा लागतो. त्यासाठी निरनिराळे आडवे छेद घेऊन आ. ७९ आ मध्ये विशद केलेली कृती त्या प्रत्येकासाठी करावी लागते.

समी. ४ वरून असे दिसते की, पाणी साठविण्यासाठी बांधलेल्या विवक्षित वास्तूच्या बाबतीत $च_{बि}$ हे बिल्कारी संचित वाळूच्या अंतर्गत घर्षणकोनावर अवलंबून नाही. वाळूच्या निमज्जित घनतेच्या सरळ प्रमाणात ते वाढते. स्वच्छ वाळूच्या बाबतीत $च_{बि}$ ची गणितसिद्ध मूल्ये आणि प्रयोगप्राप्त मूल्ये यांत फारच समाधानकारक एकवाक्यता असते.

बिलक्रियेच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक बिलपृष्ठावरील वाळूचे निमज्जित वजन आणि अतिरिक्त जलदाब यांतील गुणोत्तराइतका असतो. आकृती ७९ आ मध्ये सुरक्षिततांक खालीलप्रमाणे आहे.

$$सु = \frac{व'}{ऊ_{अति}} = \frac{\frac{१}{२} \cdot हड_{३}घ'}{\frac{१}{२} \cdot च_{स}डघ_{ज}} = \frac{च_{बि}}{च_{१}} \qquad [६]$$

पाणी साठविण्यासाठी बांधलेल्या वास्तूची आधारभूमी जलदृष्ट्या समदैशिक आहे, या गृहीतावर वरील सर्व विश्लेषण आधारित होते. व्यवहारात मात्र आधारभूमीत थर असतात आणि त्यांचा विचार करणे आवश्यक असते. स्तररचनेचा प्रभाव क्षरणजालावर निर्णायकरीत्या पडत असल्यामुळे बऱ्याच अंशी सुरक्षिततांकही तीमुळे निश्चित होतो.

९५. लक्ष्मणसंचित आणि सुरक्षिततांक यांवर होणारा भारित विजालकाचा परिणाम : पाझरक्षम थरात बिलक्रिया घडण्याच्या बाबतीत संकल्पित धरणाच्या आधारभूमीचा सुरक्षिततांक पुरेसा नसेल, तर विधायक उपाय योजून तो वाढविणे आपल्याला भाग पडते. सुरक्षिततांकाच्या समीकरणाने व्यक्त होणाऱ्या संबंधाचा उपयोग करून हे काम अल्प खर्चात सहजपणे साधता येते.

$$सु = \frac{व'}{ऊ_{अति}} \qquad ९४ (६)$$

या समीकरणानुसार वालुकाराशीचे निमज्जित वजन आणि हा राशी उचलण्याकडे प्रवृत्ती असलेला, अतिरिक्त जल्दाब यांतील गुणोत्तर म्हणजे सुरक्षिततांक होय. तो वाढविण्यासाठी $ऊ_{अति}$ या जलदाबामध्ये फरक न करता $व'$ हे वजन वाढविले तरी चालेल. जेथे पाणी बाहेर पडते त्या पृष्ठभागावर अधिभार ठेवून हे साधता येते. या अधिभारामुळे क्षरणजालामध्ये बदल होऊ नये आणि $ऊ_{अति}$मध्ये वाढ होऊ नये म्हणून मूळची भूमी आणि हा अधिभार यांमध्ये एक व्युत्क्रम विजालक प्रविष्ट करतात. हा विजालक इतका सच्छिद्र असावा की, त्यातून भूमीतील पाणी अगदी सहजपणे बाहेर

पडेल; परंतु भूमीतील कणांना मात्र त्यातील तळाच्या थरात प्रवेश मिळणार नाही. या दोन लक्षणांची पूर्तता केल्यास, $ऊ_{अति}$ या अतिरिक्त जलदाबावर अधिभाराचा काहीच परिणाम होत नाही.

आकृती ७९ अ मधील एकेरी भिंतीच्या कुंडनबांधाच्या बाबतीत विवक्षित सुरक्षिततांक प्राप्त होण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अधिभाराची महत्ता आणि त्याचे वितरण ठरविण्याची पद्धत आ. ७९ इ मध्ये स्पष्ट केली आहे. भरतीच्या वेळी बाहेरील पाण्याची पातळी कुंडनबांधाच्या आतील पातळीच्या वर $च_१$ इतकी वाढल्यास—सुरक्षिततांकाचे मूल्य *सु* या विवक्षित मूल्याहून कमी होऊ नये, यासाठी आवश्यक असलेला अधिभार कसा ठरवावा, हे आता आपल्याला बघायचे आहे. *अक्ष* हा लक्ष्मणछेद आहे. त्या छेदावर येणाऱ्या अतिरिक्त जलदाबाइतके वजन होईल, अशा पाण्याच्या थराची उंची *आ* या आलेखाच्या कोटींनी दाखविली आहे. *अक्ष* च्या वरच्या बाजूस $च घ_{ज}/घ'$ ही मूल्ये स्थित करून आपल्याला *व* हा आलेख मिळतो. लक्ष्मणछेदावरील अतिरिक्त जलदाबाइतके वजन असलेल्या आणि *घ'* घनतेच्या एका काल्पनिक मृत्तिकाखंडाचा माथा या आलेखाने दाखविला जातो. बिलक्रियेच्या संदर्भात *सु* हा सुरक्षिततांक प्राप्त होण्यासाठी मृत्तिका+अधिभार यांच्या निमज्जित वजनामुळे लक्ष्मणछेदावर निर्माण होणारे प्रतिबल त्याच छेदावरील अतिरिक्त जलदाब×सु इतके असले पाहिजे. *व* या आलेखाच्या कोटींना *सु* ने गुणून *सु* हा आलेख काढला आहे (आ. ७९ इ). त्यावरून असे दिसते की *सु* हा सुरक्षिततांक मिळविण्यासाठी *तन* या भागावर रेखांकित क्षेत्र×घ' (वाळूची निमज्जित घनता) इतके वजन लादले पाहिजे.

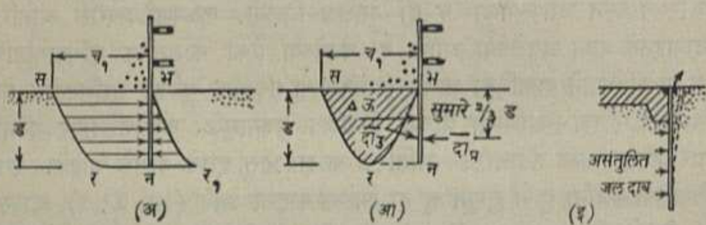
रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेला भार (आ. ७९ इ) समप्रमाणात वितरित नाही. तथापि प्रयोगांतून असे दिसून आले आहे की, अधिभार समप्रमाणात लावला, तरी लक्ष्मण संचितावर होणारा त्याचा परिणाम व्यवहारतः तसाच होतो. मात्र त्यासाठी अशा भाराची रुंदी *तन* इतकी असली पाहिजे. हा भार जलपातळीच्या वर असल्यामुळे त्याची कार्यसाधक घनता, सुमारे *घ'* च्या दुप्पट असते; त्यामुळे स्थैर्यासाठी समाविष्ट केलेल्या अधिभाराच्या छेदाचे क्षेत्रफळ रेखांकित क्षेत्राच्या सुमारे अर्धे असेल.

९६. फलकस्थूणांत बांधलेल्या पाझर-रोधकावरील पार्श्वीय दाब : आकृती ७९ मध्ये दाखविलेल्या भिंतीचा तळाकडील छेद आ. ८० अ मध्ये दाखविला आहे. *भन* या उभ्या रेषेपासून मोजलेल्या *रस* या आलेखाच्या भुजा फलकस्थूणांच्या डाव्या अंगावरील जलदाब दाखवितात आणि $भर_१$ या आलेखाच्या भुजा, उजव्या अंगावरील जलदाब दाखवितात. त्यांवरून असे दिसते की, फलकस्थूणांच्या भूमिगत भागावर असंतुलित जलदाब कारक असतो. हा दाब (Δ ऊ) आ. ८० आ मध्ये रेखांकित क्षेत्राने दाखविला आहे. फलकस्थूणांना उजवीकडे वाकविण्याची त्याची प्रवृत्ती आहे. फलकस्थूणांच्या डाव्या अंगावर येणाऱ्या $\bar{दा}_{उ}$ या मृत्तिकादाबाची त्याला जोड

मिळते. *भर* आणि *रस* हे आलेख क्षरणजालाच्या साहाय्याने काढता येतात (परि. ९४ पाहा); $\overline{\text{दा}}_{\text{उ}}$ हा उद्युक्त मृत्तिकादाब परि. ९१ मध्ये वर्णिलेल्या आलेखात्मक पद्धतीने ठरविता येतो. या बलांमुळे स्थूणा *भ* बिंदूपासून वाकू लागल्यास, जो विरोध निर्माण होईल, तो *भन* च्या उजवीकडील प्रतियोगी मृतिकादाबाच्या $\overline{\text{दा}}_{\text{प्र}}$ या कार्यसाधक भागापेक्षा अधिक असू शकत नाही. हा दाब समी. १४ (२) च्या साहाय्याने ठरविता येतो. त्या समीकरणात $\text{दा}_{\text{प्र}}=\overline{\text{दा}}_{\text{प्र}}$; $\text{च}=\text{ह}$; $\text{घ}=\text{घ}''$, $\text{ण}=\text{स्प}^{2}\ (४५^{\circ}+\text{ष}/२)$ नियुक्त करून आपल्याला या दाबाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\overline{\text{दा}}_{\text{प्र}}=\tfrac{१}{२}\,\text{घ}''\text{ह}^{२}\text{स्प}^{२}\,(४५^{\circ}+\text{ष}/२)$$

या समीकरणातील घ'' हे पद घ' या निमज्जित घनतेमधून फलकस्थूणांच्या उजवीकडील वालुकाराशीवर येणारा सरासरी क्षरणदाब उणे करून मिळणारे मूल्य आहे.



आकृती ८० : (अ) उपसा चालू असताना कुंडनबांधाच्या भूमिगत भागाच्या दोहो बाजूंवर येणारा पाण्याचा दाब; (आ) अ मध्ये दाखविलेल्या जलदाबातील फरक म्हणजेच असंतुलित जलदाब; (इ) धरणाखालची काँक्रीटमध्ये बांधलेली पायघडी आणि त्याला जोडून असणाऱ्या फलकस्थूणा यांमधील सांधा उघडा राहिल्यामुळे होणाऱ्या बिलक्रियाजन्य उच्छेदाची लक्षणे.

च हे संचित $\text{च}_{\text{बि}}$ या लक्ष्मणसंचिताइतके होताक्षणीच आ. ७९ आ मधील *अत* वर असणाऱ्या वालुकाखंडाचे कार्यसाधक वजन शून्य होते आणि त्यातील वालुकेची सरासरी घनता घ'' सुद्धा शून्य होते. $\text{ह}_{३}$ ही उंची स्थूलमानाने ह इतकी आहे; म्हणून आ. ८० अ मधील फलकस्थूणांच्या उजवीकडील *भन* जवळच्या सर्वच वालुकाराशीत व्यवहारतः $\text{घ}''=०$ ही अवस्था अस्तित्वात येते. मागील समीकरणात $\text{घ}''=०$ नियुक्त केल्यास

$$\overline{\text{दा}}_{\text{प्र}}=०$$

होतो. म्हणून संचिताचे मूल्य लक्ष्मणमर्यादेकडे जाऊ लागते, त्यावेळी फलकस्थूणांच्या उजवीकडील प्रतियोगी दाबसुद्धा शून्य मूल्याप्रत जाऊ लागतो. असे झाल्यावर फलकस्थूणांच्या डाव्या अंगावरील $\overline{\text{दा}}_{\text{उ}}$ आणि Δ ऊ ही बले पेलण्यासाठी स्थूणांचे विनमनविरोधी सामर्थ्य तेवढे उरते. या परिस्थितीमुळे स्थूणांच्या उजवीकडील वाळू

प्रत्यक्षात जलदाबामुळे उचलली जाण्यापूर्वीच फलकस्थूणा वाकड्या होऊन, त्यांचा उच्छेद घडून येईल, याची कल्पना येऊ शकते.

आकृती ८० इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एखाद्या काँक्रीटच्या वास्तूच्या पायथ्याला प्रवाहदिशेकडे फलकस्थूणांचा पाझररोधक स्थापन केलेला असेल, तर त्याच्या उगम-दिशेकडील बाजूवर येणारा असंतुलित जलदाब आणि त्याच्या जोडीला असणारा त्याच अंगावरील उद्युक्त मृत्तिकादाब यांमुळे स्थूणा काँक्रीटच्या पायथ्यापासून दूर ढकलल्या जाण्याचा संभव असतो. हे टाळावयाचे असेल, तर स्थूणांचा माथ्याचा भाग काँक्रीट-मध्ये घट्टपणे गुंतवलेला पाहिजे. फलकस्थूणा आणि काँक्रीट यांमध्ये फट पडली, तर तिच्यातून वाळू आणि पाणी यांचे मिश्रण बाहेर पडते आणि वास्तूचा उच्छेद होतो. त्यावेळचे संचित, फलकस्थूणांच्या प्रवाहबाजूकडील वाळू उचलण्यासाठी आवश्यक असलेल्या संचिताहून कितीतरी कमी असते. फलकस्थूणा आणि काँक्रीट यांच्या जोडाकडे योग्य तेवढे लक्ष क्वचितच दिले जात असल्यामुळे, हा जोड तुटून व परिणामी तेथील फटीतून बिलक्रिया होऊन काही धरणांचा उच्छेद झाला असणे अगदीच अशक्य नाही. बिलक्रियेमुळे होणारा उच्छेद फारच थोड्या काळात घडून येतो आणि त्यामुळे होणारा विध्वंस इतका परिपूर्ण असतो की, अपघातानंतर कोणत्या कारणांमुळे निश्चितपणे तो झाला असावा, याचा तर्क करणे व्यवहारतः अशक्य होते.

प्रतियोगी दाबाच्या $दा_{प्र}$ या मूल्यावरून, धरणास आधार देणाऱ्या वाळूची भारधारण-क्षमतासुद्धा ठरते. $दा_{प्र}$ चे मूल्य असे शून्याप्रत जाऊ लागते, तशी स्थूणांच्या डावीकडील वाळूची अंतिम भारधारणक्षमतासुद्धा शून्याप्रत जाऊ लागते; आणि वाळू दृढ असूनही तिचा आधार अपुरा पडत असेल, तर धरणाचा उच्छेद घडून येईल, याची कल्पना येऊ शकते.

येथवर दिलेल्या उदाहरणांवरून पाझरक्षम आधारभूमीवर बांधलेल्या धरणांच्या उच्छेदास कारणीभूत होणारे, क्षरणाचे विविध प्रकारचे बलात्मक परिणाम स्पष्ट व्हावेत. प्रत्यक्षात अनुभवास येण्याचा संभव असलेल्या परिस्थितीतील या विविधतेमुळे सर्व ठिकाणी लागू पडतील असे नियम प्रस्थापित करता येत नाहीत. तथापि, असे असूनही, प्रत्येक वैशिष्ट्यपूर्ण उदाहरणात वास्तूच्या सैद्धांतिक सुरक्षिततांकावर होणारा क्षरणाचा परिणाम, परि. ८७ ते ९४ मध्ये प्रस्थापित केलेल्या सार्वत्रिक तत्त्वांच्या आधारे अनु-मानिता येतो. शेवटी, खरा सुरक्षिततांक स्तररचनेचा तपशील आणि भूगर्भविषयक इतर लहानसहान तपशील यांवरच अवलंबून असतो. हे तपशील अगोदर ठरविता येतातच असे नाही; म्हणून बिलक्रियेच्या संदर्भातील स्थैर्याचे विश्लेषण करून एखाद्या वास्तूच्या सुरक्षिततेच्या बाबतीत काढलेले निष्कर्ष नंतर नेहमीच पडताळून घेणे व वेळ पडल्यास बदलणे आवश्यक असते. त्यासाठी बांधकामकाळात किंवा संचित प्रथमच निर्माण होते तेव्हा नोंदलेले जलदाब साहाय्यक ठरतात. अशा अभ्यासाचे निष्कर्ष काहीही असले, तरी योग्य ते निस्सारणाचे उपाय योजून किंवा मागील परिच्छेदात वर्णिल्याप्रमाणे भारित विजालक बांधून धोकादायक परिस्थितीचे निवारण करणे, बहुधा शक्य असते.

प्रकरण १३

दृढीभवनाचा सिद्धांत

९७. **मूलभूत कल्पना :** क्षरण आणि क्षरणाचे परिणाम याविषयीच्या मागील प्रकरणात असे गृहीत धरले होते की, मृत्तिकेतील ओलावा तिच्या प्रतिबल-परिस्थितीवर अवलंबून नसतो. ही अट पुरी झाली, तर एखाद्या मृत्तिकाखंडातून—उदाहरणार्थ, आ. ७३ आ मधील मृत्तिकाखंड पाहा—बाहेर पडणाऱ्या पाण्याचा राशी आत येणाऱ्या राशीइतकाच असतो; मग मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थिती बदललेली असो वा नसो. हे लक्षण—ज्यास प्रवाहाचे सातत्य-लक्षण म्हणतात—गणिताच्या भाषेत कलन-समीकरण ८९ (१) ने व्यक्त केले जाते. सातत्य-लक्षणाची पूर्तता तंतोतंतपणे करील, अशी मृत्तिका प्रत्यक्षात नसतेच; प्रतिबल-परिस्थितीतील प्रत्येक बदलागणिक मृत्तिकेतील पोकळीच्या अवकाशात बदल होतो. तरीही मृत्तिका फार पाझरक्षम असेल आणि फारशी दमनीय नसेल, तर प्रतिबल-परिस्थितीतील प्रत्येक बदलागणिक सच्छिद्रतेत होणारा बदल साधारणतः दुर्लक्षिता येतो.

मृत्तिका—उदाहरणार्थ, चिकण माती किंवा वाळू आणि अभ्रक यांचे मिश्रण—अतिशय दमनीय असेल, तर तिच्यावरील कार्यसाधक प्रतिबलांत होणाऱ्या बदलामुळे पोकळीच्या अवकाशात उल्लेखनीय बदल होण्याचा संभव असतो. अशा मृत्तिकेतील पोकळी पूर्णपणे पाण्याने भरलेली असेल आणि ती त्याच अवस्थेत राहावयाची असेल, तर कार्यसाधक प्रतिबलांत होणाऱ्या बदलामुळे तिच्या ओलाव्यातही बदल घडून यावा लागतो. पाण्याचे ठिकाणी हवा येऊ न देता, संपृक्त मृत्तिकेतील पाणी कमी करणाऱ्या प्रत्येक प्रक्रियेस **दृढीभवनाची प्रक्रिया** म्हणतात. याविरुद्ध प्रकारच्या प्रक्रियेस **स्फायनाची प्रक्रिया** म्हणतात. तेथे पोकळीत होणाऱ्या वाढीमुळे पाण्यातही वाढ होते.

मृत्तिकेच्या अति दमनीयतेला अल्प पाझरक्षमतेची जोड मिळाली की, आणखी गुंतागुंत निर्माण होते. हे दोन्ही गुणधर्म हळव्या, चिकण मृत्तिकेत फार मोठ्या प्रमाणात दिसून येतात. अशा गुणधर्माच्या मृत्तिकांत प्रतिबल-परिस्थितीतील बदलांमुळे होणारे ओलाव्यातील बदल फारच सावकाशपणे घडून येतात; कारण मृत्तिकेच्या अल्प पाझरक्षमतेमुळे मृत्तिकाराशीच्या एका भागाकडून दुसऱ्याकडे किंवा सन्निध असलेल्या अति पाझरक्षम थराकडे पाणी लगेच जात नाही. त्यामुळेच अशा मृत्तिकेच्या थरावर कारक असणाऱ्या बाह्य बलांत बदल केला असता, तिच्या ओलाव्यात होणारा तदनुषंगिक बदल, उपरोक्त कारणांमुळे लगेच घडून न येता कालांतराने घडून येतो. चिकण मृत्तिकेवर ठेवलेल्या पायाचे उत्तरोत्तर वाढत जाणारे अवसीदन आणि इतर अनेक

वैशिष्ट्यपूर्ण आणि व्यावहारिक महत्त्वाच्या प्रक्रिया, यांमागील मुख्य कारणही हेच असते. या प्रक्रियांचा ऊहापोह करणाऱ्या सिद्धांतांना **दृढीभवन सिद्धांत** म्हणतात. मृत्तिकाबलविज्ञानातील आणि संरचना-स्थापत्यातील इतर सर्व सिद्धांतांप्रमाणे हे सिद्धांतही सुकरतादायी गृहीतांवर आधारित आहेत. म्हणून त्यांतून मिळणारी फलिते प्रत्यक्ष परिस्थितीचे केवळ स्थूलमानाने दिग्दर्शन करतात.

९८. दृढीभवन सिद्धांतांत अंतर्भूत असलेली गृहीते : काही थोडे अपवाद वगळता, दृढीभवनविषयक सर्व प्रचलित सिद्धांत खालील गृहीतांवर आधारित आहेत. मृत्तिकेतील पोकळी पाण्याने पूर्णपणे भरलेली आहे; तिच्यातील द्रव आणि घन हे दोन्ही घटक पूर्णपणे अदमनीय आहेत; तिला डार्सीचा नियम काटेकोरपणे लागू आहे; पाझर-गुणांकाचे मूल्य स्थिर आहे आणि दृढीभवनास होणारा विलंब संपूर्णतया मृत्तिकेच्या अल्प पाझरक्षमतेमुळे घडून येतो. पुढील परिच्छेदांत समाविष्ट केलेल्या सिद्धांतांसाठी आणखीही काही पूरक गृहीतांचा आधार घेतलेला आहे. ही गृहीते विशिष्ट प्रकरणी लागू नसतील, तरच तसा उल्लेख केला जाईल; एरवी ती लागू आहेतच. ही गृहीते अशी : चिकण मृत्तिका पार्श्वतः बद्ध आहे; मृत्तिकेत घेतलेल्या कोणत्याही आडव्या छेदावरील एकूण प्रतिबले आणि कार्यसाधक प्रतिबले प्रत्येक ठिकाणी आणि दृढीभवनाच्या प्रत्येक अवस्थेत तींच राहतात; कार्यसाधक दाबामध्ये $\bar{द}_०$ या मूळ मूल्यापासून $\bar{द}$ या अंतिम मूल्यापर्यंत झालेल्या वाढीमुळे चिकण मृत्तिकेतील रंध्रांक $र_०$ या मूळ मूल्याऐवजी र या अंतिम मूल्याचा होतो; दाबाच्या $\bar{द}_०$ ते $\bar{द}$ या कक्षेत पुढील गुणोत्तराचे मूल्य स्थिर राहते.

$$अ_द = \frac{र_० - र}{\bar{द} - \bar{द}_०} \text{ ग्रॅम}^{-1} \text{ सेंमी}^{2} \qquad [१]$$

या गुणोत्तरास **दमनीयता गुणांक** म्हणतात. कार्यसाधक दाब $\bar{द}$ पासून $\bar{द}'$ पर्यंत कमी केला, तर रंध्रांक र ऐवजी वाढून $र'$ होतो आणि खाली मांडलेल्या गुणोत्तराचे मूल्यसुद्धा $\bar{द}$ ते $\bar{द}'$ या कक्षेत स्थिरमूल्य राहते, असे मानले जाते.

$$अ_{स्फ} = \frac{र' - र}{\bar{द} - \bar{द}'} \qquad [२]$$

या गुणोत्तरास **स्थितिस्थापक प्रत्यावर्तनाचा गुणांक** म्हणतात.

समी. १ पुढीलप्रमाणेही मांडता येईल :

$$र_० - र = अ_द (\bar{द} - \bar{द}_०) \qquad [३]$$

$र_० - र$ या पदाने मृत्तिकाखंडाच्या $१ + र_०$ या मूळ अवकाशापैकी पोकळीच्या अवकाशात झालेली घट दाखविली जाते. रंध्रांक $र_०$ होता तेव्हा सच्छिद्रता $छ_० =$

र॰/१+र॰ होती आणि रंध्रांक र झाला त्यावेळी ती छ॰१ = $\frac{र}{१+र_॰}$ झाली. म्हणून पोकळीच्या अवकाशातील घट पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$\Delta छ = छ_॰ - छ_{॰१} = \frac{अ_द}{१+र_॰} \cdot (\bar{द} - \bar{द}_॰)$$

$$= प_द\,(\bar{द} - \bar{द}_॰) = प_द \cdot \Delta \bar{द} \qquad [४]$$

येथे $\Delta \bar{द}$ म्हणजे कार्यसाधक दाबातील वाढ आहे आणि

$$प_द = \frac{अ_द}{१+र_॰} = ग्रॅम^{-१}\ सेंमी^{२} \qquad [५]$$

म्हणजे **अवकाशक्षयाचा गुणांक** होय. अशाच प्रकारे कार्यसाधक दाबात घट झाल्यामुळे होणाऱ्या स्फायनाच्या संदर्भात पुढील समीकरणाने **अवकाशवर्धनाचा गुणांक** व्यक्त होतो.

$$प_{स्फ} = \frac{अ_{स्फ}}{१+र_॰} \qquad [६]$$

हे दोन्ही प्रकारांचे गुणांक व्यक्त करण्यासाठी एकच चिन्ह वापरावयाचे झाल्यास, $अ_{श}$ आणि $प_{श}$ ही अक्षरे वापरली जातील.

येथवर उद्धृत केलेल्या गृहीतांनी सैद्धांतिक विचारार्थ घेतलेल्या आदर्श, चिकण मृत्तिकेचे गुणधर्म निश्चित होतात. पार्श्वीय रीत्या पूर्णपणे बद्ध असलेल्या प्रत्यक्षातील चिकण मृत्तिकेवरील कार्यसाधक दाब आणि तदनुषंगिक रंध्रांक यांतील संबंध समी. १ ते ३ यांच्याद्वारे अति स्थूलमानाने दर्शविला जातो. म्हणून या समीकरणांवर आधारित असलेले सिद्धांत, अशाच प्रक्रियांच्या बाबतीत लागू पडतात की, जेथे दृढीभवनशील थराची पार्श्वीय विकृती उभ्या दिशेतील विकृतीच्या तुलनेत थोडी असते. आडव्या छेदांवरील प्रतिबले तीच राहतात, असे गृहीत धरल्यामुळे थरातून होणारे क्षरण केवळ उभ्या रेषांनुसारच होते असे मानल्यासारखे होते. प्रत्यक्षात आडव्या छेदांवरील प्रतिबल-वितरण कधीच पूर्णतया सारखे नसते. तथापि तसे मानण्यामुळे होणारी चूक कित्येक प्रकरणांत दुर्लक्षिता येते.

९९. आदर्श, चिकण मृत्तिकेच्या आडव्या थरातील दृढीभवनाचे कलन-समीकरण : आडव्या, जलाभेद्य तळावरील आदर्श, चिकण मृत्तिकेच्या थराचा छेद आ. ८१ मध्ये दाखविला आहे. समजा,

$र_०$ = मृत्तिकेचा मूळचा रंध्रांक,

$अ_द$ = दमनीयता गुणांक (समी ९८ (१)),

$प_द$ = अवकाशक्षयाचा गुणांक (समी ९८ (५)),

झ = पाझरगुणांक,

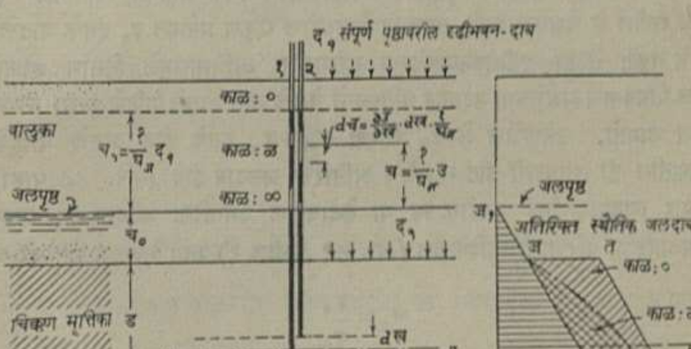
$घ_ज$ = पाण्याची घनता आणि

ड = थराची मूळची जाडी

आहेत. या थरावर अतिशय पाझरक्षम वाळूचा थर आहे आणि भूजलपातळी चिकण मृत्तिकेच्या पृष्ठापासून $च_०$ उंचीवर आहे. या उदाहरणाच्या अभ्यासाला प्रारंभ करताना चिकण मृत्तिकेत जलीय समतोल आहे, असे आपण गृहीत धरले आहे. अर्थातच थरात घेतलेल्या पप सारख्या एखाद्या छेदावरील कोणत्याही ठिकाणी ठेवलेल्या जलस्तंभ-मापिकेत पाणी भूजपातळीपर्यंत चढेल, म्हणजेच चिकण मृत्तिकाथरावर $च_०$ उंचीपर्यंत चढेल. तेथील उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$उ_ज = घ_ज\,(ड + च_० - ख)$$

येथे $ड + च_० - ख$ हे दाबसंचित असून ते पप ही पातळी आणि भूजलपातळी यांमधील उभ्या अंतराइतके आहे. या प्रतिबलाची मूल्ये $ज_१न$ या संदर्भरेषेपासून आडवी स्थित करून $ज_१स$ ही रेषा मिळाली आहे. पप वरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल, त्या पृष्ठाच्या एकांक क्षेत्रावर असणाऱ्या वाळू + चिकण मृत्तिका + पाणी या सर्वांच्या वजनाइतके म्हणजेच $द_०$ आहे आणि कार्यसाधक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे आहे.



आकृती ८१. समप्रमाण-वितरित अधिभार अचानक कारक झाला असता, चिकण मृत्तिकेतील रंध्रस्थ पाण्यात निर्माण होणारा अतिरिक्त जलदाब. (वरील आकृतीत $घ_ज\,(च + च_०)$ च्या ऐवजी $घ_ज\,(ड + च_०)$ असे वाचावे.)

$$\bar{द}_{\circ} = द_{\circ} - उ_{ज}$$

विचाराधीन राशी अपारप्राय आहे, असे आपण गृहीत धरू आणि $द_{१}$ या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा समप्रमाण वितरित भार वाळूवर ठेवू. त्यामुळे चिकण थरावरील किंवा *पप* या छेदावरील एकूण लंबदिक प्रतिबल $द_{१}$ ने वाढेल. ही वाढ आ. ८१ मध्ये *जसलत* या रेखांकित क्षेत्राने दाखविली आहे. या क्षेत्राची रुंदी *जत* = *लस* = $द_{१}$ आहे. नव्याने आलेला हा दाब चिकण मृत्तिकेच्या दृढीभवनास कारणीभूत होतो आणि दृढीभवन पूर्ण झाल्यानंतर तो तिच्या कणांकणांतून पूर्णपणे संक्रमित[१] होतो. त्यावेळेची उदासीन प्रतिबले *जस* रेषेने दाखविली जातात. याचा अर्थ असा की, नव्या भारामुळे प्रत्येक आडव्या छेदावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल शेवटी $द_{१}$ ने वाढते. या प्रतिबलास **दृढीभवनकारी प्रतिबल** किंवा **दृढीभवनकारी दाब** म्हणतात. दृढीभवनाची प्रक्रिया घडवून आणण्यास ते कारणीभूत होते.

समप्रमाणात वितरित असलेल्या अधिभाराऐवजी काही कारणामुळे इतर प्रकारचा दृढीभवनकारी दाब निर्माण झाला, तर चिकण थराच्या जाडीत स्थानपरत्वे तो बदलत जाण्याचा संभव असतो. कसेही असो, चिकण थरात घेतलेल्या कोणत्याही आडव्या छेदावरील दृढीभवनकारी दाब, त्या छेदावरील दृढीभवनोत्तर कार्यसाधक प्रतिबल आणि दृढीभवनपूर्व कार्यसाधक प्रतिबल यांतील फरकाएवढा असतो.

चिकण मृत्तिकेची पाझरक्षमता अल्प असल्यामुळे दृढीभवनाची प्रक्रिया अति सावकाशपणे चालू राहते, हे सांगितलेच आहे. अधिभार लावल्यानंतर मृत्तिकेचा रंध्रांक लगेच बदलत नाही, $र_{\circ}$ हाच राहतो. अर्थातच कार्यसाधक प्रतिबल त्या वेळी $द_{\circ}$ इतकेच राहील हे उघडच आहे. आडव्या छेदावरील एकूण प्रतिबल $द_{१}$ इतके वाढलेले आहे हे नक्की; तेव्हा दृढीभवनप्रक्रियेच्या सुरवातीस अधिभारामुळे निर्माण होणारे प्रतिबल तितक्याच महत्तेच्या उदासीन प्रतिबलाने पेलले जात असले पाहिजे असा निष्कर्ष काढावा लागतो. म्हणजेच ते $उ_{ज}$ ऐवजी $उ_{ज} + द_{१}$ इतके होत असले पाहिजे. जलदाबातील ही तात्पुरती वाढ म्हणजेच अतिरिक्त जलदाब होय (परि. ८८ पाहा). अधिभार लावताक्षणीच उपरोक्त *पप* या छेदावरील अतिरिक्त जलदाब $द_{१}$ इतका असला पाहिजे. परिणामी मापिकेतील (आ. ८१ मधील १) पाणी भूजलपातळीच्या वर

$$च_{१} = \frac{द_{१}}{घ_{ज}}$$

इतक्या उंचीपर्यंत चढेल. हळूहळू अतिरिक्त जलदाब कमी होत जातो आणि मापिकेतील पाणी उतरत जाते. *ळ* या वेळी अतिरिक्त जलदाब उ असेल, तर मापिकेतील पाणी भूजलपातळीच्या वर

$$च = \frac{उ}{घ_{ज}} \qquad [१]$$

इतक्या उंचीवर असते. शेवटी अतिरिक्त जलदाब शून्य होतो आणि मापिकेतील पाणी मूळच्या पातळीला येऊन थांबते. तथापि कोणत्याही क्षणी कार्यसाधक प्रतिबलात अधिभारामुळे झालेली वाढ ($\overline{द}-\overline{द}_0$) आणि अतिरिक्त जलदाब (उ) यांची बेरीज $द_1$ इतकी असते. म्हणजेच

$$उ+\overline{द}-\overline{द}_0=द_1$$

$$\therefore\ उ=द_1-\overline{द}+\overline{द}_0 \qquad [२]$$

अतिरिक्त दाबात होणाऱ्या घटीचा वेग पुढीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ}=-\frac{\partial \overline{द}}{\partial ळ} \qquad [३]$$

कार्यसाधक प्रतिबलात दर एकांक काळात $\frac{\partial \overline{द}}{\partial ळ}$ इतकी वाढ होते व त्यामुळे मृत्तिकेच्या सच्छिद्रतेत घट होते. $\overline{द}$ आणि छ यांतील संबंध समी. ९८ (४) वरून आपल्याला मिळतो, तो असा :

$$छ_0-छ=प_द\,(\overline{द}-\overline{द}_0)$$

त्यावरून

$$\frac{\partial \overline{द}}{\partial ळ}=-\frac{१}{प_द}\cdot\frac{\partial छ}{\partial ळ}$$

हे समीकरण मिळते व ते समी. (३) बरोबर विचारात घेऊन आपल्याला

$$\frac{\partial छ}{\partial ळ}=प_द\cdot\frac{\partial उ}{\partial ळ}$$

हे समीकरण मिळते.

मृत्तिकेतील पोकळी पाण्याने पूर्णपणे भरलेली राहते, असे गृहीत धरले असल्यामुळे $-\frac{\partial छ}{\partial ळ}$ या पदाने, एकांक काळातील सच्छिद्रतेतील घट, म्हणजेच ह – ख लोलीवरच्या पृष्ठातून मृत्तिकेच्या एकांक अवकाशागणिक, दर एकांक काळात बाहेर पडणारे पाणी दाखविले जाते. $dख$ जाडीच्या शकलातून एकांक क्षेत्रागणिक बाहेर पडणाऱ्या पाण्याचा वेग पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$-\frac{\partial छ}{\partial ळ}\cdot dख=-प_द\,\frac{\partial उ}{\partial ळ}\cdot dख$$

या शकलाच्या *पप* या तळातून पाणी वर येत असेल, तर त्यात या पाण्याची भर पडते. पूर्वीचा स्राववेग *ग* असेल, तर उर्ध्व दिशेने $d\text{ख}$ अंतरात त्यात होणारी वाढ उपरोक्त वेगाइतकी होईल. म्हणून

$$\frac{\partial \text{ग}}{\partial \text{ख}}\cdot d\text{ख} = -\frac{\partial \text{छ}}{\partial \text{ळ}}\cdot d\text{ख} = -\text{प}_{\text{द}}\,\frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ळ}}\cdot d\text{ख} \qquad [४]$$

असे समीकरण मांडता येईल.

हे समीकरण म्हणजे उपरोक्त शकलाच्या बाबतीत, आत येणाऱ्या पाण्याचा राशी आणि बाहेर जाणाऱ्या पाण्याचा राशी यांमधील $\frac{\partial \text{ग}}{\partial \text{ख}}\cdot d\text{ख}$ हा फरक त्यातून एकांक काळात बाहेर टाकल्या जाणाऱ्या $-\frac{\partial \text{छ}}{\partial \text{ळ}}\cdot d\text{ख}$ या पाण्याइतका असतो, या वस्तुस्थितीचे गणिती भाषेत केलेले विधान आहे.

मृत्तिकेचा पाझरगुणांक आणि जलीय प्रक्रम यांवरून स्राववेग ठरतो हे आपणांस माहीत आहे. चिकण थराच्या माथ्याजवळ अतिरिक्त जलदाब नेहमीच शून्य असतो. म्हणजेच तेथील मापिकेत पाणी च_0 हून अधिक उंचीपर्यंत कधीच चढणार नाही. याउलट, थरावर भार ठेवताच आ. ८१ मधील मापिकांतील पाणी च_1 उंचीपर्यंत चढते आणि दृढीभवन होत जाते तसे ते खाली उतरत राहते. *ळ* या कोणत्याही वेळी ते मूळ पातळीपासून *च* उंचीवर असते असे म्हणता येते. *ख* चे मूल्य वाढले, तर *च* चे मूल्य कमी होते आणि $\text{ख} = \text{ड}$ झाल्यास *च* चे मूल्य शून्य होते. यावरून $\text{ड} - \text{ख}$ या खोलीवरील *ळ* या क्षणाचा जलीय प्रक्रम असा मांडता येईल :

$$\text{म} = -\frac{\partial \text{च}}{\partial \text{ख}} = -\frac{१}{\text{घ}_{\text{ज}}}\cdot\frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}}$$

डार्सीच्या नियमानुसार स्राववेग

$$\text{ग} = \text{झम} = -\frac{\text{झ}}{\text{घ}_{\text{ज}}}\cdot\frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} \qquad [५]$$

होतो आणि उभ्या दिशेतील स्राववेगाच्या फरकाचे मान

$$\frac{\partial \text{ग}}{\partial \text{ख}} = -\frac{\text{झ}}{\text{घ}_{\text{ज}}}\cdot\frac{\partial^2 \text{उ}}{\partial \text{ख}^2}$$

असे मांडता येते. या समीकरणाचा विचार समी. ४ बरोबर केला असता, आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = \frac{झ}{घ_{ज} प_{द}} \cdot \frac{\partial^{2} उ}{\partial ख^{2}} \qquad [६]$$

हे समीकरण म्हणजे मागील परिच्छेदात उल्लेखिलेल्या गृहीतांनुसार मिळणारे, चिकण मृत्तिकेच्या थराच्या दृढीभवनाचे कलन-समीकरण आहे. (टेरझागी १९२३.) ते सोपे करण्यासाठी

$$\frac{झ}{घ_{ज} प_{द}} = द \qquad [७]$$

नियुक्त केल्यास,

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = द \cdot \frac{\partial^{2} उ}{\partial ख^{2}} \qquad [८]$$

असे त्याचे स्वरूप होते. द या गुणांकास **दृढीभवन गुणांक** म्हणतात. चिकण मृत्तिकेवरील भार कमी झाल्यास ती फुगते. त्या ठिकाणी द ऐवजी **स्फ** म्हणजे **स्फायन गुणांक** मांडला पाहिजे.

$$स्फ = \frac{झ}{घ_{ज} प_{स्फ}} \text{ सेंमी}^{2} \text{ सेकंद}^{-1} \qquad [९]$$

येथे $प_{स्फ}$ म्हणजे अवकाशवर्धनाचा गुणांक आहे (समी. ९८ (६)).

या समीकरणातील कोणतेही पद च० या मूळच्या स्थैतिक संचितावर अवलंबून नसल्यामुळे पुढील सर्व विवेचनात ते शून्य आहे, असे गृहीत धरले जाईल.

दृढीभवनाच्या प्रत्येक प्रक्रियेत अतिरिक्त पाणी स्थिर अवस्थेतून प्रवाही अवस्थेत जाते, ही गोष्ट अभिप्रेत आहे. समीकरण ८ सिद्ध करताना पाण्याच्या जडत्वावर मात करण्यासाठी आवश्यक असलेली कार्यशक्ती दुर्लक्षिली होती. एका संशोधकाने या गोष्टीस आक्षेप घेऊन असा दावा केला होता की, असे दुर्लक्ष करण्यामुळे अंतिम निष्कर्षांना बाध येतो. म्हणून प्रवेग-बले ज्यात विचारात घेतली आहेत, असे काटेकोर शास्त्रपूत उत्तर शोधण्यात आले (हैनरिश १९३८). या उत्तरावरून असे दिसून आले की, मूळच्या उत्तरात समाविष्ट झालेली चूक एक टक्कासुद्धा नव्हती.

१००. दृढीभवन आणि उष्णतासंवहन यांतील साम्य : समीकरण ९९ (६) मध्ये $घ_{ज} = १$ आहे असे गृहीत धरल्यास, ते समीकरण समदैशिक वस्तूतून होणाऱ्या अस्थायी आणि एकदिक् उष्णताप्रवाहाच्या कलन समीकरणासारखेच होते. त्यासाठी समीकरणातील पदांना पुढील प्राकृतिक अर्थ दिले पाहिजेत.

दृढीभवन सिद्धांत	*चिन्ह*	*उष्णतासंवहन सिद्धांत*
अतिरिक्त जलदाब	उ	तपमान
काळ	ळ	काळ
पाझरगुणांक	झ	उष्णता-वहन गुणांक
अवकाश बदलाचा गुणांक	$\frac{अ_{श}}{१+र_{०}} = प_{श}$	घनता × औष्णिक क्षमता
दृढीभवन किंवा स्फायन गुणांक	द/स्फ	उष्णता-संचरण गुणांक

जलनिर्गमन (दृढीभवन) घनवस्तूतील उष्णता-निर्गमनाशी (थंड होणे) आणि जलशोषण (स्फायन) उष्णतावर्धनाशी (तापणे) समान मानता येते. उष्णता-संवहनाशी असलेल्या या साम्याचे अस्तित्व दोन वेगवेगळ्या प्रकारे उपयुक्त ठरते. एक म्हणजे समी. ९९ (६) सोडविण्याची आवश्यकता काही प्रमाणात उरत नाही; कारण उष्णतासंवहनविषयक समस्यांची अनेकविध उत्तरे अगोदरच उपलब्ध आहेत. दुसरे असे की, थंड होणे किंवा तापणे या क्रिया दैनंदिन अनुभवामुळे प्रत्येकाच्या माहितीतल्या आहेत; तसे दृढीभवन आणि स्फायन या क्रियांचे नाही. त्यामुळे या दोन प्रक्रियांत साम्य आहे, हे समजल्यामुळे दृढीभवन आणि स्फायन या प्रक्रियांचे स्वरूप दृष्टीसमोर आणणे सोपे होते.

आकृती ८१ मध्ये दाखविलेली घटना या बाबतीत उदाहरण म्हणून घेता येईल. जलाभेद्य तळावर असलेल्या चिकण थरावर $प_{१}$ मूल्याचा अधिभार एकदम लावला असता, होणारे दृढीभवन तेथे विचारार्थ घेतले होते. भार लावताक्षणीच थरात प्रत्येक ठिकाणी $उ_{०} = प_{१}$ इतका अतिरिक्त जलदाब निर्माण होतो. *जसलत* या रेखांकित क्षेत्राच्या रुंदीने हा दाब दाखविला आहे. जसा काळ लोटेल त्याप्रमाणे हा दाब कमी होऊन शेवटी शून्य होतो. द जाडीचा पत्रा उ० तपमानापर्यंत तापवून सावकाशपणे थंड करण्याची क्रिया, हे उष्णतासंवहनातील यासारखेच उदाहरण आहे. तेथे पत्र्याच्या तळाजवळ उष्णतारोधक पदार्थ आहे; पृष्ठभाग हवामानाशी संपर्क ठेवून आहे आणि हवामानाचे तपमान शून्यांशाला स्थिर ठेवले आहे असे गृहीत धरू. पत्रा थंड होण्याची गती उघड्या पृष्ठापासून उष्णतारोधक तळाकडे कमी होत जाते. उष्णतासंवहनाशी असलेल्या साम्यामुळे आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की, चिकण मृत्तिकेच्या थराचे दृढीभवन होत असताना त्याचे मानही पृष्ठापासून जलाभेद्य तळाकडे क्रमशः कमी असेल. .ही प्रक्रिया विशद करणारी समीकरणे पुढील परिच्छेदात सिद्ध केली जातील.

सर्वसाधारण दृढीभवनाच्या प्रक्रिया आणि विज्ञानातील काही इतर प्रक्रिया यांच्या गणिती मांडणीतही साम्य आहे. त्या प्रक्रिया अशा : द्रवात विरघळलेल्या पदार्थांचे अभिसरण, वायूचे अभिसरण, तारांमधून होणारे वीज-प्रवाहाचे संवहन, स्थिर असलेल्या स्निग्ध द्रवातून होणारी घन वस्तूची हालचाल (टेरझागी आणि फ्रोह्लिश १९३६).

१०१. दृढीभवनकाळातील अतिरिक्त जलदाब : कलन-समीकरण ९९ (८) च्या साहाय्याने दृढीभवनशील थरातील पाण्याचा अतिरिक्त जलदाब (उ) मिळविता येतो. हे समीकरण सोडवून उ चे मूल्य ख आणि ळ यांच्या फलनाच्या स्वरूपात मिळते.

$$उ = फ(ख, ळ) \qquad [१]$$

दृढीभवनकारी प्रतिबलाचे स्वरूप आणि त्यात होणाऱ्या फरकाचा वेग, त्याचप्रमाणे अतिरिक्त पाणी ज्यांतून बाहेर पडते, त्या एक किंवा अधिक पृष्ठांचे स्थान इत्यादी गोष्टींवर या फलनाचे स्वरूप अवलंबून असते. या गोष्टींचा साकल्याने विचार केल्यास, त्यांच्याद्वारे समी. ९९(८) च्या उत्तराने पुऱ्या करावयाच्या अटी निश्चित होतात, असे दिसते. आकृती ८१ मधील उदाहरण पुनः विचारार्थ घेऊ. चिकण मृत्तिकेच्या थराचे, एकदम लावलेल्या अधिभाराखाली होणारे दृढीभवन तेथे दाखविले आहे. थरातील प्रत्येक आडव्या छेदावर या भारामुळे $द_१$ मूल्याचे दृढीभवनकारी प्रतिबल निर्माण होते. अतिरिक्त पाण्याला बाहेर पडण्यासाठी फक्त माथ्याकडचा पृष्ठभाग उपलब्ध आहे. भार लावण्याच्या क्षणी (ळ = ०) मृत्तिकेचा रंध्रांक बदललेला नसतो परंतु एकूण लंबदिक् दाब $द_१$ ने वाढलेला असतो; म्हणून ळ = ० असताना थरात सर्व ठिकाणी अतिरिक्त जलदाब $उ = द_१$ असतो. ळ चे मूल्य $० < ळ < \infty$ असते, तेव्हा थराच्या माथ्याजवळ (ख = ह) अतिरिक्त जलदाब शून्य असतो; कारण तेथे अतिरिक्त पाणी बाहेर पडण्याला कोणताही अडथळा नसतो. थराच्या तळाजवळ (ख = ०) स्राववेग नेहमीच शून्य असतो; कारण तळ जलाभेद्य आहे आणि त्यातून पाणी बाहेर पडत नसते. स्राववेग

$$ग = -\frac{झ}{घ_ज} \cdot \frac{\partial उ}{\partial ख} \qquad ९९(५)$$

असल्यामुळे थराच्या तळाजवळ (ख = ०)

$$\frac{\partial उ}{\partial ख} = ०$$

असे उत्तर मिळते. अनंत काळानंतर अतिरिक्त जलदाब शून्य होतो. ही लक्षणे खालील समीकरणांच्या संचाने संक्षिप्तपणे व्यक्त करता येतात.

$$ळ = ० \text{ आणि } ० \leqq ख < ह \qquad उ = द_१ \qquad [२अ]$$

$$० \leqq ळ \leqq \infty \text{ आणि } ख = ० \qquad \frac{\partial उ}{\partial ख} = ० \qquad [२आ]$$

$$० \leqq ळ \leqq \infty \text{ आणि } ख = ह \qquad उ = ० \qquad [२इ]$$

$$ळ = \infty \text{ आणि } ० \leqq ख \leqq ह \qquad उ = ० \qquad [२ई]$$

या लक्षणांच्या आधारे कलन-समीकरणाचे उत्तर फोरियरच्या श्रेणीने मिळवता येते.

आ. ८१ मध्ये दाखविलेली समस्या सोडवून पुढील उत्तर मिळते.

$$उ = \frac{४}{\pi} द_{१} \sum_{छ=०}^{छ=\infty} \frac{१}{२छ+१} ज्या \left[\frac{(२छ+१)\pi ख}{२ह}\right] \in^{-(२छ+१)^{२}\pi^{२} स/४} \qquad [३ अ]$$

या ठिकाणी $\in$ म्हणजे लघुगणकाचा मूलांक आहे आणि

$$स = \frac{ह}{ह^{२}} ळ = \frac{झ}{घ_{ज} प_{द}} \cdot \frac{ळ}{ह^{२}} \qquad [३ आ]$$

म्हणजे एक स्वतंत्र चल संख्या आहे. तिला **कालगुणक** म्हणतात. त्याची परिमाणे शुद्ध अंकासारखी असतात.

उपरोक्त थरातील अतिरिक्त जलदाबाच्या वितरणाची कल्पना येण्यासाठी त्यातून एस हा ४५° चा कोन करणारा एक तिरका छेद घेऊ (आ. ८२). त्यावर ठ या ठिकाणी एक जलस्तंभमापिका लावू. तेथील अतिरिक्त जलदाब उ असेल, तर मापिकेतील पाणी $च = उ / घ_{ज}$ उंचीपर्यंत चढते. आकृती ८१ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ही उंची भूजलपातळी-पासून वर मोजली जाते. च चे मूल्य भूजलपातळीच्या स्थानावर अवलंबून नसते, म्हणून $च_{०} = ०$ असे गृहीत धरू आणि च चे मूल्य थराच्या माथ्यापासून वर स्थित करू. ही कृती करून प्राप्त होणारा बिंदू ज्या एका आलेखावर पडतो त्यास **एककालीन रेषा** म्हणतात. एखाद्या दृढीभवनशील थरातून घेतलेल्या तिरक्या छेदावर निरनिराळ्या ठिकाणी ठेवलेल्या प्रत्येक मापिकेत, एका विवक्षित क्षणी ज्या उंचीपर्यंत पाणी चढते ते बिंदू जोडणारी रेषा म्हणजे एककालीन रेषा होय. चेठ या छेदावरील स्थान आणि एककालीन रेषेवरील (आ. ८२ मधील ळ) तदनुंषिक प या बिंदूचे स्थान यांच्या उंचीतील फरक म्हणजे ठ येथील ळ या क्षणाचे दाबसंचित होय. त्यावरून उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$उ_{ज} = घ_{ज} \overline{ठप} = घ_{ज} (ड + च - ख) \qquad [४]$$

पूर्वीच म्हटल्याप्रमाणे ठ येथील, मूळच्या जलपातळीपासून वर मोजलेले अतिरिक्त संचित

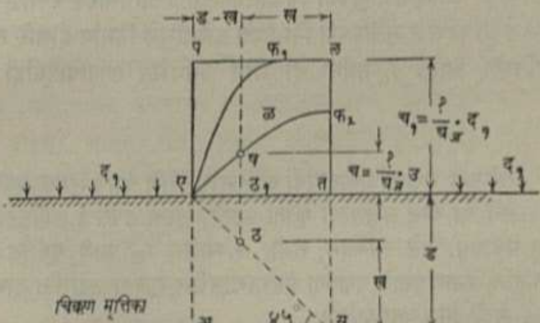
$$च = \frac{उ}{घ_{ज}} \qquad [५]$$

आहे. येथे उ हा ळ या क्षणाचा अतिरिक्त जलदाब आहे आणि त्याचे मूल्य समी. ३ ने ठरविता येते. ही समीकरणे ३ म्हणजे समी. ९९ (८) चे उत्तर आहे हे वर पाहिलेच आहे. ठ येथील ळ या क्षणाचा जलीय प्रक्रम असा आहे :

$$म = -\frac{\partial च}{\partial ख} = -\frac{१}{घ_{ज}} \cdot \frac{\partial उ}{\partial ख} \qquad [६]$$

म चे मूल्य ऋण असेल, तर प्रक्रमाची दिशा अधोमुख असते. $\overline{तठ_1}$ = ख असल्यामुळे ठ येथील ळ या क्षणाचा प्रक्रम आणि तदनुषंगिक प या बिंदुस्थानाचा एककालीन रेषेचा उतार एकच असतात. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे हा उतार ए बिंदूकडे जाणारा असेल, तर ठ येथील प्रक्रम धन असतो. याचा अर्थ असा की, ठ च्या पातळीवर अतिरिक्त पाणी ऊर्ध्व दिशेने वाहते आहे.

आकृती ८२ मधील उदाहरणच पुढे विचारात घेऊ. थराच्या पृष्ठभागावर समप्रमाण वितरित भार लावताक्षणीच मिळणारी एककालीन रेषा एपल या खंडसाधित रेषेने दाखविली जाते. तिचा पल हा आडवा खंड थराच्या पृष्ठभागापासून $द_1/प_{ज}$ इतक्या उंचीवर आहे. ही रेषा म्हणजे **एककालीन आदि-रेषा** होय. दृढीभवन-प्रक्रियेच्या प्रारंभाच्या काळातील एककालीन रेषांना पल स्पर्शरेषेप्रमाणे असते. त्यावरून हे स्पष्ट होते की, या वेळी थराच्या वरच्या भागातच दृढीभवन होत असते आणि खालच्या भागातील रंध्रांक बदललेला नसतो. नंतरच्या अवस्थेतील एककालीन रेषा तल या उभ्या रेषेला जाऊन टेकतात; उदाहरणार्थ, $एफ_2$. थरावर भार ठेवल्यापासून तळाजवळील कार्यसाधक प्रतिबलात झालेली वाढ $लफ_2$ ने दाखविली जाते. कोणत्याही पातळीवर तिच्या ख या उंचीनुसार स्राववेग वाढत जात असल्यामुळे आकृतीतील एककालीन रेषांचा उतार डावीकडे वाढत जातो. ज्या भागात दृढीभवन चालू असते त्याच्या तळाजवळ स्राववेग शून्य असतो; म्हणजेच $\partial उ/\partial ख = ०$; म्हणून कोणत्याही क्षणी एककालीन रेषांच्या उजव्या टोकाजवळ काढलेल्या स्पर्शरेषा आडव्या असल्या पाहिजेत. दृढीभवन पूर्ण झाल्यानंतर मिळणारी एककालीन रेषा एत ही आहे. तिला **एककालीन अंतिमरेषा** म्हणतात. जलविषयक बाह्य लक्षणे—उदाहरणार्थ, भूजलपातळीचे स्थान इ.—तीच



आकृती ८२ : समप्रमाणात वितरित असलेला भार एकदम लावला असता, होणारे चिकण थराचे दृढीभवन. सलग रेषांनी दाखविलेल्या एककालीन रेषा म्हणजे एस वर लावलेल्या मापिकांतील स्तंभशीर्षांचा बिंदुपथ होय.

राहिली, तर एककालीन अंतिम रेषा आणि दृढीभवनकारी बले कारक होण्यापूर्वी मापिकांतील स्तंभशीर्षे जोडणारी रेषा या एकच असतात.

उष्णतासंवहन विषयात, थराच्या पृष्ठापासून मोजलेली एककालीन रेषांची कोटीमूल्ये तपमान दाखवितात. थंड होण्याच्या प्रक्रियेतील प्रारंभीची अवस्था एफ$_{१}$ या एककालीन रेषेने दाखविली जाते. त्यावेळी पत्र्याच्या खालच्या भागात तपमान मूळचेच असते परंतु वरचा भाग मात्र थंड झालेला असतो.

दृढीभवनप्रक्रियेत क्रमशः निर्माण होणाऱ्या अवस्था एककालीन रेषांच्या साहाय्याने दाखविणाऱ्या रेखाकृतीला—उदा., आ० ८२ मधील रेखाकृतीला—**संचितचित्र** असे म्हटले जाईल. त्याच्या साहाय्याने दृढीभवनशील थरातील प्रत्येक ठिकाणाची, कोणत्याही क्षणाची प्रतिबल-परिस्थिती ठरविणे सोपे होते. आकृती ८२ मधील उदाहरणात, ख उंचीवरील आडव्या छेदावर ळ या कोणत्याही क्षणी असणारे एकूण प्रतिबल खालीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$द_{ळ} = द_{१} + घ\,(ह - ख) \qquad [७]$$

येथे घ ही मृत्तिकेची आर्द्र घनता आहे. उदासीन प्रतिबल असे असेल :

$$उ_{ज} = उ + घ_{ज}\,(ह - ख) \qquad [८]$$

म्हणून कार्यसाधक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$\bar{द}_{ळ} = द_{ळ} - उ_{ज} = (द_{१} - उ) + (ह - ख)\;(घ - घ_{ज}) \qquad [९]$$

या समीकरणात $द_{१} - उ$ म्हणजे कार्यसाधक प्रतिबलातील अधिभारजन्य वाढ आहे आणि $(ह - ख)(घ - घ_{ज})$ म्हणजे मृत्तिकेच्या निमज्जित वजनामुळे निर्माण होणारे ख उंचीवरील कार्यसाधक प्रतिबल आहे. $\bar{द}_{ळ}$ मधील हा भाग अधिभार लावण्यापूर्वीही अस्तित्वात होताच.

चिक्कण मृत्तिकेच्या थरावर प्रयोगापूर्वी अधिभार नसणे आणि भूजलपातळी थराच्या पृष्ठभागाशी असणे या दोन लक्षणांची पूर्तता झाली, तरच उपरोक्त समीकरणे विशिष्ट प्रकरणी लागू पडतात. तसे नसल्यास, समी. ७ मधील $द_{ळ}$ मध्ये पूर्वीचा अधिभार मिळविला पाहिजे; त्याचप्रमाणे थराच्या पृष्ठभागावरील मूळचा उदासीन दाबही समी. ८ मधील $उ_{ज}$ मध्ये मिळविला पाहिजे.

आडव्या, चिक्कण थराच्या दृढीभवनाची महत्त्वाची इतरही काही उदाहरणे त्यांतील एककालीन रेषांसह आ. ८३ अ ते ऊ यांमध्ये दाखविली आहेत. आकृती ८३ अ मधील उदाहरणात २ ह जाडीचा थर एका पाझरक्षम थरावर आधारित आहे. त्यामुळे अतिरिक्त

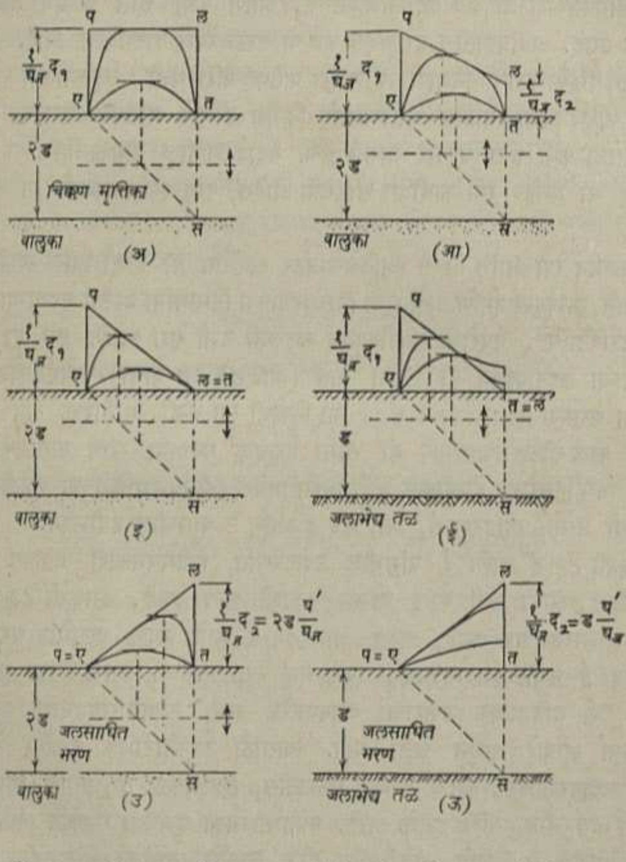
होणारे पाणी थराच्या माथ्याकडे आणि तळाकडे, असे दोन्ही दिशांनी बाहेर जाऊ शकते. पाण्याचे हे बहिर्गमन थराच्या मध्यपातळीच्या संदर्भात, सममात्र पद्धतीने होते. त्यामुळे एककालीन रेषाही सममात्र असतात. आकृती ८३ आ मधील उदाहरणात सुद्धा चिकण मृत्तिकेचा थर (जाडी २ ह) पाझरक्षम तळावर आधारित आहे; परंतु दृढीभवनकारी प्रतिबल माथ्याजवळ $द_1$ आणि कमी होत जाऊन तळाजवळ $द_2$ असे आहे. प्रतिबलातील हा बदल *पल* या सरळ रेषेने दाखविला आहे. थरावर ठेवलेल्या पट्टिकाभाराने निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती स्थूलमानाने अशीच असते. कारण अशा स्थानिक अधिभाराने निर्माण होणारे प्रतिबल थराच्या माथ्या-पासून खाली कमी होत जाणारे असते. या उदाहरणातील एककालीन रेषा आणि आ. ८३ अ मधील रेषा काहीशा सारख्या आहेत, परंतु त्यांच्याप्रमाणे या सममात्र नाहीत.

एककालीन रेषा आणि तिची क्षितिजसमांतर स्पर्शरेषा या दोहोंमधील स्पर्शबिंदूच्या साहाय्याने, ऊर्ध्वमुख आणि अधोमुख निस्सारणांच्या विभागांना अलग करणाऱ्या सीमेचे स्थान ठरविता येते. उपरोक्त स्पर्शबिंदूतून काढलेली उभी रेषा आणि *एस* हा तिरपा छेद यांच्या छेदनबिंदूतून ही सीमा जाते (आ. ८३ आ पाहा). भार लावताक्षणी ही सीमा थराच्या पृष्ठभागाशी असते. त्या ठिकाणी त्या वेळी अतिरिक्त दाब महत्तम असतो. काळ लोटेल त्याप्रमाणे ही सीमा हळूहळू थराच्या मध्य पातळीकडे जात असते. जेथे निस्सारण दोन्हीकडे होते अशा प्रत्येक दृढीभवनप्रक्रियेच्या बाबतीत हीच परिस्थिती असते; उदाहरणार्थ, आ. ८३ इ आणि उ यांमधील दृढीभवन.

आकृती ८३ इ आणि ई यांमधील उदाहरणांत, दृढीभवनकारी प्रतिबल वरच्या पृष्ठाजवळ $द_1$ आणि कमी होत जाऊन तळाशी शून्य आहे. आकृती ८३ इ मध्ये तळाला पाझरक्षम थर आहे; परंतु आ. ८३ ई मध्ये मात्र जलाभेद्य थर आहे. आ. ८३ ई मधील उदाहरणात एककालीन रेषा *पत* या आदि-रेषेला छेदणाऱ्या आहेत. या गणितात्मक उत्तराचा व्यावहारिक अर्थ, उष्णतासंवहनाशी असलेल्या साम्याच्या आधारे जाणून घेता येतो. त्यासाठी उष्णतारोधक तळावर ठेवलेल्या पत्र्याचे उदाहरण घेऊ. त्याचे तपमान सुरुवातीस, तळाजवळ $त_0$ आणि माथ्याजवळ $त_0 + त = त_0 + घ_{ज} \cdot \overline{एप}$ इतके आहे. पत्र्याचा माथा हवेच्या संपर्कात आहे आणि तिचे तपमानही $त_0$ आहे. पत्रा थंड होऊ लागतो त्यावेळी तळाकडील तपमान तात्पुरते वाढते. तपमानातील ही वाढ म्हणजे दृढीभवन-सिद्धांतातील स्फायन होय.

पाझरक्षम थरावरील जलसाधित भरणाच्या बाबतीत मिळणारे संचित-चित्र आ. ८३ उ मध्ये दाखविले आहे. भरणाचे काम चालू असताना होणारे दृढीभवन आणि तज्जन्य घनतेतील बदल दुर्लक्षिले तरी चालतील, असे गृहीत धरून हे चित्र काढले आहे. भरण पुरे झाले, तरी प्रारंभी ते द्रवसदृश अवस्थेतच असते. त्यामुळे $१ ड - ख$ उंचीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावर येणाऱ्या प्रतिबलाचे मूल्य $(१ ड - ख) \cdot घ$ इतके

असते—येथे घ ही द्रवसदृश मृत्तिकेची घनता आहे—आणि कार्यसाधक प्रतिबल शून्य असते. दृढीभवनाच्या प्रक्रियेस अद्याप प्रारंभ व्हावयाचा असल्यामुळे ळ = ० या क्षणी, उपरोक्त छेदावरील उदासीन प्रतिबल, (२ ह – ख) घ या एकूण प्रतिबलाइतकेच

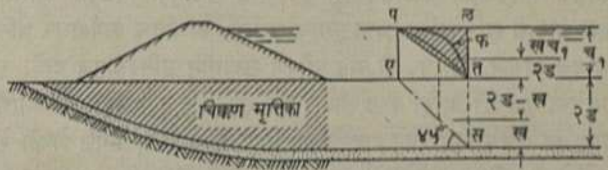


आकृती ८३ : दृढीभवनकारी उभ्या दाबाचे भिन्नभिन्न वितरण आणि निस्सारणाच्या भिन्नभिन्न पद्धती यांनुसार होणाऱ्या दृढीभवनाची प्रगती दाखविणाऱ्या एककालीन रेषा (आधार : टेरझागी आणि फ्रोह्लिश १९३६).

असते. तेथे मापिका लावल्यास, तिच्यात (२ ह – ख) घ/घ$_{ज}$ इतक्या उंचीपर्यंत पाणी चढते. हीच उंची भरणाच्या पृष्ठभागापासून मोजल्यास ती पुढीलप्रमाणे असते.

$$\text{च} = \frac{१}{\text{घ}_{\text{ज}}}(२\text{इ} - \text{ख})\,\text{घ} - (२\text{इ} - \text{ख}) = (२\text{इ} - \text{ख})\left(\frac{\text{घ} - \text{घ}_{\text{ज}}}{\text{घ}_{\text{ज}}}\right) = (२\text{इ} - \text{ख})\frac{\text{घ}'}{\text{घ}_{\text{ज}}}$$

संचिताची ही प्रारंभीची मूल्ये आ. ८३ उ मध्ये एल या रेषेने दाखविली आहेत. तदनंतरच्या दृढीभवन-प्रक्रियेत संचिताचे मूल्य हळूहळू शून्याप्रत जाऊ लागते आणि ऊर्ध्वमुख आणि अधोमुख निस्सारणांचे विभाग स्पष्ट करणारी सीमा हळूहळू भरणाच्या तळापासून मध्य पातळीकडे सरकते. आकृती ८३ ऊ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भरण जलाभेद्य तळावर असेल, तर एककालीन रेषा एकाच बाजूला—आकृतीत डावीकडे—उतरतात. जलाभेद्य तळाशी जलीय प्रक्रम शून्य असल्यामुळे, त्या लत रेषेला काटकोनात छेदतात.



आकृती ८४ : धरणाखालील चिकण थराचे अधोमुख दिशेतील क्षरणामुळे होणारे दृढीभवन. चिकण थराखालच्या वाळूच्या थराचे तोंड धरणाच्या प्रवाह-दिशेकडे उघडते आहे.

येथे हे लक्षात येईल की, जेथे अतिरिक्त पाणी थराच्या दोन्ही पृष्ठभागांतून बाहेर पडते तेथे थराची जाडी २इ घेतली आहे (आ॰ ८३ अ, आ, इ आणि उ); परंतु बाकीच्या ठिकाणी इ ठेवली आहे. या महत्त्वाच्या भेदाचे कारण खालील परिच्छेदात विशद केले जाईल.

चिकण मृत्तिकेच्या थराचे दृढीभवन, त्यातून होणाऱ्या अधोमुख प्रवाहाने सुद्धा घडून येणे शक्य असते. अशा प्रक्रियेचे स्वरूप स्पष्ट होण्यासाठी आकृती ८४ मध्ये एका धरणाचा छेद दाखविला आहे. धरणाखाली २इ जाडीचा चिकण थर आहे आणि त्याखाली वाळूचा थर आहे. तलाव भरण्यापूर्वी भूजलपातळी भूपृष्ठालगतच होती असे गृहीत धरले आहे. वाळूचा थर प्रवाहदिशेला भूपृष्ठालगत आलेला आहे. तलावातील पाण्याची खोली $\text{च}_१$ झाली असता, चिकण थरातील प्रत्येक आडव्या छेदावरील लंबरूप प्रतिबल $\text{च}_१\text{घ}_{\text{ज}}$ इतके वाढते. वाळूच्या थरातील संचितही $\text{च}_१$ इतके वाढलेले असेल, तर सगळीकडे उदासीन प्रतिबलातील वाढ, एकूण प्रतिबलातील वाढीइतकीच असेल आणि चिकण थरातील कार्यसाधक प्रतिबल आणि रंध्रांक बदलणार नाहीत. याउलट, वाळूचा थर भूपृष्ठालगत येत असल्यामुळे, त्यातील संचित मूळ मूल्याइतकेच राहत असेल, तर त्याचा अर्थ जलाशयातून चिकण थराच्या द्वारे वाळूच्या थराकडे प्रवाह सुरू होतो. या प्रवाहाला स्थायी स्वरूप आले म्हणजे चिकण थरातील एस या छेदावरील

कोणत्याही ठिकाणाचे स्थैतिक संचित *पत* रेषेवरील तदनुषंगिक बिंदूच्या कोटीइतके असते. येथे भरावाचा तळ हा आडवा अक्ष आहे. या कोटीमूल्यांच्या साहाय्याने चिक्कण थरातील उदासीन प्रतिबलात होणारी $\text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{१}\text{ख}/\text{२ड}$ ही स्थायी स्वरूपाची वाढही ठरविता येते. तलाव भरल्यामुळे थरातील आडव्या छेदावरील एकूण प्रतिबल $\text{च}_{१}\text{घ}_{\text{ज}}$ ने वाढलेले आहेच. तेव्हा कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबलातील वाढ पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$\text{द} = \text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{१}\left(१ - \frac{\text{ख}}{\text{२ड}}\right)$$

कार्यसाधक प्रतिबलात होऊ शकणारी ही वाढ दृढीभवन घडवून आणते. तलाव भरल्यानंतर प्रारंभी मृत्तिकेतील रंध्राक तसाच राहतो. अर्थातच कार्यसाधक प्रतिबलातील वाढही शून्यच असते. $\text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{१}$ ही वाढ पूर्णपणे उदासीन प्रतिबलांतच होते. त्यावेळची एककालीन रेषा *पल* ही आहे. काळ लोटेल तसे मृत्तिकेचे दृढीभवन होते आणि स्थैतिक संचित *पफत* या एककालीन रेषेने दाखविल्याप्रमाणे कमी होते; आणि शेवटी संचिताची मूल्ये *पत* रेषेने दाखविल्याप्रमाणे होतात. दृढीभवनाची ही प्रक्रिया आ० ८३ उ मध्ये दाखविलेल्या प्रक्रियेसारखीच आहे.

दृढीभवनकारी प्रतिबले कारक होण्यापूर्वी मापिकांतील स्तंभशीर्षे जोडणाऱ्या *एत* या रेषेच्या वर स्थित असणाऱ्या एककालीन अंतिम रेषेचे *पत* हे एक उदाहरण आहे. एककालीन अंतिम रेषा मूळ भूजलपातळीच्या वर किंवा खाली स्थित असेल, तर दृढीभवनप्रक्रियेच्या कलनसमीकरणातील (समी. ९९ (८)) उ हा अतिरिक्त जलदाब म्हणजे एखाद्या ठिकाणाचा, विवक्षित क्षणी असलेला जलदाब आणि तेथलाच एक तर मूळचा किंवा अंतिम जलदाब यांतील फरक असतो. त्यामुळे संदर्भ म्हणून दोन भिन्न दाबमूल्यांपैकी कोणतेही एक आपण निवडू शकतो; परंतु या निवडीचा गणिताच्या फलितावर काही परिणाम होत नाही. ग्रंथकर्त्याने नेहमी अंतिम जलदाब हाच संदर्भदाब म्हणून वापरला आहे. या यदृच्छया स्वीकारलेल्या संकेतानुसार एककालीन अंतिम रेषा ही संचितमूल्ये मोजण्याची संदर्भ-रेषा ठरते.

१०२. दृढीभवनजन्य अवसीदन : चिक्कण मृत्तिकेचे दृढीभवन होत असताना रंध्रांकात जी घट होते, तिच्यामुळे थराची जाडीही कमी होते. थराच्या पृष्ठभागाची अधोमुख दिशेने होणारी तदनुषंगिक हालचाल म्हणजेच **दृढीभवनजन्य अवसीदन** होय. मृत्तिकेत, दर एकांक अवकाशागणिक होणारी $\Delta\text{छ}_{१}$ ही अंतिम घट समी. ९८ (४) ने ठरविता येते; ती अशी :

$$\Delta\text{छ}_{१} = \frac{\text{अ}_{\text{द}}}{१+\text{र}_{०}}\,\text{द}_{१} = \text{प}_{\text{द}}\text{द}_{१}$$

येथे $द_1$ हा दृढीभवनकारी दाब आहे (परि. ९९ पाहा). आकृती ८२ मधील उदाहरणात दृढीभवनकारी दाब चिकण थरात सगळीकडे सारखाच आहे; म्हणून त्या थराचे दृढीभवनजन्य अंतिम अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$न_1 = इ \, \Delta छ_1 = इ प_द द_1 \qquad [२]$$

दृढीभवनकारी दाब खाली जावे तसा सरळ प्रमाणात बदलत असेल—उदाहरणार्थ, आ. ८३ आ ते ऊ आणि आ. ८४ यांमध्ये दाखविल्याप्रमाणे—तर अंतिम अवसीदन पुढीलप्रमाणे असते.

$$न_1 = प_द \, इ \, \frac{द_1 + द_2}{२} \qquad [३]$$

येथे $द_1$ हा पृष्ठभागाजवळचा आणि $द_2$ हा तळाजवळचा दृढीभवनकारी दाब आहे.

एखाद्या चिकण थरावर अधिभार ठेवला असता, त्यात निर्माण होणारा दृढीभवनकारी दाब सगळीकडे सारखाच असतो आणि तज्जन्य अंतिम अवसीदन समी. २ ने मिळते, हे वर पाहिलेच आहे. अधिभार लावण्याचा क्षण आणि नंतरचा कोणताही क्षण ळ या अवधीतील परिस्थिती आता विचारात घेऊ. इ–ख खोलीवरील छेदावर येणारा कार्यसाधक दाब ळ या क्षणी पुढीलप्रमाणे असतो.

$$\bar{द} = द_1 - उ$$

कार्यसाधक दाबातील या वाढीमुळे मृत्तिकेच्या सच्छिद्रतेत होणारी घट समी. ९८ (४) मध्ये $\Delta \bar{द} = \bar{द}$ नियुक्त करून पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\Delta छ = प_द \, \bar{द} = प_द \, (द_1 - उ) \qquad [४]$$

थराच्या मूळ dख या जाडीत होणारी घट

$$dन = \Delta छ . \, dख = प_द \, (द_1 - उ) \, dख \qquad [५]$$

अशी मिळते. तीवरून ळ या क्षणाचे अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$न = \int_0^इ \Delta छ \cdot dख = प_द \left(द_1 इ - \int_0^इ उ \, dख \right) \qquad [६]$$

आकृती ८२ मधील चिकण थराच्या बाबतीत उ चे मूल्य समी. १०१ (३) ने मिळते. ते मूल्य समी. ६ मध्ये घालून आणि चलानयन करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$न = प_{द}\, द_{१}\, ह \left[१ - \frac{८}{\pi^{२}} \sum_{छ=०}^{छ=\infty} \frac{१}{(२छ+१)^{२}} \cdot e^{-(२छ+१)^{२} \pi^{२} स/४} \right] \quad [७]$$

त्यातील

$$स = \frac{ह}{ड^{२}} ळ \qquad १०१ \ (३ आ)$$

हा समय-गुणक किंवा कालगुणक आहे.

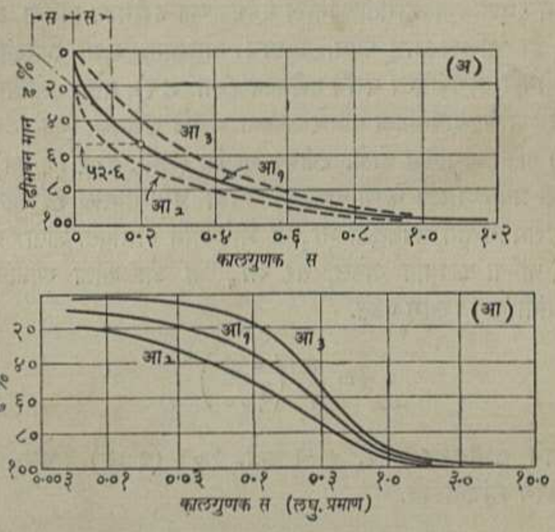
समी. ७ मधील कंसाबाहेरचे पद म्हणजे समी. २ ने मिळणारे अंतिम अवसीदन आहे. थराची सीमालक्षणे आ. ८२ मध्ये दाखविल्यापेक्षा निराळी असतील, तर कंसातील पदही वेगळे असते. तथापि कोणत्याही उदाहरणात, समीकरणाच्या उजव्या बाजूकडील पहिले पद अंतिम अवसीदन दाखविणारे असते आणि कंसातील पद नेहमीच समयगुणकाचे एखादे फलन असते. म्हणून

$$न = न_{१} \cdot फ(स) = न_{१} \frac{द\%}{१००} \qquad [८अ]$$

$$द\% = १०० \frac{न}{न_{१}} = १०० फ(स) \qquad [८आ]$$

$द\%$ म्हणजे **दृढीभवनाचे मान** होय. सीमालक्षणे आणि समयगुणक यांवरच केवळ ते अवलंबून असते. $फ(स)$ या फलनाचे स्वरूप समस्येतील परिस्थितीवर अवलंबून असते. अनेक, विविध उदाहरणांतील $फ(स)$ची मूल्ये यापूर्वीच माहीत आहेत (टेरझागी आणि फ्रोहूलिश, १९६६). म्हणून अपवादात्मक उदाहरणे सोडल्यास, या फलनाचे मूल्य ठरविण्याची आवश्यकता भासत नाही. आकृती ८२, ८३ अ, ८३ आ, ८३ इ आणि ८३ उ यांमधील उदाहरणांत लागू पडणारे $१००फ(स) = द\%$ हे फलन आ० ८५ मध्ये *आ*, या आलेखाने दाखविले आहे. पहिले उदाहरण वगळल्यास, या सर्व उदाहरणांत अतिरिक्त दाबामुळे थरातून दोन विरुद्ध दिशांना होणारे निस्सारण अभिप्रेत आहे. हा अतिरिक्त दाब खोलीनुसार सरळ प्रमाणात वाढणारा आहे. या सर्वच उदाहरणांत एकच समयगुणक-दृढीभवन आलेख लागू पडतो. यावरून एक गोष्ट स्पष्ट होते की, त्यांचा आकार एककालीन आदिरेषेच्या उतारावर अवलंबून नाही. तथापि त्यासाठी ही रेषा सरळ असावी आणि निस्सारण दोन्ही दिशांनी व्हावे. चिकण थराच्या दोन्ही पृष्ठांमधून निस्सारण होऊ शकले, तर त्यास **उघडा थर** म्हणतात. अशा थराची जाडी नेहमी २ ड अशी मांडली जाते. याउलट, ज्या थरातील अतिरिक्त पाणी एकाच पृष्ठभागातून बाहेर पडते त्यास **अर्धबंदिस्त थर** म्हणतात आणि त्याची जाडी ड अशी दाखविली जाते.

अर्धबंदिस्त चिक्कण थरांच्या बाबतीत समयगुणक-दृढीभवनमान आलेखाचा आकार दृढीभवनकारी दाबाच्या वितरणावर अवलंबून असतो. नेहमी अनुभवास येणारी दोन निरनिराळी वितरणे आ. ८३ ई आणि ऊ यांमध्ये दाखविली आहेत. तदनुषंगिक आलेख म्हणजे आ. ८५ अ मधील *आ*$_2$ आणि *आ*$_3$ हे आलेख होत. अर्धबंदिस्त थरावर समप्रमाण वितरित दृढीभवनकारी भार ठेवला असता—उदाहरणार्थ, आ. ८२ मधील थर पाहा—मिळणारा समयगुणक-दृढीभवन आलेख आणि उघड्या थराचा आलेख (आ$_1$) सारखेच असतात. कारण अशा थरातील दृढीभवन आ. ८३ अ मध्ये दाखविलेल्या उघड्या थराच्या प्रत्येक अर्धात होणाऱ्या दृढीभवनासारखेच असते.



आकृती ८५ : समयगुणक आणि दृढीभवनाचे मान यांतील संबंध. (अ) मध्ये अंकात्मक मूल्यांचा आलेख आहे आणि (आ) मध्ये गुणकाची लघुगणकीय मूल्ये घेऊन आलेख काढला आहे. आ. ८३ अ, ई आणि ऊ यांमध्ये दाखविलेल्या भार आणि निस्सारण या बाबतीतील भिन्नभिन्न उदाहरणांना लागू पडणारे तीन आलेख, आ$_1$ ते आ$_3$ (आधार : टेरझागी आणि फ्रोह्लिश १९३६).

नेहमी अनुभवास येणाऱ्या बऱ्याचशा दृढीभवन समस्यांची उत्तरे आ. ८५ अ मधील *आ*$_1$, *आ*$_2$ आणि *आ*$_3$ या आलेखांच्या द्वारे मिळतात. अन्य अनेक समस्यांची उत्तरेही प्रकाशित झाली आहेत (टेरझागी आणि फ्रोह्लिश १९३६). चिक्कण थराच्या पृष्ठभागाचे ळ या क्षणी झालेले अवसीदन ठरवावयाचे असेल, तर प्रथम समी. २ किंवा ३ च्या साहाय्याने न$_1$ हे अंतिम अवसीदन ठरवावे; नंतर समी. १०१ (३ आ) वरून

समयगुणक ठरवावा आणि शेवटी आ. ८५ अ मधील योग्य त्या आलेखावरून दृढीभवनाचे मान वाचावे. ळ क्षणापर्यंत झालेले अवसीदन समी. ८ अ वरून पुढील-प्रमाणे मिळते.

$$न = न_{१} \frac{ढ\%}{१००}$$

समयगुणक ठरविताना तद्विषयक समीकरणातील ड चे मूल्य, उघड्या थरांच्या बाबतीत दृढीभवनपूर्व जाडीच्या निम्मे असते आणि अर्धबंदिस्त थरांच्याबाबतीत ते एकूण जाडीइतके असते.

बहुतकरून स्थापत्यव्यवहारातील विशेष महत्त्वाच्या दृढीभवन समस्या, आ. ८५ अ मधील $आ_{१}$ हा आलेख लागू पडेल, अशाच असतात. अशा समस्यांत समप्रमाण दाबाखाली होणारे अर्धबंदिस्त थरांचे दृढीभवन (आ. ८२); तसेच खोलीनुसार सरळ प्रमाणात बदलणाऱ्या दाबाखाली होणारे उघड्या थरांचे दृढीभवन (आ. ८३ अ, आ, इ आणि उ) यांचा समावेश होतो. दृढीभवनगुणांक (समी. १०१ (३ आ) मधील द) ठरविण्यासाठी प्रयोगशाळेत केल्या जाणाऱ्या लहान प्रमाणावरील दृढीभवन-प्रयोगातील समयगुणक-दृढीभवनमान संबंधसुद्धा $आ_{१}$ या आलेखाने दाखविला जातो. $ढ\%$ हे मूल्य ० ते ५२·६ यांच्या दरम्यान असेल, तर $आ_{१}$ या आलेखाला खालील समीकरण जवळजवळ तंतोतंतपणे लागू पडते.

$$स = \frac{\pi}{४}\left(\frac{ढ\%}{१००}\right)^{२} \qquad [९]$$

हे परिवलयाचे समीकरण आहे. स चे समी. १०१ (३ आ) मधील मूल्य घेऊन पुढील समीकरण मांडता येते.

$$\frac{ढ\%}{१००} = \sqrt{\frac{४द}{\pi ड^{२}}} \cdot \sqrt{ळ} \qquad [१०]$$

विशिष्ट उदाहरणात द आणि ड यांची मूल्ये स्थिर असतात, त्यामुळे $ढ\%$ चे मूल्य जेव्हा ५२·६ पेक्षा कमी असते तेव्हा आकस्मिक भाराखालील दृढीभवनाचे मान काळाच्या वर्गमुळानुसार वाढते. तेच मूल्य ५२·६ पेक्षा अधिक असल्यास, $आ_{१}$ या आलेखाला पुढील समीकरण जवळजवळ तंतोतंतपणे लागू पडते.

$$स = १\cdot७८१ - ०\cdot९३३ \; लघु_{१०} (१०० - ढ\%) \qquad [११]$$

आ. ८५ अ वरून हे लक्षात येईल की, $ढ\%$ चे मूल्य ५० च्या सुमारास येईपर्यंत $आ_{१}$ या आलेखाच्या वक्रतेची त्रिज्या वाढत जाते; नंतर कमी होऊन $ढ\%$ चे मूल्य

८५ च्या सुमारास आले म्हणजे ती पुनः लघुतम होते. आलेखाच्या पहिल्या भागाचा आकार परिवलयासारखा असल्यामुळे या भागात कोणत्याही बिंदूला (भुजा : स) स्पर्शरेषा काढली असता, ती आडव्या अक्षास –स अंतरावर छेदते.

आकृती ८५ अ मध्ये आ, या आलेखाने दाखविलेला संबंध आ. ८५ आ मध्ये लघुगणकीय पद्धतीने दाखविलेला आहे. या आलेखात ह%=७५ (सुमारे) या ठिकाणी प्रतिवक्रता बिंदू आहे आणि ह%=९५ च्या आसपास आलेख त्वरेने सपाट होऊन ह%=१०० या मूल्यास असंपाती पद्धतीने मिळू पाहतो. या आलेखाचे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडता येते.

$$लघु_{१०}स = फ(ह\%)$$

स चे समी. १०१ (३ आ) मधील मूल्य घेऊन

$$लघु_{१०}स = लघु_{१०}ळ + लघु_{१०}\frac{ह}{ह^{२}} = लघु_{१०}ळ + \text{स्थिरांक} = फ(ह\%)$$

असे समीकरण मिळते आणि त्यावरून खालील निष्कर्ष निघतो. $ह/ह^{२}$ पदाचे मूल्य ज्यांच्या बाबतीत भिन्न आहे, अशा दोन चिकण थरांच्या बाबतीत दृढीभवनमान आणि काळाचा लघुगणक यांमधील संबंधाचे आलेख काढले, तर त्यांचा आकार सारखा असतो; परंतु त्यांच्या स्थानात $लघु_{१०}(ह/ह^{२})$ इतके आडवे अंतर असते. $स/ळ=१$ असल्यास काळ-दृढीभवन आलेख आणि कालगुणक-दृढीभवन आलेख हे दोन्ही आलेख एकत्र होतात. काळ-दृढीभवनाच्या अर्धलघुगणकीय पद्धतीने काढलेल्या आलेखाच्या या महत्त्वाच्या वैशिष्ट्यामुळे, प्रायोगिक दृढीभवन आलेख आणि सैद्धांतिक प्रमाण आलेख यांची तुलना करणे सोयीचे होते. अशा तुलनेतून सैद्धांतिक प्रक्रियेपेक्षा प्रत्यक्षातील प्रक्रिया किती वेगळी आहे, हे समजून येते. त्यामुळे कित्येक प्रकरणांत साध्या गणिती आलेखापेक्षा लघुगणकीय आलेख काढणे अधिक श्रेयस्कर ठरते.

१०३. दृढीभवनसमस्या सोडविण्याच्या आसन्नमान पद्धती : कलन-समी. ९९ (८) सोडवून मिळणाऱ्या उत्तरांना काटेकोर उत्तरे म्हणतात; कारण मूलभूत गृहीतांशी ती तंतोतंतपणे सुसंगत असतात (परि. १७ पाहा). समस्येतील परिस्थिती अशी असेल की, सापेक्षतः सुबोध काटेकोर उत्तर मिळविणे अशक्य व्हावे, तर अशा ठिकाणी समाधानकारक अशी सत्यसमीप उत्तरे मिळविणे मात्र नेहमीच शक्य असते. खऱ्या एककालीन रेषांऐवजी—उदा., आ. ८२ आणि ८३ मधील रेषा—सर्वसाधारण वैशिष्ट्ये तशीच असतील अशा सोप्या आलेखांचे संच गृहीत धरून ही सत्यसमीप उत्तरे मिळविता येतात.

उदाहरणार्थ, आ. ८२ मधील एककालीन रेषांचा आकार स्थूलमानाने परिवलया-सारखा आहे; कारण थरातून अतिरिक्त पाण्याचे निस्सारण होण्यासाठी जलीय प्रक्रमाचे

मूल्य दृढीभवन-विभागाच्या तळाजवळ शून्य आणि पृष्ठभागाजवळ महत्तम असणे आवश्यक असते (परि. १०१ पाहा); तथापि हा आकार पूर्णत्वाने परिवलयासारखा आहे असे आकडेमोडीच्या सोप्या पद्धतीत गृहीत धरले जाते. काळ लोटेल त्यानुसार या परिवलयाकार एककालीन रेषांचा शिरोबिंदू प्रथम आडव्या दिशेने प पासून ल पर्यंत सरकतो; आणि नंतर अधस् दिशेने ल पासून त पर्यंत सरकतो (आ. ८२ पाहा). शिरोबिंदूच्या सरकण्याच्या गतीवरून स्राववेग ठरविता येतो. पृष्ठभागाजवळील जलीय प्रक्रम नेहमी अतिरिक्त पाणी पृष्ठभागाकडे येत राहील इतका पाहिजे. या लक्षणावरून एककालीन रेषांचा सरकण्याचा वेग आणि तदनुषंगिक दृढीभवनाचा वेग ठरविता येतात. या रीतीचा अवलंब करून मिळणारा समयगुणक-दृढीभवन आलेख, जवळजवळ काटेकोर पद्धतीने काढलेल्या आलेखासारखाच असतो.

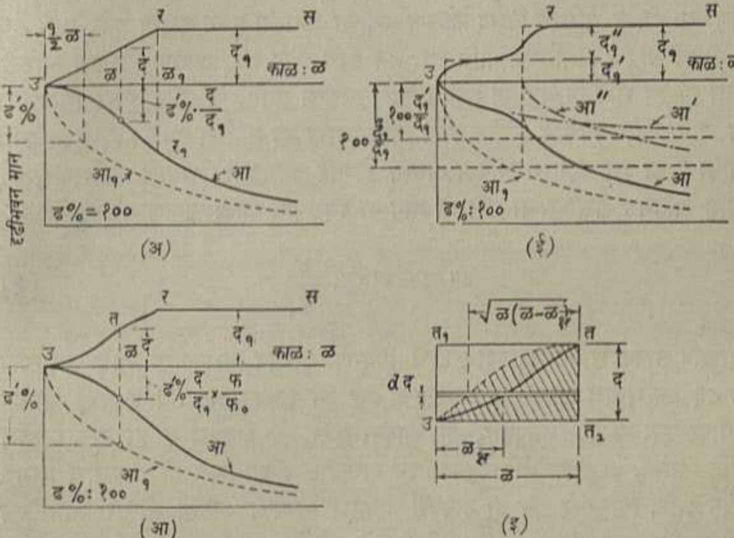
खऱ्या एककालीन रेषांऐवजी सोपे वक्र नियुक्त करण्याची ही पद्धत, आधारभिंती-मागील भरणांतील किंचित् वक्र असणाऱ्या खऱ्या घसरपृष्ठाऐवजी सरळ पृष्ठ गृहीत धरण्याच्या कूलोमच्या पद्धतीसारखीच आहे (परि. २३ पाहा). कित्येक दृढीभवन समस्यांची आसन्नमान उत्तरे अगोदरच प्रकाशित झाली आहेत (टेरझागी १९२५, टेरझागी आणि फ्रोह्लिश, १९३६) आणि उपरोक्त पद्धत अद्याप न सोडविलेल्या समस्यांच्या बाबतीतही अनुसरणे शक्य आहे.

१०४. भार सावकाशपणे लावत असताना आणि नंतर होणारे दृढीभवन : चिकण थरावर केलेले इमारतींचे व भरावांचे बांधकाम तसेच जलसाधित पद्धतीने केलेले चिकण मृत्तिकेचे द्रवसदृश निक्षेपण ही व्यवहारातील दृढीभवनाची अतिशय महत्त्वाची उदाहरणे आहेत. दोन्ही उदाहरणांत स्थिरमूल्य भाराखाली दृढीभवन होण्यापूर्वी एक संक्रमण-काळ येतो. या काळात भार-वाढ होत असतानाच दृढीभवनाची क्रियाही चालू असते. आधीच्या किंवा नंतरच्या वाढीचा परिणाम न होता, भारातील प्रत्येक वाढीमुळे होणारे दृढीभवन स्वतंत्रपणे चालू राहते. त्यामुळे संक्रमणावस्थेतील दृढीभवनाचा वेग अधिमेलनाच्या सोप्या पद्धतीने, इष्ट तितक्या अचूकपणे ठरविता येतो.

. या पद्धतीचे उदाहरण म्हणून, वरखाली वाळूचे थर असलेल्या चिकण थराच्या दृढीभवनाचा वेग आपण ठरवू. वाळूचा वरचा थर, बांधल्या जाणाऱ्या इमारतीला बैठक म्हणूनही उपयोगी पडतो. इमारतीचे बांधकाम चालू असताना, चिकण थरातील कोणत्याही आडव्या थरावर निरनिराळ्या वेळी पडणारा सरासरी दाब, आ. ८६ अ मधील उरस या मोडक्या रेषेने दाखविला आहे. $ळ = ळ_०$ या क्षणी बांधकामास प्रारंभ झाला ($द = ०$) आणि $ळ = ळ_१$ या क्षणी ते पुरे झाले ($द = द_१$). त्यामुळे या काळानंतर दाब कायम राहतो म्हणजेच त्याचे मूल्य $द_१$ हेच राहते. $ळ = ०$ या क्षणी इमारतीचे संपूर्ण वजन एकदम लावले आहे असे गृहीत धरल्यास, मिळणारा काळ-दृढीभवन आलेख $आ_१$ हा आहे. आकृती ८५ अ मध्ये कालगुणकासाठी वापरलेल्या प्रमाणाच्या

ठिकाणी आ. ८६ मध्ये काळासाठी घेतलेले प्रमाण वापरून आ. ८५ अ मधील $आ_१$ आलेखावरून हा आलेख काढला आहे. त्यासाठी समी. १०१ (३ आ) चा उपयोगही केला आहे; ते समी. असे :

$$स = \frac{ह}{ह^२} ळ$$



आकृती : ८६ दृढीभवनाचा दाब सावकाश लावला असता, काळ-दृढीभवन आलेख काढण्याची कृती. (आधार : टेरझागी आणि फ्रोह्लिश, १९३६.)

$ळ_१$ अगोदरच्या ळ या कोणत्याही क्षणी थरावरील सरासरी दाब द आहे. व्यवहारतः आपण असे गृहीत धरू शकतो की, या क्षणाची दृढीभवनाची परिस्थिती आणि थरावर हाच दाब एकदम लावल्यानंतर ळ/२ या क्षणी येणारी स्थिती या सारख्याच असतात. आकृती ८६ अ मधील $आ_१$ या आलेखावरून हे दृढीभवनमान ढ' असे मिळते. म्हणून मूळ उदाहरणातील ळ या क्षणाचे दृढीभवनमान, त्यातील $द_१$ या दाबाखाली होणाऱ्या अंतिम अवसीदनाचा प्रतिशत भाग या स्वरूपात खालीलप्रमाणे मांडता येईल. या आसन्नमान पद्धतीचे सैद्धांतिक समर्थन इतरत्र प्रसिद्ध झाले आहे (टेरझागी आणि फ्रोह्लिश, १९३६).

$$ढ\% = ढ'\% \frac{द}{द_१}$$

आकृती ८६ अ मधील *आ* आलेखावरील एक बिंदू यावरून मिळाला. ळ ची आणखी काही मूल्ये घेऊन व याच कृतीची पुनरावृत्ती करून आलेखावरील इतर बिंदू मिळतात. $ळ_1$ ला अनुषंगिक असलेल्या $र_1$ या बिंदूच्या पलीकडे, $द_1$ हा अंतिमभार $ळ_1/२$ या क्षणी एकदम लावला असावा, अशा प्रकारे दृढीभवन चालू राहते.

आकृती ८६ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे थरावरील दाब उर या आलेखानुसार काळाप्रमाणे बदलत जाणारा असेल, तर तद्विषयक काळ-दृढीभवन आलेख आ. ८६ आ आणि आ. ८६ इ यांमध्ये विशद केलेल्या कृतीचा अवलंब करून काढता येतो. आ. ८६ आ मधील $आ_1$ हा आलेख आणि आ. ८६ अ मधील $आ_1$ आलेख हे एकच आहेत. $द_1$ हा अंतिम भार $ळ = ०$ या क्षणी एकदम लावला आहे, या गृहीतानुसार मिळणारा काळ आणि दृढीभवनमान यांतील संबंध दाखविणारा हा आलेख आहे. $द_1$ पेक्षा कमी मूल्याचा द हा दाब एकदम लावला असता होणारे कोणत्याही क्षणाचे दृढीभवन, $द_1$ खालील अंतिम दृढीभवनाचा प्रतिशत भाग या स्वरूपात खालीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$ढ''\% = ढ'\% \cdot \frac{द}{द_1} \qquad [१]$$

द हा दाब सावकाश लावण्याच्या कृतीचे विवरण अद्याप करावयाचे आहे. त्यासाठी आ. ८६ आ मधील काळ-भार आलेखाचा उत हा तुकडा आ. ८६ इ मध्ये मोठ्या प्रमाणावर पुनः काढू. $उत_1तत_2$ या आयताचे $फ_0$ हे क्षेत्रफळ द हा दाब एकदम लावला असता, ळ क्षणी होणारे अवसीदन दाखवील अशा प्रकारे या आकृतीचे प्रमाण ठरविले आहे. त्यानुसार $dद$ ही दाबवाढ एकदम लावली असता होणारे अवसीदन आकृतीमधील ळ लांबीच्या पट्टीच्या क्षेत्राइतके होते. प्रत्यक्षात $dद$ ही वाढ फक्त $ळ - ळ_{क्ष}$ एवढा वेळच कारक होती. खाली उद्धृत केलेल्या समी. १०२ (१०) वरून हे स्पष्ट आहे की, एकदम लावलेल्या भारामुळे होणारे अवसीदन, काळाच्या वर्गमुळानुसार वाढणारे असते.

$$\frac{ढ\%}{१००} = \sqrt{\frac{४ह}{\pi ड^2}} \cdot \sqrt{ळ}$$

म्हणून $dद$ या दाबवाढीमुळे होणारे अवसीदन दाखविणाऱ्या पट्टीची लांबी पुढीलप्रमाणे असेल.

$$ळ \sqrt{\frac{ळ - ळ_{क्ष}}{ळ}} = \sqrt{ळ\,(ळ - ळ_{क्ष})}$$

उत या भार-आलेखाच्या निरनिराळ्या बिंदूंना अनुषंगिक असणारी $\sqrt{ळ\,(ळ - ळ_{क्ष})}$ ची मूल्ये $तत_2$ च्या डाव्या बाजूस स्थित करून उत ही तुटक रेषा मिळते; आणि ळ

या क्षणाचे प्रत्यक्षातील अवसीदन फ=उतत₂ या रेखांकित क्षेत्राने दाखविले जाते. द हा दाब ळ=० या क्षणी, एकदम लावला असता, तर अवसीदन $फ_0$=उत₁तत₂ या क्षेत्राइतके झाले असते आणि तदनुषंगिक दृढीभवनमान ढ″% (समी. १) इतके असते, म्हणून उत (आ. ८६ आ व इ) या आलेखानुसार लावलेल्या भारामुळे होणाऱ्या दृढीभवनाचे खरे मान ळ या क्षणी पुढीलप्रमाणे असते.

$$ढ\% = ढ''\% \quad \frac{फ}{फ_0} = ढ'\% \frac{द}{द_1} \cdot \frac{फ}{फ_0}$$

आ या दृढीभवन आलेखावरील एक बिंदू या कृतीने मिळाला. ळ ची इतर मूल्ये घेऊन आणि याच कृतीची पुनरावृत्ती करून इतर बिंदू मिळविता येतात. ही कृती ज्या समी. १०२ (१०) वर अवलंबून आहे, ते खरे पाहता ढ %चे मूल्य ० ते ५२·६ या कक्षेत असेल, तरच अचूकपणे लागू पडते. तथापि ढ %चे मूल्य ५२·६ पेक्षा थोडेसे मोठे असले, तरीही या कृतीने मिळणारे आसन्नमान उत्तर पुष्कळच समाधानकारक असते.

जर भार अनियमितपणे वाढत असेल (आ. ८६ ई मधील भार–आलेख पाहा), तर दृढीभवनाचा वेग ठरविण्यासाठी, या भारआलेखाऐवजी २ किंवा अधिक निश्चित टप्पे कल्पून भार-आलेख तुटक रेषेने दाखविल्याप्रमाणे गृहीत धरतात. हा प्रत्येक टप्पा म्हणजे, अंतिम भाराचा तो विशिष्ट भाग एकदम लावला असे मानण्यासारखे आहे. ही प्रत्येक वाढ, अंतिम १०० % दृढीभवनाच्या $१००\cdot\frac{द_1'}{द_1}$, $१००\ \frac{द_1''}{द_1}$ या एकेक भागास कारणीभूत होते आणि या प्रत्येक भागाने व्यक्त होणारे दृढीभवन स्वतंत्रपणे चालू राहते. तदनुषंगिक दृढीभवन-आलेख आ. ८६ ई मध्ये *आ′* आणि *आ″* असे दाखविले आहेत. कोणत्याही क्षणाचे दृढीभवनमान म्हणजे या आलेखावरील बिंदूंच्या कोटींची बेरीज होय. या बेरजेतून मिळणाऱ्या आलेखात कोन येतात; कारण वर सांगितल्याप्रमाणे आपण भाराचे वेगवेगळे टप्पे गृहीत धरले आहेत. प्रत्यक्षातल्या दृढीभवन-आलेखात असे कोन नसतात. आ. ८६ ई मधील *आ* आलेख पाहा.

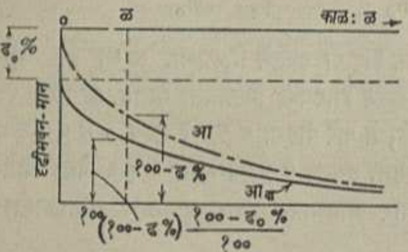
चिकण मृत्तिकेवर ठेवलेल्या बदलत्या भाराखाली होणाऱ्या दृढीभवनाच्या इतर सर्व समस्यांतही आ. ८६ मध्ये स्पष्ट केलेली कृती वापरता येते.

१०५. चिकण मृत्तिकेतील वायूचा दृढीभवनवेगावर होणारा परिणाम : मृत्तिकेतील पोकळीचा काही भाग एखाद्या वायूच्या बुडबुड्यांनी व्यापलेला असेल, तर तिच्यावरील भारामुळे त्या वायूचे दमन होते. त्यामुळे पुढे व्हावयाच्या दृढीभवनाआधीच मृत्तिकेच्या रंध्रांकात घट होते. सुरवातीस होणारी ही घट आ. ८७ मध्ये प्रारंभिक दृढीभवन $ढ_0$% म्हणून दाखविली आहे. वायूचा मूळचा दाब, भार लावण्यापूर्वी

त्याने व्यापलेला अवकाश आणि भाराची तीव्रता या गोष्टींवर $द_०\%$चे मूल्य अवलंबून असते.

नंतरच्या दृढीभवन-प्रक्रियेत अल्पकालीन अतिरिक्त जलदाब नाहीसा होतो आणि वायुदाबही त्याच्या मूळ $द_{वा}$ मूल्याइतका होतो. त्यामुळे या प्रक्रियेत मृत्तिकेतून बाहेर पडणारे पाणी, वायूचे बुडबुडे नसलेल्या उदाहरणातील पाण्याइतकेच असते.

वायुयुक्त भाग जास्त नसेल, तर मृत्तिकेचा पाझरगुणांकसुद्धा व्यवहारतः वायूच्या अंशावर अवलंबून नसतो; म्हणून त्याचा दृढीभवन-वेगावर फारच थोडा परिणाम होतो, असा निष्कर्ष काढण्यास हरकत नाही. वायू नसताना $ळ = ०$ या क्षणी दृढीभवन शून्य असते आणि नंतर ते *आ* आलेखानुसार होते (आ. ८७). वायू असतो तेव्हा $ळ = ०$ या क्षणी दृढीभवन $द_०\%$ इतके असते. तरीही वर विशद केलेल्या उपपत्तीनुसार असे म्हणता येते की, दृढीभवनाच्या अंतिम अवस्थेला पोहोचण्याचा वेग वायूच्या अंशावर अवलंबून नसतो. तेव्हा वायुयुक्त मृत्तिकेचा दृढीभवन-आलेख $आ_{वा}$ मिळवावयाचा असेल, तर *आ* या आलेखाच्या कोटी $\frac{१०० - द_०\%}{१००}$ या प्रमाणात कमी करून तो मिळतो.



आकृती ८७ : चिकण मृत्तिकेतील अपुऱ्या संपृक्तीचा काळ दृढीभवन आलेखाच्या स्वरूपावर पडणारा प्रभाव (अपुऱ्या संपृक्तीतील आलेख $आ_{वा}$)

१०६. द्वि-आणि त्रिमितीतील दृढीभवन : द्विमितीतील प्रवाह जेथे अभिप्रेत आहे, अशा दृढीभवनात अतिरिक्त झालेले पाणी समांतर पातळ्यांतून बाहेर पडते. त्रिमिति-दृढीभवनाच्या प्रक्रियेत, ते एकतर त्रिज्यादिक् पातळ्यांनुसार वाहते, किंवा त्याच्या प्रवाहाच्या रेषा निश्चित पातळ्यांवर नसतात.

एकमिति प्रवाहाच्या बाबतीत लागू पडणारे कलन-समीकरण परि. ९९ मध्ये सिद्ध केलेले आहे. तेथे स्वीकारलेल्या पद्धतीचाच अवलंबून करून त्रिमिति-प्रवाहाचे समीकरण खालीलप्रमाणे मिळते.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = द \left(\frac{\partial^2 उ}{\partial क्ष^2} + \frac{\partial^2 उ}{\partial य^2} + \frac{\partial उ^2}{\partial ख^2} \right) \qquad [१]$$

नेहमीप्रमाणे उ म्हणजे ळ या क्षणाचा अतिरिक्त जलदाब आहे आणि द हा दृढीभवन-

गुणांक आहे (समी. ९९ (७)). प्रवाह एकाच दिशेने—उदाहरणार्थ, ख अक्षाच्या दिशेने—वाहत असेल, तर कंसांतील तीनपैकी दोन पदांचे मूल्य शून्य होते आणि उपरोक्त समीकरणाचे स्वरूप समी. ९९ (८) सारखेच होते. क्षख पातळीला समांतर रीतीने होणाऱ्या द्विमिति-दढीभवनाचे कलन-समीकरण खालीलप्रमाणे असते.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = द \left(\frac{\partial^2 उ}{\partial क्ष^2} + \frac{\partial^2 उ}{\partial ख^2}\right) \qquad [२]$$

त्रिमितीतील दढीभवन-प्रक्रिया एखाद्या अक्षाभोवती सममात्र असेल, तर कार्टेशियन सहनिर्देशकांऐवजी त्रिज्यात्मक सहनिर्देशक वापरणे सोईचे पडते. त्यानुसार त्रिज्यात्मक दिशेत त्र आणि उभ्या दिशेत ख नियोजून समी. १ ऐवजी पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = द \left(\frac{\partial^2 उ}{\partial त्र^2} + \frac{1}{त्र} \cdot \frac{\partial उ}{\partial त्र} + \frac{\partial^2 उ}{\partial ख^2}\right) \qquad [३]$$

त्रिज्यात्मक प्रवाह ज्या पातळ्यांवरून होतो, त्या ख अक्षाला काटकोनात असतील, तर $\frac{\partial^2 उ}{\partial ख^2}$ हे पद शून्य होते आणि वरील समीकरण असे होते :

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = द \left(\frac{\partial^2 उ}{\partial त्र^2} + \frac{1}{त्र} \cdot \frac{\partial उ}{\partial त्र}\right) \qquad [४]$$

कॅरिलो (१९४२ ब) याने असे दाखवून दिले की, समी. ३ ने वर्णिला जाणारा त्रिमितीतील त्रिज्यादिक् प्रवाह दोन घटकांत विभागता येतो; एक घटक म्हणजे सरळ पातळीत होणारा त्रिज्यादिक् प्रवाह (समी. ४) आणि दुसरा म्हणजे रेषात्मक प्रवाह (समी. ९९ (८). समजा, एखाद्या चिकण थराचे कोणत्याही क्षणी सरळ पातळीवरील त्रिज्यादिक् प्रवाहामुळे होणारे सरासरी दढीभवन-मान $ढ_{त्र}\%$ आहे आणि त्याच क्षणी रेषात्मक अक्षीय प्रवाहामुळे होणारे दढीभवनमान $ढ_{ख}\%$ आहे, तर या दोहोंमुळे होणाऱ्या एकूण दढीभवनाचे मान खालीलप्रमाणे मांडता येते.

$$100 - ढ\% = \frac{1}{100}\,(1 - ढ_{त्र}\%)\,(1 - ढ_{ख}\%) \qquad [५]$$

समीकरण ३ मधील दढीभवन-गुणांकाचे समीकरण पुनः मांडू.

$$द = \frac{झ}{घ_{ज}\, प_{द}} \qquad ९९(७)$$

येथे झ हा पाझर-गुणांक, $घ_{ज}$ ही पाण्याची घनता आणि $प_{द}$ हा अवकाशक्षयाचा गुणांक आहे. (समी ९८ (५)) अक्षीय पाझर-गुणांकाचे मूल्य त्रिज्यादिक् पाझरगुणांकाच्या ट पट असेल, तर त्याच दोन दिशांतील द च्या मूल्यांमधील गुणोत्तरही तेच असते; म्हणजेच

$$\frac{झ}{झ_{त्र}} = ट \text{ आणि } \frac{ह}{ह_{त्र}} = ट \qquad [६]$$

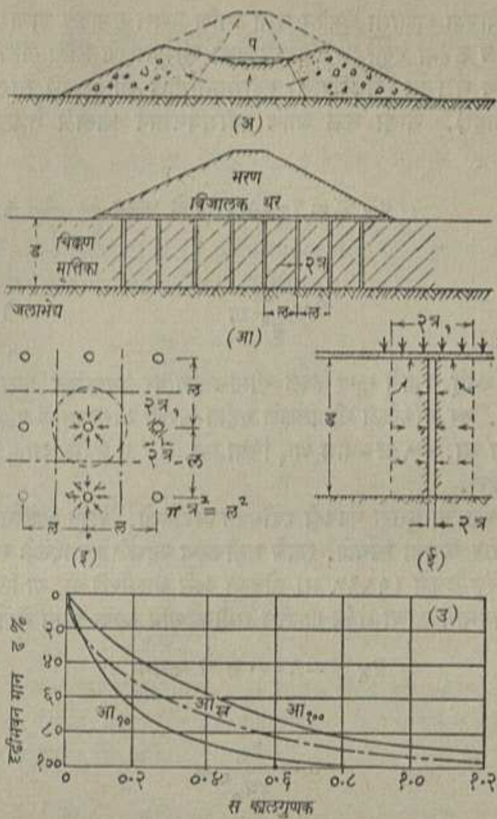
$झ_{त्र}$ आणि $झ$ यांची मूल्ये भिन्न असतील, तर समी. ३ मध्ये बदल करून ते पुढीलप्रमाणे मांडावे लागते.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = ह_{त्र}\left(\frac{\partial^{२} उ}{\partial त्र^{२}} + \frac{१}{त्र}\frac{\partial उ}{\partial त्र}\right) + ह\,\frac{\partial^{२} उ}{\partial ख^{२}} \qquad [७]$$

मात्र समी. (५) येथेही लागू पडतेच.

द्विमिति-दढीभवनाचे स्थापत्यातील एक महत्त्वाचे उदाहरण म्हणून जलसाधित धरणातील गाभ्याच्या बांधकाम-काळातील आणि नंतरच्या दढीभवनाचे उदाहरण देता येईल. आकृती ८८ अ म्हणजे अशा भरावाचा बांधकाम-काळातील छेद आहे. भरावातील मधला सूक्ष्मकणयुक्त मृत्तिकेचा भाग म्हणजे धरणाचा गाभा आहे. त्यातील अतिरिक्त पाण्याचा काही भाग माथ्याकडील पृष्ठातून ऊर्ध्व दिशेने प या मध्यवर्ती डबक्याकडे जातो आणि उरलेला अंश गाभ्याच्या दोन्ही बाजूच्या उतारांतून आडव्या दिशेने बाहेर पडतो. हे दोन्ही प्रवाह एकाच वेळी आणि आकृतीत छेदाला समांतर दिशेने होतात. अशा भरावाच्या दढीभवनाचा वेग जी. गिलबॉयने (१९३४) गणितसिद्ध केला; परंतु त्यासाठी गाभ्यातील अतिरिक्त पाणी केवळ आडव्या दिशांनीच बाहेर पडते, असे सुकरतादायी गृहीत स्वीकारले. बांधकामाच्या सुरुवातीच्या काळात तरी वरच्या दिशेने होणारे निस्सारण महत्त्वाचे असू शकते; म्हणून या गणितसिद्ध वेगापेक्षा दढीभवनाचा प्रत्यक्षातील वेग पुष्कळच अधिक असेल, असे अपेक्षिले पाहिजे.

त्रिमिति-दढीभवनाचे एक सोपे उदाहरण म्हणून आ. ८८ आ मध्ये दाखविलेल्या प्रक्रियेचा आपण विचार करू. या आकृतीत मृदू, चिकण मृत्तिका किंवा गाळ अशा मृत्तिकेच्या समतल पृष्ठभागाच्या थरावर बांधलेल्या भरावाचा छेद दाखविला आहे. भारित थराचे दढीभवन त्वरेने व्हावे म्हणून त्यात विजालककूप बांधलेले आहेत. दढीभवन होत असताना, अतिरिक्त पाण्याचा काही अंश आडव्या दिशेने प्रथम या कूपांत जातो आणि तेथून भरावाचा तळ व थर यांमधील विजालक थराकडे जातो. उरलेला अंश ऊर्ध्व दिशेने थेट याच विजालक थराकडे जात असतो. आ. ८८ इ मध्ये या कूपव्यवस्थेचा आराखडा दाखविला आहे. तेथे तुटक रेषांनी दाखविलेल्या उभ्या छेदांच्या द्वारे, दढीभवनशील थर चौकोनी आकाराच्या समपार्श्वांमध्ये विभागला आहे. या प्रत्येक विभागांतील निस्सारण असे असते की, जणू त्याच्या उभ्या बाजूंना एखादे जलाभेद्य अस्तर लावले आहे; कारण प्रत्येक उभ्या छेदाच्या दोन्ही बाजूंस अतिरिक्त पाणी विरुद्ध दिशांनी वाहत असते. प्रत्येक विभाग चौकोनीऐवजी दंडगोलाकृती खंड आहे, असे गृहीत धरल्यास निस्सारणाचा वेग फारशी चूक न होता ठरविता येतो. या गृहीतानुसार अशा खंडातील प्रवाह त्याच्या अक्षाच्या संदर्भात सममात्र होतो. वर सांगितल्याप्रमाणे हा प्रवाह मध्यवर्ती कूपांकडे अशा प्रकारे चालू राहतो की, जणू या खंडाच्या बाह्य पृष्ठाला जलाभेद्य अस्तर लावलेले आहे.



आकृती ८८ : द्विमिति आणि त्रिमिति-दृढीभवनाच्या प्रक्रिया. (अ) जलसाधित भराव; (आ ते ई) भरावाखालच्या चिकण थराचे वालुकाकूपांच्या साहाय्याने केलेले निस्सारण; (उ) मध्यवर्ती कूपाकडे निस्सारण झाल्यामुळे (ई) मधील दंडगोलाकृती राशीच्या बाबतीत मिळणारे दृढीभवनमान-कालगुणक आलेख. (त्र$_१$/त्र = १, १०, १००)

चिकण थराची उभ्या दिशेतील पाझरक्षमता त्रिज्यात्मक दिशेतील पाझरक्षमतेहून निराळी असेल, तर या दंडगोलाकृती खंडाच्या दृढीभवनाला समी. ७ लागू करता येते. भरावाचे वजन एकदम पडत असल्यामुळे या खंडामध्ये सर्व ठिकाणी अतिरिक्त जलदाब निर्माण होतो. सुरवातीस त्याचे मूल्य भरावाच्या वजनाइतके असते व हळूहळू ते शून्य होते. याच काळात मृत्तिकेतील कार्यसाधक प्रतिबले वाढत असतात आणि शेवटी भरावाच्या वजनाला अनुषंगिक स्थिरमूल्याला येतात. दंडगोलाकृती बाह्य पृष्ठ आणि तळ जलाभेद्य आहेत त्यामुळे अतिरिक्त पाणी वरच्या दिशेने आणि आडव्या दिशेने वाहते. दृढीभवनाची ही सीमालक्षणे आहेत. अतिरिक्त पाण्याच्या प्रवाहाचे दोन घटक पाडता

येतात; एक कूपाच्या अक्षाला समांतर उभा आणि दुसरा कूपाकडे जाणारा त्रिज्यादिक् आडवा. येथील उभ्या रेषात्मक प्रवाहघटकाची सीमालक्षणे आणि जलामेद्य तळावर ठेवलेल्या चिकण थराच्या (अर्धबंदिस्त) दृढीभवनातील सीमालक्षणे सारखीच आहेत (परि. १०२ पाहा). तेव्हा काळ आणि दृढीभवनमान यासाठी तेथील समीकरण मांडता येईल.

$$\text{ढ}_{\text{ख}}\% = \text{१००} \times (\text{स}) \text{ चे फलन} \qquad \text{१०२ (८ आ)}$$

येथे

$$\text{स} = \frac{\text{ह}}{\text{ह}^{\text{२}}}\,\text{ळ} \qquad \text{१०१ (३ आ)}$$

हा कालगुणक आहे. त्याचे मूल्य केवळ सीमालक्षणांवर अवलंबून असते, हे मागे पाहिलेच आहे. वर वर्णिलेली सीमालक्षणे गृहीत धरली असल्यामुळे $\text{ढ}_{\text{ख}}\%$ आणि स यांमधील संबंध आ. ८५ अ मधील $\text{आ}_{\text{१}}$ किंवा आ. ८८ उ मधील $\text{आ}_{\text{ख}}$ या आलेखाने दाखविला जाईल.

उपरोक्त प्रवाहाचा दुसरा घटकही दृढीभवन घडवितो. त्यात आडव्या त्रिज्यादिक् प्रवाहाचा विचार करावा लागतो. त्याचे समीकरण म्हणजे वर दिलेले समी. ४ होय. हे समीकरण रेंडूलिकने (१९३५ अ) सोडवून असे दाखविले की, या ठिकाणीही काळ आणि दृढीभवनमान यांचा संबंध खालील समीकरणाने व्यक्त करता येतो.

$$\text{ढ}_{\text{त्र}}\% = \text{१००} \cdot \text{स चे फलन} \qquad [\text{८ अ}]$$

येथे

$$\text{स} = \frac{\text{ह}_{\text{त्र}}}{\text{४त्र}_{\text{१}}^{\text{२}}}\,\text{ळ} \qquad [\text{८ आ}]$$

हा कालगुणक आहे व दंडगोलाकृती खंडाचा व्यास $\text{२त्र}_{\text{१}}$ असून मध्यवर्ती विजालक-कूपाचा व्यास २त्र आहे. या ठिकाणी दृढीभवनमान ($\text{ढ}_{\text{त्र}}\%$) आणि कालगुणक (स) यांतील संबंध $\text{त्र}_{\text{१}}/\text{त्र}$ या गुणोत्तरावर अवलंबून असतो. आ. ८८ उ मध्ये हा संबंध $\text{आ}_{\text{१०}}$ आणि $\text{आ}_{\text{१००}}$ या आलेखांनी दाखविला आहे. $\text{आ}_{\text{१०}}$ या आलेखासाठी $\text{त्र}_{\text{१}}/\text{त्र} = \text{१०}$ आणि $\text{आ}_{\text{१००}}$ साठी $\text{त्र}_{\text{१}}/\text{त्र} = \text{१००}$ अशी मूल्ये गृहीत धरली आहेत. कोणत्याही क्षणाचे $\text{ढ}_{\text{त्र}}$ चे आणि $\text{ढ}_{\text{ख}}$ चे मूल्य ठरवून समी. ५च्या साहाय्याने एकूण दृढीभवनमान, ढ% ठरविता येते.

विजालक-कूपांचा दृढीभवनाच्या वेगावर पडणारा प्रभाव स्पष्ट होण्यासाठी आ. ८८ आ मधील थराची जाडी २० फूट आहे, असे आपण गृहीत धरू. त्याचप्रमाणे कूपाचा व्यास १ फूट व त्यांच्यामधील अंतर दोन्ही बाजूंना ९ फूट आहे असेही गृहीत धरू. कूपाभोवतीच्या चौकोनी खंडाऐवजी तेवढेच छेदक्षेत्र असलेला दंडगोलाकृती खंड घेऊ. त्याचा व्यास १० फूट येतो. कूपाशिवाय दृढीभवनमान ३०% आहे व त्यावर पडणारा कूपांचा प्रभाव आपल्याला ठरवावयाचा आहे. त्यासाठी पाझरक्षमतेच्या बाबतीत दोन

प्रकार विचारात घेऊ. प्रथम मृत्तिका समदैशिक आहे असे गृहीत धरू. म्हणजेच

$$झ = झ_{त्र},\ द = द_{त्र} \text{ आणि } ट = 1$$

आहेत; नंतर

$$झ_{त्र} = 10\, झ,\ द_{त्र} = 10\, द \text{ आणि } ट = 10$$

आहेत, असे गृहीत धरू.

$ढ_{ख}\% = ३०$ असताना $आ_{ख}$ आलेखावरून (आ. ८८ उ) $स = ०{\cdot}०७$ मिळतो. हे मूल्य घेऊन व समी. १०१ (३ आ) वरून

$$स = 0{\cdot}07 = \frac{द}{ह^2}\, ळ$$

आणि त्यावरून

$$ळ = \frac{0{\cdot}07\, ह^2}{द}$$

असे उत्तर मिळते.

त्रिज्यादिक् प्रवाहाचा कालगुणक याच क्षणी खालीलप्रमाणे मिळतो.

$$स_{त्र} = \frac{द}{4\, त्र_1^{\,2}}\, ळ = \frac{द}{4\, त्र_1^{\,2}} \cdot \frac{0{\cdot}07\, ह^2}{द} = \frac{0{\cdot}07 \times 20^2}{4 \times 5^2} = 0{\cdot}28$$

$त्र_1/त्र = १०$ असल्यामुळे $आ_{१०}$ या आलेखावरून भुजामूल्य ०·२८ असताना $ढ_{त्र}\% = २९$ मिळते. $ढ_{ख}\% = ३०$ आणि $ढ_{त्र}\% = २९$ घेऊन समी. ५ वरून एकूण दढीभवनमान मिळते, ते असे :

$$100 - ढ\% = \frac{1}{100} \times 70 \times 71 = 50$$

त्यावरून

$$ढ\% = 50$$

म्हणजेच कूपाच्या अस्तित्वामुळे दढीभवनमान ३० पासून ५०% पर्यंत वाढले. आता दुसरी परिस्थिती विचारात घेऊ.

$$झ_{त्र} = 10\, झ_{ख};\ द_{त्र} = 10\, द \text{ आणि } ट = 10$$

या परिस्थितीत त्रिज्यादिक् प्रवाहाचा कालगुणक असा मिळतो :

$$स_{त्र} = \frac{द_{त्र}}{4\, त्र_1^{\,2}} \cdot ळ = \frac{10\, द}{4\, त्र_1^{\,2}} \cdot \frac{0{\cdot}07\, ह^2}{द} = 2{\cdot}8$$

$स_{त्र} = २{\cdot}८$ असताना $आ_{१०}$ आलेखावरून दढीभवनमानाचे मूल्य जवळजवळ ९७·५% मिळते.

कोणत्याही जलनिक्षेपित चिकण थराची आडव्या दिशेतील पाझरक्षमता उभ्या दिशेतील पाझरक्षमतेपेक्षा नेहमीच अधिक असते; म्हणून असा थर समदैशिक आहे, असे गृहीत धरून ($झ = झ_{ऊ}$) विजालक-कूपांचा दृढीभवनाच्या वेगावर होणारा परिणाम ठरविला, तर त्यापेक्षा प्रत्यक्षातील परिणाम अधिक असेल हे उघड आहे.

जलसाधित पद्धतीने बांधलेल्या भरणांचा दृढीभवनवेग वाढविण्यासाठी विजालक-कूपांचा उपयोग केलेला आहे. असे भरण अतिशय पाझरक्षम थरावर आधारित असेल, तर उपसयंत्राच्या साहाय्याने कूपांतील पाण्याची पातळी थराच्या तळाशी स्थिर ठेवून कूपांची कार्यक्षमता आणखीही वाढविता येते. या उदाहरणांतही दृढीभवनाचा वेग वरील पद्धतीचा अवलंब करून ठरविता येतो.

दृढीभवनशील थरातील अतिरिक्त पाण्याचा प्रवाह त्रिमितीत होण्याच्या विषयात फारशी महत्त्वाची नसलेली, परंतु सोडविण्यास कठीण अशी एक समस्या आहे; ती अशी : एका चिकण थराच्या मर्यादित क्षेत्रावर भार ठेवलेला आहे; या थराची जाडी भाराने व्यापलेल्या क्षेत्राच्या रुंदीपेक्षा पुष्कळच मोठी आहे; या परिस्थितीत अवसीदनाचा वेग ठरवायचा आहे. ही समस्या सोडविण्याचा पहिला प्रयत्न बियोने (१९३५ ब) केला. त्यासाठी त्याने असे गृहीत धरले की, मृत्तिकेचे वर्तन हूकच्या नियमानुसार होते आणि अतिरिक्त पाणी केवळ उभ्या दिशेनेच बाहेर पडते.

पुढे काही काळानंतर याच संशोधकाने त्रिमितीतील दृढीभवनाचा सार्वत्रिक सिद्धांत मांडला (बियो १९४१ अ). या सिद्धांताच्या आधारे त्याने चिकण थरावर ठेवलेल्या आयताकृती समप्रमाण वितरित भारामुळे होणारे अवसीदन ठरविले (बियो १९४१ ब). तसेच जलाभेद्य पृष्ठाच्या चिकण थरावर ठेवलेल्या भारामुळे होणारे दृढीभवनही सिद्ध केले (बियो आणि क्लिगन १९४१). आदर्श, चिकण थरावर ठेवलेल्या भारयुक्त, स्थितिस्थापक लायांचे उत्तरोत्तर वाढत जाणारे अवसीदन या विषयातही त्याने संशोधन केले (बियो व क्लिगन १९४२).

समीकरण १ मधील द हा दृढीभवनगुणांक स्थिरमूल्य असतो, या गृहीतावर हे सर्व संशोधन आधारित होते. ज्या दृढीभवनप्रक्रियांत प्रवाह रेखात्मक असतो, तेथे असे गृहीत धरणे अचूकतेच्या दृष्टीने उचित ठरते; परंतु द्विमिति- आणि त्रिमिति-दृढीभवन-प्रक्रियांच्या बाबतीत असे गृहीत धरण्याने चूक होण्याचा संभव असतो आणि ती किती हेही अद्याप ज्ञात नाही, हे ध्यानात ठेवले पाहिजे. बियोने असेही गृहीत धरले की, द (दमन) आणि स्फ (स्फायन) यांचे मूल्य एकच असते. हे गृहीत तर मुळीच समर्थनीय नाही. स्फ चे मूल्य अनंत असते, असे गृहीत धरून अधिक सत्यसमीप उत्तर मिळवता येते.

त्रिदिक् दमनप्रयोगांतून मिळालेल्या माहितीच्या आधारे रेंडूलिकने (१९३६) असे दाखविले की, परिमित भारयुक्त क्षेत्राखालील चिकण थराचे दृढीभवन पुढील कलन-समीकरणाने व्यक्त करता येते, तथापि त्यासाठी या प्रक्रियेत मृत्तिकेत स्थानिक स्फायन झालेले नसावे.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = \frac{झ}{घ_{ज}फ(क्ष, य, ख)}\left(\frac{\partial^2 उ}{\partial क्ष^2} + \frac{\partial^2 उ}{\partial य^2} + \frac{\partial^2 उ}{\partial ख^2}\right) \qquad [९]$$

येथे *ज्ञ* हा पाझरगुणांक आहे आणि फ *(क्ष, य, ख)* हे मृत्तिकेतील कार्यसाधक प्रतिबल-परिस्थितीतील बदल आणि पोकळीच्या अवकाशातील तदनुषंगिक बदल यांच्या संबंधावर अवलंबून असणारे फलन आहे.

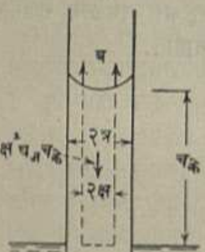
$$\frac{\text{ज्ञ}}{\text{घ}_{\text{ज}}\text{फ}(\text{क्ष},\text{य},\text{ख})}$$

हे पद वर उल्लेखिलेल्या द या दृढीभवन-गुणांकासारखे आहे आणि फ (क्ष, य, ख) हे फलन समी. ९९ (७) मधील $\text{प}_{\text{द}}$ या अवकाश-क्षयाच्या गुणांकासारखे आहे. रेंडुलिकने केलेल्या प्रयोगांच्या फलितांवरून असे दिसते की, हे फलन अतिशय क्लिष्ट आहे. या फलनाऐवजी एखादा स्थिरांक नियुक्त केल्यामुळे होणारी चूक जाणून घ्यावयाची असेल, तर त्यासाठी रेंडुलिकने प्रकाशित केलेल्या प्रयोगांच्या फलितांच्या आधारे सैद्धांतिक विश्लेषण करणे किंवा दृढीभवनाचा गणितसिद्ध वेग आणि प्रत्यक्षातील वेग यांची तुलना करणे, अशा उपायांचा अवलंब करावा लागेल. अद्याप तरी असे संशोधन झालेले नाही. त्यामुळे भारित चिकण मृत्तिकेतील द्विमिति किंवा त्रिमिति-दृढीभवनाच्या समस्यांचा ऊहापोह करण्यासाठी सध्या अस्तित्वात असलेल्या सैद्धांतिक पद्धती, व्यवहारात उपयोग करण्याइतक्या प्रगत झालेल्या नाहीत.

प्रकरण १४

केशाकर्षण-बले

१०७. केशाकर्षण : सूक्ष्मकणयुक्त मृत्तिकांमध्ये भूजलपातळीपेक्षाही वर बऱ्याच उंचीपर्यंत पाणी चढू शकते आणि अमर्याद काळापर्यंत तसेच राहू शकते. या घटनेचे स्पष्टीकरण करण्यासाठी वैज्ञानिकांना या पाण्याचे वजन पेलू शकेल अशा बलाचे अस्तित्व गृहीत धरावे लागते. या बलास **केशाकर्षण-बल** म्हणतात. या बलाचे प्राकृतिक स्वरूप अद्यापही विवाद्य असले, तरी त्याचे दृश्य परिणाम अचूकपणे गणितसिद्ध करता येतात. त्यासाठी पाणी, हवा आणि घनपदार्थ ज्या रेषेवर एकत्र येतात, ती रेषा म्हणजे या बलाचा पथ होय, असे गृहीत धरावे लागते.



आकृती ८९ : केशाकर्षण-नलिकेतील पाण्यावर कारक होणारी बले.

१०८. पृष्ठीय ताण : शुष्क आणि समाकर्षणहीन वाळूतील पोकळीतून केशाकर्षणामुळे चढणाऱ्या पाण्याची कल्पना येणे सोपे व्हावे म्हणून केशाकर्षण-नलिकेत चढणाऱ्या पाण्याचा विचार करू. अशा नलिकेचा छेद आ० ८९ मध्ये दाखविला आहे. या नलिकेतील पाण्याचा कोणताही भाग–उदा., आकृतीतील २क्ष व्यासाचा, $\text{च}_{\text{के}}$ उंचीचा आणि $\pi \text{क्ष}^{2} \text{घ}_{\text{ज}} \text{च}_{\text{के}}$ वजनाचा दंडगोलाकृती भाग – समतोल अवस्थेत आहे. या दंडगोलाच्या तळाशी, परंतु नलिकेच्या बाहेरील मुक्त जलपातळीवर, जलदाब शून्य आहे. त्याचप्रमाणे त्याच्या माथ्यालाही जलदाब शून्यच आहे आणि वक्र बाह्यपृष्ठावरची कार्तनिक बलेही शून्य आहेत. या दंडगोल स्तंभाचे वजन $\pi \text{क्ष}^{2} \text{घ}_{\text{ज}} \text{च}_{\text{के}}$ आहे, तेव्हा तो समतोल अवस्थेत राहावयाचा असेल, तर त्याच्या माथ्याच्या कडेवर त्याच्या वजनाइतक्याच मूल्याचा घ हा उभा घटक असणारे एखादे बल कारक असले पाहिजे. नेहमीच्या पाण्यापेक्षा या अगदी वरच्या पाण्याचे प्राकृतिक गुणधर्म वेगळे असल्याशिवाय असे बल अस्तित्वातच येऊ शकणार नाही. या अगदी वरच्या पाण्याच्या थरास **पृष्ठीय तवंग** असे म्हणतात. उपरोक्त जलस्तंभ वर तोलून धरणाऱ्या बलाचे स्थान याच तवंगामध्ये असले पाहिजे; कारण कल्पना करता येईल असे दुसरे कोणतेच स्थान त्यासाठी दिसत नाही. येथवर मांडलेल्या उपपत्तीसाठी कोणत्याही गृहीताचा अंगीकार आपण केलेला नाही आणि उपरोक्त

निष्कर्ष, एखाद्या घनपदार्थाच्या समतोलाची लक्षणे मांडावीत तितकाच काटेकोरपणे तर्कशुद्ध आहे.

यापुढची पायरी म्हणजे पृष्ठीय तवंगातील प्रतिबल-परिस्थिती जाणून घेणे ही होय. आतापर्यंतच्या विवेचनातून या प्रतिबलांचा *ब* हा उभा घटक आपणांस माहीत झाला आहे. शंभराहून अधिक वर्षांपूर्वी केलेल्या प्रायोगिक संशोधनातून असे दिसून आलेले आहे की, या तवंगावर त्याच्या पृष्ठाला समांतर असे द्विमितीतील ताण कारक असतात आणि *ब* हा त्यांचा उभा घटक आहे. या ताणास **पृष्ठीय ताण** असे म्हणतात. त्याचे अधिष्ठान असलेल्या पृष्ठीय तवंगाची जाडी सुमारे $१०^{-७}$ सेंमी. असते. पृष्ठीय ताण निर्मिणाऱ्या परमाणु-रचनेविषयी अद्याप एकमत झालेले नाही; परंतु हा ताण म्हणजे तवंगाच्या अंतरंगात कारक असणारे प्रतिबल आहे, ही गोष्ट गेल्या शतकात संशयातीत रीत्या प्रस्थापित झालेली आहे. तसेच या बलाची महत्ता स्वतंत्र रीत्या केलेल्या प्रयोगांनी अनेक वेळा ठरविली आहे आणि त्यांतून प्राप्त झालेल्या निष्कर्षांत एकवाक्यता आहे.

त्यामुळे या घटनेच्या गणिती कल्पनेसाठी कोणत्याही गृहीताची आवश्यकता भासत नाही; कारण पृष्ठीय ताणाचे प्राकृतिक स्वरूप काहीही असले, तरी ती कल्पना तर्कशुद्ध आहे.

पृष्ठीय ताणाच्या प्राकृतिक कारणाविषयी अस्तित्वात असलेल्या मतभिन्नतेमुळे मृत्तिकाबलविज्ञानाच्या क्षेत्रातील काही संशोधकांनी असा चुकीचा निष्कर्ष काढला आहे की, पृष्ठीय ताणाचे अस्तित्व मानणे हासुद्धा एक मताचा प्रश्न आहे. विजेच्या स्वरूपाविषयीच्या आपल्या कल्पना अद्यापही विवाद्य आहेत, म्हणून विद्युत्वहनाच्या नियमांच्या सयुक्तिकतेविषयीच संशय घेण्यासारखे हे आहे. या संदर्भात हे आग्रहपूर्वक सांगितले पाहिजे की, पृष्ठीय ताणविषयक गणिती कल्पनांशी विसंगत अशी कोणतीही घटना केशाकर्षणाच्या विषयात अनुभवास आलेली नाही.

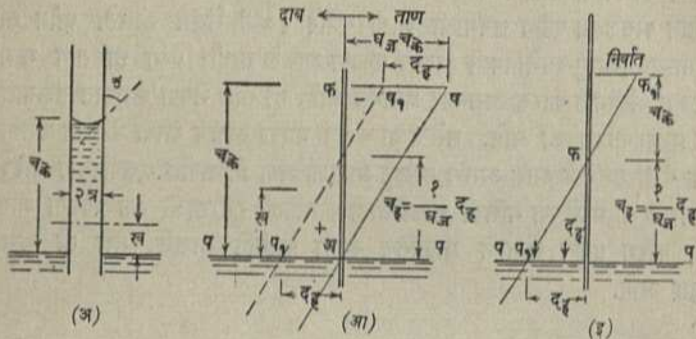
हवेच्या संपर्कात असलेल्या पाण्याच्या पृष्ठीय तवंगातील ताणाची निरनिराळ्या तपमानाच्या वेळीं मिळणारी मूल्ये खालील कोष्टकात दिली आहेत (स्मिथसनची वैज्ञानिक कोष्टके १९३४).

तपमान अंश (सेंटि.) :	०	१०°	२०°	३०°	४०°
$त_{पृ}$ (ग्रॅम/सेंमी) :	०.०७५६	०.०७४२	०.०७२७	०.०७११	०.०६९५

१०९. केशाकर्षण-नलिकांत आणि खाचांत चढणारे पाणी : बाहेरच्या मुक्तजलपातळीच्या वर, पाणी दृश्य प्रमाणात नलिकेमध्ये चढण्यास प्रवृत्त होईल, इतका लहान व्यास असणाऱ्या नलिकेस केशाकर्षण-नलिका म्हणतात. अशा नलिकेचा छेद आ. ९० अ मध्ये दाखविला आहे. या प्रकारच्या नलिकेतील पाण्याच्या पृष्ठभागाचा

आकार एखाद्या कुंभाच्या तळासारखा असतो; म्हणून त्यास कुंभपृष्ठ असे म्हणतात आणि त्याने नलिकेच्या उभ्या भिंतीशी केलेल्या ठ या कोनास स्पर्शकोन म्हणतात.

ठ चे मूल्य नलिका ज्या पदार्थाची बनविलेली असते, त्याचे रासायनिक घटक आणि नलिकाभिंतीला चिकटलेले अन्य पदार्थ यांवर अवलंबून असते. प्रयोगापूर्वी नलिकेचा आतला पृष्ठभाग स्वच्छ करून पाण्याने ओला केलेला असेल, तर ठ चे मूल्य शून्य असते. याउलट, त्यावर चिकट तवंग असेल, तर ठ चे मूल्य ९०° हूनही अधिक



आकृती ९० : (अ) केशाकर्षण-नलिकेतील पाणी. कुंभपृष्ठ आणि नलिका यांच्या सीमेवरील स्पर्शकोन ठ. (आ) वरचे तोंड उघडे असलेल्या केशाकर्षण-नलिकेतील पाण्यामध्ये असणारी प्रतिबल-परिस्थिती. (इ) केशाकर्षण-नलिकेचा वरचा भाग निर्वात करून पाण्याच्या मुक्त पृष्ठावर वातावरणाचा दाब लावला असता नलिकेत चढणारे पाणी.

असू शकते. अशा वेळी कुंभपृष्ठ बहिर्वक्र असते आणि त्याचा शिरोबिंदू बाहेरील जल-पातळीच्या खाली स्थित असतो. केशाकर्षण-नलिकेच्या पृष्ठाला चिकटणारे पदार्थ साधारणतः असे असतात की, त्यांमुळे ठ चे मूल्य ० ते ८०° या दरम्यान पडते.

नलिकेतील जलस्तंभाच्या समतोलासाठी पुढील समीकरण मांडता येईल (आ. ९०अ) :

$$\pi \text{त्र}^2 \text{घ}_\text{ज} \text{च}_\text{के} = \text{त}_\text{पृ} \cdot 2 \pi \text{त्र} \cdot \text{कोज्या ठ}$$

म्हणजेच

$$\text{च}_\text{के} = \frac{2 \text{त}_\text{पृ}}{\text{त्र घ}_\text{ज}} \text{कोज्या ठ} \qquad [\text{१ अ}]$$

त्र चे मूल्य सेंमी.मध्ये; $\text{घ}_\text{ज} = 1$ ग्रॅम/सेंमी.^{3} आणि $\text{त}_\text{पृ} = 0{\cdot}075$ ग्रॅम/सेंमी. असेल, तर $\text{च}_\text{के}$ चे मूल्य खालीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{च}_\text{के} = \frac{0{\cdot}15}{\text{त्र}} \text{कोज्या ठ} \qquad [\text{१ आ}]$$

केशाकर्षण-नलिकेत असलेल्या पाण्यातील प्रतिबल-परिस्थिती बाहेरच्या मुक्त जल-पृष्ठावर कारक असलेल्या हवेच्या दाबावर ($द_ह$) अवलंबून असते. आकृती ९० आ मध्ये दाखविलेला प्रयोग पूर्णतः निर्वात असलेल्या ठिकाणी केला, तर मुक्त पातळीच्या वर असलेला पाण्याचा स्तंभ ताणयुक्त अवस्थेत असतो. त्याची कारणे अशी : पाणी समतोल अवस्थेत असल्यामुळे कोणत्याही आडव्या छेदावर पाण्याचा दाब सारखाच असणार. मुक्त पृष्ठावर दाब शून्य आहे. मुक्त पृष्ठाच्या वर $ख$ उंचीपर्यंत चढलेल्या पाण्याचा दाब $घ_जख$ आहे. स्तंभाच्या तळाच्या पातळीला शून्य दाब आणि वरच्या पृष्ठावर $उ_ख$ हा दाब असेल, तर समतोलासाठी स्तंभावरील सर्व बलांची बेरीज शून्य असली पाहिजे; म्हणून

$$उ_ख + घ_जख = ०$$

म्हणजेच

$$उ_ख = - घ_जख \qquad [२]$$

आकृती ९० आ मध्ये $उ_ख$ ची मूल्ये *अप* या सरळरेषेने दाखविली आहेत.

पाण्याच्या वरील अवकाश $द_ह$ दाब असलेल्या हवेने व्यापलेला असेल, तर पाण्यात सर्व ठिकाणी असलेला दाबही तितकाच वाढेल; म्हणून या परिस्थितीतील पाण्याचा दाब $प_१प_१$ (आ० ९० आ) या तुटक रेषेने दाखविला जाईल. केशाकर्षणाच्या उंचीचे मूल्य तेच म्हणजे $च_{के}$ इतकेच राहते. आकृती ९० आ वरून हे स्पष्ट होईल की केशाकर्षण उंचीचे मूल्य $च_ह = द_ह / घ_ज$ म्हणजेच सुमारे १० मी. पेक्षा अधिक असल्याशिवाय पाण्यामध्ये ताण असणार नाही. शेवटी हे लक्षात येईल की, निर्वात केशाकर्षण-नलिकेचे तोंड आपण पाण्यात घातले (आ. ९० इ) आणि मुक्त पृष्ठावर हवेचा दाब असेल, तर त्या नलिकेत चढणाऱ्या पाण्याची उंची अशी असेल :

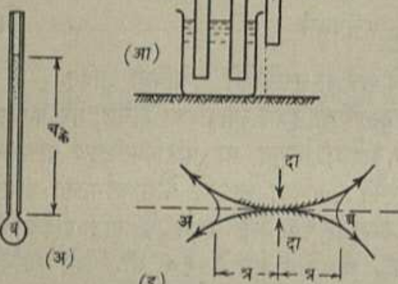
$$च_ह + च_{के} = \frac{द_ह}{घ_ज} + \frac{०{\cdot}१५}{त्र} \text{ कोज्या } \text{छ} \qquad [३]$$

पूर्णतया स्वच्छ काचेच्या बाबतीत छ शून्य असतो, हे वर सांगितलेच आहे.

उपरोक्त उदाहरणातील नलिका उभी उचलून तिचे खालचे तोंड पाण्याबाहेर काढले, तर नलिकेतील पाणी बाहेर पडू लागते आणि नलिकेतील जलस्तंभाची उंची $च_{के}$ इतकी होताच हा प्रवाह थांबतो. त्यावेळी आ. ९१ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे नलिकेच्या खालच्या तोंडाशी एक स्थायी स्वरूपाचा थेंब तयार होतो. नलिकेतील जलस्तंभाचे वजन त्याच्या माथ्याला असलेल्या तवंगातील पृष्ठीय ताणाने पेलले जाते. नलिकेच्या खालच्या तोंडाजवळ, आतल्या स्तंभातील ताणयुक्त अवस्था जाऊन, बाहेरच्या थेंबात दाबयुक्त अवस्था येते आणि थेंबाच्या बाह्यपृष्ठावरील तवंगामुळे जणू लहानशी रबरी पिशवी तयार होते. या पिशवीतील पाण्याचे, म्हणजेच थेंबाचे, वजन नलिकेच्या खालच्या वर्तुळाकार कडेने पेलले जाते.

आतापर्यंत आपण केवळ केशाकर्षण-नलिकांत चढणाऱ्या सलग स्तंभांचाच विचार केला. तथापि मृत्तिकेतील ओलाव्याच्या मूळ कारणाचा विचार करावयाचा झाला, तर आपल्याला फटी आणि खाचा यांमध्ये केशाकर्षणामुळे चढणारे पाणी आणि खडबडीत पृष्ठांच्या स्पर्शबिंदूच्या ठिकाणी टिकून राहणारे थेंब यांचाही विचार केला पाहिजे.

काचेच्या दोन पट्टयांमध्ये अतिशय अरुंद अशी फट ठेवून – तीत अर्थातच हवा असते – त्यांची खालची कड पाण्यात बुडविली, तर ही फट सर्व बाजूंनी उघडी असूनही तिच्यात, एखाद्या केशाकर्षण-नलिकेत चढावे तसे पाणी चढते. या काचपट्टयांच्या एका उभ्या बाजूच्या कडा एकमेकींना चिकटविल्या, तर अशा प्रकारे तयार झालेल्या खाचेत चढलेल्या पाण्याची उंची, चिकटलेल्या कडांजवळ अधिक आणि उघड्या कडांजवळ कमी असते. एखाद्या भांड्यातील पाणी बाहेर काढण्यासाठी अशी अरुंद खाच केशाकर्षक उत्क्षेपणीसारखी वापरता येते. अर्थात त्यासाठी तिला आकड्यासारखा वक्र आकार द्यावा लागतो आणि आकड्याचे बाहेरचे तोंड भांड्यातील पाण्याच्या पातळीपेक्षा खाली ठेवावे लागते. आकृती ९१ आ पाहा.



आकृती ९१ : (अ) पाण्याने भरलेल्या केशाकर्षण-नलिकेच्या खालच्या तोंडाजवळ राहणारा स्थायी स्वरूपाचा थेंब; (आ) v आकाराच्या खाचांमध्ये होणारी केशाकर्षणजन्य हालचाल दाखविणारा प्रयोग; (इ) स्पर्शबिंदूजवळील ओलाव्यामुळे वालुकाकणांत निर्माण होणारे विषमाकर्षण.

वाळूसारख्या घनकणांच्या एखाद्या समुच्चयातील कोणत्याही दोन कणांच्या प्रत्येक स्पर्शबिंदूभोवती v छेदाकाराची कंकणाकृती खाच असते. या खाचेची रुंदी स्पर्शबिंदूजवळ शून्य असून तेथून बाहेर वाढत जाते. ज्यावेळी वाळूतील पाण्याचा गुरुत्वाकर्षणामुळे किंवा अपकेंद्रित क्रियेमुळे निचरा होतो, त्यावेळी केशाकर्षणामुळे या प्रत्येक खाचेत अति सूक्ष्म प्रमाणात पाणी अडकून राहते. आकृती ९१ इ पाहा. घनकणांच्या द्वारे पृष्ठीय तवंगावर कारक होणारी बले तेथे बाणांनी दाखविली आहेत. स्पर्शबिंदूभोवतीच्या थेंबाचा व्यास वाढविण्याची, या बलांची प्रवृत्ती असल्यामुळे पाण्यात ताणबले निर्माण होऊन स्पर्शबिंदूच्या दोन्ही बाजूंकडील घनकण एकमेकांकडे ओढले जातात. हा दाब पाण्यातून घेतलेल्या *अब* छेदावरील ताणाएवढाच परंतु विरुद्धदिक् असतो.

११०. शुष्क वाळूच्या स्तंभातील पाण्याची केशाकर्षणजन्य हालचाल : सच्छिद्र तळाच्या दंडगोलाकृती भांड्यात वाळू भरून त्या भांड्याचा तळ पाण्यात

बुडविला, तर एखाद्या केशाकर्षण-नलिकांच्या जुडग्यात पाणी चढावे त्याप्रमाणे वाळूतील पोकळीतून पाणी वर चढते. या दोन्ही प्रकरणांत केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनाचा वेग त्वरेने कमी होऊन शेवटी शून्य होतो.

अशा प्रकारे वाळूमध्ये अस्तित्वात आलेली जल्यातळी म्हणजे केशाकर्षणामुळे संपृक्त झालेला विभाग आणि पूर्णतया शुष्क असलेला विभाग यांमधील सीमा आहे, असे केवळ विश्लेषणाच्या सोईसाठी गृहीत धरू. या गृहीतामुळे, केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनाचा वेग डार्सीच्या नियमानुसार मिळतो. हा नियम असा :

$$ग = झम \qquad [१]$$

येथे $ग$ हा स्राववेग, $झ$ हा पाझरगुणांक आणि $म$ हा जलीय प्रक्रम आहे.

प्रत्यक्षात मृत्तिकेतील ओल्या विभागाचा अगदी वरचा पट्टा अंशतःच संपृक्त असतो; पूर्णपणे नव्हे. या पट्ट्यातील पाण्याच्या प्रवाहाचे मान केशाकर्षण-दाब विचारात घेऊन ठरविता येते. हा दाब वाळूतील संपृक्तिमानावर अवलंबून असतो (उदा., बेव्हर १९४० पाहा). तथापि केशाकर्षण-दाबाच्या कल्पनेवर बसविलेल्या गणितात्मक कृती अद्याप अशा अवस्थेत आहेत की, स्थापत्यातील समस्या सोडविण्यासाठी केलेला त्यांचा उपयोग फलदायी ठरत नाही.

वाळुकास्तंभाच्या उंचीत प्रत्येक पातळीवर त्याचे छेदक्षेत्र सारखेच असल्यामुळे, त्यातून होणारे पाण्याचे ऊर्ध्वगमन म्हणजे उभ्या दिशेतील रेखात्मक प्रवाह आहे असे मानता येते. $ळ$ क्षणी वाळुकास्तंभात चढलेल्या पाण्याची बाहेरील मुक्त जलपातळीपासून मोजलेली उंची $ख$ आहे आणि संपृक्त विभागाच्या माथ्यावर अस्तित्वात असलेल्या पृष्ठीय ताणाचा उभा घटक स्थिरमूल्य आहे असे गृहीत धरले, तर या स्तंभाच्या तळापासून म्हणजेच बाहेरच्या मुक्त जलपातळीपासून मोजलेले संचित $च_{के}-ख$ इतके होते आणि जलीय प्रक्रम होतो :

$$म = \frac{च_{के} - ख}{ख} \qquad [२]$$

संपृक्त भागाचा माथा वर चढत जाण्याची गती $\frac{dख}{dळ}$ अशी मांडता येईल आणि ती क्षरणाच्या वेगाइतकी आहे. क्षरणाचा वेग, $ग_{ण}$, म्हणजे केशनलिकामार्गातून वाहणाऱ्या पाण्याचा उभ्या दिशेतील सरासरी वेग होय. वाळूची सच्छिद्रता छ असेल, तर $ग_{ण} = ग/छ$ होईल (समी. ८८ (८)); म्हणून

$$ग_{ण} = \frac{ग}{छ} = \frac{dख}{dळ}$$

या संबंधाचा विचार समी. १ व २ यांसह केला असता आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{d\text{ख}}{d\text{ळ}} = \frac{\text{झ}}{\text{छ}} \cdot \frac{\text{च}_{\text{के}} - \text{ख}}{\text{ख}}$$

म्हणजेच
$$\text{च}_{\text{के}} - \text{ख} - \text{च}_{\text{के}}\ \text{लघु}\ (\text{च}_{\text{के}} - \text{ख}) = \frac{\text{झ}}{\text{छ}}\ \text{ळ} + \text{थ}$$

$\text{ळ} = ०$ असताना $\text{ख} = ०$ असते. या लक्षणाची पूर्ती होण्यासाठी

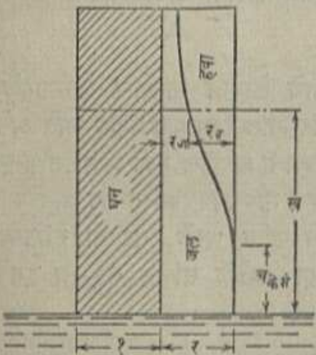
$$\text{थ} = \text{च}_{\text{के}} - \text{च}_{\text{के}}\ \text{लघु}\ \text{च}_{\text{के}}$$

असावयास हवे; म्हणून

$$\text{ळ} = \frac{\text{छ}\text{च}_{\text{के}}}{\text{झ}} \left[\text{लघु} \frac{\text{च}_{\text{के}}}{\text{च}_{\text{के}} - \text{ख}} - \frac{\text{ख}}{\text{च}_{\text{के}}} \right] \qquad [३]$$

असे उत्तर आपल्याला मिळते.

येथवरच्या विवेचनात शुष्क वाळूच्या रंध्रांतून पाणी चढत जाऊन समतोलाची अवस्था येते, असे गृहीत धरले होते. परंतु प्रथमपासूनच पूर्णपणे संपृक्त असलेल्या वालुका-स्तंभातून पाणी बाहेर पडू देऊनही अंतिम केशाकर्षणीय समतोलाची अवस्था प्रस्थापित करता येते. तेथे अंतिम केशाकर्षणीय समतोलाच्या अवस्थेप्रत येणाऱ्या प्रक्रियेला **निस्सारण** असे म्हणतात. अधिक झालेल्या पाण्यास वालुकास्तंभाच्या तळातून बाहेर पडण्याची संधि मिळताच त्याचा वरचा भाग हवेने व्यापला जातो व तेथील ओलावा धाग्यांच्या किंवा शलाकांच्या स्वरूपात राहून त्यांचे व हवायुक्त नलिकासदृश मार्गांचे एकमेकांत गुंफल्यासारखे जाळे निर्माण होते. अशा जाळ्यात अडकलेल्या पाण्याला **अर्ध-सलग केशाकर्षण-जल** म्हणतात. हे पाणी कणांभोवतीच्या अतिशय अरुंद मापांच्या रंध्रमालिका किंवा खाचासारख्या पोकळ्या यांमध्ये असते. वालुकास्तंभ फार उंच असल्यास, अगदी वरच्या भागातील जलशलाका तुटून त्यांचे सुटे थेंब तयार होण्याचाही संभव असतो. हे सुटे थेंब आ. ९१ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे कणांच्या स्पर्शबिंदूभोवतीचा अवकाश व्यापतात. केशाकर्षण-जलाची ही अवस्था म्हणजे खंडित अवस्था होय; कारण या अवस्थेत प्रत्येक थेंब स्वतंत्रपणे अस्तित्वात असतो. त्यावर स्वतःचे वजन आणि पृष्ठीय ताण इतकीच बले कारक असतात. बाष्पीभवन होत नसेल, तर पाणी भूजलपातळीपासून कितीही उंचीवर, अशा स्वरूपात वालुकेत टिकून राहू शकते.



आकृती ९२ : वालुकास्तंभाच्या उंचीत निस्सारणानंतर मिळणारे हवाव्याप्त अवकाशाचे वितरण.

म्हणून केशाकर्षणाच्या अंतिम समतोल अवस्थेत स्तंभाच्या अगदी वरच्या भागातील ओलावा खंडित अवस्थेत असतो, तर खालचा भाग पूर्णपणे संपृक्त असतो. मधल्या संक्रमणावस्थेतील भागात पाणी वर वर्णिल्याप्रमाणे अर्धसलग अवस्थेत असते. ज्यातून पाणी निचरते आहे, अशा वालुकास्तंभाच्या निरनिराळ्या भागात अस्तित्वात असणारे संपृक्तिमान मात्रात्मक स्वरूपात व्यक्त करण्याची पद्धत आ. ९२ मध्ये दाखविली आहे. या आकृतीतील उजवीकडील आयताच्या रुंदीने वाळूचा रंध्रांक (र) दाखविला असून एका वक्र रेषेने या आयताचे दोन भाग पाडले आहेत. मुक्त-जलपातळीपासून ख उंचीवरील $र_{ज}$ म्हणजे पाण्याने व्यापलेला अवकाश आहे आणि $र_{ह} = र - र_{ज}$ म्हणजे हवाव्याप्त अवकाश आहे.

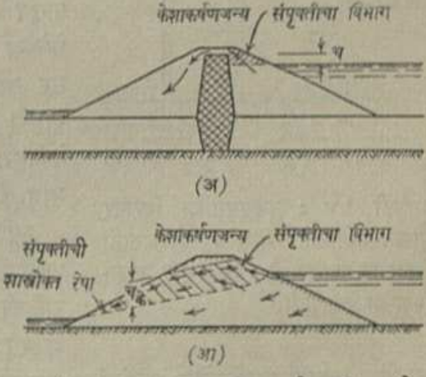
$$सं\% = १०० \frac{र_{ज}}{र} \qquad [४]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे **संपृक्तिमान** होय; आणि

$$ह = \frac{र_{ह}}{र} = १ - \frac{सं\%}{१००} \qquad [५]$$

हे गुणोत्तर म्हणजे **हवा-अवकाश गुणोत्तर** होय. केशाकर्षणजन्य संपूर्ण संपृक्तीच्या ($सं\% = १००$) विभागाची उंची $च_{केसं}$ या अक्षराने दाखविली आहे. पूर्णपणे शुष्क असलेल्या वालुकास्तंभात ज्या उंचीपर्यंत पाणी चढते त्या $च_{क}$ उंचीपेक्षा ही उंची कमी असते.

१११. केशाकर्षणजन्य उत्क्षेपणीची निर्मिती : आकृती ९३ मध्ये मातीच्या धरणाचा छेद दाखविला आहे. त्यातील जलाभेद्य गाभ्याचा माथा तलावातील पाण्याच्या पातळीपासून च उंचीवर आहे. गाभ्याच्या दोन्ही बाजूंकडील पाझरसुलभ मृत्तिकेत केशाकर्षणामुळे ज्या उंचीपर्यंत पाणी चढण्याची शक्यता असते, तीपेक्षा च कमी असेल, तर आ. ९१ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे केशाकर्षणजन्य उत्क्षेपणीची निर्मिती होते आणि जलाभेद्य गाभ्याच्या माथ्यावरून वाहत जाऊन पाणी बाहेर पडते. या स्रावाचे प्रमाण गणितसिद्ध करण्याची पद्धत अद्याप

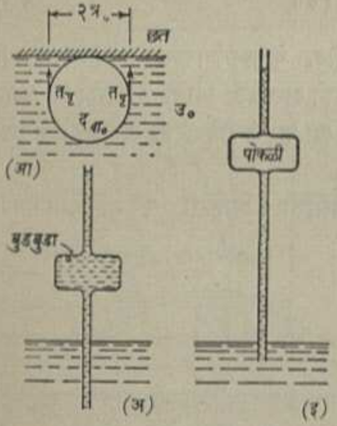


आकृती ९३ : धरणातून केशाकर्षणामुळे बाहेर पडणारे पाणी (अ) जलाभेद्य माथ्याच्या वरून (आ) एकविभागी धरणातील सैद्धांतिक संपृक्तिरेषेच्या वरच्या भागातून.

उपलब्ध नाही. परंतु त्यासाठी केलेल्या प्रयोगांवरून आणि प्रत्यक्षातील अनुभवावरून हे माहीत झाले आहे की, उत्क्षेपणी-निर्मितीमुळे होणारा पाणीनाश तसा बराच असू शकतो (उदा., टेरझागी १९४२ पाहा).

अशाच प्रकारची उत्क्षेपणी एकविभागी धरणातही निर्माण होते (आ. ९३ आ पाहा). केशाकर्षणामुळे धरणातील तथाकथित क्षरणशिरोरेषेच्या खालच्या भागातूनच नव्हे (परि. ८९ पाहा), तर केशाकर्षणामुळे संपृक्त झालेल्या वरच्या भागातूनही पाणी झिरपू लागते. परि. ८९ मध्ये धरणातील क्षरणजाल काढण्याची कृती विशद करताना या घटनेचा विचार केला नव्हता. त्यामुळे प्रत्यक्षातील क्षरणजाल तंतोतंतपणे सैद्धांतिक क्षरणजालासारखे नसते आणि त्यावरून ठरविलेल्या स्रावापेक्षा प्रत्यक्षातील स्राव काहीसा अधिकच असण्याचा संभव असतो.

११२. बुडबुडे आणि पोकळ्या यांतील वायुदाब : कित्येक मृत्तिकांत संपूर्ण संपृक्तीच्या (केशाकर्षणजन्य किंवा गुरुत्वाकर्षणजन्य) विभागातही खंडित स्वरूपात थोडाफार वायू असतो. वायूचा अंश पाण्याने पूर्णपणे वेढलेला असेल, तर त्यास बुडबुडा म्हणतात. असे बुडबुडे नेहमीच मृत्तिकाकणांच्या पृष्ठभागाला चिकटलेले असतात; परंतु बुडबुड्यांच्या एकूण पृष्ठाच्या मानाने हे स्पर्शक्षेत्र फारच क्षुल्लक असते. याउलट, मृत्कणांच्या पृष्ठभागामुळे एकमेकांपासून अलग झालेल्या कुंभपृष्ठांनी सीमित केलेला अवकाश वायूने व्यापला असेल, तर त्याने पोकळी व्यापली असे म्हणतात. वायूचे बुडबुडे नेहमीच गोलाकार म्हणता येण्यासारखे असतात, तर पोकळीचा आकार मात्र कोणताही असू शकतो.



आकृती ९४ : बुडबुड्यांचा विस्तार होऊन पोकळी निर्माण होण्यासाठी आवश्यक असणारी परिस्थिती दाखविणाऱ्या रेखाकृती.

मृत्तिकेतील वायुकण म्हणजे तिच्यात पाणी शिरण्यापूर्वी जी हवा पोकळी व्यापून राहिली होती, त्या हवेचा अवशेष असू शकतील किंवा पूर्वीच पाण्यात विरघळलेली हवा किंवा एखादा वायू तसेच मृत्तिकेतील रासायनिक क्रियेने निर्माण झालेला वायू यांचे अंश असू शकतील. विवक्षित तपमानाच्या वेळी बुडबुड्यातील वायूचा दाब केवळ त्यातील वायूचे वजन आणि पाण्यातील प्रतिबल यांवर अवलंबून असतो. पोकळीतील वायूचा दाब मात्र तिच्याभोवतीच्या मृत्तिकाकणांच्या रचनेवरही अवलंबून असतो.

वायुयुक्त बुडबुडा आणि वायुयुक्त पोकळी यांच्या समतोलासाठी आवश्यक असलेल्या लक्षणांतील भेद स्पष्ट होण्यासाठी पाण्याने भरलेल्या पात्राच्या छताला चिकटलेल्या बुडबुड्यातील वायुदाब आपण ठरवू. आ. ९४ अ पाहा. तेथील पात्राच्या तळातून निघणारी केशाकर्षण-नलिका खालच्या मुक्त जलराशीत बुडविलेली आहे. पात्राच्या छतातूनही एक तशीच नलिका वर काढलेली आहे. बाहेरील पाण्याची पातळी आणि पात्राचा तळ यांतील अंतर बदलून पाण्यातील प्रतिबल आपल्याला बदलता येते. या बदलाच्या मर्यादा अर्थातच वरच्या केशाकर्षण-नलिकेच्या व्यासाने निश्चित होतात. बुडबुड्यातील वायूचे वजन पाण्यातील प्रतिबलावर अवलंबून नाही, या सुकरतादायी गृहीतावर पुढचे गणित मांडले आहे. प्रयोगाच्या प्रारंभी बुडबुड्याचा व्यास $२त्र_०$ आहे. त्याचे स्थान मुक्त जलपातळीच्या वर असल्यामुळे, त्याच्या भोवतालच्या पाण्यातील दाब ऋण असेल. पाण्यातील खऱ्या दाबाचे मूल्य ($उ_०$) उपरोक्त दाब ($उ_{ज०}$) आणि वातावरणाचा दाब ($द_ह$) यांच्या बीजगणिती बेरजेइतके म्हणजेच

$$उ_० = उ_{ज०} + द_ह \qquad [१]$$

इतके असते व ते ऋण किंवा धन असू शकते. वायुदाब $द_{वा०}$ आणि पृष्ठीय ताण $त_पृ$ आहे. आ. ९४ आ मध्ये बुडबुड्याच्या खालच्या अर्धावर कारक असणाऱ्या बलांचा समतोल साधावयाचा, तर पुढील समीकरणाची पूर्ती झाली पाहिजे.

$$\pi त्र_०^२ द_{वा०} = \pi त्र_०^२ उ_० + २\pi त्र_० त_पृ$$

म्हणजेच

$$द_{वा०} = उ_० + \frac{२त_पृ}{त्र_०} = उ_{ज०} + द_ह + \frac{२त_पृ}{त्र_०} \qquad [२]$$

$त्र_०$ चे मूल्य शून्याप्रत जाऊ लागले, तर वायुदाबाचे मूल्य *($द_{वा०}$)* अनंत होऊ लागते. तथापि, परमाणूंच्या आकारमानाच्या कक्षेत गेल्यास समी. २ लागू पडत नाही.

आ. ९४ अ मधील पात्र वर उचलले तर पाण्याचा दाब $उ_०$ पासून उ पर्यंत कमी होईल; त्यामुळे वायूचा दाब $द_{वा०}$ ऐवजी $द_{वा}$ होईल आणि बुडबुड्याची त्रिज्या $त्र_०$ ऐवजी त्र होईल. तपमान स्थिर असेल, तर बॉईलच्या नियमानुसार कोणत्याही वायूचा दाब आणि त्याने व्यापलेला अवकाश यांचा गुणाकार स्थिरमूल्य असतो. येथे पाण्याचा दाब बदलण्याच्यापूर्वी व नंतर वायूने व्यापलेल्या अवकाशांची मूल्ये अनुक्रमे $\frac{४}{३}\pi त्र_०^३$ आणि $\frac{४}{३}\pi त्र^३$ आहेत. तेव्हा $त्र_०$ मूल्य माहीत असेल, तर त्र चे मूल्य खालील समीकरणांवरून मिळू शकते.

$$\frac{४}{३}\pi त्र_०^३ \left(उ_० + \frac{२त_पृ}{त्र_०} \right) = \frac{४}{३}\pi त्र^३ \left(उ + \frac{२त_पृ}{त्र} \right)$$

म्हणजेच

$$त्र_०^३ \left(उ_० + \frac{२ ता_पृ}{त्र_०} \right) = त्र^३ \left(उ + \frac{२ ता_पृ}{त्र} \right) \qquad [३]$$

त्यावरून उ चे मूल्य असे मिळते.

$$उ = \frac{त्र_०^३}{त्र^३} \left(उ_० + \frac{२ ता_पृ}{त्र_०} \right) - \frac{२ ता_पृ}{त्र}$$

उ चे मूल्य कमी होत गेल्यास बुडबुड्याचे आकारमान वाढत जाते. या वाढीचा वेग पुढील समीकरणाने ठरविता येतो.

$$-\frac{dत्र}{dउ} = \frac{त्र^२}{\frac{३ त्र_०^३}{त्र^२} उ_० + २ ता_पृ \left(\frac{३ त्र_०^२}{त्र^२} - १ \right)}$$

जेव्हा

$$त्र = त्र_१ = त्र_० \sqrt{३} \sqrt{\frac{त्र_० उ_०}{२ ता_पृ} + १} \qquad [४]$$

असते, तेव्हा बुडबुड्याची त्रिज्या वाढण्याचा वेग अनंत होतो, त्यावेळी पाण्यातील खरा दाब $उ_१$ असतो. समी. ३ व ४ वरून त्यासाठी पुढील मूल्य मिळते.

$$उ_१ = -\frac{४}{३} \frac{ता_पृ}{त्र_१} \qquad [५]$$

तदनुषंगिक स्थैतिक जलदाब (समी. १ पाहा) पुढीलप्रमाणे असतो.

$$उ_{ज१} = उ_१ - द_{ह} = -\left(\frac{४}{३} \frac{ता_पृ}{त्र_१} + द_{ह} \right) \qquad [६]$$

समी. २ वरून वायुदाब पुढीलप्रमाणे मिळतो.

$$द_{वा१} = उ_१ + \frac{२ ता_पृ}{त्र_१} = \frac{२ ता_पृ}{३ त्र_१} \qquad [७]$$

पाण्यातील स्थैतिक दाब $उ_{ज१}$ (समी. ६) इतका होताक्षणीच वायूचा बुडबुडा मोठा होऊ लागतो व संपूर्ण पात्रातील पाणी बाहेर जाईपर्यंत हे प्रसरण चालू राहते; आता मूळचे बुडबुड्याचे रूप न राहता वायू पात्राच्या आकाराची पोकळी व्यापतो (आ. ९४ इ पाहा). पात्राच्या भिंती, त्याचा तळ व त्याचे छत या ठिकाणांची कुंभपृष्ठे

म्हणजे या पोकळीच्या सीमा होतात. पात्राचा अवकाश श मानल्यास, $\text{द}_{\text{वाश}}$ हा वायूचा दाब खालील समीकरणाने ठरविता येतो.

$$\frac{४}{३}\pi\,\text{त्र}_{०}^{३}\,\text{द}_{\text{वा}०} = \text{श}\,\text{द}_{\text{वाश}}$$

म्हणजेच

$$\text{द}_{\text{वाश}} = \frac{४\pi\,\text{त्र}_{०}^{३}}{३\,\text{श}}\,\text{द}_{\text{वा}०}$$

बुडबुड्याची अवस्था असताना वायूचा दाब समी. २ ने ठरविता येतो हे वर पाहिले आहेच. त्या समीकरणात बुडबुड्याच्या अवकाशाचे मूल्य समाविष्ट झालेले नाही. उलटपक्षी, वायूने पोकळी व्यापली, तर त्या वेळचा वायुदाब देणाऱ्या वरील समीकरणात मात्र पोकळीच्या अवकाशाचा समावेश होतो. म्हणून वायू जेव्हा पोकळी व्यापण्याच्या अवस्थेत जातो, तेव्हा त्याचा दाब मुख्यतः मूळ लक्षणे आणि त्या पोकळीचा अवकाश यांवर अवलंबून असतो. इतर सर्व गोष्टी—उदा., पाण्यातील दाब, पृष्ठीय ताण इ.—गौण ठरतात. पोकळीच्या सीमा असणाऱ्या कुंभपृष्ठांची वक्रता, वायूच्या दाबावर आणि पात्राच्या वर व खाली असलेल्या जलस्तंभांच्या उंचीवर अवलंबून असते. या गोष्टी ज्ञात असतील, तर ती उंची सहज ठरविता येते.

ज्यावेळी बुडबुड्याचे पोकळीत रूपांतर होते त्यावेळच्या पाण्यातील दाबावर बुडबुड्याच्या आकारमानाचा प्रभाव कसा पडतो, हे स्पष्ट करण्यासाठी आपण $\text{त्र}_{०}$ ची निरनिराळी दोन मूल्ये घेऊन त्यावरून $\text{त्र}_{१}$ (समी. ४) आणि तदनुषंगिक $\text{उ}_{१}$ (समी. ५) तसेच $\text{उ}_{\text{ज}१}$ (समी. ६) यांची मूल्ये ठरवू. त्यासाठी प्रयोगाच्या आरंभी बुडबुडा मुक्त जलपातळीच्या उंचीवर आहे, असे गृहीत धरू. परिणामी, समी. १ मधील $\text{उ}_{\text{ज}०}$ चे मूल्य शून्य होते. वातावरणाचा दाब $\text{द}_{\text{ह}} = १०००$ ग्रॅम/चौ. सेंमी. असतो म्हणून $\text{उ}_{०} = १००$ ग्रॅम/चौ. सेंमी. होतो.

$\text{त्र}_{०} = ५\times १०^{-५}$ सेंमी. (मध्यम आकारमानाच्या चिकणाची त्रिज्या) असेल, तर $\text{त्र}_{१} = १०\times १०^{-५}$ सेंमी.; $\text{उ}_{१} = -१०००$ ग्रॅ./सेंमी.^{२} आणि $\text{उ}_{\text{ज}१} = -२०००$ ग्रॅ./सेंमी^{२} अशी मूल्ये मिळतात. म्हणजे बुडबुडा ज्यावेळी दुप्पट आकारमानाचा होतो व पोकळी व्यापतां त्यावेळी पाण्यातील प्रतिबल, एखाद्या केशाकर्षणनलिकेत मुक्त जलपातळीपासून २००० सेंमी. म्हणजेच २० मी. उंचीवर मिळणाऱ्या प्रतिबलाइतके असते. याउलट, $\text{त्र}_{०} = ०{\cdot}०५$ सेंमी. (बारीक वालुकाकणाचे आकारमान) असेल, तर $\text{त्र}_{१} = १{\cdot}६$ सेंमी.; $\text{उ}_{१} = -०{\cdot}०६$ ग्रॅम/सेंमी.^{२} आणि $\text{उ}_{\text{ज}१} = -१०००{\cdot}०६$ ग्रॅ./सेंमी.^{२} अशी मूल्ये मिळतात. म्हणून, या प्रकरणी पोकळी व्यापण्यापूर्वी होणारे बुडबुड्याचे प्रसरण महत्त्वाचे आहे आणि त्यावेळचे पाण्यातील प्रतिबल जवळजवळ वातावरणाच्या दाबाइतके आहे. येथे हे लक्षात ठेवले पाहिजे की, वरील उत्तरे ज्यांच्या

आधारे मिळविली, तीं सर्व समीकरणे बुडबुड्यातील हवेचे वजन कायम राहते या एका गृहीतावर आधारित होती. प्रत्यक्षात मात्र पाण्यातील दाब कमी झाला की, त्यामागोमाग हवा बाहेर पडते. म्हणून, गणिताने मिळणारी हीं फलिते केवळ स्थूलमानानेच अचूक मानली पाहिजेत.

वायूने व्यापलेल्या अवकाशावर, मृत्तिकेतील पाण्यात असलेल्या ताणबलाचा जो प्रभाव पडतो त्याची कल्पना वरील विश्लेषणाच्या फलितांच्या साहाय्याने करता येते मृत्तिकेतील एखाद्या पोकळीची तुलना आ. ९४ मध्ये दाखविलेल्या पात्राशी करता येईल. जवळजवळ पूर्णपणे संपृक्त असलेल्या मृत्तिकेतील वायूचा अंश, पोकळीच्या भिंतींना चिकटलेल्या अतिसूक्ष्म बुडबुड्यांच्या स्वरूपात असण्याचा संभव असतो. पाण्यात ताण निर्माण झाला, तर जे सर्वांत मोठे बुडबुडे असतात, ते पोकळ्या व्यापतात आणि ताण वाढतच गेला, तर नंतर लहान बुडबुडेही पोकळ्या व्यापतात. या प्रक्रियेचा प्रारंभ होण्यासाठी आवश्यक असलेला ताण, पाण्यातील मूळची प्रतिबल-परिस्थिती आणि वायूच्या महत्तम बुडबुड्यांचे आकारमान यांवर अवलंबून असतो. एकदा का वायूचा बुडबुडा प्रसरण पावला म्हणजे वायुदाब आणि पृष्ठीय ताण यांमधील समी. २ ने व्यक्त होणारा संबंध, त्याच्या बाबतीत लागू पडत नाही.

प्रकरण १५

निस्सारणाचे प्राकृतिक स्वरूप

११३. **निस्सारणाचे प्रकार :** मृत्तिकाराशीतील पाणी बाह्य उपायांनी काढून घेण्याच्या क्रियेला निस्सारण म्हणतात. स्थापत्य-व्यवहारात खोदाई करण्यापूर्वी किंवा भूमीवर भार ठेवण्यापूर्वी मृत्तिकेचे स्थैर्य वाढविण्यासाठी निस्सारणाचा उपयोग केला जातो. या उदाहरणांत एकूण प्रतिबले व्यवहारतः तींच राहून उदासीन प्रतिबले कमी होत असल्यामुळेच स्थैर्य वाढते. निस्सारणासाठी मृत्तिकेतील पाण्याची पातळी खाली आणणे आवश्यक असते. **भूजलपातळी, क्षरणशिरोपृष्ठ किंवा भूजलपृष्ठ** या संज्ञांनी व्यक्त होणारी पातळी म्हणजे मृत्तिकेतील जलस्तंभमापिकांत चढणाऱ्या पाण्याची पातळी होय. भूजल स्थिर असेल, तर अशा मापिकांत एकाच पातळीपर्यंत पाणी चढते; मग त्यांची खालची तोंडे कोणत्याही ठिकाणी असोत.

मृत्तिकेतून पाणी वाहत असल्यास, काही वेळा भूजलपृष्ठास संपृक्ति-पृष्ठ असेही म्हणतात. तथापि ते चुकीचे आहे; कारण प्रत्येक मृत्तिकेत भूजलपृष्ठाच्या वर काही उंचीपर्यंत केशाकर्षणामुळे निर्माण झालेली, संपूर्ण संपृक्तीची परिस्थिती अस्तित्वात असते. या केशाकर्षणजन्य संपूर्ण संपृक्तीच्या विभागाची माथ्याची सीमा ऋण जलदाबयुक्त असते. याउलट, जेथे जलदाब शून्य आहे अशा बिंदूंना जोडणारे पृष्ठ अशी भूजलपृष्ठाची व्याख्या आहे.

पाण्याची पातळी उतरविण्याचे, म्हणजेच निस्सारणाचे, प्रकार असे : (१) मृत्तिकेतच चर किंवा भुयारे यांचा व्यूह बांधून व पाणी बाहेर नेण्यासाठी ढाळ दिलेली वाट काढून देऊन (गुरुत्वाकर्षणानुसारी निस्सारण); (२) चरांतून किंवा विहिरींतून पाणी उपसून (उपसा-निस्सारण) आणि (३) पृष्ठभागातून होणाऱ्या बाष्पीभवनाने (उच्छोषणरूपी निस्सारण). निस्सारणामुळे अतिरिक्त झालेले पाणी बाहेर पडते; त्या पाण्याच्या प्रवाहाच्या स्वरूपानुसारही निस्सारणाचे प्रकार पडतात, ते असे : (१) सरळ समांतर रेषांनुसार होणारा प्रवाह : रेषात्मक निस्सारण; (२) समांतर पातळ्यांवर वक्ररेषांनुसार होणारा प्रवाह : द्विमिति निस्सारण; (३) त्रिज्यादिक् पातळ्यांवरून होणारा प्रवाह : त्रिज्यादिक् निस्सारण आणि (४) त्रिमितीत वक्रता असलेल्या रेषांनुसार होणारा प्रवाह : त्रिमिति निस्सारण (एक सार्वत्रिक उदाहरण).

निस्सारणाचा व्यवहारात उपयोग करताना, अतिरिक्त पाण्यापैकी बराचसा भाग निचरून जाण्यासाठी सुमारे किती अवधी लागेल, हे अगोदर माहीत असणे पुष्कळदा उपयुक्त किंवा आवश्यक असते. दर एकांक काळात ज्या प्रमाणात पाणी बाहेर पडते, त्यास **निस्सारणाचा वेग** म्हणतात. विवक्षित निस्सारण व्यवस्थेतील निस्सारणाचा वेग

आणि त्याचा परिणाम या दोन्ही गोष्टी, मृत्तिकेच्या प्राकृतिक वैशिष्ट्यांवर उदा., कणांचे आकारमान, दमनीयता इ. वर अवलंबून असतात. आदर्श वालुका आणि आदर्श, चिकण मृत्तिका यांचे गुणधर्म म्हणजे या वैशिष्ट्यांच्या दोन मर्यादा आहेत.

निस्सारण-विषयात **आदर्श वालुका** या शब्दयोजनेत पूर्णत्वाने अदमनीय असा दाणेदार पदार्थ अभिप्रेत आहे. म्हणून अशा आदर्श वालुकेचे निस्सारण होत असताना, बाहेर पडणाऱ्या पाण्याचे स्थान तेवढाच अवकाश व्यापणाऱ्या हवेने घेतले पाहिजे (हवा-नियुक्तीचे निस्सारण).

आदर्श, चिकण मृत्तिका या शब्दयोजनेत अति दमनीय मृत्तिका अभिप्रेत आहे. तिच्यातील रंध्रे इतकी सूक्ष्म असतात की, निस्सारणाच्या संपूर्ण प्रक्रियेत तीं पूर्णपणे पाण्याने भरलेलीच राहतात. मात्र यावेळी मृत्तिकेच्या पृष्ठभागातून बाष्पीभवन होता कामा नये. म्हणून आदर्श, चिकण मृत्तिकेतून निचरून बाहेर पडलेल्या पाण्याचे घनफळ आणि त्याच काळात तिच्यातील पोकळीच्या अवकाशात होणारी घट, सारखी असतात. बाह्य भारांखाली होणाऱ्या दृढीभवन-प्रक्रियेसारखीच ही प्रक्रिया आहे आणि प्रकरण १३ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींचा अवलंब करून तिचा वेग ठरविता येतो.

एखाद्या वालुकाराशीतून निस्सारण होत असताना, निस्सारित झालेला भाग आणि संपृक्त भाग या दोहोंच्या दरम्यान संक्रमणावस्थेत असलेला एक रुंद पट्टा आढळून येतो. या पट्ट्यातील काही पोकळी हवेने व उरलेली वाहत्या पाण्याने व्यापलेली असते. तसेच त्यातील प्रवाहाचा वेग जलीय प्रक्रम आणि रंध्रांचे आकारमान यांवरच नव्हे, तर तेथील संपृक्तिमान आणि अन्य कित्येक गोष्टींवरही अवलंबून असतो. या गोष्टी विचारात घेणारे निस्सारणविषयक सिद्धांत (गार्डनर १९३६; त्याचप्रमाणे विल्सन आणि रिचर्ड्स १९३८ आणि वेन्हर १९४० पाहा) इतके क्लिष्ट आहेत की, व्यवहारात वापरण्यासाठी अद्याप सोईचे नाहीत. पुढील परिच्छेदातून मांडलेला गणितात्मक भाग मात्र वालुकेतील निस्सारित भाग आणि संपृक्त भाग वेगळे करणारी सीमा, उपरोक्त पट्ट्यासारखी नसून एक सुस्पष्ट रेषा असते, या रूढ गृहीतावर आधारित आहे. त्यामुळे त्यातील फलितां-वरून वालुकेतील निस्सारणाच्या स्वरूपाविषयी होणारी कल्पना ढोबळपणेच सत्यसमीप असते, असे म्हटले पाहिजे.

११४. आदर्श वालुकेच्या थराचे तळातून निस्सारण : आदर्श वालुकेच्या थराचा छेद आ. ९५ मध्ये दाखविला आहे. त्याची जाडी च असून त्याच्या खाली वालुकेपेक्षा पुष्कळच अधिक प्रमाणात पाझरक्षम असलेल्या भरड वालुकेचा थर आहे. जलरोधी अस्तराने युक्त अशी एक विहीर बांधून तीत उपसयंत्र ठेवलेले आहे. सुरवातीस पाण्याची पातळी थराच्या पृष्ठभागावरोबर आहे. या अवस्थेत स्तंभमापिकांतील पाणी भूपृष्ठाच्या पातळीला असेल हे लक्षात येईल. त्यावेळी च–ख या कोणत्याही पातळीवरील उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल (परि. ६ पाहा) :

$$उ_{ज} = घ_{ज}(च - ख)$$

उपसयंत्र चालवून भरड वालुकेच्या थरात येणारे पाणी उपसले असता, वालुकाथराचे निस्सारण होते. उपसण्याचे प्रमाण नियंत्रित करून विहिरीतील पाण्याची पातळी वालुकाथराच्या तळाशी रोखून ठेवली आहे. अस्तरामुळे निस्सारण फक्त उभ्या दिशेत होते (उभे निस्सारण). निस्सारण पूर्ण झाल्यानंतर थराच्या तळाकडील भागात केशाकर्षणामुळे संपूर्ण संपृक्तीची अवस्था दिसून येते. तथापि वरच्या उर्वरित भागात मात्र ओलावा तुटक स्वरूपात असतो (परि. ११० पाहा). प्रत्यक्षात एका अवस्थेतून दुसरीत हळूहळू संक्रमण होत असते व या संक्रमणाचा एक पट्टा उपरोक्त दोन विभागांच्या दरम्यान अस्तित्वात येतो. परंतु पुढील विश्लेषणात या पट्ट्याचे अस्तित्व दुर्लक्षून या दोन विभागांना अलग करणारी सीमा सुस्पष्ट रेषेसारखी असते, असे गृहीत धरले आहे.

वालुका शुष्क असती, तर केशाकर्षणामुळे थोड्याच दिवसात जलपातळीच्या वर $च_{के}$ इतक्या उंचीपर्यंत पाणी चढले असते. म्हणून निस्सारण-प्रक्रियेच्या प्रत्येक अवस्थेत संपृक्त विभाग आणि निस्सारित विभाग यांना अलग करणारी उपरोक्त सीमा जलपातळीपासून $च_{के}$ उंचीवर असेल असे गृहीत धरले आहे. समजा,

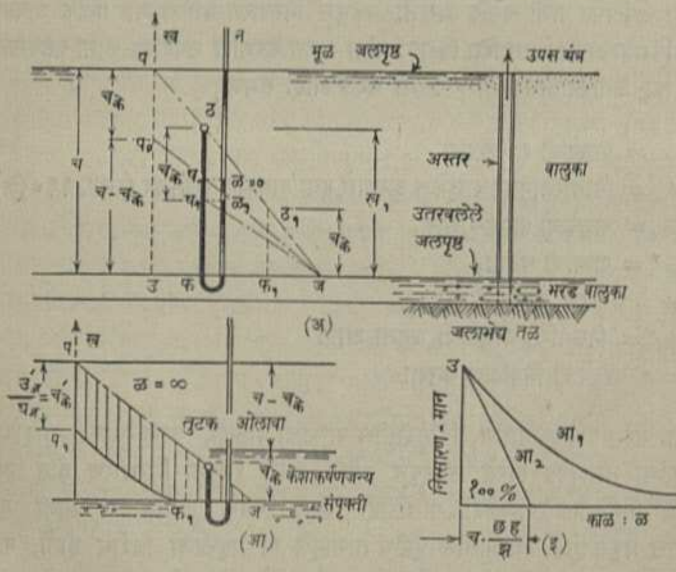
छ = वालुकेची सच्छिद्रता,
ह = निस्सारणानंतर वालुकेत असणारे हवा/अवकाश गुणोत्तर (समी. ११० (५)),
झ = वालुकेचा पाझर-गुणांक,
$घ_{ज}$ = पाण्याची घनता,
$घ_{सं}$ = संपृक्त वालुकेची घनता,
$घ_{नि}$ = निस्सारित वालुकेची घनता आणि
घ = वालुकेची निमजित घनता

आहेत. वर सांगितल्याप्रमाणे, विहिरीतील पाण्याची पातळी, उपसयंत्राच्या साहाय्याने वालुकेच्या तळापर्यंत त्वरेने उतरवून आणि तेथेच रोखून निस्सारण होत आहे. त्यामुळे वालुकेतील पाण्याची पातळीही खाली सरकू लागते व पाणी बाहेर पडण्यास प्रवृत्त होते. पाण्यातील पृष्ठीय ताणामुळे या प्रवृत्तीला विरोध होतो; कारण $च_{के}$ इतक्या जाडीचा पाण्याचा थर पेलून धरण्याचे सामर्थ्य त्यात असते. पृष्ठीय ताणाचा, पाण्यातील प्रतिबलांवर होणारा परिणाम जाणून घेण्यासाठी तळाला ४५° कोन करून पज हा एक तिरका छेद घेऊ आणि त्यावर निरनिराळ्या ठिकाणी स्तंभमापिका लावू. धन आणि ऋण अशी दोन्ही प्रकारांची उदासीन प्रतिबले मोजणे शक्य व्हावे यासाठी मापिकांना U सारखा आकार देऊ. आकृती ९५ अ मध्ये ठ या ठिकाणी अशी एक नलिका, न, लावलेली आहे. उपसा सुरू होण्यापूर्वी (ळ = ०) मापिकांतील पाणी थराच्या पृष्ठभागाबरोबर होते. पृष्ठीय ताणाचे अस्तित्वच नसते,

तर ळ = ० या क्षणी उतरविलेल्या पातळीच्या संदर्भात मोजलेले संचित च असते आणि जलीय प्रक्रम $\frac{च}{च}$ = १ असता. तथापि उपसा सुरू होताच पाणी वालुकेतून बाहेर पडण्यास प्रवृत्त होते आणि त्याच वेळी पृष्ठीय ताणही पूर्णपणे कार्यप्रवण होतो. परिणामी, थराच्या पृष्ठाजवळ लावलेल्या मापिकांतील पातळी पृष्ठभागापासून $च_{के}$ इतकी खाली उतरते. या घटनेमुळे ळ = ० या वेळेचे संचित च ऐवजी च − $च_{के}$ असे होते आणि जलीय प्रक्रमाचे मूल्य १ ऐवजी

$$म_{०} = \frac{च - च_{के}}{च} \qquad [१$$

इतके होते. आकृती ९५ अ मध्ये हा प्रक्रम $प_{०}$ज या सरळ रेषेच्या उताराने मिळतो. ही रेषा म्हणजे ळ = ० असताना पज या छेदावर निरनिराळ्या ठिकाणी ठेवलेल्या



आकृती ९५ : (अ) भरड वालुकाथरावरील वाळूचे उपसयंत्राच्या साहाय्याने केलेले निस्सारण; (आ) वाळूतील निस्सारणोत्तर प्रतिबल-परिस्थिती; (इ) पृष्ठीय ताणाच्या प्रभावामुळे कमी होणारा निस्सारण वेग. पृष्ठीय ताण नगण्य असेल, तर निस्सारण $आ_{२}$ आलेखानुसार चालू राहते.

मापिकांतील स्तंभाचे माथे जोडणारी रेषा आहे. या छेदावरील च − $ख_{१}$ या खोलीवरचा ठ बिंदू विचारात घेऊ. उतरविलेल्या जलपातळीपासून मोजलेले या ठिकाणाचे मूळचे संचित

$$च_{०} = \overline{प_{०}\,फ} = (च - च_{के})\,\frac{ख_{१}}{च}$$

आणि प्रारंभीचा अतिरिक्त स्थैतिक बलदाब

$$उ_{०} = प_{ज} \times \overline{प_{०}\,फ} = प_{ज}\,(च - च_{के})\,\frac{ख_{१}}{च}$$

आणि उदासीन प्रतिबल

$$उ_{ज०} = प_{ज} \times \overline{ठप_{०}} = - प_{ज}\,च_{के}\,\frac{ख_{१}}{च}$$

आहेत. $प_{०}ज$ ही रेषा किंवा $पज$ छेदावर लावलेल्या मापिकांतील एककालीन स्तंभशीर्षे जोडणारी दुसरी कोणतीही रेषा यांचे प्राकृतिक वैशिष्टय आ. ८२ व ८३ मधील एककालीन रेषांसारखेच आहे. $प_{०}ज$ ही एककालीन रेषा $पज$ छेदाच्या पूर्णपणे खाली असल्यामुळे $ळ = ०$ या क्षणी, या छेदावरील प्रत्येक ठिकाणी ऋण उदासीन प्रतिबल आहे.

निस्सारण जसे पुढे चालू राहते तसा केशाकर्षणजन्य संपूर्ण संपृक्तीचा पट्टा खाली सरकतो. त्याच्या वरच्या सीमेवरील दाबसंचित नेहमीच $-च_{के}$ इतके असते. म्हणून या सीमेची उतरवलेल्या जलपृष्ठापासून मोजलेली उंची $ख$ असेल, तर तेथील वेगसंचित $ख - च_{के}$ असते व जलीय प्रक्रम

$$म = \frac{ख - च_{के}}{ख} \qquad [२]$$

असतो.

$ख$ चे मूल्य जसे कमी होते, तसे $न$ या मापिकेतील पातळीही खाली उतरते आणि $ख = ख_{१}$ होताक्षणीच ती $ठ$ बिंदूच्या खाली $च_{के}$ अंतरावर स्थिरावते. उपरोक्त सीमा याहून अधिक खाली उतरविल्यास U नलिकेतील जलस्तंभ तुटतो; कारण $ठ$ भोवती आता संपृक्त वाळुका नसते.

उपरोक्त सीमा, $च_{के}$ उंचीवर असलेल्या $ठ_{१}$ बिंदूजवळ येताच जलीय प्रक्रम (समी. २) शून्य होतो आणि निस्सारणाची प्रक्रिया थांबते. या अंतिम अवस्थेतील प्रतिबल-परिस्थिती आ. ९५ आ मध्ये दाखविली आहे. तेथे $१ज$ ही छेदरेषा आणि $जफ_{१}प_{१}$ ही अंतिम एककालीन रेषा आहे. $पज$ वरील कोणत्याही बिंदूचे दाबसंचित या दोन रेषांतील तदनुषंगिक अंतराने मिळते. तेथील $प_{१}फ_{१}$ या रेषेच्या खालच्या भागातील वक्रत्वाचे कारण खाली विशद केले आहे. एककालीन रेषा पूर्णपणे $पज$ च्या खाली असल्यामुळे या छेदावरील प्रत्येक ठिकाणी ऋण दाबसंचित आहे. $च_{के}$ उंचीपर्यंत वाळुका पूर्णपणे संपृक्त राहते. त्या उंचीनंतर वाळुकाकणांच्या स्पर्शबिंदूंच्या आसपासच फक्त पाणी असते. हें पाणी

म्हणजेच तुटक जलांश (परि. ११०) होय. आता प्रतिबलांची समीकरणे मांडू. $ख < च_{के}$ उंचीवरील कोणत्याही आडव्या छेदावरचे एकूण लंबदिक् प्रतिबल

$$द = घ\,(च_{के} - ख) + घ_{नि}''(च - च_{के}) \qquad [३]$$

आणि कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल.

$$द = \grave{द} + घ_{ज}\,ख \qquad [४]$$

$ख > च_{के}$ उंचीवरील आडव्या छेदावरचे एकूण लंबदिक् प्रतिबल

$$द = घ_{नि}\,(च - ख)$$

असे मांडता येईल. हा छेद संपृक्तिरेषेच्या वर आहे आणि तेथील वालुकेच्या पोकळीतील पाण्याचे उदासीन प्रतिबल प्रत्यक्ष मोजण्याचा कोणताच उपाय उपलब्ध नाही; कारण तेथील मापिका-मुखात हवा शिरताच मापिकेतील जलस्तंभ तुटतो. तथापि निस्सारित वालुकेचे दृश्य समाकर्षण ठरविण्यासाठी केलेल्या प्रयोगांवरून असे दिसते की, तुटक ओलाव्याच्या पट्ट्यातील पाण्यातील प्रतिबल उदासीन प्रतिबलाच्या भाषेत खालीलप्रमाणे मांडता येतेः

$$उ'_{ज} = -घ_{ज} \cdot च'_{के} \qquad [५]$$

हें प्रतिबल खोलीवर अवलंबून नसते. त्याचप्रमाणे $च'_{के}$ हें मूल्य $च_{के}$ हून काहीसे अधिकच असते. $पज$ आणि $प_1फ_1$ चा वरचा भाग यांतील अंतराने $च'_{के}$ दाखविले जाते (आ. ९५ आ पाहा). म्हणून $ख > च_{के}$ या भागात आडव्या छेदावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते.

$$\bar{द} = द + घ_{ज}\,च_{के} \qquad [६]$$

$च'_{के} > च_{के}$ असल्यामुळे $प_1फ_1ज$ या अंतिम एककालीन रेषेचा वरचा सरळ भाग आणि खालचा सरळ भाग, $फ_1ज$, यांमध्ये एक संक्रमण-भाग येतो.

संपृक्त पट्ट्याचा माथा त्याच्या $च_{के}$ पातळीवरील अंतिम स्थानाला येण्याचा वेग $-\dfrac{dख}{dळ}$ असा मांडता येईल आणि वालुकाथराच्या तळातून एकांक काळात, दर एकांक क्षेत्री बाहेर पडणारे पाणी पुढीलप्रमाणे मांडता येईल:

$$ग = -\frac{dख}{dळ} \cdot छह \qquad [७]$$

येथे छह म्हणजे वालुकेच्या एकांक अवकाशातील पोकळीपैकी हवान्यात भाग आहे

आणि $ग$ हा स्राववेग आहे. डार्सीच्या नियमाप्रमाणे

$$ग = म \cdot झ$$

आहे. म्हणून समी. २ आणि ७ यांवरून पुढील समीकरण मिळते.

$$झ \frac{ख - च_{के}}{ख} = -\frac{dख}{dळ} \cdot छह \qquad [८]$$

त्याचे उत्तर असेः

$$ळ = \frac{छह}{झ} \left[च_{के} - ख - च_{के} लघु \left(च_{के} - ख \right) \right] + थ$$

त्यातील $थ$ या चलानयनाच्या स्थिरांकाचे मूल्य $ळ = ०$ असताना $ख = च$ असते, या लक्षणावरून मिळते आणि या समीकरणाचे स्वरूप असे होते :

$$ळ = \frac{च_{के}\, छह}{झ} \left[लघु \frac{च - च_{के}}{ख - च_{के}} - \frac{ख}{च_{के}} + \frac{च}{च_{के}} \right] \qquad [९]$$

या समीकरणाने आदर्श वालुकेतील निस्सारणाचा वेग ठरविता येतो. कोणत्याही क्षणी थराच्या तळातून, दर एकांक क्षेत्री बाहेर पडलेले पाणी पुढीलप्रमाणे असते.

$$(च - ख)\, छह$$

वालुकेतून निस्सारित होणारे पाणी असे आहे :

$$(च - च_{के})\, छह$$

म्हणून

$$नि\,\% = १०० \frac{च - ख}{च - च_{के}} \qquad [१०]$$

हें गुणोत्तर म्हणजे **निस्सारण–मान** होय. समी. १०२ (८ आ) ने व्यक्त केलेल्या $ह\%$ या दृढीभवनमानासारखीच ही संज्ञा आहे. $नि\%$ आणि काळ यांचा आलेख म्हणजेच आ. ९५ इ मधील $आ_१$ हा निस्सारण-आलेख होय. तो १०० % या मूल्याप्रत जात राहतो.

$च_{के}$ या केशाकर्षण-उंचीचे मूल्य क्षुल्लक असेल, तर समी. २ मधील $म$ चे मूल्य $म = १ =$ स्थिरांक होते; त्याचप्रमाणे समी. ८ आणि ९ खालीलप्रमाणे होतात.

$$झ = -\frac{dख}{dळ} \cdot छह$$

म्हणजेच
$$-\frac{d\text{ख}}{d\text{ळ}}=\frac{\text{झ}}{\text{छह}}=\text{स्थिरांक}$$

आणि
$$\text{ख}=\text{च}-\frac{\text{झ}}{\text{छह}}\cdot\text{ळ}$$

त्याच परिस्थितीत ($\text{च}_{\text{के}}=०$) समी .१० खालीलप्रमाणे होते :

$$\text{नि}\,\%=१००\,\frac{\text{च}-\text{ख}}{\text{च}}=१००\,\frac{\text{झळ}}{\text{छहच}}\qquad[११]$$

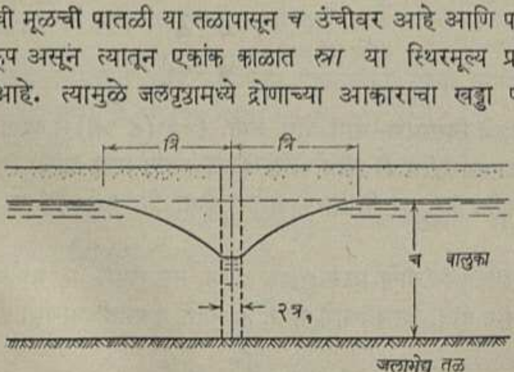
आकृती ९५ इ मधील $\text{आ}_२$ या सरळ रेषेचे हें समीकरण आहे. क्ष-अक्षाला ती

$$\text{ळ}=\frac{\text{छह}}{\text{झ}}\,\text{च}$$

या भुजामूल्याला छेदते.

झ, छ आणि ह यांची विवक्षित मूल्ये घेऊन $\text{च}_{\text{के}}>०$ आणि $\text{च}_{\text{के}}=०$ या परिस्थितीतील $\text{आ}_१$ आणि $\text{आ}_२$ हे आलेख काढले, तर $\text{आ}_१$ हा आलेख नेहमीच $\text{आ}_२$ च्या उजव्या बाजूस असतो. याचाच अर्थ असा की, केशाकर्षणाच्या अस्तित्वामुळे फक्त निस्सारित पाण्याचे प्रमाण कमी होते एवढेच नव्हे, तर निस्सारणाची प्रक्रियाही मंदावते.

११५. कूपातून पाणी उपसून केलेले, आदर्श वालुकेचे निस्सारण : खोदाई सोपी व्हावी म्हणून वालुकेतील पाण्याचा निचरा करण्यासाठी पुष्कळदा कूप खोदून पाणी उपसले जाते. आकृती ९६ मध्ये जलाभेद्य तळावर असलेला एक वालुकाथर दाखविला आहे. पाण्याची मूळची पातळी या तळापासून च उंचीवर आहे आणि पाणी उपसण्यासाठी एकच कूप असून त्यातून एकांक काळात *स्रा* या स्थिरमूल्य प्रमाणात पाणी उपसले जात आहे. त्यामुळे जलपृष्ठामध्ये द्रोणाच्या आकाराचा खड्डा पडतो. उपसा



आ. ९६ : एका कूपातून उपसा करून वालुकेचे निस्सारण

चालू राहतो तशी या द्रोणाची वरच्या वर्तुळाकार कडेची *त्रि* ही त्रिज्या वाढत जाते. तिचे कालानुवर्ती मूल्य गणितसिद्ध करणे ही व्यावहारिक जलशास्त्रातील एक समस्या आहे. $च_{के}$ हें केशाकर्षणीय संचित क्षुल्लक आहे या सुकरतादायी गृहीताच्या आधारेच ती सोडविण्यात आली आहे. $च_{के} = ०$ असल्यास, पाणी उपसण्यामुळे खाली उतरलेले जलपृष्ठ हें ओलसर आणि संपृक्त वालुका यांमधील सीमा ठरते. या सीमेच्या वर वालुकेच्या दर एकांक अवकाशापैकी पाण्याने व्यापलेला अवकाश छ (१ − ह) असतो हे मागे पाहिलेच आहे. समजा,

छ = वालुकेची सच्छिद्रता,
ह = हवा-अवकाश गुणोत्तर,
झ = वालुकेचा पाझर-गुणांक,
ख = निस्सारणामुळे उतरलेल्या जलपृष्ठावरील कोणत्याही बिंदूचे मूळच्या जलपृष्ठा-पासूनचे उभे अंतर आणि
त्र = उपरोक्त बिंदूचे कूपाच्या गर्भरेषेपासूनचे अंतर

आहेत. उपसा सुरू झाल्यानंतर *ळ* या कोणत्याही क्षणी *ख* चे मूल्य खालील समीकरणाने मिळते :

$$ख = \frac{स्रा}{४\pi झच}\left(लघु\frac{१\cdot५^{२}}{अ} + \frac{अ}{४\times१!} - \frac{अ^{२}}{४^{२}\times२\times२!} + \dots\right)$$

येथे

$$अ = \frac{छहत्र^{२}}{झचळ}$$

आहे. *अ* चे मूल्य फारच कमी असेल, तर वरील समीकरणात कंसामध्ये मांडलेल्या पदांपैकी पहिले ठेवून बाकीची दुर्लक्षिता येतात. म्हणजेच

$$ख = \frac{स्रा}{४\pi झच} लघु\left(\frac{१\cdot५^{२}}{अ}\right)$$

असे मांडता येते.

आकृती ९६ मधील निस्सारित द्रोणाकृती विभागाची *त्रि* ही त्रिज्या, $ख = ०$ नियोजून मिळते. त्यासाठी वरील समीकरणात

$$लघु\left(\frac{१\cdot५^{२}}{अ}\right) = ० \text{ म्हणजेच } अ = १\cdot५^{२}$$

असले पाहिजे. त्यावरून

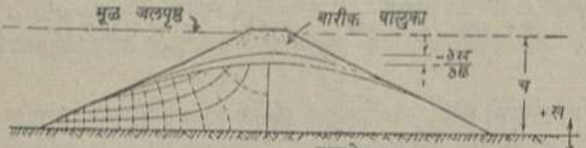
$$\text{त्रि} = १\cdot५ \sqrt{\frac{\text{चझाळ}}{\text{छह}}} \qquad [१]$$

मिळते आणि

$$\text{ख} = \frac{\text{स्रा}}{२\pi\,\text{झच}}\ \text{लघु}\left(\frac{\text{त्रि}}{\text{त्र}}\right) \qquad [२]$$

(स्टाईनब्रेनेर १९३७). हीं आसन्नमान समीकरणे आणि याच समस्येची इतर स्वतंत्रपणे मिळालेली उत्तरे (वेबर १९२८, कोझेनी १९३३) यांवरून असे दिसते की, कोणत्याही क्षणी *त्रि* चे मूल्य कूपाचा व्यास आणि कूपातून होणारा उपसा, *स्रा*, या दोहोंवर अवलंबून नसते (थाईस १९४० सुद्धा पाहा).

११६. वालुका भरावाचे जलाशय-रिक्तनानंतर होणारे निस्सारण : आदर्श वालुकेच्या भरावाजवळील जलाशयाची पातळी उतरविल्यामुळे, त्यात निर्माण होणारी निस्सारण–क्रिया जाणून घेण्यासाठी, आकृती ९७ मध्ये दाखविलेले एक सोपे उदाहरण आपण विचारार्थ घेऊ. या आकृतीत लहानशा जलाशयातून जाणाऱ्या रस्त्याच्या भरावाचा छेद दाखविला आहे.



आकृती ९७ : द्रुत रिक्तनानंतर येणाऱ्या निस्सारणाच्या अंतरिम अवस्थेत वालुका-भरावामध्ये निर्माण होणारे क्षरणजाल.

मुक्त जलपातळी भरावाच्या माथ्याजवळच आहे आणि भरावाखालच्या जलाभेद्य तळापासून तिची उंची च आहे. जर हा संपूर्ण जलाशय द्रुत गतीने रिक्त केला, तर भरावाच्या दर एकांक अवकाशातील छह इतके, अतिरिक्त झालेले पाणी भरावाच्या उतारातून बाहेर पडेल. केशाकर्षणाची उंची $\text{च}_{\text{क}}$ क्षुल्लक आहे, असेही गृहीत धरू. उतारामागच्या वालुकेतील अतिरिक्त पाणी, भरावाच्या मध्याकडच्या भागातील पाण्यापेक्षा अधिक सुलभतेने बाहेर पडू शकत असल्यामुळे संयुक्त विभागाच्या वरच्या सीमेचा आकार लवकरच पालथ्या ठेवलेल्या तव्यासारखा होतो. या सीमेचा माथा हळूहळू खाली उतरत असतो; तो वेग $-\frac{d\text{ख}}{d\text{ळ}}$ असतो व हें मूल्य शेवटी शून्याप्रत जाणारे असते. माथ्याजवळ स्राववेग पुढीलप्रमाणे असतो :

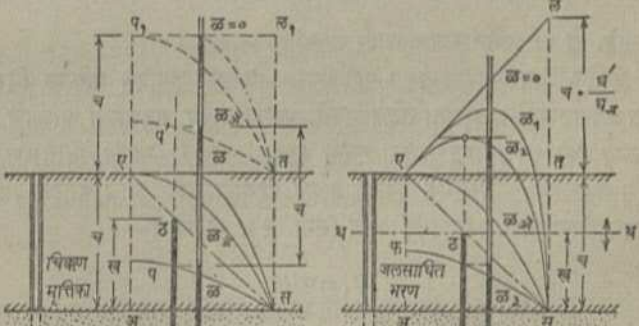
$$ग = -\frac{dख}{dळ} छह \qquad ११४ (७)$$

निस्सारण-विभागाच्या माथ्याच्या सीमेच्या खालच्या भागात प्रवाह-सातत्य लक्षणांची (समी. ९८ (१)) पूर्तता होते. तेव्हा परि० ८९ मध्ये वर्णिलेल्या एका पद्धतीचा अवलंब करून क्षरणजाल सिद्ध करता येईल. रिक्त करण्याच्या क्रियेनंतर लगेच, म्हणजे $ळ = ०$ या क्षणी, हें क्षरणजाल पर्जन्यकाळात निर्माण होणाऱ्या क्षरणजालाप्रमाणे असते. आकृती ७८ अ पाहा.

काळ लोटतो तसा संपृक्त विभागातील सरासरी जलीय प्रक्रम संथपणे कमी होत असतो. म्हणून अंतिम अवस्था असंपात पद्धतीने प्राप्त होते. रिक्त करण्याची क्रिया पुरी झाल्यानंतर ळ या कोणत्याही क्षणी अस्तित्वात येणारे क्षरणजाल आकृती ९७ मध्ये दाखविले आहे. $ळ > ०$ या क्षणी क्षरणविभागाचा माथा भरावाच्या माथ्यापेक्षा खाली असतो. त्यामुळे अतिवृष्टीमुळे निर्माण होणाऱ्या परिस्थितीपेक्षा ही परिस्थिती स्थैर्याच्या दृष्टीने अधिक अनुकूल असते. अर्थात पावसामुळे संपूर्ण संपृक्तीची अवस्था निर्माण झालेली असली पाहिजे.

समाकर्षणगुणी मृत्तिकांत बांधलेल्या भरावाच्या स्थैर्याबर होणारा द्रुत रिक्तनाचा परिणाम परि० १२२ मध्ये चर्चिला जाईल.

११७. आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेच्या थराचे त्याच्या तळातून केलेले निस्सारण : आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेच्या थराचा छेद आकृती ९८ अ मध्ये दाखविला आहे. त्याची जाडी च आहे; त्याच मृत्तिकेतील केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनापेक्षा ती कमी



आकृती ९८. दृढीभवन : (अ) चिक्कण मृत्तिकेच्या जुन्या थराचे; (आ) नुकत्याच बांधलेल्या जलसाधित भरणाचे. जलपातळी थराच्या तळापर्यंत शीघ्रतेने उतरवून आणि विहिरीतून उपसा करून त्या ठिकाणीच राखलेली आहे.

आहे. थराखाली भरड वालुका आहे. थराच्या पृष्ठभागामधून केव्हाही बाष्पीभवन होऊ नये, अशी काळजी घेतलेली आहे. पाण्याची पातळी निस्सारणापूर्वी थराच्या पृष्ठभागापाशी आहे. या परिस्थितीत खालच्या वालुकेत किंवा चिक्कणथरात लावलेल्या मापिकांतील पाणी चिक्कण थराच्या माथ्यापर्यंत चढते आणि चिक्कण थराच्या तळापासून ख उंचीवर असलेल्या ठ या ठिकाणी असणारे उदासीन प्रतिबल खालीलप्रमाणे असते.

$$उ_{ज_०} = घ_ज (च - ख)$$

खालच्या वालुकेपर्यंत जाणारा कूप खोदून पाणी उपसण्याची व्यवस्था केली आहे व कूपातील पाण्याची पातळी चिक्कण थराच्या तळाशी स्थिर ठेवून निस्सारण केले जात आहे. अतिरिक्त झालेले पाणी या थरातून अधस् दिशेने वालुकेमध्ये जाते. कूपातील पाण्याची पातळी उतरविण्यास लागणारा कालावधी क्षुल्लक असतो असे गृहीत धरले आहे. आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेच्या बाबतीत गृहीत धरलेल्या गुणधर्मांनुसार (परि० ११३) निस्सारणप्रक्रियेच्या संपूर्ण काळात चिक्कण माती संपृक्त अवस्थेत राहील. याचाच अर्थ असा की, निस्सारणामुळे बाहेर जाणाऱ्या पाण्याचे घनफळ मृत्तिकेतील पोकळीच्या घनफळात होणाऱ्या घटीइतके असेल. निस्सारण पुरे झाल्यानंतर चिक्कण थरातील ठ या बिंदुस्थानचे उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल.

$$उ_{ज_१} = -घ_ज ख$$

म्हणून निस्सारणाच्या द्वारे कमी झालेले ख उंचीवरील उदासीन प्रतिबल

$$उ_{ज_०} - उ_{ज_१} = घ_ज (च - ख) + घ_ज ख = घ_ज च \qquad [१]$$

असे आहे. ही घट खोलीच्या मूल्यावर अवलंबून नाही.

ठ बिंदूतून जाणाऱ्या आडव्या पातळीवरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल निस्सारण-काळात जवळजवळ न बदलता तसेच राहते. कारण बाहेर पडणाऱ्या पाण्याचे वजन, मृत्तिकेच्या एकूण वजनाशी तुलना करता क्षुल्लक असते. म्हणून निस्सारण-काळात आडव्या छेदावरील कार्यसाधक लंबदिक् दाबात होणारी वाढ त्याच काळात होणाऱ्या उदासीन प्रतिबलातील घटीइतकी असते (समी. १). म्हणजेच—

$$द_१ = घ_ज च \qquad [२]$$

हाच परिणाम थराच्या पृष्ठभागावर $द_१$ मूल्याचा दाब लावून आणि जलपातळी पृष्ठभागाशी राहील अशी व्यवस्था करून साधता येतो. निस्सारण आणि भारजन्य दृढीभवन यांत असणारे निकटचे नाते ध्यानात येण्यासाठी आपण $द_१ = घ_ज च$ या अधिभाराच्या प्रभावाखाली, परंतु जलपातळीचे स्थान न बदलता, होणाऱ्या दृढीभवनाचा

प्रथम विचार करू. थराचा पृष्ठभाग जलभेद्य पिंडयाने झाकलेला आहेच. त्यामुळे अतिरिक्त होणारे पाणी फक्त खालच्या दिशेने निस्सारित होऊन वाळूमध्ये जाईल. भार लावल्यानंतर लगेच प्रत्येक मापिकेतील पाणी प$_1$ल$_1$ या पातळीला असेल. ही पातळी थराच्या पृष्ठभागापासून च = द$_1$ / घ$_{ज}$ इतक्या उंचीवर आहे (आकृती ९८ अ). ळ = ∞ या क्षणी त्याच मापिकांतील पाणी थराच्या पृष्ठाशी राहते, म्हणून प$_1$ल$_1$ आणि एत या रेषा म्हणजे अनुक्रमे आदि आणि अंतिम एककालीन रेषा होत. दरम्यानच्या काळातील उ हा अतिरिक्त स्थैतिक जलदाब पुढील समीकरणाने मिळतो.

$$\frac{\partial उ}{\partial ळ} = ह \frac{\partial^{2} उ}{\partial ख^{2}} \qquad ९९\ (८)$$

सीमालक्षणे प्रस्थापित करण्याची कृती परि० १०१ मध्ये वर्णिलेली आहे. हीं लक्षणे अशी :

$$ळ = ० \quad आणि \quad ० < ख \leqq च \quad उ = द_1 = घ_{ज} च \qquad [३ अ]$$

$$० \leqq ळ \leqq \infty \quad आणि \quad ख = च \quad \frac{\partial उ}{} = ० \qquad [३ आ]$$

$$० \leqq ळ \leqq \infty \quad आणि \quad ख = ० \quad उ = ० \qquad [३ इ]$$

$$ळ = \infty \quad आणि \quad ० \leqq ख \leqq च \quad उ = ० \qquad [३ ई]$$

या सीमालक्षणांची पूर्तता करणारे समी. ९८ (८) चे उत्तर समी. १०१ (३ अ) सारखेच आहे. तें पुढील स्वरूपात लिहिता येईल.

$$उ = फ (ळ, ख) \qquad [४]$$

आकृती ९८ अ मध्ये हें समीकरण तुटक एककालीन रेषांनी दाखविले आहे. या रेषा म्हणजे आकृती ८२ मधील रेषांचे प्रतिबिंब असल्यासारख्या आहेत. ळ या कोणत्याही क्षणासाठी काढलेल्या एककालीन रेषेवरील प$'$ या बिंदूची पातळी म्हणजे ठ या मापनस्थानी असलेल्या जलस्तंभमापिकेत त्या क्षणी असलेली पाण्याची पातळी असते. आकृती ९८ अ पाहा. या परिस्थितीतील उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$उ_{ज} = घ_{ज} \times \overline{ठप'} \qquad [५]$$

निस्सारणजन्य दृढीभवनाची प्रक्रियासुद्धा कलनसमीकरण ९९ (८) च्या साहाय्याने स्पष्ट करता येते. तेथील सीमालक्षणे समी. ३ ने दिलेल्या लक्षणांसारखी असतात. फरक एवढाच की, उ हा अतिरिक्त स्थैतिक जलदाब पृष्ठापासून न मोजता थराच्या तळापासून म्हणजेच पृष्ठापासून च इतक्या खोलीवरील पातळीपासून मोजतात. त्यामुळे समस्येच्या अटींची पूर्ती करणारे समी. ९९ (८) चे उत्तर समी. ४ सारखे असते. परंतु *अत* ही

एककालीन अंतिम रेषा चिकण थराच्या पृष्ठाजवळ न राहता तळाशी असते. तेव्हा $घ_{ज}च$ या अधिभाराखालील दृढीभवनाची प्रक्रिया दाखविणारा तुटक एककालीन रेषांचा संच दिलेला असेल, तर तो च इतक्या अंतरातून सरळ खाली सरकवून या उदाहरणातील सलग रेषांनी दाखविलेला एककालीन रेषांचा संच मिळतो. याचाच अर्थ असा की, ळ या एकाच क्षणाच्या दोन एककालीन रेषांतील $पप'$ हें उभे अंतर स्थिरमूल्य म्हणजेच च इतके असते. जर ठ या बिंदुस्थानी ळ या क्षणी झालेले दृढीभवन अधिभारजन्य असेल, तर त्या वेळचे $उ'_{ज}$ या उदासीन प्रतिबलाचे मूल्य $घ_{ज}\overline{ठप'}$ इतके असते आणि जर तें निस्सारणजन्य असेल, तर $उ_{ज}$ या उदासीन प्रतिबलाचे मूल्य $-घ_{ज}\overline{ठप}$ इतके असते. ज्या अर्थी,

$$\overline{ठप'}+\overline{ठप}=च$$

आहे त्याअर्थी $उ'_{ज}-उ_{ज}$ या फरकाचे मूल्य स्थायी असले पाहिजे. तें मूल्य असे :

$$उ'_{ज}-उ_{ज}=घ_{ज}च$$

म्हणजेच,

$$उ_{ज}=उ'_{ज}-घ_{ज}च$$

$उ_{ज}$ हें उदासीन प्रतिबल धन असेल किंवा ऋण असेल परंतु $उ'_{ज}$ मात्र नेहमीच धन असते.

तुटक आणि सलग एककालीन रेषांनी दाखविलेल्या दोन्ही प्रक्रियांच्या बाबतीत काळ आणि अतिरिक्त स्थैतिक जलदाब उ यांमधील संबंध एकाच समीकरणाने (समी. ४) व्यक्त होतो. म्हणून स हा काळगुणक आणि द % हें दृढीभवनमान (समी. १०२ (८ आ)) यांतील संबंधही दोन्ही प्रक्रियांत तोच असतो. हा संबंध आकृती ८५ अ मधील आ, या आलेखाने दाखविला आहे.

आकृती ९८ आ म्हणजे वालुकास्तरावर बांधलेल्या जलबाधित भरणाचे संचित-चित्र आहे. तें काढताना खालील गृहीतांचा आधार घेतला आहे. भरणाचे बांधकाम-कालातील दृढीभवन दुर्लक्षणीय आहे. केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनाची महत्तम उंची भरणाच्या च या उंचीहून अधिक आहे आणि भरणाच्या तळाशी असलेले स्थैतिक संचित शून्य मूल्याला ठेवलेले आहे. त्यासाठी वालुकाथरापर्यंत कूप खणून त्यातून पाणी उपसले जात आहे. एल ही रेषा म्हणजे एककालीन आदिरेषा आहे. म्हणजेच ती ळ = ० या क्षणी एस या सरळ छेदावरील, निरनिराळ्या बिंदुस्थानी असलेल्या मापिकांतील पाण्याची पातळी जोडणारा बिंदुपथ आहे. ळ = ∞ या क्षणी, प्रत्येक ठिकाणी ही पातळी आणि भरणाचा तळ एकच होतात. त्यामुळे *अस* ही रेषा एककालीन अंतिम रेषा ठरते. आकृती ८३ उ आणि ८३ ऊ यांमध्ये दाखविलेल्या

एल या एककालीन आदिरेषा आणि येथील एककालीन आदिरेषा ह्या एकच आहेत. परंतु अंतिम रेषा मात्र भिन्न आहेत. दृढीभवनाची प्रक्रिया पूर्वीच दिलेल्या कलनसमीकरण ९९ (८) च्या साहाय्याने मांडता येते. परंतु असे असले, तरी आकृती ९८ अ मध्ये दाखविलेल्या प्रक्रियेप्रमाणे आकृती ९८ आ मध्ये दाखविलेली प्रक्रिया कोणत्याही बाह्य भारामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रक्रियेसारखी आहे, असे दाखविता येत नाही. म्हणून परि० १०१ मध्ये दिलेल्या उत्तरांचा विचार न करता, तद्विषयक समीकरण स्वतंत्रपणे सोडविणे आवश्यक आहे. एल आणि *अस* म्हणजे अनुक्रमे एककालीन आदि आणि अंतिम रेषा आहेत; म्हणून सीमा-लक्षणे पुढीलप्रमाणे मांडता येतील :

$$\text{ळ} = ० \quad \text{आणि} \quad ० < \text{ख} \leqq \text{च}, \qquad \text{उ} = \text{च}\,\frac{\text{घ}'}{\text{घ}_{\text{ज}}}\cdot\frac{\text{च}-\text{ख}}{\text{च}} + \text{चघ}_{\text{ज}}$$

$$० \leqq \text{ळ} \leqq \infty \quad \text{आणि} \qquad \text{ख} = ०, \qquad \text{उ} = ०$$

$$\text{ळ} = \infty \quad \text{आणि} \quad ० \leqq \text{ख} \leqq \text{च}, \qquad \text{उ} = ०$$

एककालीन रेषा आणि ठ या एखाद्या बिंदूतून काढलेली उभी रेषा जेथे एकमेकींस छेदतात, त्या ठिकाणी असणारा एककालीन रेषेचा उतार आणि ठ या बिंदुस्थानी असणारा जलीय प्रक्रम (समी. १०१ (६)) हे एकच असतात, हें परि. १०१ मध्ये दाखविले आहेच. *एस* या संदर्भरेषेच्या उलट दिशेतील उतार, ऊर्ध्वप्रवाहाचा प्रक्रम दाखवितो आणि त्याच दिशेतील उतार अधःप्रवाहाचा प्रक्रम दाखवितो. $\text{ळ} = ०$ या क्षणाची एककालीन रेषा म्हणजे डावीकडे सारखा उतार असलेली एल ही रेषा होय. अर्थातच $\text{ळ} = ०$ या क्षणी भरावाच्या प्रत्येक बिंदूतून पाणी ऊर्ध्व दिशेने वाहते. $\text{ळ}_{२}$ या क्षणी *थथ* या आडव्या पातळीवरील ठ या बिंदूतून जाणारा प्रवाह ऊर्ध्वगामीऐवजी अधोगामी होतो. $\text{ळ}_{\text{ए}}$ या क्षणाच्या एककालीन रेषेस आकृती ९८ आ मध्ये $\text{ळ}_{\text{ए}}$ असे चिन्ह दिले आहे. $\text{ळ}_{\text{ए}}$ या काळानंतर अतिरिक्त पाणी खालच्या दिशेनेच बाहेर पडते आणि पृष्ठाजवळचा जलीय प्रक्रम आकृती ९८ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे शून्यच राहतो. म्हणून पूर्वी दिलेल्या सीमालक्षणांत आणखी भर घालणे भाग आहे. ती अशी :

$$० \leqq \text{ळ} \leqq \text{ळ}_{\text{ए}} \quad \text{आणि} \quad \text{ख} = \text{च}, \qquad \text{उ} = \text{घ}_{\text{ज}}\text{च}$$

$$\text{ळ}_{\text{ए}} \leqq \text{ळ} \leqq \infty \quad \text{आणि} \quad \text{ख} = \text{च}, \qquad \frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} = ०$$

या सीमालक्षणांचा आधार घेऊन आकृती ९८ आ मध्ये दाखविलेल्या एककालीन रेषांचा आकार एका स्थूलमान पद्धतीने गणितसिद्ध केलेला आहे. निस्सारणाच्या प्राथमिक अवस्थेत म्हणजे $\text{ळ} < \text{ळ}_{\text{ए}}$ असताना एककालीन रेषा दोन्ही बाजूंस उतरत असतात. त्याचा अर्थ असा की, पाण्याचा काही अंश भरावाच्या पृष्ठातून ऊर्ध्वदिशेने

बाहेर पडतो आणि तात्पुरता पृष्ठाजवळ साठतो. या घटनेस **पाणथळ निर्माण होणे** असे म्हणतात. ही घटना पुनः पुनः दृष्टोत्पत्तीस आलेली आहे. ऊर्ध्वमुखी प्रवाहाचा पट्टा आणि अधोमुखी प्रवाहाचा पट्टा यांमधील सीमेचे स्थान तदनुषंगिक एककालीन रेषा आणि तिला काढलेली आडवी स्पर्शरेषा यांच्या स्पर्शबिंदूच्या स्थानावरून ठरते, हें परि. १०१ मध्ये विशद केलेले आहे. एककालीन रेषांना ए बिंदूतून काढलेली स्पर्शरेषा आडवी झाली ($ळ = ळ_{८}$) म्हणजे त्यानंतर निस्सारण केवळ अधोमुख दिशेनेच होते आणि जें पाणी पूर्वी पृष्ठभागावर साचलेले होते, तें त्वरित नाहीसे होते आणि भरावातून झिरपून वाळूमध्ये जाते. अतिरिक्त पाण्याचा हा अंश भरावातून निस्सारित होणाऱ्या एकूण पाण्याच्या मानाने फारच लहान असतो. म्हणून सीमालक्षणे प्रस्थापित करताना $ळ_{८}$ नंतरच्या कोणत्याही क्षणी पृष्ठभागाशी असलेला प्रक्रम शून्य असतो, असे गृहीत धरणे समर्थनीय ठरते.

या गृहीतानुसार ही समस्या सोडविली असता, आपल्याला जो काल-दृढीभवन आलेख मिळतो, तो नेहमीच आकृती ८५ अ मध्ये दाखविलेल्या $आ_{१}$ आणि $आ_{२}$ या आलेखांच्या संपूर्णपणे दरम्यान पडतो. या दोन आलेखांमध्ये असणारे क्षेत्र काहीसे अरुंद असल्यामुळे आकृती ९८ आ मध्ये दाखविलेल्या प्रक्रियेचा दृढीभवन-काल-आलेख आकृती ८५ अ मधील $आ_{१}$ आणि $आ_{२}$ या आलेखांच्या मध्ये काढला, तर प्राक्कलनापुरते तें पुरेसे असते. कूपातून पाणी उपसून साह्य केलेले नसेल, तर दृढीभवनमान आणि कालगुणक यांतील संबंध $आ_{१}$ आलेखाने (आकृती ८५ अ) दाखविला जातो आणि दृढीभवन समाप्त झाल्यानंतर भरावातील अतिरिक्त स्थैतिक जलदाब सगळीकडे शून्य होतो.

उपसण्याची क्रिया चालू असताना, भरावाचे वर्तन अर्धबंदिस्त थराप्रमाणे असते; कारण भरावातील अतिरिक्त पाण्याचा बराचसा अंश त्याच्या तळातून बाहेर पडत असतो. म्हणून कालगुणकविषयक समीकरणातील ड हें पद (समी. १०१ (३ आ)) म्हणजे भरावाची संपूर्ण जाडी होय. दृढीभवनाला पाणी उपसून साहाय्य होत नसेल, तर तें आकृती ८३ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे चालू राहते आणि ड हें चिन्ह स्तराच्या जाडीचा अर्धा भाग दर्शविते. उपसण्याच्या क्रियेमुळे भरावातील सरासरी कार्यसाधक लंबदिक् दाब जवळजवळ तिप्पट होत असल्यामुळे भरावाच्या घनतेत पाणी उपसण्याच्या क्रियेमुळे पुष्कळच वाढ होते.

११८. चिकण थराच्या तळातून केलेल्या निस्सारणाच्या वेगावर होणारा वायूच्या बुडबुड्यांचा परिणाम : चिकण मृत्तिकेतून निस्सारण होत असताना तिच्यातील उदासीन प्रतिबलात नेहमीच घट होते. आकृती ९८ अ मध्ये दाखविलेल्या प्रक्रियेत, चिकण थरातील प्रत्येक ठिकाणच्या या घटीचे अंतिम मूल्य $घ_{ज}च$ इतके असते (समी. ११७ (१)). तेथे च ही थराची जाडी आहे. त्याचप्रमाणे एककालीन

आदिरेषा एत आणि अंतिमरेषा अस यांतील उभे अंतरही च आहे. चिकण मृत्तिकेतील पोकळीचा काही भाग वायूच्या बुडबुड्यांनी व्यापलेला असेल आणि वायूतील दाब $द_{वा०}$ असेल, तर उदासीन प्रतिबलातील घट या वायूच्या दाबातही घट घडवून आणण्यास कारणीभूत होते. त्यामुळे बुडबुडे प्रसरण पावतात. परिणामी, मृत्तिकेतून निस्सारित झालेल्या पाण्याचे घनफळ पोकळीतील घटीपेक्षा अधिक होते. समजा,

$त्र_०$ = बुडबुड्यांची निस्सारणपूर्व सरासरी त्रिज्या,
$त्र$ = बुडबुड्यांची निस्सारणोत्तर सरासरी त्रिज्या,
$उ_ज$ = चिकण मृत्तिकेतील निस्सारणापूर्वीचे सरासरी उदासीन प्रतिबल,
$उ_ज - घ_ज ड$ = चिकण मृत्तिकेतील निस्सारणोत्तर सरासरी उदासीन प्रतिबल,
$द_ह$ = वातावरणाचा दाब,
$र_०$ = चिकण मृत्तिकेचा मूळ सरासरी रंध्रांक,
$र_१$ = चिकण मृत्तिकेचा अंतिम सरासरी रंध्रांक,
$अ_द$ = चिकण मृत्तिकेच्या दमनीयतेचा गुणांक,
$घ_द$ = अवकाशक्षयाचा गुणांक,
$ह$ = मूळचे हवा-अवकाश गुणोत्तर म्हणजेच निस्सारणापूर्वी हवेने व्यापलेला अवकाश आणि मूळचा पोकळीचा अवकाश यांतील गुणोत्तर आणि
$\Delta र$ = घनकणांच्या दर एकांक अवकाशागणिक होणारी वायुव्याप्त अवकाशातील अंतिम वाढ

आहेत. समीकरण ११२ (१ व २) यांच्या साहाय्याने बुडबुड्यांतील वायूच्या सरासरी दाबाचे प्रारंभीचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$द_{वा०} = उ_ज + द_ह + \frac{२त_पृ}{त्र_०} \qquad [१]$$

निस्सारणामुळे वायूचा दाब कमी होऊन पुढीलप्रमाणे होतो :

$$द_{वा} = उ_ज - घ_ज ड + द_ह + \frac{२त_पृ}{त्र} \qquad [२]$$

जर $त्र_०$ ज्ञात असेल, तर निस्सारणानंतरच्या $त्र$ या त्रिज्येचे मूल्य समी. ११२ (३) च्या साहाय्याने गणितसिद्ध करता येते. निस्सारणापूर्वी घन कणांच्या दर एकांक अवकाशागणिक बुडबुड्यांनी व्यापलेला अवकाश $ह \times र_०$ इतका असतो. निस्सारणामुळे तो वाढून $हर_० + \Delta र$ इतका होतो. बॉईलच्या नियमाप्रमाणे पुढील समीकरण मांडता येते.

$$ह.\ र_{०}\ द_{वा_{०}} = (हर_{०} + \Delta र)\ द_{वा}$$

म्हणून—

$$\Delta र = र_{०}\ ह. \frac{द_{वा_{०}} - द_{वा}}{द_{वा}} \qquad [३]$$

निस्सारणाच्या क्रियेत, घनकणांच्या दर एकांक अवकाशागणिक बाहेर पडणारे एकूण पाणी पुढीलप्रमाणे असते :

$$र_{०} - र_{१} + \Delta र$$

वायूचे बुडबुडे नसलेल्या, चिकण मृत्तिकेतून कार्यसाधक प्रतिबलात झालेल्या $\bar{द}$ या वाढीमुळे घन कणांच्या दर एकांक अवकाशागणिक बाहेर पडणारे पाणी $र_{०} - र_{१} = अ_{द}\ \bar{द}$ इतके असते. बुडबुड्यांनी युक्त असलेल्या मृत्तिकेच्या बाबतीत मात्र तें पुढीलप्रमाणे असते.

$$र_{०} - र_{१} + \Delta र = अ_{द}\bar{द} + \Delta र = \bar{द}\left(अ_{द} + \frac{\Delta र}{\bar{द}}\right) अ'_{द}\bar{द}$$

येथे

$$अ'_{द} = अ_{द} + \frac{\Delta र}{\bar{द}} \quad \text{आहे.} \qquad [४]$$

या परिस्थितीतील अवकाश-क्षय गुणांक (समीकरण ९८ (५)) पुढीलप्रमाणे आहे.

$$प'_{द} = \frac{अ'_{द}}{१ + र_{०}} = \frac{अ_{द} + \frac{\Delta र}{\bar{द}}}{१ + र_{०}} \qquad [५]$$

म्हणून वायुयुक्त बुडबुडे असलेल्या, चिकण मृत्तिकेचा दृढीभवनवेग समी. १०१ (३ आ) मध्ये $प_{द}$ ऐवजी $प'_{द}$ नियुक्त करून ठरविता येतो. समीकरण १०१ (३ आ) च्या साहाय्याने कालगुणकाची व्याख्या करता येते. त्यावरून आपल्याला खाली दिलेले मूल्य मिळते :

$$स' = \frac{ज्ञ}{घ_{ज}\ प'_{द}\ ड^{२}}\ ळ \qquad [६]$$

विवरणासाठी घेतलेल्या या उदाहरणामध्ये समीकरण ५ मधील $\bar{द}$ चे मूल्य $घ_{ज}ड$ इतके आहे आणि $\Delta र$ चे मूल्य समीकरण ३ वरून मिळते. समीकरण ५ आणि ६ यांनी व्यक्त होणारा संबंध बघता, सूक्ष्मकणयुक्त आणि व्यवहारतः अदमनीय निक्षेपांचे निस्सारण अति दमनशील निक्षेपाइतकेच सावकाशपणे चालू राहील. अर्थात

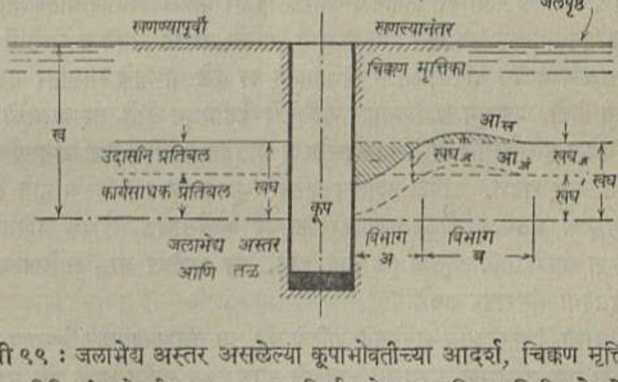
त्यासाठी त्यातील पोकळीचा काही भाग वायुयुक्त असला पाहिजे. अशा निक्षेपाचा दर्शनी दमनगुणांक चिक्कण मृत्तिकेच्या $अ'_द$ (समीकरण ४) या गुणांकाइतकाच असतो.

$$अ'_द = अ_द + \frac{\Delta र}{द}$$

परि० १०५ मध्ये असे दाखविले आहे की, वायुयुक्त बुडबुड्यांचे चिक्कण मृत्तिकेतील अस्तित्व तिच्या दृढीभवनाचा वेग वाढविते, तर येथे केलेल्या विश्लेषणानुसार असे दिसून येते की, वायूच्या अस्तित्वाचा निस्सारणाच्या वेगावर होणारा परिणाम नेमका उलटा असतो.

११९. कूपाच्या भितीतून होणारे आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेचे निस्सारण : जलदृष्ट्या स्थैतिक समतोलाच्या अवस्थेत असलेल्या चिक्कण मृत्तिकेच्या थराचा छेद आकृती ९९ मध्ये दाखविला आहे. त्यातील पाण्याची पातळी थराच्या पृष्ठाशी आहे, असे गृहीत धरले आहे.

अशा थरात कूप खोदला असता, त्याच्या लगतच्या मृत्तिकेतील एकूण प्रतिबलात बदल होतो व त्यामुळे प्रतिबल-शैथिल्य निर्माण झालेल्या या भागाकडे पाण्याचे स्थलांतर घडून येते. कूपाच्या रोखाने जलीय प्रक्रमही प्रस्थापित होतो आणि एखाद्या विहिरीकडे आजूबाजूच्या वालुकेतून होणाऱ्या प्रवाहासारखा, गुरुत्वानुसारी प्रवाह या कूपाच्या दिशेने



आकृती ९९ : जलाभेद्य अस्तर असलेल्या कूपाभोवतीच्या आदर्श, चिक्कण मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थिती. खोदाई चालू असताना निर्माण होणाऱ्या प्रतिबल-शिथिलतेमुळे रंध्रस्थ जलदाबात पडणारा तात्पुरता फरक उजव्या बाजूच्या रेखांकित क्षेत्राने दाखविला आहे.

निर्माण होतो. या दुहेरी प्रक्रियेचे प्राकृतिक स्वरूप जाणून घेण्यासाठी आपण या दोन्ही घटकांचा स्वतंत्रपणे विचार करू. पहिला घटक वेगळा करण्यासाठी आपण असे गृहीत धरू की, कूपाचा तळ आणि भित यांवर एक जलाभेद्य अस्तर लावलेले आहे आणि

खोदाईनंतर लगेच हा कूप पाण्याने पूर्णपणे भरला आहे. असे केले असता, कूपाकडे पाण्याचे गुरुत्वानुसारी निस्सारण होणार नाही आणि कूप खोदण्याचा परिणाम चिक्कण मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थिती बदलण्यापुरताच मर्यादित केल्यासारखे होईल. *ख* खोलीवर, कूपखननापूर्वी उदासीन प्रतिबल *घ*$_{ज}$*ख*, कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल *ख घ'* (*घ'* = मृत्तिकेची निमज्जित घनता) आणि एकूण लंबदिक् प्रतिबल *खघ* (*घ* = मृत्कण + पाणी या दोहोंसहित मोजलेली घनता) अशी परिस्थिती होती. हीं प्रारंभीची प्रतिबले आकृती ९९ मध्ये तदनुषंगिक उंचीवर काढलेल्या आडव्या रेषांनी दाखविली आहेत. खननापूर्वीचे आडव्या छेदावर येणारे लंबदिक् प्रतिबल, चिक्कण मृत्तिका पार्श्वीय बद्धतेविना पेलू शकेल त्यापेक्षा पुष्कळच अधिक आहे. अर्थातच कूपखननाचा परिणाम म्हणून मृत्तिकेत कूपाच्या दिशेने नम्य विसर्पण घडून येते. प्रतिबलपरिस्थिती नम्य समतोलास आवश्यक असलेल्या लक्षणांना संवादी होईपर्यंत हें विसर्पण चालू राहते. प्रतिबल-शैथिल्याची ही प्रक्रिया—जिला पूर्वी कंकण-क्रिया असे म्हटलेले आहे (परि. ७४)–चालू असताना, आडव्या छेदावर ठिकठिकाणी एकूण लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य मूळ मूल्याइतके न राहता, *आ* या आलेखाच्या (आकृती ९९) कोटींनी दाखविलेल्या मूल्यांइतके होते (आकृती ६१ आ सुद्धा पाहा). *अ* विभागामध्ये हीं प्रतिबले आरंभीच्या *घख* या एकूण प्रतिबलापेक्षा कमी असतात आणि *ब* विभागामध्ये अधिक असतात. तथापि रंध्रांकाचे मूल्य बदलल्याविना चिक्कण मृत्तिकेतील कार्यसाधक दाब फारसे बदलत नाहीत. म्हणून कूपाच्या खोदाईनंतर लगेच होणारा प्रतिबलांतील बदल (आकृती ९९ मधील रेखांकित क्षेत्राने दाखविलेला) हा केवळ उदासीन प्रतिबलांतील बदल असतो; अ विभागाकडे उदासीन प्रतिबल कमी झालेले असते आणि *ब* मध्ये तें वाढलेले असते. तज्जन्य जलीय दाब-प्रक्रम *ब* विभागातून *अ* कडे पाण्याचे स्थलांतर घडविण्यास कारणीभूत होतो. म्हणून *ब* विभागात मृत्तिकेचे दृढीभवन होते, तर *अ* मध्ये स्फायन होते. चिक्कण मृत्तिकेतील पाणी या बदललेल्या प्रतिबल-परिस्थितीशी अनुरूप होईपर्यंत ही प्रक्रिया चालू राहते. शेवटी उदासीन प्रतिबल कूपखननापूर्वी जितके होते तितकेच, म्हणजे *घ*$_{ज}$ *ख* इतके होते आणि *ख* खोलीवर कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबले *आ*$_{अ}$ आलेखाच्या कोटींइतकी होतात (आकृती ९९). हा आलेख *आ*$_{अ}$ आलेखाच्या खाली *ख घ*$_{ज}$ इतक्या अंतरावर आहे.

या ठिकाणी हें कटाक्षाने सांगितले पाहिजे की, *अ* विभागामधील स्फायन, कूपाची भिंत आणि तळ जलाभेद्य अस्तराने झाकलेले आहे असे गृहीत धरले तरी घडून येते. ह्या वस्तुस्थितीमुळे कूपातील किंवा भुयारातील चिक्कण मृत्तिकेचे स्फायन वातावरणातील ओलावा शोषल्यामुळेच केवळ होते, या बऱ्याच प्रमाणावर अस्तित्वात असलेल्या मतातील भ्रामकपणा स्पष्ट होईल.

कूपाला जलाभेद्य अस्तर लावलेले नसेल आणि त्यात पाणी साठू दिलेले नसेल, तर पृष्ठभागापासून *ख* खोलीवर, कूपाच्या भिंतीवरील कोणत्याही ठिकाणचे दाबसंचित शून्याहून

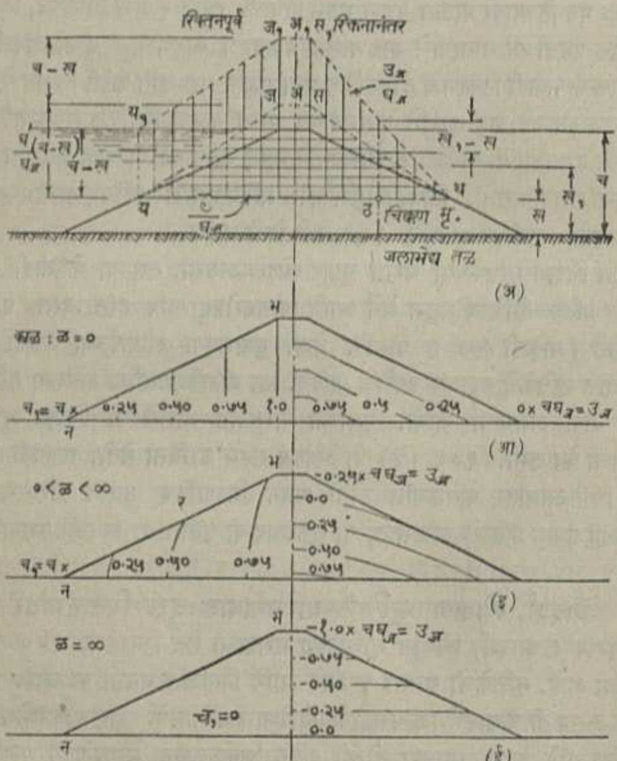
अधिक असू शकणार नाही. तथापि अल्पकाळापुरतें तें ऋण असू शकेल. याउलट, त्याच खोलीवर, परंतु कूपापासून बऱ्याच अंतरावर हें दाबसंचित *ख* इतके असते. म्हणून कूप खोदल्यामुळे पाण्यामध्ये कूपाच्या दिशेने निस्सारित होण्याची प्रवृत्ती निर्माण होते. परंतु *अ* विभागामधील चिकण मृत्तिकेत जोपर्यंत स्फायनाची प्रवृत्ती असते, तोपर्यंत पाण्याचा एक थेंबही बाहेर पडू शकत नाही; कारण कूपाकडे वाहत येणारे सर्व पाणी या स्फायनविभागात धरून ठेवले जाते. चिकण मृत्तिकेतील ओलावा बदललेल्या प्रतिबल-परिस्थितीशी अनुरूप होईपर्यंत कूपाकडे पाणी वाहण्यास प्रारंभ होऊच शकत नाही. निस्सारणाच्या द्वारे कूपामध्ये जाऊन पडणाऱ्या पाण्यामुळे होणारी मृत्तिकेच्या जल-मानातील घट तिच्यावर पाऊस पडून भरून निघाली, तरच कूपाचे अस्तित्व, त्याच्याकडे त्रिज्यादिक् पद्धतीच्या सातत्याने वाहणाऱ्या प्रवाहाला कारणीभूत होऊ शकते. कूप-भिंतीवरील कोणत्याही ठिकाणचे दाबसंचित शून्य राहते. प्रत्यक्षात पाणी चिकण मृत्तिकेतून बाहेर पडून कूपाकडे वाहू लागणे असंभवनीय असते कारण कूपाकडे गुरुत्वाकर्षणानुसार निस्सारित होणाऱ्या पाण्यापेक्षा बाष्पीभवनाने उडून जाणाऱ्या पाण्याचे प्रमाणच अधिक असण्याचा संभव असतो. चिकण मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थितीवर बाष्पीभवनाचा जो प्रभाव पडतो, त्याची चर्चा परि. १२१ मध्ये केली जाईल.

समांग चिकण मृत्तिकेच्या थरात भुयार खोदले असता, त्याच्या भोवतीही लक्षणीय प्रमाणात प्रतिबल-शैथिल्य घडून येते आणि त्याचबरोबर लांब अंतरावरील प्रतिबलात वाढ होते (आकृती ·५७ इ पाहा). तेव्हा भुयाराच्या खोदाईच्या वेळीही त्याच्या परिसरातील मृत्तिकेचे स्फायन झालेच पाहिजे. मग वातावरणातील ओलावा मृत्तिकेमध्ये शोषला जावो अगर न जावो. कूपाच्या परिसरात असलेल्या चिकण मृत्तिकेच्या स्फायनाचा वेग समी. १०६ (४) चा अवलंब करून ठरविता येतो. त्यासाठी पाण्याचा प्रवाह क्षितिजसमांतर पातळ्यांत होतो आणि त्रिज्यादिक् आणि परिघस्थ लंबरूप प्रतिबले हीं प्रधान प्रतिबले असतात, या सुकरतादायी गृहीतांचा अवलंब करावा लागतो.

१२०. आदर्श, चिकण मृत्तिकेच्या भरावात द्रुत रिक्तनानंतर होणारे निस्सारण : आदर्श, चिकण मृत्तिकेच्या भरावाचा छेद आकृती १०० अ मध्ये दाखविला आहे. मृत्तिकेची घनता *घ* आहे आणि निमज्जित घनता *घ'* आहे. भरावाची उंची *च* असून ती केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनापेक्षा कमी आहे. भराव जैलाभेद्य तळावर आधारित आहे आणि त्याच्या दोन्ही बाजूंस जवळजवळ माथ्यापर्यंत पाणी आहे. चिकण मृत्तिका स्थैतिक जलीय समतोलाच्या अवस्थेत आहे असे गृहीत धरले आहे. त्यामुळे भरावात कोणत्याही ठिकाणी ठेवलेल्या जलस्तंभमापिकेतील पाणी जलाशयातील पातळीपर्यंतच चढेल. जलाशयातील पाण्याची पातळी द्रुतगतीने तळापर्यंत उतरविली, तर भरावाच्या उतारावरील प्रत्येक ठिकाणचे दाब-संचित तात्पुरते शून्य होते. कालांतराने चिकण मृत्तिकेतील पाण्याचा अंश नवीन जलीय सीमा-लक्षणांशी अनुरूप अवस्थेला येतो.

तथापि द्रुत रिक्तनानंतर लगेच येणाऱ्या परिस्थितीचा विचार केला, तर व्यवहारतः पाण्याचा अंश रिक्तनापूर्वी होता तसाच असतो.

या परिस्थितीचा भरावात रिक्तनानंतर लगेच निर्माण होणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणारा प्रभाव जाणून घेण्यासाठी, आपण भरावाच्या तळापासून स उंचीवर एक आडवा छेद घेऊ व त्यावरील प्रतिबल-परिस्थितीचा अभ्यास करू. भरावात रिक्तनापूर्वी असणारे प्रतिबल-वितरण आकृती १०० अ च्या डावीकडील भागात स्थूलमानाने दाखविले आहे. छेदावर येणारी $उ_{ज} + \overline{छ}$ ही एकूण लंबदिक् प्रतिबले स्थूलमानाने यय, ज,अ,



आकृती १००. (अ) डावी बाजू : पूर्णतया निमज्जित चिक्कण मृत्तिकेच्या भरावातून घेतलेल्या क्षितिजसमांतर छेदावरील कार्यसाधक आणि उदासीन दाबांचे आसन्नमानाचे वितरण. उजवी बाजू : द्रुत रिक्तनानंतर लगेच मिळणारे तेच दाब (आ ते ई) काळ=०, ळ आणि ∞ असताना मिळणारी जलीय परिस्थिती; डाव्या बाजूच्या रेषा सममूल्य, स्थैतिक जलदाबांच्या आहेत आणि उजव्या बाजूच्या सममूल्य, उदासीन प्रतिबलांच्या आहेत.

या रेषेच्या कोटींवरून आणि ए हीं कार्यसाधक प्रतिबले यजअ या रेषेच्या कोटींवरून मिळतात. या रेषांच्या कोटींची मूल्ये लंबदिक् प्रतिबलास पाण्याच्या धज या घनतेने भागून प्राप्त होतात. एकूण लंबदिक् प्रतिबलाची रिक्तनामुळे घटणारी मूल्ये उजवीकडील थस१अ१ या रेषेवरून मिळतात. अद्यापि मृत्तिकेतील पाण्याचा अंश बदललेला नाही. तेव्हा भरावातील मृत्तिका, जर पार्श्वीयदृष्टया बद्ध असेल, तर कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबलेही न बदलता तशीच राहतील आणि आडव्या छेदावरील ठ या कोणत्याही ठिकाणी उज हें उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल.

$$उ_{ज} = ध_{ज}\,(ख_{१} - ख)$$

$ख_{१} - ख$ हें दाब-संचित आहे आणि भरावाच्या तळबिंदूच्या संदर्भात मोजलेले स्थैतिक संचित पुढीलप्रमाणे आहे :

$$च_{१} = ख_{१}$$

ठ मधून जाणाऱ्या उभ्या रेषेवर प्रत्येक ठिकाणी हेंच संचित असते. आकृती १०० आ च्या उजवीकडील भागात रिक्तनानंतर लगेच येणाऱ्या परिस्थितीतील सम-उदासीन प्रतिबल रेषा आणि डाव्या भागात सम-संचित रेषा दाखविल्या आहेत.

प्रत्यक्षात भराव पार्श्वीय दृष्टया बद्ध नसतो. परिणामी रिक्तनामुळे केवळ आडव्या छेदांवरील एकूण लंबदिक् प्रतिबलेच बदलतात असे नव्हे, तर कार्तनिक प्रतिबलेही बदलतात. हा बदल मृत्तिकेतील जलांश तोच राहून होणाऱ्या कार्यसाधक प्रधान प्रतिबलांतील बदलाला कारणीभूत होतो आणि हा दुसरा बदल, त्याच्या परीने उदासीन प्रतिबलात आणखी एक बदल घडवून आणतो जो धन किंवा ऋण कसाही असू शकतो. प्रतिबल आणि मृत्तिकेत होणारा अवकाश-बदल यांतील संबंधावर हा बदल अवलंबून असतो. अद्याप त्याचे गणित मांडता आलेले नाही. तेव्हा आकृती १०० आ मध्ये दाखविलेली प्रतिबल-परिस्थिती स्थूलमानाने अचूक आहे असे फार तर म्हणता येईल.

यानंतरच्या निस्सारण-प्रक्रियेत मृत्तिकेमध्ये केशाकर्षणजन्य संपूर्ण संपृक्तीची अवस्था येते आणि भरावातून बाहेर पडणारे एकूण पाणी दृढीभवनजन्य एकूण अवकाशक्षयाइतके असते. ज्याअर्थी जलसंचित भरावाच्या मध्य भागापासून दोन्ही अंगास कमी होत जाते, त्याअर्थी अतिरिक्त झालेले पाणी आकृती १०० इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे उताराच्या नर या खालच्या भागाकडे निस्सारित होईल. ज्यातून स्राव बाहेर पडतो त्या क्षेत्रात कोणत्याही ठिकाणचे, भरावतळाच्या संदर्भात मोजलेले संचित त्याच्या प्रारंभीच्या मूल्याइतकेच राहते. भरावाच्या मध्यभागात आणि माथ्याकडील भागात उदासीन प्रतिबल आणि तदनुषंगिक जलसंचित दोन्हीही कमी होत जातात. या काळातील समसंचित आणि सम-उदासीन प्रतिबल या आलेखांची समीकरणे

कलनसमीकरण (१०६ (२)) च्या साहाय्याने सिद्ध करता येतात. परंतु क्लिष्ट जलसीमालक्षणांमुळे ती समस्या अद्याप सोडविलेली नाही. हे आलेख आकृती १०० इ मध्ये डाव्या बाजूस दाखविल्याप्रमाणे साधारणपणे असतील, असे ग्रंथकर्त्याचे मत आहे.

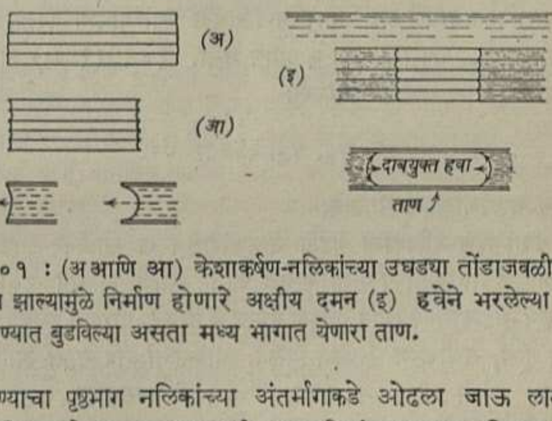
उताराच्या *भर* या वरच्या भागातील संचित ऋण असते. कारण *भर* पासून *नर* कडे जाणाऱ्या पाण्याच्या प्रवाहाला पृष्ठीय ताणामुळे विरोध होतो. कालांतराने—ज्यातून स्राव बाहेर पडतो त्या *नर* या क्षेत्राची व्याप्ती कमी कमी होऊन शून्य होते. या अंतिम अवस्थेत प्रत्येक जल-स्तंभमापिकेतील पाणी, भराव-तळाच्या पातळीशी असते आणि आकृती १०० ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे या पातळीच्या संदर्भातील स्थैतिक जलसंचित शून्य असते.

भरावातील प्रत्येक ठिकाणी अंतिम उदासीन प्रतिबल ऋण असते, त्यामुळे भरावाच्या दोन्ही बाजूंस पाणी येऊन भराव पुनः पाण्याखाली गेला म्हणजे चिकण-मृत्तिकेचे स्फायन होते. अर्ध-उच्छोषित अवस्थेत असणाऱ्या समाकर्षणयुक्त मृत्तिकांत बांधलेल्या धरणातही अशीच परिस्थिती अस्तित्वात असते; कारण ही अवस्था मृत्तिकेतील ऋण उदासीन प्रतिबलाशी निगडीत आहे. जलाशय प्रथमच भरत असेल, तर मृत्तिकेचे स्फायन होते. तिचे कार्तनिक सामर्थ्य कमी होते आणि घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक कमी होतो. भरावाच्या जलाशयाकडील अंगाकडून या प्रक्रियेस प्रारंभ होतो.

१२१. उच्छोषणजन्य निस्सारण : संपृक्त, चिकण मृत्तिकेचा एखादा नमुना उघड्यावर ठेवला असता, तो पृष्ठभागापासून अंतर्भागाकडे हळूहळू शुष्क होत जातो, हा नेहमीचाच अनुभव आहे. या प्रक्रियेत जेथे बाष्पीभवन होत असते, त्या पृष्ठभागाकडे अंतर्भागाकडून सतत पाण्याचा प्रवाह चालू राहतो. पृष्ठभागाजवळ मोजलेला स्राववेग बाष्पीभवनाच्या $ग_{बा}$ या वेगाइतका असतो. पृष्ठभागाच्या एकांक क्षेत्रातून, एकांक काळात होणारे बाष्पीभवन म्हणजे हा वेग होय. नमुन्यातील पाण्याच्या वजनामुळे निर्माण होणारे उदासीन प्रतिबल नगण्य असते. त्यामुळे हें पाणी जोवर समतोल अवस्थेत असते, तोवर नमुन्यातील उदासीन प्रतिबल, सर्व ठिकाणी एकतर जवळजवळ शून्य किंवा ऋण असते. तरीही बाष्पीभवन होण्यासारखी परिस्थिती निर्माण झाली की, नमुन्याच्या अंतर्भागातून पृष्ठभागाकडे पाणी निस्सारित होते. जलीय प्रक्रमाच्या निर्मितीशिवाय हें शक्य नाही. अंतर्भागातील उदासीन प्रतिबल न वाढताही येथे जलीय प्रक्रम प्रस्थापित होतो. याचा अर्थ असा की, पृष्ठभागाजवळील उदासीन प्रतिबलात घट होते. बाह्य परिस्थितीत बदल झालेला नसताही, अशी घट घडवून आणणारे एकच कारण आपल्याला माहीत आहे, तें म्हणजे पाण्यातील पृष्ठीय ताण हें होय. मृत्तिकेतील पोकळीमध्ये हवेचा प्रवेश होण्यापूर्वीच पुढील बाष्पीभवन आपण थांबविले, तर त्या परिस्थितीतही मृत्तिका संपृक्त अवस्थेत असते. तथापि तिचा रंध्रांक प्रारंभीच्या रंध्रांकापेक्षा कितीतरी कमी असतो;

आणि तदनंतर जर हा नमुना पाण्यात बुडविला, तर तो फुलतो, म्हणजेच मृत्तिकेचे स्फायन होते. येथे पाण्याच्या प्रवेशासाठी मृत्तिकेच्या अंतर्भागाकडे रोख असलेला जलीय प्रक्रम आवश्यक आहे. फुललेल्या नमुन्याचा पृष्ठभाग मुक्त पाण्याच्या प्रत्यक्ष संपर्कात असल्यामुळे आपल्याला असे गृहीत धरणे भाग पडते की, मृत्तिकेच्या अंतर्भागातील पाणी ताणयुक्त अवस्थेत असले पाहिजे.

अंशतः उच्छोषित झालेल्या चिक्कण राशीतील प्रतिबल-परिस्थितीची कल्पना येण्यासाठी आणि तिचा पृष्ठीय ताणाशी असलेला संबंध जाणून घेण्यासाठी, आपण अतिशय दमनीय असलेल्या केशाकर्षण-नलिकांच्या जुडग्यावर कारक होणाऱ्या बलांचा विचार करू. या नलिकांच्या त्रिज्यांचे मूल्य त्र असून आकृती १०१ अ आणि *आ* यांमध्ये दाखविल्याप्रमाणे त्या पाण्याने संपूर्णपणे भरलेल्या आहेत. पाण्याच्या वजनामुळे निर्माण होणारे दाब पृष्ठीय ताणामुळे निर्मिलेल्या बलांच्या तुलनेत नगण्य समजता येतील, तसेच नलिकांच्या भितीने व्यापलेले क्षेत्र नलिकांच्या छेदाच्या एकूण क्षेत्राच्या तुलनेत नगण्य गृहीत धरता येईल. ऊ या स्पर्शकोनाचे लघुतम मूल्य शून्य आहे. बाष्पीभवनाला प्रारंभ होण्यापूर्वीची नलिकांची परिस्थिती आकृती १०१ अ मध्ये दाखविली आहे. या अवस्थेत जुडग्यातून घेतलेल्या छेदावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल व्यवहारतः शून्य आहे आणि कुंभपृष्ठांचा स्पर्शकोन ९०° आहे. जसजसे बाष्पीभवन होऊ लागते



आकृती १०१ : (अ आणि आ) केशाकर्षण-नलिकांच्या उघडया तोंडाजवळील पाण्याचे बाष्पीभवन झाल्यामुळे निर्माण होणारे अक्षीय दमन (इ) हवेने भरलेल्या केशाकर्षण नलिका पाण्यात बुडविल्या असता मध्य भागात येणारा ताण.

तसतसा पाण्याचा पृष्ठभाग नलिकांच्या अंतर्भागाकडे ओढला जाऊ लागतो; पृष्ठीय ताणाच्या अस्तित्वामुळे पाण्याचा पृष्ठभागीय थर नलिकांच्या मुखाला चिकटून राहू पाहतो व त्यामुळे आत ओढले जाण्याच्या प्रवृत्तीला विरोध होतो. त्यामुळे जलपृष्ठाचा आकार वाटीसारखा होतो. या आकाराची वक्रता जशी वाढत जाते, तसा पृष्ठीय ताणाचा अक्षदिक् घटक वाढत जातो. आकृतीत तुटक बाणाने हा घटक दाखविला आहे. तो पाण्यामध्ये ताण आणि नलिकांच्या भिंतीवर तेवढ्याच तीव्रतेचा दाब निर्माण करतो. कुंभपृष्ठ त्रिज्येचे लघुतम मूल्य नलिकांच्या त्रिज्येइतके असू शकते. या अवस्थेत आरंभी ९०°

मूल्य असलेल्या स्पर्शकोनाचे मूल्य शून्य होते. $ड = ०$ असताना एका नलिकेतील पाण्यावर येणारा पृष्ठीय ताण $२ \pi त्र\, त_{पृ}$ इतका असतो. $उ_{ज}$ हें पाण्यातील ताण प्रतिबल पुढील समीकरणाने मिळतेः

$$२ \pi त्र\, त_{पृ}\, कोज्या\, ड + \pi त्र^{२}\, उ_{ज} = ०$$

म्हणजेच
$$उ_{ज} = -\frac{२त_{पृ}}{त्र} .\, कोज्या\, ड \qquad [१]$$

हें मूल्य म्हणजे उपर्युक्त रचनेतील उदासीन प्रतिबल होय. नलिकांतून घेतलेल्या प्रत्येक छेदावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल शून्य राहिले होते. तेव्हा भिंतीवर कारक असणारे कार्यसाधक प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असले पाहिजेः

$$\bar{द} = ० - उ_{ज} = \frac{त_{पृ}}{त्र}\, कोज्या\, ड \qquad [२]$$

नलिकांच्या एकूण छेदाच्या दर एकांक क्षेत्रावर कारक असणाऱ्या $\bar{द}$ या मूल्यास केशाकर्षण-दाब म्हणतात; कारण तो केशाकर्षणामुळे निर्माण झालेला असतो. नलिकांच्या भिंती जर अतिशय दमनीय असतील, तर आकृती १०१ अ आणि आ यांमध्ये दाखविल्याप्रमाणे या केशाकर्षण-दाबामुळे त्यांच्यामध्ये दिसून येण्याइतके ऱ्हस्वत्व निर्माण होते. उपरोक्त समी. २ आणि समी. १०९ (१ अ) यांचा संयोग करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळतेः

$$\bar{द} = घ_{ज} .\, च_{के} .\, कोज्या\, ड$$

येथे $च_{के}$ ही केशाकर्षणाची उंची आहे.

रिकाम्या केशाकर्षण-नलिकांचा जुडगा जलपृष्ठापासून ख खोलीवर आडवा ठेवला, तर पृष्ठीय ताणामुळे नलिकांमध्ये पाणी खेचले जाते आणि आकृती १०१ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे नलिकांमध्ये राहून गेलेल्या हवेला तें दाबते. पाण्यास हवेकडे ओढणाऱ्या पृष्ठीय ताणाचे मूल्य, समीकरण २ वरून मिळते. पाण्याचा दाब $घ_{ज}ख$ आणि बाहेरील हवेचा दाब $द_{ह}$ यांची त्यात भर पडते. $ड = ९०^{\circ}$ असताना, उपरोक्त हवेतील एकूण दाब पुढीलप्रमाणे असतोः

$$द_{वा} = घ_{ज}\, ख + द_{ह} + \frac{२त_{पृ}}{त्र} = घ_{ज}\, (ख + च_{के}) + द_{ह}$$

समी. ११२ (२) मध्ये $उ_{ज०} = घ_{ज}ख$ नियुक्त केले असता, हेंच समीकरण प्राप्त होऊ शकते.

नलिकांच्या जुडग्यातून घेतलेल्या उभ्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील, सरासरी लंबदिक् दाब त्या उंचीवरील पाण्याच्या दाबाइतका म्हणजेच $घ_{ज}ख+द_{ह}$ इतका आहे. नलिकांमध्ये असलेल्या हवेचा दाब $द_{वा}$ इतका आहे. जुडग्याच्या एकूण क्षेत्राच्या मानाने नलिकांच्या भिंतींचे क्षेत्र अतिशय लहान आहे, असे गृहीत धरले होते. तेव्हा समतोल साधण्यासाठी जुडग्याच्या छेदाच्या एकांक क्षेत्रातील भिंतींवरील प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असले पाहिजे:

$$\bar{द}=घ_{ज}ख+द_{ह}-द_{वा}=\frac{२त_{पृ}}{त्र}=घ_{ज}च_{के}$$

हें ताण प्रतिबल आहे. भिंती दुर्बल असतील, तर या ताणामुळे त्यांचा उच्छेद होऊ शकतो.

प्रत्येक मृत्तिकेमध्ये—त्यांत चिकण मृत्तिकाही आली—केशाकर्षणगुणी नलिकांचा व्यूह असतो असे मानता येईल. नमुन्याच्या पृष्ठभागाशी येणाऱ्या त्यांच्या मुखांद्वारे त्या बाहेरील वातावरणाशी संपर्क साधतात. या केशाकर्षणगुणी नलिका पाण्याने भरलेल्या असतील, तर बाष्पीभवनामुळे त्या मृत्तिकेत आकृती १०१ अ आणि आ यांमध्ये दाखविलेले प्राकृतिक परिणाम निर्माण झालेच पाहिजेत. म्हणजेच पाण्यातील ताण-प्रतिबलांचा उद्भव आणि केशाकर्षणजन्य दाबामुळे होणारे संकोचन या गोष्टीही घडल्या पाहिजेत. त्यानंतर ती मृत्तिका पाण्यात बुडविली, तर ती फुलेल.

केशाकर्षण-दाब आणि स्फायन यांचे वरील वर्णन ज्या गृहीतावर आधारित आहे, तें असे की, मृत्तिकेत पाणी येणे किंवा बाहेर पडणे या क्रिया केवळ मृत्तिकेतील जलीय प्रक्रमाच्या अस्तित्वामुळे होतात, आणि या प्रक्रमाची निर्मिती बलात्मक असते. स्फायनाविषयीची ही वैज्ञानिक कल्पना आहे. अपवादात्मक रीत्या सूक्ष्मकण असलेल्या मृत्तिकांत—उदाहरणार्थ, बेंटोनाइटमध्ये—या स्फायनाचे स्वरूप एखाद्या घन पदार्थात अभिसरणाने पाणी शिरावे, तसे असते. वैज्ञानिक कारणामुळे होणारे स्फायन आणि अभिसरणामुळे होणारे स्फायन यांतील संबंध व्यावहारिक मृत्तिका-बलविज्ञानाच्या ग्रंथात चर्चिला जाईल. दृढीभवनाची आणि अभिसरणाची मूलभूत समीकरणे सारखीच आहेत. त्यामुळे प्रत्ययास येणारी उपर्युक्त घटना या दोहोंपैकी कोणत्याही कारणामुळे झाली आहे असे मानले, तरी बिघडत नाही.

मृत्तिकेतील केशाकर्षण-दाबाचे $\bar{\bar{द}}_{मृ}$ हें महत्तम मूल्य तिच्यातील पाण्यात उद्भवू शकणाऱ्या $उ_{मृ}$ या महत्तम ताणाइतके असते. हा ताण पुढीलप्रमाणे असतो:

$$उ_{मृ}=-घ_{ज}\cdot च_{के}=-\bar{\bar{द}}_{मृ}$$

येथे $च_{के}$ ही केशाकर्षणाची उंची आहे (परि. १०९ आणि ११० पाहा). पाण्यातील उदासीन प्रतिबलाचे मूल्य $उ_{मृ}$ इतके होताक्षणीच त्यानंतर होणाऱ्या बाष्पीभवनाने

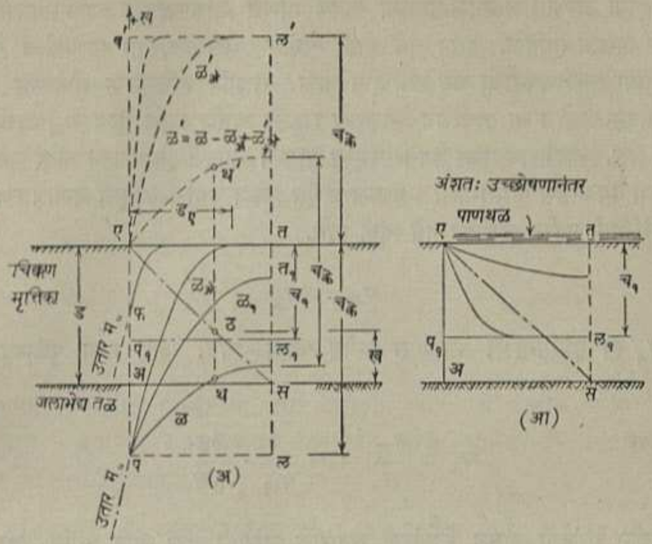
पाण्याचा पृष्ठभाग मृत्तिकेच्या अंतर्भागाकडे माघार घेतो; परंतु पाण्यातील प्रतिबलाचे $उ_{मृ}$ हें मूल्य कायम राहते.

चिकण थर शुष्क होऊन घडणाऱ्या दृढीभवनाचा वेग अनुमानण्याची आवश्यकता व्यवहारात प्रसंगविशेषी भासते. उच्छोषण पुरे झाल्यानंतर चिकण मृत्तिकेतील उदासीन प्रतिबल सगळीकडे $उ_{मृ} = -प_{ज} \cdot च_{कें}$ (समी. ३) इतके असते. बाष्पीभवनाने उडून जाणाऱ्या पाण्याचे वजन, मृत्तिकेच्या एकूण वजनाच्या तुलनेत अल्प असल्यामुळे मृत्तिकेतील आडव्या छेदावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य व्यवहारतः स्थिर राहते. म्हणून शुष्क होण्याच्या प्रक्रियेमध्ये कार्यसाधक उभे प्रतिबल $द_{मृ} = -उ_{मृ}$ इतके वाढते असे म्हटले पाहिजे. हाच अंतिम परिणाम दर एकांक क्षेत्री $द_{मृ} = प_{ज} \cdot च_{कें}$ एवढा भार ठेवून केलेल्या दृढीभवनानेही साधता येतो. आकृती ८२ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे मृत्तिकेखाली जलाभेद्य तळ असेल, तर बाष्पीभवन आणि दृढीभवन या दोन्ही प्रक्रियांमध्ये अतिरिक्त पाणी ऊर्ध्वमुख दिशेने बाहेर पडते. तथापि दोन्ही प्रक्रियांचा परिणाम सारखाच असला, तरी सीमालक्षणे भिन्न असल्यामुळे दृढीभवनाचा वेग नियंत्रित करणारे नियम वेगळे असतात. या फरकाची कल्पना येण्यासाठी आकृती ८२ प्रमाणे एक चिकण थर (आकृती १०२ अ) विचारार्थ घेऊ आणि क्षितिजाशी ४५° चा कोन करणाऱ्या *एस* या पृष्ठावरील प्रतिबल-परिस्थितीस लागू पडणारे संचित-चित्र काढू. *एत* च्या वरील भागात काढलेले तुटक आलेख म्हणजे $द_{मृ}$ या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याच्या भाराखाली होणाऱ्या दृढीभवनाच्या एककालीन रेषा आहेत आणि त्या आकृती ८२ मध्ये दाखविलेल्या तसल्याच रेषांसारख्या आहेत. *ळ'* या कोणत्याही समयी *एस* या पृष्ठावरील *ठ* येथे लावलेल्या मापिकेमध्ये *थ'* बिंदूच्या पातळीपर्यंत पाणी असते. *ठ* मधून जाणारी उभी रेषा आणि *ळ'* क्षणाची एककालीन रेषा यांचा छेदनबिंदू म्हणजे *थ'* होय. *ळ'* क्षणाचा जलीय प्रक्रम एककालीन रेषेच्या *थ'* येथील उतारा-इतका असतो. डावीकडे उतरणारा उतार म्हणजे ऊर्ध्वदिशेकडे रोख असलेला प्रक्रम होय. पृष्ठभागाजवळ म्हणजे *ए* या बिंदूजवळ दाबसंचिताची पातळी कायम पृष्ठभागाशीच राहते. पृष्ठभागाजवळील *म* हा जलीय प्रक्रम एकसारखा कमी होत जाऊन शेवटी शून्य होतो. म्हणून स्राववेग,

$$ग = मझ$$

हाही कमी होतो आणि शून्य मूल्याप्रत जातो.

दृढीभवन जर उच्छोषणामुळे झाले असेल, तर *एत* या रेषेने एककालीन आदिरेषा आणि *पल* या रेषेने एककालीन अंतिम रेषा दाखविली जाते. *ळ* ह्या कोणत्याही क्षणाचे अतिरिक्त स्थैतिक दाब हवे असल्यास, त्यावेळची एककालीन रेषा आणि *लप* ही अंतिम रेषा यांमधील अंतरास पाण्याच्या घनतेने गुणले पाहिजे. बाष्पीभवनामुळे जसे अधिकाधिक



आकृती १०२ : (अ) पृष्ठभागातून बाष्पीभवन झाल्यामुळे होणारे चिक्कण थराचे दृढीभवन. (आ) अंशतः उच्छोषित चिक्कण थरावर पाणी आले असता होणारे स्फायन.

पाणी उडून जाते, तसा पृष्ठभागाजवळ असलेल्या रंध्रांतील पाण्यावर येणारा ताण वाढत जातो. म्हणून पृष्ठभागाशी असलेले संचित दाखविणाऱ्या एककालीन रेषांचे डाव्या बाजूचे फ हें टोक (आकृती १०२ अ) हळूहळू ए या त्याच्या मूळ स्थानापासून प या अंतिम स्थानाकडे सरकते आणि तेथे $ळ_{१८}$ या समयी पोचते. या कालावधीतील कोणत्याही क्षणी, एककालीन रेषांच्या फ या डाव्या टोकाचा $म_0$ हा उतार $ग_{बा}$ या बाष्पीभवनाच्या वेगाने निश्चित होतो. प्रारंभक्षण ते $ळ_{१८}$ या कालावधीत होणारी प्रक्रिया म्हणजे उच्छोषणजन्य दृढीभवनातील पहिला टप्पा होय. ह्याच कालावधीत आकृतीतील सर्व तुटक एककालीन रेषा ए मधून जातात. त्यामुळे उच्छोषणजन्य दृढीभवनाचा पहिला टप्पा आणि $द_{मृ}$ या भाराखाली होणारे दृढीभवन यांत साम्य नसते.

मृत्तिकेतील रंध्रांचे स्वरूप आणि आकारमान यांना सुसंगत असे महत्तम प्रतिबल पाण्यामध्ये येताक्षणीच दुसऱ्या टप्प्यास प्रारंभ होतो. हें मूल्य $उ_{मृ} = - घ_{ज}\, च_{के}$ (समी. ३) इतके असते. दुसऱ्या टप्प्यात पृष्ठभागाजवळील पाण्यातील प्रतिबल स्थिर-मूल्य राहते. तथापि बाहेर पडणारे पाणी कमी होत जाते. या अवस्थेमध्ये एककालीन रेषा पल या अंतिम रेषेच्या प या डाव्या टोकातून जातात आणि उजव्या टोकाजवळ त्यांचा उतार शून्य असतो. म्हणून या अवस्थेतील सलग एककालीन रेषांच्या बाबतीतील सीमा-लक्षणे आणि तुटक रेषांच्या बाबतीतील सीमा-लक्षणे सारखीच असतात.

पहिल्या टप्प्यातील दृढीभवनाच्या वेगाचे गणित मांडण्यासाठी बाष्पीभवनाचा वेग माहीत असला पाहिजे. इतर सर्व गोष्टी समान असतील, तर पाण्यातील वाढत्या ताणानुसार बाष्पीभवनाचा वेग कमी होत जातो. तथापि गणिताच्या सोईसाठी आपण बाष्पीभवनाचा वेग या अवस्थेत स्थिरमूल्य राहतो आणि त्याचे मूल्य $\text{ग}_{\text{बा}}$ असते असे गृहीत धरू. बाष्पीभवनाचा वेग स्थिरमूल्य मानला म्हणजे पृष्ठभागातून बाहेर पडणाऱ्या स्रावाचा वेग आणि पृष्ठभागाशी असणारा जलीय प्रक्रम हेही स्थिरमूल्य मानावे लागतात. ही परिस्थिती पुढील समीकरणाने व्यक्त होते.

$$\text{ग}_{\text{बा}} = \text{झम}_{०}$$

येथे $\text{म}_{०}$ हा पृष्ठभागाशी असणारा जलीय प्रक्रम आहे. त्याचे मूल्य पुढीलप्रमाणेही मांडता येईल.

$$\text{म}_{०} = \frac{\text{ग}_{\text{बा}}}{\text{झ}} = -\frac{१}{\text{घ}_{\text{ज}}} \cdot \frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} \qquad [४]$$

एककालीन रेषांच्या डाव्या टोकांच्या उताराचे मूल्यही हेंच आहे आणि तेंही स्थिर आहे. ही परिस्थिती $\text{ळ}_{\text{ए}}$ ह्या क्षणापर्यंत टिकून राहते. यावेळी एककालीन रेषांचे डावे टोक प या बिंदूजवळ येते आणि त्यावेळी उदासीन दाब $\text{उ}_{\text{मृ}} = -\text{घ}_{\text{ज}}\,\text{च}_{\text{के}}$ असतो. या क्षणापर्यंत उच्छोषणाच्या प्रक्रियेची सीमा-लक्षणे खालील प्रमाणे असतात.

$$\text{ळ} = ० \quad \text{आणि} \quad ० \leq \text{ख} \leq \text{ह} \qquad \text{उ} = \text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{\text{के}}$$

$$० \leq \text{ळ} \leq \text{ळ}_{\text{ए}} \quad \text{आणि} \qquad \text{ख} = \text{ह} \qquad \frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} = -\frac{\text{घ}_{\text{ज}}}{\text{झ}}\text{ग}_{\text{बा}}$$

$$० \leq \text{ळ} \leq \text{ळ}_{\text{ए}} \quad \text{आणि} \qquad \text{ख} = ० \qquad \frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} = ०$$

$$\text{ळ} = \text{ळ}_{\text{ए}} \quad \text{आणि} \qquad \text{ख} = \text{ह} \qquad \text{उ} = ०$$

$\text{ळ}_{\text{ए}}$ या क्षणानंतर (दुसरा टप्पा) $\text{च}_{\text{के}}$ हें दाबसंचित स्थिर-मूल्य राहते; परंतु प्रृष्ठभागाशी येणारे पाणी कमी होत जाऊन शेवटी शून्य होते. अर्थातच जोपर्यंत पाण्याची पातळी मृत्तिकेच्या पृष्ठभागाजवळ असते, तोपर्यंत तेथे येणारे पाणी बाष्पीभवनाने उडून जाणाऱ्या पाण्यापेक्षा कमी असते. नंतर बाष्पीभवनाचे पृष्ठ मृत्तिकेच्या अंतर्भागाकडे ओढले जाते. मृत्तिकेचा पृष्ठभाग आणि बाष्पीभवनाचे पृष्ठ या दोन पृष्ठांतील अंतर जसे वाढत जाते, तसा बाष्पीभवनाचा वेग त्वरेने कमी होतो. म्हणून बाष्पीभवनामुळे उडून जाणारे पाणी आणि त्यासाठी कमी होत जाणारा आतला पुरवठा यांमध्ये समतोल राखण्यासाठी पृष्ठभागाची खालच्या दिशेने थोडी हालचाल झाली तरी पुरेशी असते.

दुसऱ्या अवस्थेतील एककालीन रेषा प या बिंदूतून जातात, कारण पृष्ठभागाशी (ए बिंदू) असणाऱ्या उ या अतिरिक्त स्थैतिक जलदाबाचे मूल्य या अवस्थेच्या आरंभीच त्याच्या अंतिम शून्य मूल्याप्रत आलेले असते. $ळ=\infty$ या क्षणी एककालीन रेषा आणि पल ही आडवी रेषा एकच होतात. म्हणून $ळ_ए$ ते $ळ=\infty$ या कालावधीत एककालीन रेषांचा प येथील उतार कमी होत जाऊन शेवटी शून्य होतो. उच्छोषणाच्या या दुसऱ्या टप्प्याची सीमा-लक्षणे पुढीलप्रमाणे असतात.

$$ळ_ए \leqq ळ \leqq \infty \quad \text{आणि} \quad ख=ह \qquad उ=०$$

$$ळ_ए \leqq ळ \leqq \infty \quad \text{आणि} \quad ख=० \qquad \frac{\partial उ}{\partial ख}=०$$

$$ळ=\infty \quad \text{आणि} \quad ० \leqq ख \leqq ह \qquad उ=०$$

या दुसऱ्या टप्प्यातील एककालीन रेषा आकृती १०२ अ मधील तुटक रेषांनी दाखविलेल्या एककालीन रेषांसारख्या असतात; कारण या दोन्ही उदाहरणांतील सीमा-लक्षणे सारखीच आहेत.

दृढीभवनाचा वेग कलनसमीकरण ९९ (८) ने ठरविता येतो. $ह=\infty$ साठी हा वेग गणितसिद्ध करण्याची समस्या आसन्नमान पद्धतीने सोडवून पुढील फलिते मिळाली आहेत (टेरझागी आणि फ्रोह्‌लिश १९३६) $ळ=०$ ते

$$ळ_ए = \frac{\pi}{४}\,\frac{१}{द}\left(\frac{झद_मृ}{घ_ज ग_{ग्रा}}\right)^२ \qquad [५]$$

या काळातील उच्छोषणजन्य, दृश्य दृढीभवन थरातील वरच्या भागापुरते मर्यादित असते. येथे द हा दृढीभवन-गुणांक आहे (समीकरण ९९ (७)). $ळ > ळ_ए$ अशा कोणत्याही क्षणी या दृढीभूत कवचाची जाडी पुढील समीकरणाने ठरविता येते :

$$ह_१ = २\sqrt{३दळ} \qquad [६]$$

$ळ=ळ_ए$ असल्यास $ह_१$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$ह_ए = \frac{झद_मृ}{घ_ज ग_{ग्रा}}\sqrt{३\pi} \qquad [७]$$

थराची ह ही जाडी, जर $ह_ए$ हून अधिक असेल, तर वरील समीकरणे अशा थरासही लागू पडतात. दोन्हीपैकी कोणत्याही उदाहरणात $ळ_ए$ या क्षणाची एककालीन रेषा परिवलयाकृती असते. या परिवलयाचा शिरोबिंदू एत रेषेवर ए पासून $ह_ए$ अंतरावर असतो (आ. १०२ अ). $ळ < ळ_ए$ अशा कोणत्याही क्षणी पृष्ठभागावरील उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$उ_ज = २घ_ज \frac{ग_द}{झ}\sqrt{\frac{ळद}{\pi}}$$

$\text{ळ} = \text{ळ}_{\text{ए}}$ या क्षणी दृढीभवनमान पुढीलप्रमाणे असते :

$$\text{द}_{\text{ए}} = \frac{\text{ह}_{\text{ए}}}{\text{३ह}} \qquad [८]$$

भाराखालील दृढीभवनाच्या प्रक्रियेत (तुटक एककालीन रेषांनी दाखविलेल्या) हेंच दृढीभवनमान $\text{ळ}'_{\text{ए}}$ समयी प्राप्त होते. चिकण मृत्तिकेच्या एका थरामध्ये उच्छोषणाच्या प्रक्रियेस प्रारंभ होऊन $\text{ळ}_{\text{ए}} - \text{ळ}'_{\text{ए}}$ इतका काळ लोटल्यानंतर त्याच मृत्तिकेच्या तसल्याच दुसऱ्या थराच्या पृष्ठभागावर $\text{द}'_{\text{मृ}} = \text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{\text{क्षे}}$ एवढा भार लावला, तर $\text{ळ}_{\text{ए}}$ समयानंतर कालगुणक आणि दृढीभवनमान यांतील संबंध या दोन्ही प्रक्रियांत सारखाच असतो. आकृती १०२ अ मध्ये $\text{ळ} > \text{ळ}_{\text{ए}}$ या क्षणाची सलग एककालीन रेषा मिळवावयाची असेल, तर भार लावल्यानंतर $\text{ळ} = \text{ळ} - \text{ळ}_{\text{ए}} + \text{ळ}'_{\text{ए}}$ या क्षणाची तुटक एककालीन रेषा काढली पाहिजे, व ती अधस दिशेने आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे $\text{च}_{\text{क्षे}}$ इतक्या अंतरापर्यंत सरकविली पाहिजे.

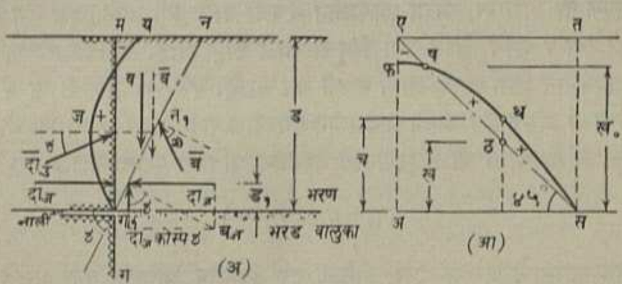
$\text{पत}_{१}$ (आ. १०२ अ) या एककालीन रेषेला संगत असलेल्या $\text{ळ}_{१}$ या क्षणी आपण बाष्पीभवन थांबविले, तरी थराच्या आत असलेले पाणी पृष्ठभागाकडे रोख असलेल्या जलीय प्रक्रमाच्या प्रभावाखाली होते तसेच राहते. $\text{ग}_{\text{बा}} = ०$ झालेला असल्यामुळे असा प्रक्रम चिकण मृत्तिकेतील जलीय समतोलाशी सुसंगत असत नाही. त्यामुळे या प्रक्रमाचे मूल्य शून्य होईपर्यंत थराच्या खालच्या भागातून वरच्या भागाकडे पाणी वाहते. ही प्रक्रिया चालू असताना खालच्या भागाचे दृढीभवन आणि वरच्या भागाचे स्फायन होते आणि प्रक्रिया थांबल्यानंतर थरात सगळीकडे अतिरिक्त स्थैतिक जलदाब $-\text{घ}_{\text{ज}}\text{च}_{१}$ इतका होतो. या प्रक्रियेस **असंक्रम प्रक्रिया** असे म्हणतात. या संपूर्ण प्रक्रियेमध्ये मृत्तिकेतील सरासरी ओलावा तोच राहतो, या लक्षणाची पूर्तता करून $\text{च}_{१}$ चे मूल्य ठरते. $\text{ळ} = \infty$ या क्षणी प्रत्येक जल-स्तंभ-मापिकेतील पाणी पृष्ठभागापासून $\text{च}_{१}$ खोलीवर असलेल्या $\text{प}_{१}\text{ल}_{१}$ रेषेवर असते. तेव्हा ही रेषा म्हणजे या प्रक्रियेची एककालीन अंतिम रेषा होय.

उष्णता-संवहन विषयात अशीच एक प्रक्रिया आढळते. वरील उदाहरणासारखेच तेथे उष्णतारोधी पृष्ठभाग असलेल्या आडव्या थरात उष्णतेचे खालच्या भागातून वरच्या भागाकडे संक्रमण होते आणि तळापासून माथ्याकडे मूळचे तपमान कमी होते. कालांतराने तपमान प्रक्रम हळूहळू नाहीसा होतो आणि थरात सगळीकडे मूळ तपमानांच्या सरासरीइतके तपमान होते.

$\text{प}_{१}\text{ल}_{१}$ या अंतिम एककालीन रेषेने (आ. १०२ अ) दाखविलेल्या अवस्थेच्या वेळी मृत्तिकेच्या पृष्ठावर पाणी आले, तर पृष्ठाजवळील जलसंचित शून्य होते. पण तिच्या अंतर्भागात मात्र तें $-\text{च}_{१}$ असते. या परिस्थितीत निर्माण झालेला जलीय प्रक्रम मृत्तिकेच्या अंतर्भागाकडे पाण्याचा शिरकाव होण्यास कारणीभूत होतो. या प्रक्रियेची एककालीन आदिरेषा $\text{प}_{१}\text{ल}_{१}$ आणि एककालीन अंतिम रेषा एत आहे

(आकृती १०२ आ). या स्फायनाच्या प्रक्रियेतील एककालीन रेषा आकृती १०२ *अ* मध्ये थराच्या पृष्ठभागापासून काढलेल्या तुटक एककालीन रेषांच्या प्रतिबिंबाप्रमाणे असतात आणि काल-स्फायन समीकरण आकृती ८५ *अ* मधील *आ*₁ या काल्दढीभवन आलेखाच्या समीकरणासारखे असते. तथापि स्फायनाचा वेग गणितसिद्ध करण्यासाठी स या काल्गुणकाच्या (समीकरण १०१ (३ आ)) समीकरणातील $प_द$ या अवकाश-दमन गुणकाऐवजी $प_{स्फ}$ हा अवकाश-वर्धन गुणांक नियुक्त केला पाहिजे (समी. ९८ (६)).

१२२. मृत्तिकादाब आणि स्थैर्य यांवर होणारा निस्सारणाचा परिणाम : निस्सारणाची कोणतीही क्रिया, मृत्तिकेतील एकूण प्रतिबल विशेषसे न बदलता, रंध्र-जलातील प्रतिबल कमी करते. उदासीन प्रतिबलातील हा बदल मृत्तिकेतील प्रत्येक संभाव्य घसरपृष्ठावरील कार्यसाधक प्रतिबलात वाढ करतो. अर्थात् असे झाले, तरी त्या पृष्ठाच्या



आकृती १०३ : समाकर्षण अत्यल्प प्रमाणात असलेल्या मृत्तिकेचे आधार-भिंतीमागे केलेले जलसाधित भरण. भूजलपातळी भरणाच्या तळाशी आहे आणि केशाकर्षणजन्य ऊर्ध्वगमनाची उंची भरणाच्या जाडीपेक्षा अधिक आहे. (अ) दढीभवनाच्या अंतरिम अवस्थेत घसरू पाहणाऱ्या खंडावर कारक होणारी बले; (आ) त्याच अवस्थेतील एककालीन रेषा.

वरच्या भागातील मृत्तिकेचे वजन पूर्वीइतकेच असते. म्हणून समतोलासाठी आवश्यक असलेली बाह्य लक्षणे बदललेली नसतील, तर निस्सारणामुळे संभाव्य घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक वाढतो. मृत्तिकेला बाहेरून पार्श्वीय आधार दिलेला असो वा नसो, वरील विधान तेथे लागू पडते.

कोणत्याही संभाव्य घसरपृष्ठावरील निस्सारणकालीन आणि निस्सारणोत्तर उदासीन प्रतिबले, या प्रकरणातील यापूर्वीच्या परिच्छेदांतील माहितीच्या आधारे ठरविता येतात. एकदा हीं प्रतिबले ठरविली म्हणजे घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक किंवा समतोलाची लक्षणे, प्रकरण १२ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींच्या साहाय्याने निश्चित करता येतात.

निस्सारण जर सरळ उभे, थराच्या तळाकडे घडत असेल, तर तद्विषयक गणित बरेचसे सुलभ होते; कारण अशा थरात घेतलेल्या कोणत्याही आडव्या छेदावर सर्व ठिकाणी, विवक्षित समयी, उदासीन प्रतिबलाचे मूल्य एकच असते. उदाहरण म्हणून आधार-भिंतीमागील अंशतः दृढीभवन झालेल्या जलसाधित भरणामुळे येणारा पार्श्वीय दाब आपण ठरवू. आकृती १०३ अ पाहा. तेथील भिंतीच्या पाठीपैकी *मग*, एवढा भाग विचारात घेऊ. *ग*, बिंदूच्या पातळीला भरणाखाली भरड वाळूचा थर आहे आणि भूजलपातळी भरणाच्या तळाशी आहे असे गृहीत धरले आहे. त्यामुळे अतिरिक्त झालेले पाणी भरणाच्या तळातून वाळूमध्ये जाऊन भिंतीमधील निस्सारणार्थी भोकातून बाहेर पडते व भिंतीच्या डाव्या बाजूस मोकळ्या भागात *ग*, बिंदूच्या पातळीखाली जाते.

उपर्युक्त भरणाच्या दृढीभवनाची प्रक्रिया आकृती ९८ आ मधील सलग एककालीन रेषांनी विशद करता येईल. एककालीन रेषा म्हणजे ळ या विवक्षित समयी *एस* या तिरक्या छेदावरील निरनिराळ्या ठिकाणांचे दाबसंचित दाखविणारी रेषा होय. आकृती १०३ आ मधील *सपफ* हा आलेख, अशा एककालीन रेषेची प्रतिकृती आहे. *एस* या तिरक्या छेदास ही रेषा *प* मध्ये छेदते. या बिंदूचा कोटी *ख*० आहे. या पातळीच्या वरच्या भागात दाबसंचित ऋण आहे आणि खाली धन आहे. *एस* छेदावरील ठ या कोणत्याही बिंदूची उंची *ख* असल्यास आणि एककालीन रेषेवरील तदनुषंगिक *थ* या बिंदूची उंची च असल्यास, ळ समयी ठ या बिंदुस्थानाचे उदासीन प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल :

$$उ_{ज} = घ_{ज} (च - ख)$$

वर सांगितल्याप्रमाणे जर $ख < ख_0$ असेल, तर उदासीन प्रतिबल धन असते आणि जर $ख > ख_0$ असेल, तर तें ऋण असते. $उ_{ज}$ ची धन मूल्ये आकृती १०३ अ मध्ये *मग*, च्या डाव्या बाजूस आणि ऋण मूल्ये उजव्या बाजूस स्थित करून आपल्याला *मयजग*, ही स्थैतिक जलदाबाची आकृती मिळते. *ग*,*मन* या घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या उभ्या पृष्ठावरील एकूण उदासीन दाब, या आकृतीवरून मिळतो. या दाबाचा $दा_{ज}$ हा फलरूप दाब, दाबआकृतीच्या गुरुत्वमध्यातून जाईल. या गुरुत्वमध्याची उंची भरणाच्या तळापासून ड, इतकी आहे. भरणात घेतलेल्या कोणत्याही आडव्या छेदावर प्रत्येक ठिकाणी विवक्षित समयी उदासीन प्रतिबल सारखेच असल्यामुळे, घसरू पाहणाऱ्या खंडाच्या *ग*,*न* या तिरक्या पृष्ठावरील $ब_{ज}$ हा एकूण उदासीन दाब पुढीलप्रमाणे आहे :

$$ब_{ज} = \frac{दा_{ज}}{ज्या\ \theta}$$

या दाबाचा कारक-बिंदूही भरणाच्या तळापासून ड, उंचीवर आहे. $ब_{ज}$ चा आडवा घटक $दा_{ज}$ आणि उभा घटक $दा_{ज}कोस्प\ \theta$ आहे. आडवा घटक *मग*, वरील पाण्याच्या दाबाशी सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् आहे. म्हणून *ग*,*मन* या घसरू पाहणाऱ्या

खंडावर कारक असणाऱ्या सर्व उदासीन बलांचे फलरूप बल $\text{दा}_{\text{ज}}\text{कोस्प}\,\vartheta$ असून तें आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे उभ्या दिशेत कारक आहे. घसरू पाहणाऱ्या खंडाचे कार्यसाधक वजन व (मृत्कण+पाणी मिळून) या उदासीन बलामुळे पुढीलप्रमाणे कमी होते :

$$\bar{\text{व}}=\text{व}-\text{दा}_{\text{ज}}\text{कोस्प}\,\vartheta=\frac{१}{२}\,\text{घच}^{२}\text{कोस्प}\,\vartheta-\text{दा}_{\text{ज}}\text{कोस्प}\,\vartheta$$

$$=\frac{१}{२}\,\text{घच}^{२}\text{कोस्प}\,\vartheta\left(१-\frac{२\,\text{दा}_{\text{ज}}}{\text{घच}^{२}}\right)=\frac{१}{२}\,\text{घ}_{\text{क}}\cdot\text{च}^{२}\,\text{कोस्प}\,\vartheta.$$

येथे

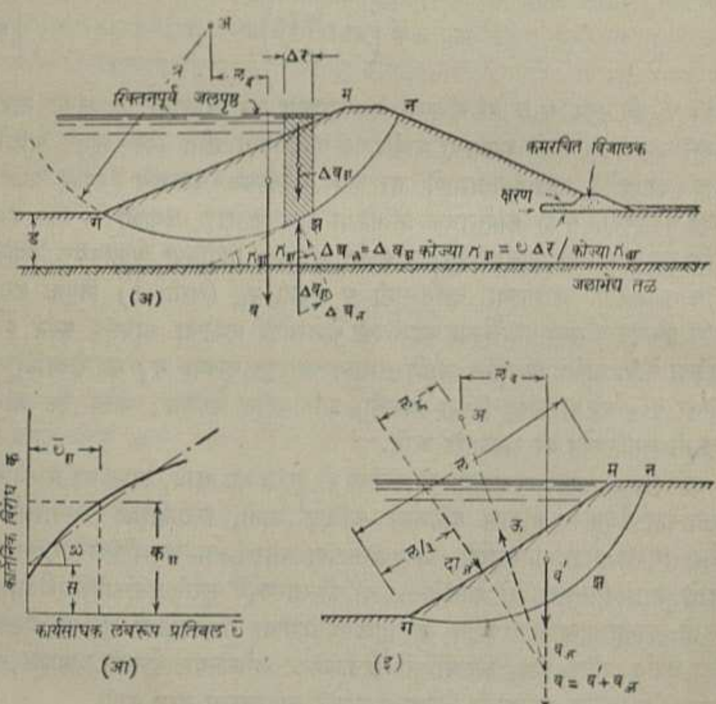
$$\text{घ}_{\text{क}}=\text{घ}\left(१-\frac{२\text{दा}_{\text{ज}}}{\text{घच}^{२}}\right) \qquad [१]$$

आहे. $\text{घ}_{\text{क}}$ चे मूल्य $\text{ग}_{१}\text{न}$ या संभाव्य घसरपृष्ठाच्या उतारकोनावर अवलंबून नाही. म्हणून उदासीन दाबामुळे भरणाची कार्यसाधक घनता कमी होते असे म्हटले पाहिजे. तसेच आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे हा दाब कार्यसाधक वजनाचे स्थान उजव्या बाजूस सरकवतो. $\bar{\text{व}}$ ही कार्यसाधक प्रतिक्रिया घसरपृष्ठावरील लंबाशी ω कोन करते आणि उद्युक्त मृत्तिकादाबाचा $\overline{\text{दा}}_{\text{उ}}$ हा कार्यसाधक अंश भिंतीच्या पाठीवरील लंबाशी ϑ कोन करतो. भरणाच्या घनतेसाठी घ ऐवजी $\text{घ}_{\text{क}}$ (समी. १) नियुक्त करून आणि प्रकरण ६ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींपैकी कोणत्याही एकीचा अवलंब करून $\overline{\text{दा}}_{\text{उ}}$ ठरविता येतो. कार्यसाधक वजन आणि संभाव्य घसरपृष्ठ यांच्या $\text{न}_{१}$ या छेदनबिंदूच्या उंचीवर $\overline{\text{दा}}_{\text{उ}}$ चा कारकबिंदू स्थित असतो, असे गृहीत धरण्यात थोडी चूक आहे; परंतु ती सुरक्षिततेत भर टाकणारी आहे.

व्यावहारिक महत्त्व असलेल्या समस्यांचा जो दुसरा गट आहे, त्यात द्रुत रिक्तनाचा भरावांच्या स्थैर्यावर होणारा परिणाम चर्चिला जातो. रिक्तनामुळे निस्सारणाच्या क्रियेस प्रारंभ होतो. निस्सारण चालू असतांना घसरणीच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक वाढतो आणि निस्सारण पुरे झाल्यानंतर तो निस्सारणपूर्व सुरक्षिततांकापेक्षाही अधिक असतो; कारण पाण्यातील पृष्ठीय ताणामुळे घसरणीचा धोका कमी झालेला असतो. तेव्हा सर्वांत अधिक धोका असतो तो रिक्तनानंतर लगेचच्या काळात. म्हणून त्या नंतरच्या काळातील अवस्थांचा विचार करण्याची आवश्यकता उरत नाही.

एखादा पूर्णपणे निमज्जित भराव, बारीक वालुकेत बांधलेला असेल, तर द्रुत रिक्तनानंतर लगेचच्या काळातील उदासीन प्रतिबलांचे वितरण, अतिवृष्टीमुळे पूर्ण संपृक्त अवस्था येऊन निर्माण होणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीपेक्षा किंचित् अधिक स्थैर्यानुकूल असते (परि. ११६ पाहा). तेव्हा अशा भरावाचे उतार निमज्जनापूर्वी दीर्घकालीन अतिवृष्टीमध्ये स्थिर ठरले, तर ते द्रुत रिक्तनानंतरही स्थिर असतात.

चिकण मृत्तिकेसारख्या समाकर्षणगुणी मृत्तिकेतील उतारांच्या स्थैर्यावर होणारा द्रुत रिक्तनाचा परिणाम अभ्यासताना, स्वतःमधील ओलावा प्रतिबल-परिस्थितीशी त्वरेने अनुरूप करून घेण्याच्या बाबतीतील तिची अक्षमता विचारात घेणे आवश्यक असते. तद्विषयक गणिताचे उदाहरण म्हणून आकृती ७४ उ मध्ये दाखविलेल्या मातीच्या धरणाचा जलाशयाकडील उतार आपण विचारात घेऊ आणि द्रुत रिक्तनानंतर लगेचच्या काळात होऊ शकणाऱ्या घसरणी-बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरवू. द्रुत रिक्तनात जलाशयाची पातळी उताराच्या तळापर्यंत उतरविली आहे. आकृती ७४ उ मधील छेदच पुनः आकृती १०४ अ मध्ये दाखविला आहे. परि० ८९ मध्ये आकृती ७४ उ विषयी विवेचन करताना उल्लेख केल्याप्रमाणे येथेही असे गृहीत धरले आहे की, धरणाच्या



आकृती १०४ : (अ) एकविभागी मातीच्या धरणाचा द्रुतरिक्तनजन्य घसरणीच्या संदर्भातील सुरक्षिततांक ठरविण्याची पद्धत; (आ) धरणाच्या बांधकामासाठी वापरलेल्या मृत्तिकेच्या बाबतीतील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल आणि कार्तनिक विरोध यांमधील संबंध; (इ) संपूर्णपणे पाण्याखाली असलेल्या उताराचे, द्रुत रिक्तनानंतरच्या अवस्थेतील स्थैर्य ठरविण्याची एक सोपी पद्धत.

बैठकीखाली ड खोलीपर्यंतची मृत्तिका धरणाच्या बांधकामासाठी वापरलेल्या मृत्तिके-सारखीच आहे आणि तिच्यातील ओलावा रिक्तनापूर्वी असलेल्या प्रतिबल-परिस्थितीशी अनुरूप आहे.

रिक्तनापूर्वी दीर्घकालीन वृष्टीचा काळ येऊन गेलेला असेल, तर आकृती ७४ ऊ मध्ये दाखविलेल्या क्षरणजालाच्या साहाय्याने उदासीन प्रतिबले ठरविता येतात. एरवी आकृती ७४ उ मध्ये दाखविलेल्या क्षरणजालाच्या साहाय्याने तीं ठरविता येतात.

आकृती १०४ अ मधील *गझन* या यदृच्छया निवडलेल्या तलबिंदुगामी वर्तुळानुसार होणाऱ्या घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरविण्यासाठी आपण *गझन* या पृष्ठा-वरचा एकांक जाडीचा भराव आणि जलराशी विचारात घेऊ आणि त्यांची $\Delta र$ रुंदीची छ शकले करू. आकृतीत रेखांकित करून दाखविलेल्या शकलाचे वजन $\Delta व_{श}$ आहे आणि त्याचा तळ क्षितिजाशी $ग_{श}$ कोन करतो. शकलाच्या उभ्या बाजूंवरील प्रतिबलांकडे आपण दुर्लक्ष केल्यास, शकलाच्या तळावरील एकूण प्रतिक्रिया $\Delta व_{श}$ इतकी होते. तिचे $\Delta व_{त}$ हा स्पर्शदिक् आणि $\Delta व_{लं} = \Delta व_{श}$ कोज्या $ग_{श}$ हा लंबदिक् असे घटक पाडता येतात. शकलाच्या तळाची रुंदी $\Delta र /$ कोज्या $ग_{श}$ असल्यामुळे तळावरील एकूण लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$ए = \frac{\Delta व_{लं}}{\Delta र} \text{ कोज्या } ग_{श} = \frac{\Delta व_{श}}{\Delta र} \text{ कोज्या}^{२} ग_{श} \qquad [२]$$

तळावरील $उ_{ज}$ हे उदासीन प्रतिबल परि. ९१ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतीच्या साहाय्याने क्षरणजालावरून (आ. ७४ उ किंवा ७४ ऊ) ठरविता येते. रिक्तनापूर्वी शकलाच्या तळावरील कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$\bar{ए}_{श} = ए - उ_{ज} \qquad [३]$$

या पद्धतीने *गझन* पृष्ठावरील कोणत्याही ठिकाणच्या कार्यसाधक, लंबदिक् प्रतिबलांची तीव्रता व वितरण ठरविता येतात.

रिक्तनाच्या काळात, मृत्तिकेतील ओलावा व्यवहारतः जवळजवळ न बदलता तसाच राहतो. अर्थातच *गझन* या पृष्ठावरील कार्यसाधक दाबही व्यवहारतः तसाच राहतो, परंतु कार्तनिक प्रतिबले मात्र वाढतात. कार्यसाधक लंबदिक् प्रतिबल $\bar{ए}_{श}$ (समी. ३) आणि तदनुषंगिक एकांक क्षेत्रावरील कार्तनिक विरोध यांत मिळणारा संबंध उच्छेद-कालात ओलाव्यात बदल होणार नाही अशी परिस्थिती ठेवून, प्रयोग करून ठरविता येतो. अशा प्रयोगांच्या मालिकेतून मिळणारी फलिते आ. १०४ आ मध्ये दाखविली आहेत. ही आकृती आणि समीकरण ३ या दोहोंच्या साहाय्याने आ. १०४ अ मध्ये दाखविलेल्या शकलाच्या तळावरील कार्तनिक विरोध ठरविता येतो. शकलाच्या तिरक्या

तळावरील एकूण कार्तनिक विरोध $\frac{\Delta\text{र}\ \text{क}_{\text{श}}}{\text{कोज्या}\ \text{ग}_{\text{श}}}$ इतका आहे. या विरोधाचे अ भोवतीचे एकूण परिबल पुढीलप्रमाणे :

$$\text{प}_{\text{वि}} = \Delta\text{र}\cdot\text{त्र}\sum_{१}^{\text{छ}} \frac{\text{क}_{\text{श}}}{\text{कोज्या}\ \text{ग}_{\text{श}}}$$

आणि घसरण-निर्मितीकडे प्रवृत्ती असणारे परिबल पुढीलप्रमाणे आहे :

$$\text{प}_{\text{घ}} = \text{वल}_{\text{व}}$$

येथे व म्हणजे *गझन* पृष्ठावरील, मृत्तिका आणि पाणी यांचे रिक्तनोत्तर वजन आहे. म्हणून *गझन* वरून होणाऱ्या घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$\text{सु} = \frac{\text{प}_{\text{वि}}}{\text{प}_{\text{घ}}} = \frac{\Delta\text{र}\cdot\text{त्र}\sum_{१}^{\text{छ}} \frac{\text{क}_{\text{श}}}{\text{कोज्या}\ \text{ग}_{\text{श}}}}{\text{व}\ \text{ल}_{\text{व}}} \qquad [४]$$

आकृती १०४ आ मध्ये दाखविलेल्या कार्तनिक प्रयोगांच्या फलिताऐवजी सरळ रेषा काढणे फारसे चूक न मानले, तर $\text{क}_{\text{श}}$ चे मूल्य पुढील समीकरणाने मिळू शकेल :

$$\text{क}_{\text{श}} = \text{स} + \text{ऊ}_{\text{श}}\ \text{स्प}\ \omega \qquad [५]$$

हे समीकरण कूलोमच्या ५ (१) या समीकरणासारखेच आहे. $\text{क}_{\text{श}}$ चे हे मूल्य समीकरण ४ मध्ये नियुक्त केल्यास, आपल्याला सु चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते.

$$\text{सु} = \frac{\Delta\text{र}\ \text{त्र}\sum_{१}(\text{स} + \text{ऊ}_{\text{श}}\ \text{स्प}\ \omega)\ \frac{१}{\text{कोज्या}\ \text{ग}_{\text{श}}}}{\text{वल}_{\text{व}}}$$

$$= \frac{\text{त्र}}{\text{व}\ \text{ल}_{\text{व}}}\left[\text{स}\ \text{ल}_{\text{चा}} + \Delta\text{र}\ \text{स्प}\ \omega\sum_{१}^{\text{छ}}\frac{\text{ऊ}_{\text{श}}}{\text{कोज्या}\ \text{ग}_{\text{श}}}\right] \qquad [६]$$

येथे $\text{ल}_{\text{चा}}$ म्हणजे *गझन* या चापाची लांबी आहे. अशीच आकडेमोड अनेक निरनिराळ्या तलबिंदुगामी वर्तुळांच्या बाबतीत केली पाहिजे. ज्या वर्तुळाच्या बाबतीत सु लघुतम असेल, त्यानुसार घसरण घडून येईल.

प्रत्यक्ष व्यवहारात जलाशयातील पाण्याचे रिक्तन द्रुत गतीने कधीच होत नाही. पाण्याची पातळी जशी खाली जाईल, त्याप्रमाणे भरावाचे दृढीभवन होऊ लागते. त्यामुळे घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षितता वाढते; म्हणून खरा सुरक्षिततांक वर वर्णिलेल्या कृतीने मिळणाऱ्या सुरक्षिततांकाहून काहीसा मोठा असतो.

जलांश स्थायी राहून होणाऱ्या विरूपत्वाचा उदासीन प्रतिबलावर होणारा परिणाम वरील विवेचनात दुर्लक्षिला आहे. आपल्या ज्ञानाची सांप्रतची परिस्थिती अशी आहे की, या सोप्या रीतीच्या अवलंबामुळे होणारी चूक अद्याप टाळता येत नाही. भरावाचे दृढीकरण चांगल्या रीतीने केलेले असेल, तर उपर्युक्त चूक सुरक्षिततेत भर टाकण्याचा संभव असतो. अदृढ भरावाच्या बाबतीत मात्र ती असुरक्षितता वाढवते.

एखाद्या उताराखालची मृत्तिका शांत जलात आ. १०४ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे संपूर्णपणे निमज्जित असेल, तर द्रुत रिक्तनाचा उताराच्या स्थैर्यावरील परिणाम घसर-पृष्ठावरील उदासीन प्रतिबले न ठरविताही अनुमानिता येतो (टेलर १९३७). या पद्धतीमागचे तत्त्व लक्षात येण्यासाठी आपण असे गृहीत धरू की, सपाट पृष्ठावरून होणाऱ्या एखाद्या वस्तूच्या सरकण्यास होणारा विरोध पुढील प्रायोगिक समीकरणाने व्यक्त होतो :

$$का = श + व \ स्प \ \phi \qquad [७]$$

येथे *श* म्हणजे ती वस्तू आणि पृष्ठ यांतील विषमाकर्षण आणि *व* हे वस्तूचे कार्यसाधक वजन आहे. आपण ही वस्तू पाण्यात बुडविली, तर तिचे कार्यसाधक वजन

$$व' = व - व_{ज}$$

इतके होते. येथे $व_{ज}$ हे त्या वस्तूने विस्थापिलेल्या पाण्याचे वजन आहे. निमज्जना-नंतर घसरणीस होणारा विरोध पुढीलप्रमाणे असतो :

$$\begin{aligned} का' &= श + (व - व_{ज}) \ स्प \ \phi \\ &= श + व \left(\frac{व - व_{ज}}{व} \ स्प \ \phi \right) \\ &= श + व \ स्प \ \phi_{१}, \qquad [८ \ अ] \end{aligned}$$

येथे

$$स्प \ \phi_{१} = \frac{व - व_{ज}}{व} \ स्प \ \phi \qquad [८ \ आ]$$

असून $\phi_{१}$ हा कार्तनिक विरोधाचा काल्पनिक कोन आहे. म्हणून निमज्जनाचा घसरणविरो-धावर होणारा परिणाम समीकरण ७ मधील $स्प \ \phi$ ऐवजी समीकरण ८ आ मधील $स्प \ \phi_{१}$ नियुक्त करून ठरविता येतो. ही पद्धत आ. १०४ इ मध्ये दाखविलेल्या उदाहरणाच्या

बाबतीत आपण लावून पाहू. *मगझन* या एकांक जाडीच्या राशीच्या (आ. १०४ इ) एकूण *व* या वजनाचे दोन भाग पाडता येतील. एक म्हणजे *व* हे *मगझन* राशीचे वजन आणि दुसरा म्हणजे त्या राशीने विस्थापिलेल्या पाण्याचे $\text{व}_{\text{ज}}$ हे वजन. भरावाची एकांक लांबी विचारात घेतली, तर रिक्तनापूर्वी त्या लांबीच्या *गम* या उतारावरील जलदाब $\text{दा}_{\text{ज}}$ आहे. उदासीन प्रतिबलांचे *अ* भोवतीचे परिबल शून्य असल्यामुळे *गझन* वरील उदासीन प्रतिबलांचे फलरूप प्रतिबल ऊ (आ. १०४ इ) *अ* मधून जाते आणि

$$\text{दा}_{\text{ज}}\text{ल}_{\text{ऊ}}=\text{व}_{\text{ज}}\text{ल}_{\text{ब}}$$

आहे. घसरण घडवून आणण्याकडे प्रवृत्ती असलेले परिबल $\text{व}'\text{ल}_{\text{ब}}$ आहे. रिक्तनामुळे $\text{दा}_{\text{ज}}\text{ल}_{\text{ऊ}}=\text{व}_{\text{ज}}\text{ल}_{\text{ब}}$ हे विरोधी परिबल वगळले जाते. त्यामुळे घसरणकारी परिबल $\text{व}'\,\text{ल}_{\text{ब}}$ ऐवजी वाढून पुढीलप्रमाणे होते :

$$\text{प}_{\text{घ}}=(\text{व}'+\text{व}_{\text{ज}})\,\text{ल}_{\text{ब}}$$

तरीही घसरणपृष्ठावरील कार्यसाधक दाब तोच राहतो. परिणामी *गझन* वरील घसरणविरोध *मगझन* हा राशी जणू अद्यापही पूर्ण निमज्जित अवस्थेतच आहे, असा राहतो. कार्तनिक विरोध कूलोमच्या पुढील समीकरणाने—

$$\text{क}=\text{स}+\text{ठ}\ \text{स्प}\,\omega$$

व्यक्त होत असेल, तर संपूर्ण निमज्जनाच्या परिणामाची दखल $\text{स्प}\,\omega$ ऐवजी समीकरण ८ आ ने दिलेले मूल्य—

$$\text{स्प}\,\omega_1=\frac{\text{व}-\text{व}_{\text{ज}}}{\text{व}}\,\text{स्प}\,\omega$$

वापरून घेता येते. या नियुक्तीनंतर उदासीन बले दुर्लक्षिता येतात आणि मग परि. ५७ ते ६५ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतींपैकी कोणत्याही एकीचा अवलंब करून घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरविता येतो.

चतुर्थ खंड

मृत्तिकाबलविज्ञानातील स्थितिस्थापकत्वविषयक समस्या

प्रकरण १६

निम्नस्तर, मृत्तिका किंवा स्थूणा यांच्या प्रतिक्रिया-गुणांकांविषयीचे सिद्धांत

१२३. निम्नस्तरप्र-तिक्रियेची व्याख्या : ज्यावेळी एखादा भार किंवा भारव्यूह ताठ किंवा स्थितिस्थापक पादकांच्या द्वारे मृत्तिकेवर टाकला जातो, त्यावेळी अशा पादकांच्या तळावर ठिकठिकाणी स्पर्शदाब कारक होतो आणि पादकतळावरील या स्पर्शदाबांची बेरीज पादकावरील एकूण भाराइतकी असते. या स्पर्शदाबाचे भारधारण-क्षेत्रावरील वितरण आधारभूमीच्या प्राकृतिक गुणधर्मांप्रमाणेच पादकाच्या स्थितिस्थापकत्व-गुणावरही अवलंबून असते. एखाद्या पादकाच्या तळाखालील स्पर्शदाबाचे गणित मांडले असता, असे दिसून येते की, एखाद्या ठिकाणचा एकांक स्पर्शदाब आणि त्याच ठिकाणचे अवसीदन यांमधील गुणोत्तराचे मूल्य स्पर्शक्षेत्राच्या निरनिराळ्या ठिकाणी निरनिराळे असते. प्रत्यक्ष अनुभवाशी ही गोष्ट सुसंगतच आहे. उदाहरणार्थ, एखाद्या ताठ पादकावर केंद्रस्थानी भार ठेवला असता, त्याच्या तळाखाली प्रत्येक बिंदूचे अवसीदन सारख्याच खोलीपर्यंत होते; तरीही भारधारण-क्षेत्रावरील स्पर्शदाबाचे वितरण मात्र समप्रमाण नसते हे आपल्याला माहीत आहे.

स्पर्शदाबवितरण ठरविण्याच्या काटेकोर, शास्त्रपूत पद्धती नेहमीच्या समस्यांत वापरण्याच्या दृष्टीने फारच क्लिष्ट असल्यामुळे, एका फारशा तर्कशुद्ध नसलेल्या गृहीताचा अवलंब करून हे गणित सोपे करण्याचा प्रघात आहे. एकांक स्पर्शदाब आणि अवसीदन यांतील गुणोत्तराचे मूल्य, भारधारण-क्षेत्राच्या प्रत्येक ठिकाणी सारखेच असते, हे ते गृहीत होय. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे, तर भारित क्षेत्राच्या कोणत्याही भागाच्या अवसीदनावर, एकूण भारित क्षेत्राचे आकारमान आणि उर्वरित क्षेत्रावर कारक असलेला भार, या दोहोंचा प्रभाव पडत नाही, असे गृहीत धरले जाते.

घन पदार्थांच्या किंवा सर्वसाधारण मृत्तिकांच्या प्राकृतिक गुणधर्मांशी हे गृहीत सुसंगत नाही. वस्तुस्थिती आणि हे गृहीत यांच्यात सुसंवाद प्रस्थापित करावयाचा असेल, तर पादकाखालच्या मृत्तिकाधाराच्या स्थानी, आकृती १४१ अ मध्ये दाखविल्या-प्रमाणे, सर्पिलांनी युक्त अशी शय्या आहे, असे मानणे आवश्यक ठरते. ही सर्पिले एकमेकांपासून सारख्या अंतरावर असून त्यांची दमनीयताही सारखीच आहे व प्रत्येक सर्पिल स्वतंत्र आहे. ही कल्पना अतिशय अनैसर्गिक आहे. तेव्हा तिच्या आधारे मांडलेल्या गणितातून निघणारे निष्कर्ष म्हणजे ढोबळ अनुमाने आहेत, असेच मानले

पाहिजे. तथापि पादकतळांवरील दाब तसेच स्थूणासमूहापैकी प्रत्येकीवरील दाब ठरविण्याच्या प्रचलित पद्धतींपैकी बऱ्याच पद्धती या वर्गात मोडणाऱ्या आहेत. प्रस्तुत प्रकरणात केवळ याच पद्धतींचा ऊहापोह केला आहे. प्रत्यक्षातील स्पर्शदाब किंवा नम्यता-सिद्धांतानुसार किंवा स्थितिस्थापकता-सिद्धांतानुसार ठरविलेला स्पर्शदाब, यांच्यापासून उपर्युक्त पद्धतींपैकी एखादीचा अवलंब करून ठरविलेल्या दाबाचे वेगळेपण स्पष्ट व्हावे, यासाठी या दाबास **निम्नस्तर-प्रतिक्रिया** असे संबोधिले जाईल. एकांक निम्नस्तर-प्रतिक्रिया आणि तदनुषंगिक अवसीदन यांतील गुणोत्तरास **निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा गुणांक** असे म्हणतात. स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांतानुसार स्पर्शदाब ठरविण्याच्या पद्धतींची चर्चा पुढील प्रकरणात केली जाईल.

१२४. मृत्तिकाप्रतिक्रिया आणि स्थूणाप्रतिक्रिया यांचे गुणांक : मृत्तिका-राशीच्या समतल, आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्या भाराचे *द* हे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य आणि तदनुषंगिक *न* हे पृष्ठभागाचे अवसीदन यांमधील *द*/*न* या गुणोत्तरास **निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांक** म्हणतात. तसेच उभ्या पृष्ठावर कारक असलेल्या भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य आणि तदनुषंगिक आडवे विस्थापन यांतील गुणोत्तरास **क्षितिजदिक्-प्रतिक्रिया-गुणांक** म्हणतात. पायातील स्थूणेवरील *भा* हा भार आणि तिचे *न* हे अवसीदन यांमधील *भा*/*न* या गुणोत्तरास **स्थूणेचा ऊर्ध्वदिक् प्रतिक्रिया-गुणांक** असे म्हणतात.

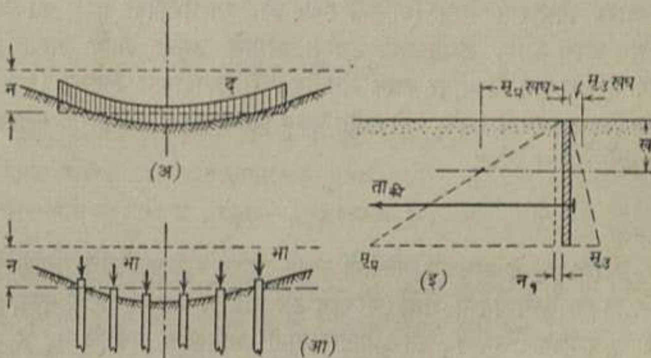
या गुणांकांची रास्त मूल्ये ठरविण्यासाठी आवश्यक असलेली माहिती मिळविण्याच्या उद्देशाने आपण मृत्तिकेच्या एखाद्या उघड्या पृष्ठभागावर समप्रमाण दाब लावू. नंतर निर-निराळ्या ठिकाणांचे विचलन मोजू आणि एकांक दाबाला त्या त्या ठिकाणच्या विचलनाने भागू; नंतर अशा प्रकारे प्राप्त झालेल्या गुणोत्तरांच्या मूल्यांचे सरासरी मूल्य काढू; किंवा काँक्रीटच्या ठोकळ्यासारख्या एखाद्या ताठ वस्तूच्या साहाय्याने मृत्तिकेवर ज्ञात मूल्याचा भार टाकू, ठोकळ्याचे विस्थापन मोजू आणि एकांक दाब आणि हे विस्थापन यांचे गुणोत्तर मिळवू. स्थूणांचा विचार करताना सारख्या अंतरावर ठोकलेल्या स्थूणांच्या समूहापैकी प्रत्येकीवर *भा* हा भार लावू, प्रत्येकीचे अवसीदन मोजू आणि मग त्यांतील गुणोत्तराचे सरासरी मूल्य काढू; किंवा एखाद्या काँक्रीटच्या ठोकळ्याच्या द्वारे स्थूणासमूहावर विशिष्ट भार लावून प्रत्येकीवरील भारास ठोकळ्याच्या अवसीदनाने भागू. वरील उदाहरणांतील दोन्ही पद्धतींत एका तर्कशुद्ध नसलेल्या गोष्टीचा अंतर्भाव होतो; ती म्हणजे निरनिराळी मूल्ये असणाऱ्या गुणोत्तराच्या ठिकाणी आपण एक सरासरी मूल्य योजतो. हे सरासरी मूल्य म्हणजेच काल्पनिक निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांक होय. या बदलामुळे होणाऱ्या चुकीचे महत्त्व पुढील प्रकरणात विशद केले जाईल.

समाकर्षणयुक्त मृत्तिकेच्या समतल पृष्ठभागावर एखादा वर्तुळाकार किंवा आयताकार क्षेत्र व्यापणारा, समप्रमाण वितरित भार ठेवला असता, असा अनुभव येतो की, अशा

भारामुळे त्या पृष्ठभागावर बशीसारखा खळगा पडतो. आकृती १०५ अ पाहा. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे, तर या भारामुळे भारित क्षेत्राच्या मध्यभागापासून किनारीकडे अवसीदनाचे मान कमी होत जाते. आकृतीत सरासरी अवसीदन न असे दाखविले आहे. याच बाबतीतील आणखी अनुभव असा आहे की, एकांक भारात वाढ केली असता, त्या वाढीच्या प्रमाणापेक्षा तदनुषंगिक सरासरी अवसीदनात होणाऱ्या वाढीचे प्रमाण अधिक असते. तेव्हा भारित क्षेत्राचे विषम अवसीदन आणि भार व सरासरी अवसीदन या दोहोंमधील काटेकोर प्रमाणबद्धतेचा अभाव, यांकडे दुर्लक्ष करूनच आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येईल.

$$\frac{\text{द}}{\text{न}} = \text{प्र}_{\text{नि}} \ (\text{ग्रॅम सेंमी}^{-3}) \qquad [१]$$

प्र$_{\text{नि}}$ या निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांकाचे मूल्य केवळ मृत्तिकेच्या गुणधर्मांवर अवलंबून नसून, भार वाहणाऱ्या क्षेत्राचे आकारमान आणि आकार यांवरही ते अवलंबून असते. तसेच इतर सर्व गोष्टी त्याच राहून, एकांक भार वाढल्यास या गुणांकाचे मूल्य घटते.



आकृती १०५ : (अ) समप्रमाण भारित क्षेत्राचे प्रत्यक्षातील अवसीदन (आ) समप्रमाण भारित व सारख्या अंतरावर ठोकलेल्या स्थूणांच्या समूहाचे प्रत्यक्षातील अवसीदन. (इ) वालुकाथरात बांधलेल्या कीलक-भित्तिकेचा सिद्धांत ज्यांवर आधारित आहे, तीं सुकरतादायी गृहीते.

तेव्हा प्र$_{\text{नि}}$ हा काही मृत्तिकेच्या बाबतीतील एखादा गुणधर्मदर्शक स्थिरांक होत नाही आणि समी. १ ने व्यक्त होणारा संबंध, हे खऱ्या संबंधाचे केवळ एक ढोबळ प्रतीक ठरते. म्हणून प्र$_{\text{नि}}$चे मूल्य निवडताना, त्या मूल्यावर प्रभाव पडण्याचा संभव असणाऱ्या, सर्व घटकांचा विचार केला पाहिजे.

सारख्या अंतरावर ठोकलेल्या स्थूणांच्या समूहापैकी प्रत्येकीवर *भा* हा भार असेल, तर त्यांचे अवसीदनसुद्धा समूहाच्या मध्याजवळील स्थूणांच्या बाबतीत अधिक आणि परिघाकडील स्थूणांच्या बाबतीत कमी, असे असते. आकृती १०५ आ पाहा. अर्थात अशा ठिकाणी *भा*/*न* हे गुणोत्तर स्थूणा-समूहाच्या मध्यापासून परिघाकडे वाढत जाते. तरीही एखाद्या स्थूणासमूहावरील एकूण भाराचे वितरण ठरविताना आपण नेहमी असेच गृहीत धरतो की,

$$\frac{भा}{न} = प_{स्थू} \text{ (ग्रॅम/सेंमी.)} \qquad [२]$$

हे गुणोत्तर स्थिरमूल्य आहे. $प_{स्थू}$ म्हणजे स्थूणांचा ऊर्ध्वदिक् प्रतिक्रिया-गुणांक होय. एक गोष्ट मात्र या ठिकाणी अभिप्रेत आहे, ती ही की, स्थूणांची तळाग्रे ताठ थरावर ठेवलेली नसावीत.

स्थूणा आणि फलकस्थूणा यांवरील क्षितिजदिक् दाब ठरविण्यासाठीही निम्नस्तर-प्रतिक्रियेची कल्पना वापरण्यात आलेली आहे. या रीतीतील मूलभूत तत्त्वे जाणून घेण्यासाठी वाळूतील उभ्या कीलक–भित्तिकेच्या बाबतीत मिळणारा दाब-विस्थापन संबंध आपण विचारात घेऊ (आकृती १०५ इ). या भिंतीवर $ता_{की}$ हा आडवा कीलकताण कारक आहे. उच्छेदक्षणी उजव्या अंगाने उद्युक्त आणि डाव्या अंगाने प्रतियोगी मृत्तिका-दाब तिच्यावर कारक असतील. मृत्तिकादाबाचे वितरण स्थिर जल-दाबाच्या वितरणासारखे आहे, असे गृहीत धरून पृष्ठापासून *ख* खोलीवरील फलरूप दाब पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

$$द_1 = घख\,(मृ_{प्र} - मृ_{उ})$$

येथे $मृ_{प्र}$ आणि $मृ_{उ}$ हे अनुक्रमे प्रतियोगी आणि उद्युक्त मृत्तिकादाबांचे गुणांक आहेत आणि *घ* ही वालुकेची घनता आहे (परिच्छेद ८४ पाहा). फलरूप दाबाचे मूल्य, त्याच्या मूळच्या शून्य मूल्यापासून $द_1$ इतके वाढण्यासाठी आवश्यक असलेले $न_1$ हे आडवे विस्थापन खोलीवर अवलंबून नाही, असेही आणखी गृहीत धरू आणि शेवटी, प्रत्यक्ष अनुभवाशी विसंगत असूनही *द* हा फलरूप एकांक दाब *न* या आडव्या विस्थापनाच्या सरळ प्रमाणात वाढत जातो, असेही गृहीत धरू. या सर्व गृहीतांचा आधार घेऊन आपल्याला *द* च्या बाबतीत पुढील समीकरण मांडता येते :

$$द = द_1 \frac{न}{न_1} = \frac{न}{न_1} घख\,(मृ_{प्र} - मृ_{उ}) = नघख \frac{मृ_{प्र} - मृ_{उ}}{न_1} = नघखण_{आ}$$

म्हणजेच

$$\frac{द}{न} = घखण_{आ} \qquad [३ अ]$$

येथे

$$ग_{आ} = \frac{मृ_{प्र} - मृ_{उ}}{न_{१}} (सेंमी.^{-१}) \qquad [३ आ]$$

आहे. तथापि बहुसंख्य प्रकाशनांतून समी. ३ अ ने व्यक्त होणारा संबंध पुढील स्वरूपात दिला जातो.

$$\frac{द}{न} = ग_{आ}ख \qquad [४]$$

येथे

$$ग_{आ} = घ \frac{मृ_{प्र} - मृ_{उ}}{न_{१}} (ग्रॅम\ सेंमी.^{-४})$$

असून, तो एक प्रयोगप्राप्त स्थिरांक आहे आणि त्याचे मूल्य खोलीवर अवलंबून नाही. $ग_{आ}$ ची परिमाणे निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांकाच्या परिमाणांसारखी नाहीत, हे येथे ध्यानात घेतले पाहिजे. समी. ३ व ४ केवळ समाकर्षणहीन वाळुकेस लागू पडतात. चिकण मृत्तिकेच्या बाबतीत सामान्यपणे पुढील गृहीताचा अवलंब केला जातो :

$$\frac{द}{न} = प्र_{आ} (ग्रॅम\ सेंमी.^{-३} \qquad [५]$$

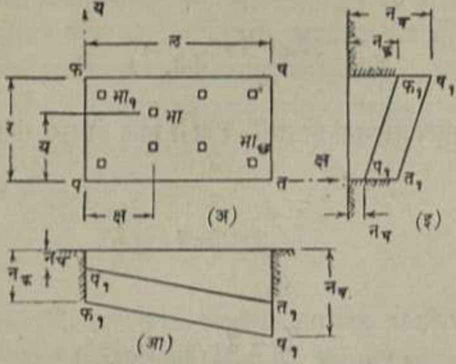
आडवा दाब द आणि तदनुषंगिक न हे आडवे विस्थापन यांतील गुणोत्तर म्हणजे स्थूणा किंवा मृत्तिका यांचा क्षितिजदिक् प्रतिक्रिया-गुणांक होय. काही बाबतीत खोलीनुसार त्याचे मूल्य वाढते (समी. ४), तर अन्य ठिकाणी ते खोलीवर अवलंबून नसते (समी. ५).

पुढील परिच्छेदांतील विवेचन समीकरणे १ ते ५ यांवर आधारित आहे आणि ते वाचताना वाचकांनी या समीकरणांत प्रविष्ट झालेल्या ढोबळ गृहीतांचा विसर पडू देता कामा नये (परिच्छेद १२६ मधील शेवटचे उपपरिच्छेद पाहा).

१२५. ताठ पादकांच्या तळावरील निम्नस्तर-प्रतिक्रिया : ताठ पादकावर येणाऱ्या निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचे गणित नेहमी खाली दिलेल्या समीकरण १२४ (१) वर आधारित असते :

$$\frac{द}{न} = प्र_{नि} \qquad [१]$$

या गणिताची कृती स्पष्ट होण्यासाठी आपण एका पूर्णत्वाने ताठ असलेल्या आयताकार पादकाचे उदाहरण घेऊ व त्याच्या तळावरील निम्नस्तर प्रतिक्रियेचे वितरण



आकृती १०६ : (अ) स्तंभ-भार $भा_1$ ते $भा_छ$ जिच्यावर कारक आहेत, अशी ताठ आयातकार लादी (आ आणि इ) 'अ' मध्ये दाखविलेल्या लादीच्या तळावरील निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचे वितरण.

ठरवू. या पादकावर स्तंभांद्वारे येणाऱ्या $भा_1$ ते $भा_छ$ या भारांचा व्यूह कारक आहे पादकाचा समतोल साधण्यासाठी स्तंभभारांची बेरीज एकूण निम्नस्तर-प्रतिक्रियेइतकी असणे आवश्यक आहे. म्हणून,

$$\sum_{1}^{छ} भा = \int_{0}^{ल}\int_{0}^{र} द \, dक्ष \, dय \qquad [२]$$

त्याचप्रमाणे निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा कारकबिंदू फलरूप भाराच्या कारक रेषेवर असला पाहिजे. या लक्षणाची पूर्तता पुढील समीकरणांनी होते :

$$\sum_{1}^{छ} भाक्ष = \int_{0}^{ल}\int_{0}^{र} द \, क्ष \, dक्ष \, dय \text{ आणि } \sum_{1}^{छ} भाय = \int_{0}^{ल}\int_{0}^{र} द \, य \, dक्ष \, dय \qquad [३]$$

हीं समीकरणे सोडविण्यासाठी आपल्याला द ही निम्नस्तर-प्रतिक्रिया क्ष आणि य या मात्रांच्या रूपात व्यक्त केली पाहिजे. पादक पूर्णत्वाने ताठ असल्यामुळे त्याचा तळ अवसीदन होत असतानाही एका पातळीतच राहतो. पादकाच्या तळाची अवसीदनानंतरची दोन पार्श्वदर्शने आकृती १०६ आ आणि इ यांमध्ये दाखविली आहेत. मूळ पृष्ठाच्या संदर्भात प, फ आणि ब या तीन कोपऱ्यांचे अवसीदन अनुक्रमे $न_प$, $न_फ$ आणि $न_ब$ असे आहे. क्ष आणि य हे सहनिर्देशक असलेल्या बिंदुस्थानाचे अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\text{न} = \text{न}_{\text{प}} + (\text{न}_{\text{ब}} - \text{न}_{\text{फ}})\frac{\text{क्ष}}{\text{ल}} + (\text{न}_{\text{फ}} - \text{न}_{\text{प}})\frac{\text{य}}{\text{र}}$$

या समीकरणात $\text{न} = \text{द} / \text{म}_{\text{नि}}$ (समी. १) नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$\text{द} = \text{द}_{\text{प}} + (\text{द}_{\text{ब}} - \text{द}_{\text{फ}})\frac{\text{क्ष}}{\text{ल}} + (\text{द}_{\text{फ}} - \text{द}_{\text{प}})\frac{\text{य}}{\text{र}} \qquad [४]$$

या ठिकाणी $\text{द}_{\text{प}}$, $\text{द}_{\text{फ}}$ आणि $\text{द}_{\text{ब}}$ म्हणजे अनुक्रमे प, फ आणि ब या कोपऱ्यांच्या ठिकाणांच्या प्रतिक्रिया आहेत. या समीकरणाच्या साहाय्याने समीकरणे २ व ३ सोडविता येतात आणि अशा प्रकारे आपल्याला पुढील समीकरणे प्राप्त होतात :

$$\sum_{१}^{\text{छ}} \text{भा} = \int_{०}^{\text{र}} d\text{य} \int_{०}^{\text{ल}} \text{द}\; d\text{क्ष} = \text{रल}\frac{\text{द}_{\text{प}} + \text{द}_{\text{ब}}}{२} \qquad [५]$$

$$\sum_{१}^{\text{छ}} \text{भाक्ष} = \int_{०}^{\text{र}} d\text{य} \int_{०}^{\text{ल}} \text{दक्ष}\; d\text{क्ष} = \frac{\text{रल}^{२}}{२}\left(\frac{१}{२}\text{द}_{\text{प}} + \frac{२}{३}\text{द}_{\text{ब}} - \frac{१}{६} \qquad \right) \qquad [६]$$

आणि

$$\sum_{१}^{\text{छ}} \text{भाय} = \int_{०}^{\text{ल}} d\text{क्ष} \int_{०}^{\text{र}} \text{दय}.\, d\text{य} = \frac{\text{र}^{२}\text{ल}}{२}\left(\frac{१}{३}\text{द}_{\text{प}} + \frac{१}{२}\text{द}_{\text{ब}} + \frac{१}{६}\text{द}_{\text{फ}}\right) \qquad [७]$$

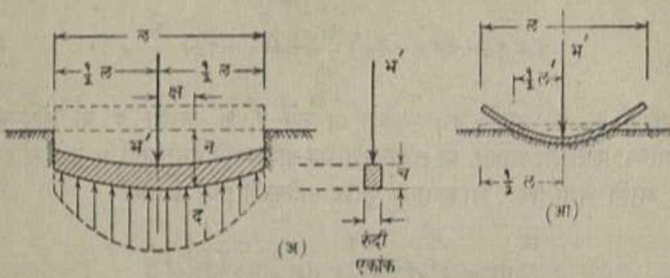
या तीन समीकरणांच्या साहाय्याने समीकरण ४ मधील $\text{द}_{\text{प}}$, $\text{द}_{\text{फ}}$ आणि $\text{द}_{\text{ब}}$ या तीन अज्ञात संख्या ठरविता येतात. फलरूप भाराची कारकरेषा पादकाच्या तळाच्या मध्यातून जात असेल, तर निम्नस्तर-प्रतिक्रिया सर्व क्षेत्रावर सारखीच असते. म्हणजे—

$$\text{द} = \frac{\Sigma\, \text{भा}}{\text{रल}} = \text{स्थिरमूल्य}.$$

काही विशिष्ट परिस्थितीत हा निष्कर्ष बराचसा अचूक असतो. एरव्ही मृत्तिका-प्रतिक्रियांचे खरे वितरण स्थूलमानाने सुद्धा समप्रमाण नसते (परिच्छेद १३९ पाहा). प्रचलित सिद्धांत आणि वस्तुस्थिती यांतील विसंवादाचे कारण समी. १ मध्ये ढोबळ गृहीते प्रविष्ट झालेली आहेत, हे आहे.

१२६. स्थितिस्थापक पादकांच्या तळावरील निम्नस्तर-प्रतिक्रिया : स्थितिस्थापक पादके भारांच्या कारकबिंदूंच्या दरम्यान वरच्या दिशेने विचलित

होतात. त्यामुळे निम्नस्तर-प्रतिक्रिया भारांच्या खाली महत्तम आणि त्यांच्या दरम्यानच्या क्षेत्रांत लघुतम असतात. येथे निम्नस्तर-प्रतिक्रियांच्या वितरणावर विचलनाचा प्रभाव पडत असल्यामुळे, स्थितिस्थापक पादकांवरील विनामक परिबले, त्याच परिस्थितीतील ताठ पादकांच्या बाबतीत मिळणाऱ्या परिबलांपेक्षा पुष्कळच कमी असतात.



आकृती १०७ : (अ) स्थितिस्थापक तुळई स्थितिस्थापक आधारावर ठेवली व तिच्या दर एकांक रुंदीवर $भ'$ मूल्याचा रेषाभार लावला असता, मिळणारे निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचे वितरण. (आ) भारयुक्त, अति लवचिक तुळईची भूपृष्ठापासून वर उचलली गेलेली टोके.

स्थितिस्थापक तुळया किंवा स्थितिस्थापक निम्नस्तरावरील पादके यांतील विनामक परिबले ठरविण्याच्या पद्धती व्यावहारिक बलविज्ञानाच्या कित्येक पाठ्य पुस्तकांतून वर्णिलेल्या असतात (उदाहरणार्थ, टिमोशिंको १९४१ पाहा); म्हणून पुढील परिच्छेदांतून केवळ तद्विषयक सर्वसाधारण तत्त्वांचा सारांश दिलेला आहे.

स्थितिस्थापक निम्नस्तरावर ठेवलेल्या एका स्थितिस्थापक तुळईचा अनुदीर्घ्य छेद आकृती १०७ अ मध्ये दाखविला आहे. तिची लांबी $ल$ असून तिच्या कोणत्याही ठिकाणच्या आडव्या छेदाचे क्षेत्रफळ सारखेच आहे. तुळईची रुंदी $र$ व जाडी $च$ असून तिच्या दर एकांक रुंदीवर $भ'$ हा भार आहे. भार तुळईच्या लांबीच्या मध्यावर कारक आहे. या तुळईचे अवसीदन समीकरण १२४ (१) ने ठरविता येते.

$$\frac{द}{न} = प्र_{नि} = \text{स्थिरांक} \qquad [१]$$

भाराच्या प्रभावामुळे तुळईस वक्रता येते आणि तिचे स्थान आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे होते. समजा,

$यं$ = तुळईचा स्थितिस्थापकत्व-मापांक,

$ज = \frac{रच^3}{१२}$, तुळईच्या छेदाची परिवस्तू,

का = तुळईच्या मध्यबिंदूपासून *क्ष* अंतरावर मोजलेले, एकांक रुंदीवरील उभे कार्तनिक बल,

द = तुळईच्या मध्यबिंदूपासून *क्ष* अंतरावर मोजलेली निम्नस्तर-प्रतिक्रिया (एकांक क्षेत्रावरील दाब),

न = मध्यबिंदूपासून *क्ष* अंतरावर मोजलेले तुळईच्या तळाचे अवसीदन आणि

ϵ = नैसर्गिक लघुगणकाचा मूलांक

आहेत. तुळईच्या मध्यबिंदूपासून मोजलेल्या *क्ष* च्या अंतरानुसार कार्तनिक बल बदलण्याचे प्रमाण खालील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$-\frac{d\text{का}}{d\text{क्ष}} = \text{द} = \text{न}\text{प्र}_{\text{नि}} \qquad [२]$$

विनमनसिद्धान्तानुसार तुळईचे, तिच्या मूलस्थानाच्या संदर्भातील *न* हे उभे विस्थापन पुढील समीकरणाने ठरविता येते :

$$-\frac{d\text{का}}{d\text{क्ष}} = \text{न}\text{प्र}_{\text{नि}} = -\text{जयं}\ \frac{d^{४}\text{न}}{d\text{क्ष}^{४}} \qquad [३]$$

या समीकरणाचे उत्तर खाली दिले आहे.

$$\text{न} = \text{थ}_{१}\cdot\text{कोज्याह}\ \text{ढ}\cdot\text{कोज्या}\ \text{ढ} + \text{थ}_{२}\ \text{ज्याह}\ \text{ढ}\cdot\text{ज्या}\ \text{ढ} + \text{थ}_{३}\ \text{कोज्याह}\ \text{ढ}\cdot\text{ज्या}\ \text{ढ}$$
$$+\text{थ}_{४}\ \text{ज्याह}\ \text{ढ}\cdot\text{कोज्या}\ \text{ढ} \qquad [४\ \text{अ}]$$

येथे

$$\text{ढ} = \text{क्ष}\sqrt[४]{\frac{\text{प्र}_{\text{नि}}\text{र}}{४\text{जयं}}} \qquad [४\ \text{आ}]$$

हा शुद्धांक असून $\text{थ}_{१}$ ते $\text{थ}_{४}$ हे चलानयनाचे स्थिरांक आहेत. या परिस्थितीतील दर एकांक रुंदीवरील विनामक परिबल खालीलप्रमाणे असते.

$$\text{प} = \frac{\text{जयं}}{\text{र}}\cdot\frac{d^{२}\text{न}}{d\text{क्ष}^{२}} \qquad [५]$$

$\text{थ}_{१}$ ते $\text{थ}_{४}$ हे चलानयनाचे स्थिरांक (समीकरण ४अ) अशा प्रकारे ठरविले पाहिजेत की, सातत्यलक्षणे आणि सीमालक्षणे यांची पूर्तता त्यामुळे झाली पाहिजे. हीं लक्षणे पुढीलप्रमाणे असतात. तुळईच्या अर्ध्या लांबीवर म्हणजे *क्ष* = ० असताना स्थितिस्थापक रेषेला काढलेली स्पर्शरेषा आडवी असते आणि दर एकांक रुंदीवरील कार्तनिक बल $\text{भ}'/२$ असते. तुळईच्या दोन्ही टोकांच्या ठिकाणी, *प* हे विनामक परिबल आणि *का*

हे कार्तनिक बल यांची मूल्ये शून्य असतात. हीं लक्षणे पुढील समीकरणांनीही व्यक्त करता येतात :

$$क्ष = ० \text{ असताना}, \quad \frac{dन}{dक्ष} = ० \qquad [६ अ]$$

$$क्ष = ० \text{ असताना}, \quad का = \frac{जयं}{र} \cdot \frac{d^3न}{dक्ष^3} = \frac{भ'}{२} \qquad [६ आ]$$

$$क्ष = \frac{ल}{२} \text{ असताना}, \quad प = \frac{जयं}{र} \cdot \frac{d^2न}{dक्ष^2} = ० \qquad [६ इ]$$

आणि

$$क्ष = \frac{ल}{२} \text{ असताना}, \quad का = \frac{ज\,यं}{र} \cdot \frac{d^3न}{dक्ष^3} = ० \qquad [६ ई]$$

समीकरण ४ अ आणि हीं समीकरणे यांच्या साहाय्याने आपल्याला तुळईच्या मध्यापासून क्ष अंतरावरील निम्नस्तर-प्रतिक्रिया पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$द = न\, प्र_{नि} = \frac{भ'ङ_1}{२\,ल} \cdot \frac{१}{ज्याह\, ङ_1 + ज्या\, ङ_1} \Big\{ ज्या\, ङ\; ज्याह\, (ङ_1 - ङ) -$$

$$ज्याह\, ङ\; ज्या\, (ङ_1 - ङ) + २\Big[कोज्याह\, ङ\; कोज्या\, \frac{ङ_1}{२}\, कोज्या\left(\frac{ङ_1}{२} - ङ\right)$$

$$+ कोज्या\, ङ \cdot कोज्याह\, \frac{ङ_1}{२}\, कोज्याह\left(\frac{ङ_1}{२} - ङ\right)\Big]\Big\} \qquad [७]$$

आणि त्याच ठिकाणच्या दर एकांक रुंदीवरील विनामक परिबल पुढील समीकरणाने मिळते.

$$प = \frac{भ'ल}{४ङ_1} \cdot \Big(कोज्याह\, ङ \cdot कोज्या\, ङ + ज्याह\, ङ\; ज्या\, ङ - ज्याह\, ङ \cdot कोज्या\, ङ$$

$$- कोज्याह\, ङ \cdot ज्या\, ङ - ब\; कोज्याह\, ङ \cdot कोज्या\, ङ + अ\; ज्याह\, ङ \cdot ज्या\, ङ \Big) \qquad [८]$$

येथे

$$ङ = क्ष \sqrt[4]{\frac{प्र_{नि}\, र}{४जयं}}, \quad ङ_1 = ल \sqrt[4]{\frac{प्र_{नि}\, र}{४जयं}}$$

$$अ = \frac{२ + कोज्या\, ङ_1 - ज्या\, ङ_1 + \in^{-ङ_1}}{ज्याह\, ङ_1 + ज्या\, ङ_1}$$

आणि

$$\text{ब} = \frac{\text{कोज्या } \text{ङ}_1 + \text{ज्या } \text{ङ}_1 - \in^{-\text{ङ}_1}}{\text{ज्याह } \text{ङ}_1 + \text{ज्या } \text{ङ}_1} \qquad [९]$$

आहेत.

निम्नस्तर-प्रतिक्रिया द आणि विनामक परिबल प हीं दोन्हीही भार-बिंदूच्या खाली महत्तम असतात व या ठिकाणी ङ = ० असतो. हीं महत्तम मूल्ये खाली दिल्याप्रमाणे असतात :

$$\text{द}_{\text{मह.}} = \text{न}_{\text{मह.}}\ \text{प्र}_{\text{नि}} = \frac{\text{भ}'\text{ङ}_1}{\text{२ल}} \cdot (\text{१} + \text{अ}) \qquad [\text{१०}]$$

आणि

$$\text{प}_{\text{मह.}} = \frac{\text{भ}'\text{ल}}{\text{४ङ}_1} \cdot (\text{१} - \text{ब})$$

तुळई पूर्णत्वाने ताठ असेल, तर अशा तुळईच्या बाबतीत उपर्युक्त महत्तम मूल्ये खालीलप्रमाणे असतात.

$$\text{द}'_{\text{मह.}} = \frac{\text{भ}}{\text{ल}} \text{ आणि } \text{प}'_{\text{मह.}} = \frac{\text{भ ल}}{\text{८}}$$

स्थितिस्थापक तुळईच्या दोन्ही टोकांच्या ठिकाणी निम्नस्तर-प्रतिक्रिया पुढीलप्रमाणे असते :

$$\text{द}_1 = \text{न}_1\ \text{प्र}_{\text{नि}} = \frac{\text{२}}{\text{ल}}\ \text{भ}'\text{ङ}_1 \frac{\text{कोज्याह} \frac{\text{ङ}_1}{\text{२}} \text{कोज्या} \frac{\text{ङ}_1}{\text{२}}}{\text{ज्याह}\text{ङ}_1 + \text{ज्या } \text{ङ}_1} \qquad [\text{११}]$$

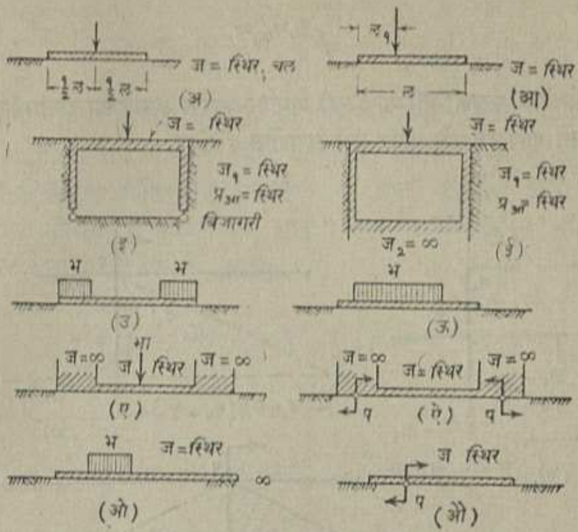
तुळई दीर्घ आणि कृश असेल, तर द_1 चे मूल्य (समी. ११) ऋण होते. तुळई आणि निम्नस्तर यांच्या स्पर्शपृष्ठावर ताणकारी प्रतिबलांचे अस्तित्व शक्य नसल्यामुळे तुळईची टोके भारापासून ल'/२ या विशिष्ट अंतरापलीकडे भूपृष्ठापासून वर उचलली जातात. आकृती १०७ आ पाहा. या अंतरात निम्नस्तर-प्रतिक्रिया भाराखाली महत्तम असते आणि तेथून कमी होत जाऊन ल'/२ अंतरावर शून्य होते.

गेली कित्येक दशके स्थितिस्थापक आधारावरील तुळया व लाद्या यांमधील विनामक परिबले ठरविण्याच्या समस्येकडे गणितशास्त्रात गती असलेल्या स्थापत्यविशारदांचे लक्ष वेधले गेलेले आहे. त्यामुळे या वर्गातील निरनिराळ्या प्रकारांच्या, अनेक समस्या यापूर्वीच सोडविल्या गेल्या आहेत. प्रथमतः लोहमार्गाखालील खडीवर

ठेवलेल्या आधारपट्टयांतील म्हणजेच शिलेपाटातील विनामक परिबलांची मूल्ये ठरविण्याच्या उद्देशाने एतद्विषयक सिद्धांताच्या बाबतीत कार्य केले गेले (झिमरमान १८८८). त्याच कार्यासाठी अमेरिकन सोसायटी ऑफ सिव्हिल एंजिनियर्सच्या "कमिटी टु रिपोर्ट ऑन स्ट्रेसेस इन् रेलरोड ट्रॅक्स" (टालबोट १९१८) या समितीनेही हा सिद्धांत अशाच कार्यासाठी वापरला.

ग्रंथकर्त्यानें हा सिद्धांत १९११ मध्ये एका पायाच्या पूर्वकल्पासाठी प्रथमच वापरला. या पायाच्या रचनेत अति प्रबलित काँक्रीटच्या तुळयांची माचण केलेली होती. पुढच्या काळात हाच सिद्धांत प्रबलित काँक्रीटमध्ये बांधलेल्या गोद्यांच्या पूर्वकल्पांसाठीही वापरला गेला (फ्रॉयन्ड १९१७, १९२४). तसेच ज्यावर केंद्रित भार कारक आहेत, अशा रस्त्यांच्या कठीण पृष्ठभागांमधील विनामक परिबल-मूल्ये ठरविण्यासाठीही तो वापरला गेला (वेस्टरगार्ड १९२६). ज्यांच्या द्वारे उभे भार भूमीवर संक्रमित केले जात आहेत, अशा स्थितिस्थापक तुळया आणि साध्या चौकटीच्या रचना आकृती १०८ अ ते १०८ ई मध्ये दाखविल्या आहेत. आकृती १०८ उ ते १०८ औ मध्ये दाखविलेली भार-परिस्थिती गोद्यांच्या पूर्वकल्पांत अनेकदा आढळते. गोदीच्या भिंती व्यवहारतः ताठ (ज $=\infty$) असतात, परंतु तळाची रचना सापेक्षतः लवचिक असते (आकृती १०८ ए आणि १०८ ऐ पाहा). आकृती १०८ ऐ आणि १०८ औ मधील ग या चिन्हाने परिबल किंवा बलयुग्म दाखविले आहे. ज्यांवर आकृती १०८ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भार कारक आहेत, तसेच अन्य विविध प्रकारचे भारव्यूह ज्यांवर कारक आहेत, अशा वास्तूंमधील विनामक परिबले ठरविण्याची समीकरणे हयाशीने (१९२१) एका ग्रंथात संकलित केलेली आहेत. निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा गुणांक चल आहे, या गृहीताचा आधार घेऊन प्राप्त होणारी कित्येक उत्तरेही या ग्रंथात समाविष्ट केलेली आहेत. निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा गुणांक (समीकरण १२४ (१)) द या दाबाच्या वाढत्या तीव्रतेनुसार कमी होत जातो, या गृहीताचा आधार घेऊन काही समस्या फ्रॉयन्डनेही (१९२७) सोडविल्या आहेत.

ज्ञात असलेले सिद्धांत आणि त्यांतील उत्तरे व्यवहारात वापरताना मुख्य अडचण येते ती $प्र_{नि}$ या निम्नस्तर-प्रतिक्रियेच्या गुणांकाचे मूल्य (समीकरण १२४ (१)) योग्य प्रकारे ठरविण्याची. $प्र_{नि}$चे मूल्य मृत्तिकेच्या स्वरूपाव्यतिरिक्त इतर अनेक गोष्टींवर अवलंबून असल्यामुळे, प्रयोगशाळेत प्रयोग करून किंवा लहान प्रमाणावर स्थानिक प्रयोग करून, ते लगेच ठरविता येत नाही. भारित क्षेत्राच्या आकारमानाचा $प्र_{नि}$च्या मूल्यावर पडणारा प्रभाव व्यक्त करणारे औपम्य-नियम फार क्लिष्ट आहेत आणि पूर्णपणे ज्ञातही झालेले नाहीत, त्यामुळे प्रायोगिक फलितांवरून प्रत्यक्षाविषयी अंदाज बांधणे हा मूलतः अनुमान-कौशल्याचा प्रश्न ठरतो. उपर्युक्त विधाने परिच्छेद १२४ मध्ये उल्लेखिलेल्या इतर सर्व गुणांकांच्या बाबतीतही लागू पडतात. क्षेत्रीय परिस्थितीत $प्र_{नि}$चे मूल्य ज्यांवर अवलंबून असते, अशा घटकांचे समालोचन इतरत्र प्रकाशित झालेले आहे (टेरझागी १९३२). सुदैवाने निम्नस्तर-प्रतिक्रिया



आकृती १०८ : स्थितिस्थापक आधारावरील भार–धारक वास्तूंचे काही प्रकार; या वास्तूंच्या बाबतीत निम्नस्तर-प्रतिक्रिया, पार्श्वीय प्रतिक्रिया आणि विनामक परिबले ठरविण्याची समीकरणे प्रसिद्ध झालेली आहेत.

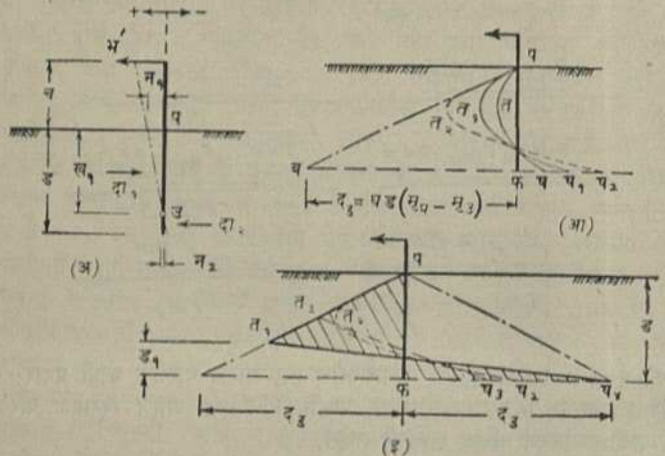
गुणांक अनुमानण्यात मोठी चूक झाली, तरी गणिताच्या फलितांवर पडणारा तिचा प्रभाव सापेक्षतः तितकासा महत्त्वाचा ठरत नाही; कारण विनामक परिबल ठरविण्याच्या समीकरण ८ मध्ये या गुणांकाचे केवळ चतुर्थमूळ समाविष्ट झालेले आहे.

१२७. मुक्त व ताठ फलकभिंती आणि विद्युत्‌वाहिनी तारांसाठी बांधलेल्या मनोऱ्यांचा पाया : फलकभिंतीचे स्थैर्य तिच्या भूमिगत भागावर येणाऱ्या पार्श्वीय विरोधावर पूर्णतया अवलंबून असेल, तर अशी फलकभिंत मुक्त आहे असे म्हणतात. तिच्या वरच्या कडेला लावलेली आडवी बले किंवा तिच्यामागच्या भरणामुळे निर्माण झालेला पार्श्वीय मृत्तिकादाब अशा फलकभिंतीवर कारक असू शकेल.

आकृती १०९ अ मध्ये अशा मुक्त फलकभिंतीचा छेद दाखविला आहे. माथ्याच्या कडेला दर एकांक लांबीवर $भ'$ हे आडवे बल लावले असता ते पेलले जाईल, अशा प्रकारे या भिंतीचा पूर्वकल्प केलेला आहे. फलकभिंत वाळुकायुक्त भूमीत ठोकलेली असून त्या वाळुकेची क्षितिजदिक् प्रतिक्रिया समीकरण १२४ (४) ने ठरविता येते, असे गृहीत धरले आहे.

$$\frac{द}{न} = ग_{आ}ख \qquad [१]$$

ख या खोलीवर फलकभिंतीच्या दोन्ही अंगांवर कारक असलेल्या दाबांमधील फरकाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य म्हणजे वरील समीकरणातील द होय.



आकृती १०९ : (अ) वालुकेत ठोकलेल्या ताठ फलकभिंतीचा छेद; दर एकांक लांबीवर भ' मूल्याचे क्षितिजसमांतर बल लावले असता फलकभिंतीच्या भूमिगत भागावर येणाऱ्या फलरूप आडव्या दाबाचे वितरण; (आ) सान्निध्यातील वालुका स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असताना; (इ) वालुका नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असताना.

फलकभिंतीच्या कडेला भ' हे बल लावल्यामुळे तिचे उ या बिंदूभोवती भ्रमण होऊन विस्थापन होते. उ चे स्थान भूपृष्ठ आणि फलकभिंतीचा तळ यांच्या दरम्यान असते. भ' च्या कारक दिशेने होणारे विस्थापन धन आणि उलट बाजूचे ऋण मानले आहे. भूपृष्ठापासून मोजलेल्या ख या खोलीवरील विस्थापन पुढीलप्रमाणे असेल :

$$न = न_१ - (न_१ - न_२)\frac{ख}{ड}$$

या ठिकाणी $न_१$ हे भूपृष्ठाजवळील आणि $न_२$ हे ड या खोलीवरील पार्श्वीय विस्थापन आहे. या समीकरणात $न = द/ग_{आ}ख$ (समीकरण १) नियुक्त केल्यास, आपल्याला ख खोलीवरील क्षितिजदिक् मृत्तिका-प्रतिक्रियेचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$द = ग_{आ} \left[न_१ ख - (न_१ - न_२) \frac{ख^२}{ड} \right] \qquad [२]$$

$न_१$ आणि $न_२$ या अज्ञात पदांची मूल्ये फलकभिंतीच्या समतोलासाठी आवश्यक असलेल्या लक्षणांच्या साहाय्याने ठरविता येतात. हीं लक्षणे अशीं : फलकभिंतीच्या दर एकांक लांबीवरील क्षितिजदिक् प्रतिक्रिया भ' असली पाहिजे आणि कोणत्याही बिंदूभोवतीच्या परिबलांची (उदाहरणार्थ, आकृती १०९ अ मधील प हा पृष्ठावरील बिंदू) बेरीज शून्य असली पाहिजे. म्हणून

$$भ' = \int_0^ड द . \partial ख = ग_{आ} ड^२ \left(\frac{१}{६} न_१ + \frac{१}{३} न_२ \right) \qquad [३ अ]$$

आणि

$$भ' च = \int_0^ड द ख . \partial ख = ग_{आ} ड^३ \left(\frac{१}{१२} न_१ + \frac{१}{४} न_२ \right) \qquad [३ आ]$$

आहेत. हीं समीकरणे सोडवून आणि त्यांच्या उत्तरांतून मिळणारी $न_१$ आणि $न_२$ यांची मूल्ये समीकरण २ मध्ये नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$द = \frac{६ भ' ख}{ड^३} \left[३ ड + ४ च - २ \frac{ख}{ड} (२ ड + ३ च) \right] \qquad [४]$$

आकृती १०९आ मधील पतप हे परिवलय आणि पफ ही उभी रेषा यांतील आडवे अंतर म्हणजे द या मृत्तिका-प्रतिक्रियेची मूल्ये होत. भ' या बलाचे मूल्य जसे वाढते, तसे परिवलयाचा प जवळचा उतार सपाट होत जातो आणि द चे मूल्य वाढत जाते. ख चे मूल्य कोणतेही असले, तरी त्या खोलीवरील द चे महत्तम मूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$द_{ख\ मह.} = घ ख \ (मृ_{प्र} - मृ_{उ}) \qquad [५]$$

येथे $मृ_{प्र}$ आणि $मृ_{उ}$ म्हणजे अनुक्रमे प्रतियोगी आणि उद्युक्त मृत्तिका-दाबाचे गुणांक आहेत (प्रकरण ११ पाहा). खोलीचे मूल्य ड असेल, तर तेथील दाबाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$द_{ड} = घ . ड \ (मृ_{प्र} - मृ_{उ}) \qquad [६]$$

फलकभिंतीच्या लगतची मृत्तिका जर उचलली गेली, तर तिच्यासह भिंतसुद्धा उचलली जाते; कारण फलकभिंतीचे वजन थोडेच असते आणि वालुका व फलकभिंत या दोहोंमधील सापेक्ष विस्थापन व्यवहारतः शून्यच असते. तेव्हा भिंत-घर्षणाचा गुणांक शून्यमूल्य गृहीत धरूनच $मृ_{प्र}$ आणि $मृ_{उ}$ यांची मूल्ये ठरविली पाहिजेत. तीं मूल्ये अशी आहेत :

$$मृ_{प्र} = स्प^2 (४५^\circ + ञ/२) \qquad १५ (४)$$

आणि

$$मृ_{उ} = स्प^2 (४५^\circ - ञ/२) \qquad १५ (२)$$

या ठिकाणी ञ हा वालुकेच्या अंतर्गत घर्षणाचा कोन आहे.

द या मृत्तिका-प्रतिक्रियेचे मूल्य $द_{ख\,महत्तम}$ (समीकरण ५) पेक्षा अधिक असू शकत नाही. प या बिंदूजवळ (आकृती १०९ आ) दाबदर्शक परिवलयाचा उतार पब या सरळ रेषेच्या उताराइतका झाला की, वालुका प्रवाही होते. पब या सरळ रेषेच्या भुजांनी $द_{ख\,महत्तम}$ ची मूल्ये दाखविली जातात. ही परिस्थिती येण्यासाठी पुढील समीकरणाची पूर्ती झाली पाहिजे.

$$\left[\frac{dद}{dख}\right]_{ख=०} = \frac{६भ'}{ह^3}(३ह + ४च) = प\,(मृ_{प्र} - मृ_{उ})$$

म्हणजेच—

$$भ' = \frac{१}{६}पह^3 \cdot \frac{मृ_{प्र} - मृ_{उ}}{३ह - ४च} \qquad [७]$$

तथापि वालुकाप्रवाह सुरू होताच समीकरण १ लागू पडत नाही आणि दाबरेषा अधिकाधिकपणे आकृती १०९ आ आणि इ यांमधील $पत_2प_2$ या तुटक रेषेशी एकरूप होऊ पाहते. या अवस्थेत या रेषेच्या खालच्या भागाऐवजी $त_3प_3$ (आकृती १०९) इ) अशी सरळ रेषा गृहीत धरली, तर काही फारशी चूक होत नाही. भ'चे मूल्य याहूनही अधिक झाले, तर $त_3$ हा बिंदू पब रेषेनुसार खाली सरकतो आणि $प_3$ हा बिंदू उजवीकडे सरकतो. फ बिंदूच्या उजवीकडे वाळूकडून पेलला जाणारा पार्श्वीय दाब $द_{ह}$ पेक्षा (समीकरण ६) कितीतरी अधिक असतो; कारण फ जवळील दाब वाळूच्या एका अरुंद पट्ट्यावरच कारक असतो. तथापि फ येथील मृत्तिकाप्रतिक्रिया $द_{ह}$ इतकी होताक्षणीच फलकभिंतीचा उच्छेद झाला, असे मानण्याचा प्रघात आहे. या गृहीतानुसार उच्छेदक्षणी आवश्यक असणारी समतोलाची लक्षणे पुढीलप्रमाणे मांडावी लागतात :

$$भ'_{महत्तम} = \frac{१}{२}द_{ह} \cdot ह - \frac{१}{२} \cdot २द_{ह} \cdot ह_1 = द_{ह}\left(\frac{१}{२}ह - ह_1\right) \qquad [८ अ]$$

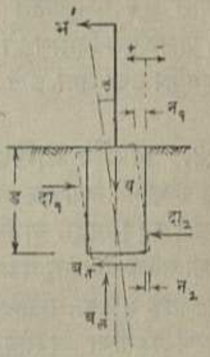
आणि

$$भ'_{महत्तम}\,(ह + च) = \frac{१}{२}द_{ह} \cdot ह \cdot \frac{ह}{३} - \frac{१}{२} \cdot २द_{ह} \cdot ह_1 \frac{ह_1}{३}$$

$$= द_{ह}\left(\frac{१}{६}ह^2 - \frac{१}{३}ह_1^2\right) \qquad [८ आ]$$

येथे च म्हणजे भ' ते प हे अंतर आहे.

या समीकरणांतून $ड_1$ हे पद वगळले असता, आपल्याला फलकभिंत पेलू शकेल, अशा $भ'_{महत्तम}$ या महत्तम बलाचे मूल्य मिळते. $भ'_{महत्तम}$ आणि $च$ यांची मूल्ये दिलेली असतील, तर फलकभिंत, ज्या लघुतम खोलीपर्यंत ठोकली पाहिजे, तिचे म्हणजे $ड$ चे मूल्यही या समीकरणांचा उपयोग करून मिळविता येते. इष्ट सुरक्षिततांकाचे मूल्य $सु$ असेल, तर समीकरण ८ मधील $द_{ड}$ ऐवजी $द_{ड}/सु$ नियुक्त केले पाहिजे. मागल्या अंगास केलेल्या भरणामुळे ज्यांच्या वरच्या भागावर उद्युक्त मृत्तिकादाब कारक आहे, अशा मुक्त फलकभिंतींच्या (कीलकबंधन नसलेल्या फलकभिंतींच्या) पूर्वकल्पातील गणितासाठीही ही पद्धत वापरलेली आहे (क्रे १९३६).



आकृती ११० : विद्युत् संवाहक तारेच्या खांबाच्या पायावर येणारी बले.

विद्युत्-वाहिनी तारांसाठी बांधलेल्या मनोऱ्याचा पाया आकृती ११० मध्ये दाखविला आहे. या पायावर कारक असलेली बले अशी आहेत : $व$ हे या सर्व वास्तूंचे वजन आणि $भ'$ हे आकृतीच्या पातळीला लंबदिशेत मोजलेल्या एकांक रुंदीवर कारक असणारे बल. हे बल विद्युत्-वाहिनीमुळे कारक होते आणि विस्थापनकारी परिबल निर्माण होण्यास कारणीभूत होते. पायामध्ये निर्माण होणाऱ्या कलंडण्याच्या प्रवृत्तीला विरोध करणारी बले अशी : तळावरील प्रतिक्रियेचे $ब_{ल}$ आणि $ब_{त}$ हे दोन घटक आणि $दा_1$ व $दा_2$ हीं मृत्तिकेच्या पार्श्वीय विरोधातून निर्माण होणारी बले. ज्या गोष्टी आकृती १०९ अ मधील $दा_1$ आणि $दा_2$ हीं बले ठरवितात, त्याच येथील $दा_1$ आणि $दा_2$ हीं बलेही ठरवितात. म्हणून आकृती ११० मधील $दा_1$ आणि $दा_2$ हीं बले ठरविण्यासाठी उपर्युक्त पद्धत फारसा बदल न करता वापरता येते. ज्या पातळीत कलंडण्याची क्रिया घडून येते, तिला लंबरूप असणाऱ्या दिशेत पायाच्या ठोकळ्याची लांबी मर्यादित आहे. त्यामुळे कलंडण्याच्या क्रियेला, तसेच ठोकळ्याच्या सान्निध्यात असलेल्या मृत्तिकेच्या पार्श्वीय दमनाला, आणखी एका ठिकाणी विरोध होतो. ज्या पातळीत कलंडण्याची क्रिया होते, तिला समांतर असणाऱ्या ठोकळ्याच्या ज्या दोन बाजू आहेत, त्यांतून जाणाऱ्या दोन पृष्ठांवरील घर्षणजन्य विरोध हा तो विरोध होय. या घर्षणजन्य विरोधामुळे स्थैर्यास होणारे साहाय्य लक्षात न घेण्याने होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते.

मनोऱ्याच्या मध्यरेषेचे कोणात्मक विचलन ँ या विशिष्ट मूल्यापेक्षा अधिक होऊ नये, असे इष्ट असेल, तर क्षेत्रीय प्रयोग करून समीकरण १ मधील $ग_{आ}$ या गुणांकाच्या मूल्याचे अनुमान करणे आवश्यक असते. आकृती ११० वरून आपल्याला कोणात्मक विचलनाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$\text{स्प ढ} = \frac{१}{ह}(न_{१} - न_{२}) \qquad [९]$$

समी. ९ आणि समी. ३ यांच्या साहाय्याने उपर्युक्त विचलन निर्माण होण्यास आवश्यक असणाऱ्या $भ'$ या क्षितिजदिक् कर्षणबलाचे मूल्य ठरविता येते. त्यातून होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते. आकृती ११० मधील $ब_{त}$ आणि $ब_{ळ}$ या बलांमुळे निर्माण होणारे विरोधी परिबल विचारात घेतले असता, अधिक चांगले सत्यसमीप उत्तर प्राप्त होते (सुल्झबर्गर १९२७).

१२८. पार्श्वीय भाराखालील मुक्त, लवचिक फलकभिंती आणि स्थूणा : मुक्त फलकभिंत लवचिक असेल, तर ती पार्श्वीय बलामुळे वाकते व विचलित होते. आकृती १११ पाहा. या विनमनाचे प्रमाण क्षुल्लक नसेल, तर मागील परिच्छेदात सिद्ध केलेली समीकरणे लागू पडत नाहीत. म्हणून अशा फलकभिंतीच्या पृष्ठावर येणाऱ्या क्षितिजदिक् मृत्तिका-प्रतिक्रियांची महत्ता आणि त्यांचे वितरण परि. १२६ मध्ये विशद केलेल्या पद्धतीचा अवलंब करून ठरवावी लागतात. फलकभिंतीचे ख या खोलीवर तिच्या मूळ स्थानापासून झालेले न हे पार्श्वीय विचलन आणि तेथील प्रतिक्रिया यांतील संबंध पुढे दिलेल्या समीकरण १२६ (३) च्या साहाय्याने ठरविता येतो.

$$-\frac{d\,का}{d\,ख} = द = -\,ज\,यं\,\frac{d^{४}न}{d\,ख^{४}} \qquad [१]$$

द/न हा मृत्तिकेच्या पार्श्वीय प्रतिक्रियेचा गुणांक ख ह्या खोलीचे फलन म्हणून समाधानकारक रीत्या मांडता येईल असे गृहीत धरल्यास, म्हणजेच

$$\frac{द}{न} = फ(ख)$$

असे मानल्यास, आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येते.

$$न\,फ(ख) = -\,ज\,यं\,\frac{d^{४}न}{d\,ख^{४}} \qquad [२]$$

हें समीकरण रीफाट (१९३५) याने खालील दोन प्रकरणी सोडविलेले आहे;

$$फ(ख) = \frac{द}{न} = प्र_{आ} = \text{स्थिरांक} \qquad १२४\ (५)$$

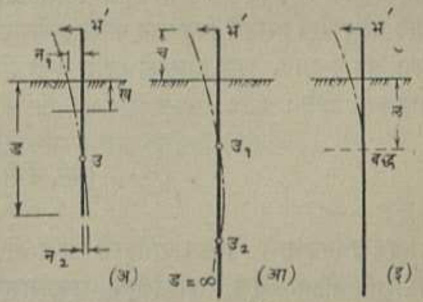
आणि

$$फ(ख) = \frac{द}{न} = ग_{आ}ख \qquad १२४\ (४)$$

फ (ख) = $ग_{आ}$ख असे गृहीत धरून त्याने जीं मूल्ये गणितसिद्ध केली, तीं स्वच्छ वाळूमध्ये ठोकलेल्या, मुक्त, पोलादी फलकभिंतींच्या बाबतीत, त्याला प्रत्यक्ष मोजून मिळालेल्या फलितांशी फारच उत्तम रीतीने जुळणारी होती.

फलकभिंतीच्या विचलनामुळे भरणामध्ये छत्रक्रियेचा प्रादुर्भाव होत असेल, उदाहरणार्थ, कीलकबद्ध, लवचिक फलकभिंतीचे विचलन (परिच्छेद ७८ पाहा), तर मृत्तिकेच्या आडव्या प्रतिक्रियेचा गुणांक जिच्यात वापरावा लागतो, अशा कोणत्याही पद्धतीचा उपयोग त्या समस्येत करता येत नाही. कारण या पद्धतीने मिळणाऱ्या फलितांना छत्रक्रियेमुळे बाध येतो.

फलकभिंत फार खोलवर ठोकलेली असेल, तर तिच्या मध्यरेषेचे विचलन दाखविणारी वक्र रेषा 'ज्या'–आलेखाच्या आकाराची असते (आकृती १११ आ पाहा). जसे खोल जावे तसे या वक्ररेषेतील प्रत्येक नागमाडी वळणाने दाखविले जाणारे महत्तम विचलन कमी होत जाते. जसजसा काळ लोटेल, त्याप्रमाणे मंदीकृत कंपनांचा आयाम कमी होत जावा, त्याप्रमाणे काहीसे हे आहे. च चे मूल्य (आकृती १११ आ) शून्य आहे आणि मृत्तिकेच्या आडव्या प्रतिक्रियेचा गुणांक समीकरण १२४ (४) ने दिल्याप्रमाणे आहे, असे गृहीत धरून मिश याने उपर्युक्त विचलनाची वक्र रेषा गणितसिद्ध केली (१९३०, तद्विषयक समीकरणे रीफाट याने उद्धृत केली आहेत. १९३५).



आकृती १११ : (अ) क्षितिजसमांतर बल कारक झाले असता, मिळणारा ऱ्हस्व स्थूणेचा वास्तवातील आकार; (आ) त्याच परिस्थितीतील दीर्घ स्थूणेचा आकार; (इ) स्थूणेतील विनामक परिबले गणितसिद्ध करण्यासाठी गृहीत धरलेला आकार.

जिच्यावर भूपृष्ठाजवळ किंवा वरच्या बाजूस आडवे बल कारक आहे, अशा दीर्घ स्थूणेचे विचलन आणि तिच्यातील विनमनजन्य प्रतिबले, ठरविण्यासाठीसुद्धा हीच सार्वत्रिक पद्धत वापरता येते. ही समस्या टिट्झने सोडविली आहे (१९३२). त्यासाठी त्याने असे गृहीत धरले की, द ही आडवी प्रतिक्रिया आणि खोली यांतील संबंध पुढील समीकरणाने निश्चित होतो :

$$द = न क_{आ} ख^{छ} \qquad (३)$$

येथे $क_{आ}$ आणि छ हे प्रायोगिक गुणांक आहेत. वाळूच्या बाबतीत छ = १ आणि चिकण

मृत्तिकांच्या बाबतीत $छ > १$ असे त्या संशोधकाने गृहीत धरले होते. एक टोकाचे उदाहरण म्हणून त्याने $\frac{ई}{न} = प्र_{आ} =$ स्थिरांक असे गृहीत धरले. हे केवळ आदर्श, चिकण मृत्तिकांच्या बाबतीतच यथार्थ आहे. तरीही प्रत्येक उदाहरणात त्याला मिळालेली अंतिम समीकरणे इतकी क्लिष्ट आहेत की, व्यावहारिक उपयोगासाठी तीं क्वचितच सोईची ठरतात. म्हणून समस्या सोडविणे सोपे व्हावे, या उद्देशाने आणखी एक गृहीत स्वीकारणे श्रेयस्कर ठरते. ते गृहीत म्हणजे आकृती १११ इ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे स्थूणेचा खालचा भाग बद्ध आहे असे मानणे, हे होय. या रचनेच्या विस्थापनातील एकूण कार्य लघुतम असले पाहिजे, या अटीची पूर्तता करून भूपृष्ठ आणि स्थूणेच्या विचलित झालेल्या भागाचे खालचे टोक, यांमधील ल हे उभे अंतर ठरविता येते. ज्यांची माथ्याची टोके ताठ स्वरूपाच्या काँक्रीटच्या लादीमध्ये निविष्ट केलेली आहेत, अशा लाकडी स्थूणांमधील विनामक परिबले ठरविण्यासाठी ही पद्धत वापरण्यात आलेली आहे (कुमिंग्ज १९३७). या स्थूणांच्या भोवती वाळू असून आडवा एकांक दाब आणि तदनुषंगिक आडवे विस्थापन यांच्या गुणोत्तराचे मूल्य खोलीनुसार सरळ प्रमाणात वाढत जाणारे आहे, असे त्यासाठी गृहीत धरले होते. खाली दिलेल्या समीकरणाने हे लक्षण व्यक्त होते :

$$\frac{ई}{न} = ग_{आ}\,(\text{ग्रॅम, सेंमी}^{-४})\,ख \qquad १२४\,(४)$$

या पद्धतीत मिळणारी अंतिम समीकरणे विशेष सोपी आहेत. ज्या बिंदूपासून स्थूणा बद्ध आहे असे मानता येईल, त्या बिंदूची भूपृष्ठापासून मोजलेली ल ही खोली पुढील समीकरणाने मिळते :

$$ल = \sqrt[५]{\frac{२१६\,ज\,यं}{म ग_{आ}}} \qquad [४]$$

येथे यं हा स्थूणेसाठी वापरलेल्या सामग्रीच्या बाबतीतील स्थितिस्थापकत्वाचा मापांक आहे, ज ही परिवस्तू आहे आणि *म* हा त्या स्थूणेचा व्यास आहे. या समीकरणानुसार ल चे मूल्य स्थूणेच्या माथ्यावर कारक असलेल्या *भा* ह्या आडव्या बलाच्या महत्तेवर अवलंबून नाही असे दिसते. गणिताची हीच पद्धत मृत्तिकेच्या आडव्या प्रतिक्रियेचा गुणांक स्थिरमूल्य असतो, असे गृहीत धरल्यास सोपी होते. ही पद्धत ज्यांचे माथ्याचे टोक मुक्त आहे, अशा स्थूणांचे विचलन ठरविण्यासाठीसुद्धा वापरता येते.

१२९. आधार-स्थूणांचे अक्षदिक् भाराखाली वाकण्याच्या बाबतीतील स्थैर्य : मृत्तिकेत ठोकलेली व जिच्यावर भार आहे अशी दीर्घ व कृश स्थूणा खालच्या

कठीण थरावर टेकलेली असेल, तर तिचा वाकून उच्छेद होण्याची शक्यता निदान तत्त्वतः तरी असतेच. अशा उदाहरणातील लक्ष्मणभार ठरविण्याच्या प्रचलित पद्धतींत (फॉरसेल १९२६, ग्रॅनहोल्म १९२९, कुमिंग्ज १९३८) आधारभूत मानलेले गृहीत असे आहे की, स्थूणेच्या आडव्या प्रतिक्रियेचा गुणांक स्थिरमूल्य असतो; म्हणजेच—

$$\frac{द}{न} = प्र_{आ} \text{ (ग्रॅम सेंमी}^{-3}\text{)} \qquad १२४ \text{ (५)}$$

त्यानुसार केलेल्या विश्लेषणातून असा निष्कर्ष निघतो की, स्थूणा वाकल्यामुळे तिला जो आकार येतो तो अनेक तरंगयुक्त 'ज्या'-आलेखासारखा असतो. आकृती ११२ पाहा. या विषयावरील कुमिंगजच्या प्रबंधाचा संक्षिप्त सारांश पुढे दिला आहे. समजा,

$ड$: अग्राधारी स्थूणेची मृदू मृत्तिकेत निविष्ट झालेली लांबी;
$म$: स्थूणेचा व्यास;
$यं$: स्थूणेच्या सामग्रीचा स्थितिस्थापकत्वाचा मापांक आणि
$ज$: स्थूणेच्या छेदाची परिवस्तू

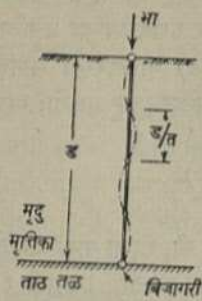
आहेत. तसेच स्थूणेचे भूपृष्ठाजवळील आणि थराच्या तळाजवळील, अशी दोन्ही टोके परिसंधित आहेत. स्थूणेला वाकल्यामुळे जो ज्या-आलेखाकृती आकार येतो, त्यातील $त$ ही अर्ध-तरंगांची संख्या पुढील समीकरणाच्या साहाय्याने ठरविता येते :

$$त^{२}(त+१)^{२} = \frac{मप्र_{आ}ड^{४}}{\pi^{४}जयं} \qquad [१]$$

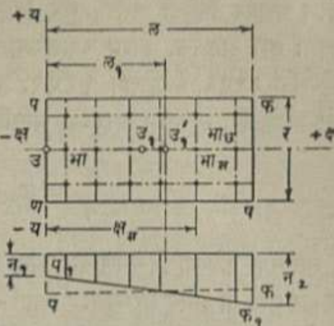
या समीकरणाच्या उत्तरात $त$ चे मूल्य अपूर्णांकयुक्त आले, तर त्याऐवजी त्यापुढचा पूर्णांक गृहीत धरणे आवश्यक असते. $त$ चे मूल्य $प्र_{अ}$ या मृत्तिकेच्या आडव्या प्रतिक्रियेच्या गुणांकानुसार वाढत जाते हे यावरून दिसते. येथे विनामक भाराचे लक्ष्मण-मूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$भा_{वि} = \frac{\pi^{२}जयं}{ड^{२}}(२त^{२}+२त+१) \qquad [२]$$

वरील समीकरणात उजवीकडे कंसाच्या बाहेर असणारे पद म्हणजे परिसंधित अग्रांच्या, मुक्त स्तंभाच्या बाबतीतील विनामक लक्ष्मणभाराचे मूल्य आहे. कुमिंग्जच्या प्रबंधात सोडवून दाखविलेल्या उदाहरणांवरून असे दिसून येते की, मृत्तिका अतिरिक्त प्रमाणात मृदू नसेल, तर $भा_{वि}$ या विनामक लक्ष्मणभाराचे मूल्य स्थूणेच्या दमन-सामर्थ्यापेक्षाही अधिक असते. प्रयोगशाळेत केलेल्या प्रयोगांच्या द्वारे या सिद्धांताच्या खरेपणाचा पडताळा आलेला आहे. लक्ष्मणभाराचे मूल्य बरेच मोठे असल्यामुळे भूपृष्ठाखाली वाकून उच्छेद झालेल्या स्थूणांची उदाहरणे प्रत्यक्षात आढळत नाहीत.



आकृती ११२ : मृदू, चिक्कण मृत्तिकेत ठोकलेल्या अग्राधारी स्थूणेवर अवजड उभा भार ठेवला असता येणारे विरूपत्व.



आकृती ११३ : वरची रेखाकृती : स्थूणांवर आधारित काँक्रीटची ताठ लादी भारित अवस्थेत; खालची रेखाकृती : भाराचा मध्य $उ_1$ ते $उ'_1$ येथे सरकला असता होणारे लादीचे विचलन.

१३०. ताठ वास्तूंना आधारभूत असलेल्या स्थूणांवरील उभ्या भाराचे वितरण : लादीपद्धतीच्या आणि ताठ स्वरूपाच्या, चौकोनी पायाचा छेद आकृती ११३ मध्ये दाखविला आहे. समांतर रांगांमध्ये ठोकलेल्या स्थूणांनी या लादीला आधार दिलेला आहे. *क्ष* अक्षाला समांतर असलेल्या रांगा सारख्या अंतरावर आहेत आणि अक्षाच्या संदर्भात त्या सममात्र आहेत. तथापि अक्षाला लंबदिशेत असलेल्या रांगांतील अंतर निरनिराळे आहे. *क्ष* अक्षास समांतर असलेल्या प्रत्येक रांगेवरील एकूण भार $भा_{ए}$ आहे. या भाराचा कारक बिंदू त्याच्या *क्ष* अक्षावरील मूळ $उ_1$ या स्थानापासून $उ'_1$ या ठिकाणी सरकवू. $उ'_1$ ह्या बिंदूचे लादीच्या डाव्या कडेपासून मोजलेले अंतर $ल_1$ आहे. $भा_{ए}$ चे मूल्य तेच आहे. भाराचे स्थानांतर केल्यामुळे डावीकडील स्थूणांवरचा दाब घटतो, तर उजवीकडील स्थूणांवरचा दाब वाढतो. भाराचे अशा प्रकारे स्थानांतर केल्यानंतर स्थूणांवर येणारा दाब ठरविण्याची समस्या आता सोडवायाची आहे.

भाराच्या स्थानांतरामुळे लादीचा तळ कलंडून त्याच्या *पफ* या मूळ स्थानापासून $प_1फ_1$ या स्थानी जातो. $प_1$ आणि $फ_1$ या ठिकाणांचे तज्जन्य अवसीदन अनुक्रमे $न_1$ आणि $न_2$ इतके आहे. *य* अक्षापासून $क्ष_{स}$ अंतरावर असलेल्या स्थूणेचे अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$न = न_1 + \frac{न_2 - न_1}{ल} \cdot क्ष_{स} \qquad [१]$$

पायाचा समतोल साधावयाचा असेल, तर $भा_{१}$ ते $भा_{छ}$ या स्थूणा-प्रतिक्रियांची बेरीज $भा_{ए}$ या एकूण भाराइतकी असली पाहिजे आणि या प्रतिक्रियांच्या $य$ अक्षाच्या संदर्भातील परिबलांची बेरीज $भा_{ए}ल_{१}$ इतकी असली पाहिजे. म्हणून—

$$भा_{ए} = \sum_{१}^{छ} भा \qquad [२ अ]$$

आणि

$$भा_{ए}ल_{१} = \sum_{१}^{छ} भा_{स}\, क्ष_{स} \qquad [२ आ]$$

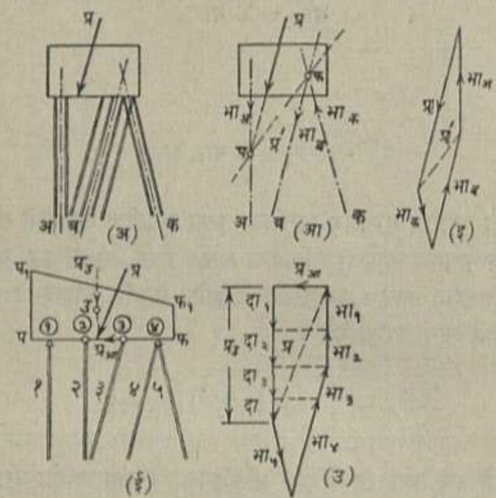
येथे छ म्हणजे $क्ष$ अक्षाला समांतर असलेल्या एका रांगेतील स्थूणांची संख्या आहे. हे समीकरण सोडविण्यासाठी स्थूणेची प्रतिक्रिया आणि तिचे अवसीदन यांतील संबंधाविषयी काही तरी गृहीत आपण स्वीकारले पाहिजे. नेहमी स्वीकारले जाणारे गृहीत पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते :

$$\frac{भा_{स}}{न} = प्र_{स्थू}\ (\text{ग्रॅम सेंमी.}^{-१}) = \text{स्थिरांक} \qquad [३]$$

येथे $प्र_{स्थू}$ म्हणजे स्थूणेच्या ऊर्ध्वदिक् प्रतिक्रियेचा गुणांक आहे (समीकरण १२४ (२)). आधीची समीकरणे आणि हे समी. ३ यांची सांगड घालून आपल्याला स्थूणांवरील भार ठरविता येतो. या फलिताची अचूकता समीकरण ३ मध्ये प्रविष्ट झालेल्या दोषांवर अवलंबून असते. वरील उदाहरणात काही स्थूणांवरील भार आपण वाढविला आणि काहीवरील कमी केला त्यामुळे $प्र_{स्थू}$ चे मूल्य सर्व स्थूणांच्या बाबतीत स्थूलमानाने सुद्धा सारखे राहणार नाही. म्हणून या कृतीत प्रविष्ट होणारी चूक महत्त्वपूर्ण असण्याची शक्यता आहे.

१३१. सागरी धक्क्याच्या भिंतींना दिलेला स्थूणांचा आधार : सागरी धक्क्याच्या भिंतींना दिलेला स्थूणांचा आधार आणि इमारतींना दिलेला स्थूणांचा आधार या दोहोंत फरक असतो. धक्क्याच्या भिंतीच्या पायावरील बलांच्या प्र या फलरूप भाराची दिशा तिरकस असते, हा तो फरक होय. धक्क्याच्या भिंतींना पुरेसे स्थैर्य प्राप्त व्हावे, म्हणून पुष्कळदा त्यांचा पाया, उभ्या स्थूणांचा एक संच आणि तिरकस स्थूणांचे दोन संच, अशा एकूण तीन संचांवर ठेवलेला असतो. तिरकस स्थूणांचे संच एकमेकांना विरुद्ध दिशांत कललेले असतात. आकृती ११४ अ पाहा. त्या स्थूणांवरील भार ठरविण्याची सर्वांत जुनी आणि सोपी पद्धत कुल्मानची पद्धत म्हणून प्रसिद्ध आहे. तिचे वर्णन लोहमेयरने केले आहे (ब्रेनेक-लोहमेयर १९३०). स्थूणांच्या

प्रत्येक संचाऐवजी आपण त्याच्या मध्यरेषेच्या ठिकाणी एकेक काल्पनिक स्थूणा नियुक्त करू. आकृती ११४ आ मध्ये या काल्पनिक स्थूणा अ, ब आणि क ह्या अक्षरांनी दाखविल्या आहेत. अ आणि ब या स्थूणांवर अनुक्रमे $भा_{अ}$ आणि $भा_{ब}$ असे अक्षीय दाब कारक आहेत आणि क या स्थूणेवर $भा_{क}$ हे अक्षीय कर्षण कारक आहे.



आकृती ११४ : सागरी धक्क्याच्या भिंतीखालील आधार-स्थूणांवरील भार ठरविण्याच्या पद्धती. (अ) ते (इ) कुल्मानप्रणीत पद्धत; (ई) आणि (उ) समलंबाकृतीवर आधारलेली पद्धत.

ब आणि क या रेषांचा फ हा संपात बिंदू आणि अ रेषा आणि बाह्य बल प्र ची कारक रेषा यांचा प हा संपातबिंदू, या दोन्ही संपातबिंदूंना जोडणाऱ्या रेषेवरुनच $भा_{ब}$ आणि $भा_{क}$ ह्या बलांच्या प्र' या फलरूप बलाची दिशा गेली पाहिजे. या गोष्टीवरुन आणि आकृती ११४ इ मध्ये काढलेल्या बलप्रतिमेच्या साहाय्याने $भा_{अ}$, $भा_{ब}$ आणि $भा_{क}$ हीं बले ठरविता येतात. प्रत्यक्षातील प्रत्येक स्थूणेवरील भार भा असेल, तर धक्क्याच्या एकांक लांबीमध्ये असलेल्या, प्रत्येक प्रकारच्या संचातील स्थूणांची संख्या खालीलप्रमाणे मांडता येईल:

$$छ_{अ} = \frac{भा_{अ}}{भा};\ छ_{ब} = \frac{भा_{ब}}{भा} \text{ आणि } छ_{क} = \frac{भा_{क}}{भा}$$

काल्पनिक स्थूणा दाखविणाऱ्या रेषेच्या एका बाजूस अर्ध्या आणि दुसऱ्या बाजूस अर्ध्या अशा प्रकारे, प्रत्येक प्रकारच्या संचातील स्थूणांची मांडणी प्रत्यक्षात केली जाते.

आकृती ११४ ई मध्ये दाखविलेल्या रचनेत स्थूणांच्या १ ते ५ अशा पाच रांगा आहेत. चौथ्या आणि पाचव्या रांगांतील स्थूणांचे माथे एकाच सरळ रेषेत आहेत. ही रेषा आकृतीमध्ये (४) या आकड्याने दाखविली आहे. अशा पद्धतीच्या पायातील स्थूणांवरील दाब ठरविण्याची एक पद्धत सिद्ध केलेली आहे. तिला समलंबपद्धत असे म्हणतात (वर्णनासाठी ब्रेनेक-लोहमेयर १९३० पाहा). प्र या फलरूप भाराच्या $प्र_{उ}$ या उभ्या घटकाऐवजी आपण $पफफ_{१}प_{१}$ या समलंबाने दाखविला जाणारा सलग भार नियुक्त करू. या आकृतीचे क्षेत्रफळ $प्र_{उ}$ या उभ्या घटकाइतके आहे आणि तिचा गुरुत्वमध्य $प्र_{उ}$ च्या कारक दिशेवर स्थित आहे. उभ्या दिशेतील समतोलाच्या लक्षणांची पूर्तता या सलग भाराने केली जाते. (१) ते (४) या स्थूणाशीर्षांच्या चार रांगातील $दा_{१}$ ते $दा_{४}$ हे उभे दाब आता आपण ठरवू. त्यासाठी असे गृहीत धरू की, समलंबाकृती भाराचा पफ हा तळ अलग अलग अशा तुकड्यांचा बनलेला आहे. हे तुकडे असे : प–२, (२) – (३) आणि (३) – फ. हे तुकडे आकृती ११४ ई मध्ये दाखविल्याप्रमाणे स्थूणांच्या माथ्यांवर ठेवलेले आहेत आणि (२) व (३) या ठिकाणी हे तुकडे परिसंधित केलेले आहेत.

अशा प्रकारे प्राप्त झालेले दाब म्हणजे धक्क्याच्या एकांक लांबीत असलेल्या स्थूणाशीर्षांच्या चार रांगांपैकी प्रत्येकीवर कारक असणारी उभी बले होत; प्र या बलाचा $प्र_{आ}$ हा आडवा घटक केवळ ३ ते ५ या तिरकस स्थूणांच्या द्वारे पेलला जातो. त्यांच्यावरील एकूण दाब आकृती ११४ उ मध्ये दाखविलेल्या बलप्रतिमेच्या साहाय्याने ठरविता येतो. या बलप्रतिमेच्या साहाय्याने मिळालेल्या भारास प्रत्येक स्थूणेवरील *भा* या भाराने भागले असता, धक्क्याच्या एकांक लांबीत, प्रत्येक ओळीत असणाऱ्या स्थूणांची संख्या मिळते.

$प्र_{उ}$ या उभ्या घटकाऐवजी $पफफ_{१}प_{१}$ (आकृती ११४ ई) असा समलंबाकृती भार गृहीत धरणे, तितकेसे तर्कशुद्ध नाही. कारण आकृतीचे क्षेत्रफळ $प्र_{उ}$ इतके असेल आणि तिचा गुरुत्वमध्य $प्र_{उ}$ च्या कारक दिशेवर स्थित असेल, तर दुसरी कोणत्याही आकाराची आकृती गृहीत धरली, तरीही तोच हेतू साध्य होऊ शकतो. अग्राधारी स्थूणांचा आधार दिलेल्या, धक्क्याच्या भिंतीच्या या वैशिष्ट्यपूर्ण उदाहरणामधील तर्कशुद्ध नसलेला हा भाग काढून टाकण्यासाठी वेस्टरगार्डने (१९१७) या विश्लेषणात एक अट प्रविष्ट केली; ती म्हणजे स्थूणाशीर्षांचे विचलन आधार दिलेल्या वस्तूच्या ताठपणास सुसंवादी असेच असले पाहिजे, ही होय. या गृहीतावर बसविलेल्या सध्याच्या अतिशय सविस्तर स्वरूपाच्या कृतीस नोकेंटवेडची पद्धत असे म्हणतात. ही पद्धत पुढील गृहीतांवर आधारित आहे : (१) आधारित वास्तू आणि स्थूणांच्या अग्रांचा आधार हीं दोन्हीही पूर्णत्वाने ताठ आहेत. (२) स्थूणा बांधण्यासाठी वापरलेल्या सामग्रीचे वर्तन तंतोतंतपणे हूकच्या नियमानुसार होते. (३) स्थूणांच्या भोवती असलेल्या मृत्तिकेच्या पार्श्वीय विरूपतेस होणारा विरोध दुर्लक्षिला, तरी चालते. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता येईल की, धक्क्याची भिंत म्हणजे ताठ वस्तू असून तिला आधार देणाऱ्या स्थूणा म्हणजे ताठ आधारावर टेकलेले आणि पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेले

स्तंभ आहेत, असे या पद्धतीत गृहीत धरले जाते आणि स्थूणांभोवती असलेल्या मृत्तिकेचे अस्तित्व आणि स्थूणांच्या टोकांना आधार देणाऱ्या मृत्तिकेची विरूपता यांकडे दुर्लक्ष केले जाते. हीं गृहीते जर खरोखरच समर्थनीय असतील, तर स्थैतिक दृष्ट्या अनिश्चेय असलेल्या वास्तूंच्या सिद्धांतात वापरल्या जाणाऱ्या पद्धतींचा अवलंब करून स्थूणांवरील दाब गणितसिद्ध करता येईल. उपर्युक्त रचनेला विरूपता येत असताना स्थूणाशीर्षांची सापेक्ष स्थाने किंवा स्थूणांच्या टोकांची स्थाने ह्यांपैकी काहीच बदलता कामा नये; या लक्षणांची पूर्तता स्थैतिक दृष्ट्या अनिश्चेय असलेल्या गोष्टींनी केली पाहिजे. स्थूणांचे एकीकडचे टोक किंवा दोन्ही टोके बद्ध असतील, तर समस्येच्या उत्तरामध्ये पुढील लक्षणाचीही पूर्तता झाली पाहिजे. स्थूणांच्या मध्यरेषेला त्यांच्या बद्ध टोकांजवळ काढलेल्या स्पर्शरेषांची सापेक्ष स्थाने न बदलता तींच राहिली पाहिजेत, (नोकेंटवेड १९२८), हे ते लक्षण होय.

स्थूणांच्या प्रतिक्रिया ठरविण्याच्या गणितात प्रविष्ट होणाऱ्या व स्थैतिक दृष्ट्या अनिश्चेय असलेल्या अनेक पदांमुळे हे गणित काहीसे क्लिष्ट होते. म्हणून समस्येच्या स्वरूपाशी सुसंगत राहून शक्य होईल तितका सोपेपणा या कृतीत आणण्याचे बरेच प्रयत्न झालेले आहेत. पी. हेट्टे याने (१९२९) ही समस्या सोडविण्यासाठी प्रभावरेषांच्या पद्धतीचा अवलंब केला आणि ए. ए. लाबुटीन याने (१९३३) एक आलेखात्मक पद्धत शोधून काढली. ही समस्या सोडविण्याच्या तंत्राची सद्यःस्थिती स्पष्ट करणारा, एक सारांशवजा ग्रंथ इंग्लिश भाषेत प्रकाशित झालेला आहे (व्हेटेर १९३९). या सिद्धांतातील मूलभूत गृहीते, निदान स्थूलमानाने का होईना, प्रत्ययास येतील अशा क्षेत्रीय परिस्थितीची कल्पना करणे काहीसे कठीणच आहे. जरी स्थूणा द्रवसदृश चिखलातून खडकापर्यंत ठोकलेल्या असतील, तरी या गणिताची फलिते अतिशय चुकीची असण्याचा संभव आहे; कारण या सिद्धांतात स्थूणांची टोके आणि खडक यांच्या स्पर्शबिंदूजवळील विरूपतेकडे दुर्लक्ष केले जाते. स्थूणांची अक्षीय विरूपता, त्यांच्या लांबीच्या सरळ प्रमाणात वाढत जाते, या गृहीताला उपर्युक्त विरूपतेमुळे बाधा येते. एवंच, या सिद्धांताचे व्यावहारिक मूल्य तसे संशयास्पद आहे असेच म्हटले पाहिजे.

प्रकरण १७

अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशींविषयीचे सिद्धांत

१३२. स्थितिस्थापक आणि नम्य समतोल : नम्य विसर्पणरूपी उच्छेदाच्या बाबतीत (द्वितीय खंड पाहा) एखाद्या मृत्तिकाराशीचा सुरक्षिततांक ३ हून अधिक मूल्याचा असेल, तर मृत्तिकेतील प्रतिबल-परिस्थिती, ती मृत्तिका पूर्णपणे स्थितिस्थापक आहे, असे गृहीत धरून मिळणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीशी जवळपास सारखी असणे संभवनीय असते. म्हणून सौम्य प्रतिबलांच्या प्रभावाखाली असलेल्या मृत्तिकाराशीतील प्रतिबल-परिस्थिती स्थितिस्थापकत्व-सिद्धान्तानुसार अनुमानिता येते. अशा प्रकारे मिळणाऱ्या फलितांत प्रविष्ट होणारी चूक किती मोठी आहे, हे प्रत्यक्षातील प्रतिबलविकृति-संबंध हूकच्या एतद्विषयक नियमाहून किती प्रमाणात वेगळा आहे, त्यावर मुख्यतः अवलंबून असते. हे वेगळेपण, नम्य समतोलाची अवस्था येऊ लागेल, तसे त्वरेने वाढते. हे वेगळेपण महत्त्वाचे नाही अशी अपेक्षा असेल, तर त्या ठिकाणी या प्रकरणात वर्णिल्या-प्रमाणे स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांताचा वापर करता येतो. जर ते महत्त्वाचे ठरणार असेल, तर प्रकरण ५ ते ११ यांमध्ये वर्णिल्याप्रमाणे नम्यता-सिद्धांताचा अवलंब केला पाहिजे.

पुढील उदाहरणांवरून हे विधान स्पष्ट व्हावे. खोदाईला दिलेल्या आधारकाष्ठांवरील वालुकेचा दाब हा स्थूलमानाने उद्युक्त मृत्तिकादाबाइतका असतो, असा अनुभव आहे. ही वस्तुस्थिती असे दर्शविते की, दरडीमागची वालुका जवळजवळ नम्य समतोलावस्थेत असावी, मग लाकडी धिऱ्यांच्या दमनजन्य उच्छेदाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांकाचे मूल्य काहीही असो. नम्य समतोल अवस्थेच्या जवळपास असणारी प्रतिबल-परिस्थिती अस्तित्वात असल्यामुळे, अशा उदाहरणात स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांताचा आधार घेऊन गणित मांडणे काटेकोरपणे विचार करता वर्ज्य आहे; याउलट, तेथे नम्यता-सिद्धांताचा अवलंब केला असता होणारी चूक फारशी मोठी नसते. या कारणास्तव मृत्तिकादाब-विषयक सगळे संशोधन नम्यता सिद्धांतावर आधारित आहे. धरणांत वापरलेल्या मृत्तिकेतील प्रतिबले किंवा दरडींमागील मृत्तिकेतील प्रतिबलेसुद्धा साधारणपणे हूकचा नियम स्थूलमानानेही लागू होणार नाही अशा कक्षेतील असतात. म्हणून उतारविषयक समस्या देखील प्रकरण ९ मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे, नम्यता-सिद्धांताच्या आधारे सोडविणे समर्थनीय ठरते. याउलट, लादीपद्धतीच्या पायाखाली वाळूचा थर आणि त्याखाली चिक्कण मृत्तिकेचे थर असल्यास या थरांतील उभ्या दाबाची तीव्रता आणि त्याचे वितरण ठरविण्यासाठी स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांताचा वापर यशस्वीपणे करता येतो; कारण विशिष्ट खोलीच्या पलीकडील मृत्तिकेची अवस्था नम्य समतोलाच्या अवस्थेपेक्षा फार वेगळी असते.

१३३. मूलभूत गृहीते : या ग्रंथात स्वीकारलेल्या संकेतानुसार प्रतिबल ही संज्ञा एकांक क्षेत्रावरील बल या अर्थानेच केवळ वापरली जाईल. दमनकारी प्रतिबले धन आणि ताणकारी प्रतिबले ऋण मानली जातील. विकृती म्हणजे विवक्षित दिशेत होणारा एकांक लांबीतील बदल होय. ऱ्हस्वत्व किंवा आकुंचन निर्मिणारी विकृती धन आणि दीर्घत्व देणारी विकृती ऋण समजली जाईल. प्रतिबलांचा ऊहापोह करणाऱ्या प्रत्येक सिद्धांतात एक गोष्ट गृहीत धरलेली असते की, प्रतिबल ज्या पदार्थावर कारक असेल, तो पदार्थ समदैशिक आणि समांग आहे किंवा या आदर्श लक्षणांपेक्षा तो जर वेगळा असेल, तर ते वेगळेपण सोप्या समीकरणांनी व्यक्त करता येईल असे आहे. स्थितिस्थापक वर्तनाच्या संबंधात एखाद्या घन पदार्थात समदैशिकत्व आहे' असे म्हटले जाते, तेव्हा त्या संपूर्ण घन पदार्थात, तसेच त्यातील प्रत्येक बिंदुस्थानी प्रत्येक दिशेत, अगदी सारखे स्थितिस्थापक गुणधर्म अभिप्रेत असतात आणि त्यात समांगता आहे, असे म्हटले जाते, तेव्हा त्यातील प्रत्येक ठिकाणी, सारख्या दिशांमध्ये सारखे गुणधर्म आहेत, असा अर्थ अभिप्रेत असतो. म्हणून समांग पदार्थ हा समदैशिक असेलच असे नाही. विदैशिक या संज्ञेने समदैशिकतेपासून वेगळेपण, मग ते कोणत्याही प्रकारचे असो, दर्शविले जाते. विदैशिक पदार्थाचे स्थितिस्थापकत्वविषयक स्थिरांक, एकमेकींस लंबरूप असणाऱ्या तीन पातळ्या सममात्रतेच्या पातळ्या ठराव्यात असे असतील, तर त्या पदार्थास लंबदैशिक म्हणतात. लंबदैशिक पदार्थांचा विचार करताना साधारणपणे असे गृहीत धरले जाते की, एक पातळी आडवी आहे आणि दोन उभ्या पातळ्यांच्या संदर्भातील स्थितिस्थापकत्वाचे गुणधर्म समान आहेत.

पुढील परिच्छेदांत समाविष्ट केलेल्या बऱ्याचशा सिद्धांतांत मृत्तिका, समदैशिकत्व आणि समांगत्व अशा दोन्ही गुणांनी युक्त आहे, असे गृहीत धरले आहे. या गृहीताऐवजी काही वेगळे गृहीत धरले असेल, तर ते नेहमी स्पष्टपणे उल्लेखिले जाईल. काही थोडे अपवाद सोडता, या सिद्धांतांत असेही गृहीत धरले आहे की, मृत्तिकेचे वर्तन तंतोतंतपणे हूकच्या नियमानुसार होते. या नियमानुसार एकदिक् प्रतिबल ७ आणि तदनुषंगिक एकदिक् विकृती ठ यांचे गुणोत्तर स्थिरमूल्य असते; म्हणजेच

$$\frac{७}{ठ} = यं \text{ (ग्रॅम सेंमी.}^{-२}\text{)} \qquad [१]$$

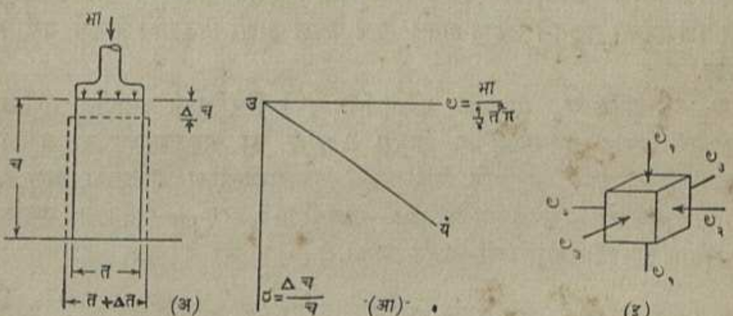
आणि त्यास **यंगचा मापांक** किंवा **स्थितिस्थापन-मापांक** म्हणतात. एकदिक् धन प्रतिबलाने निर्मिलेली विकृती, आकृती ११५ अ मध्ये दाखविलेल्या साध्या दमन प्रयोगाने अभ्यासता येते. तेथे नमुन्याच्या माथ्यावर एका पोलादी चकतीच्या द्वारे *भा* हा भार लावला आहे. नमुन्याचा तळ आणि माथा हे दोन्हीही स्नेहांजनलिप्त आहेत. उभी विकृती ठ आणि ७ हे प्रतिबल, यांतील संबंध दाखविणारा आलेख काढला असता, (आकृती ११५ आ) पूर्णतया स्थितिस्थापक असलेल्या पदार्थाच्या बाबतीत

आपल्याला उयं ही सरळ रेषा प्राप्त होते.

उभ्या दाबाने निर्मिलेली उभी धन विकृती आडव्या दिशेत ऋण विकृती घडवून आणते. तिचे मूल्य आकृतीत $ठ_{आ} = \frac{\Delta त}{त}$ आहे. $ठ_{आ}$ आणि $ठ$ या विकृतींमधील गुणोत्तराचे मूल्य पुढे दिले आहे.

$$पॉ = \frac{ठ_{आ}}{ठ} = \frac{ठ_{आ}}{ए} \cdot यं \qquad [२]$$

या गुणोत्तरास पॉयसनचे गुणोत्तर असे म्हणतात आणि १/पॉ या त्याच्या व्युत्क्रम पदाला पॉयसनचा अंक म्हणतात. पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या पदार्थाच्या बाबतीत पॉ स्थिरमूल्य असतो. एखाद्या उदाहरणात समी. १ आणि २ हीं दोन्हीहीं लागू असतील, तर जोडीच्या प्रतिबलांमुळे निर्माण होणारी विकृती त्यांपैकी प्रत्येक प्रतिबलामुळे स्वतंत्रपणे निर्माण होणाऱ्या विकृतींच्या बेरजेइतकी असते. या संबंधास **अधिमेळन-नियम** असे म्हणतात. एखाद्या बिंदूच्या स्थानी असलेली जोड प्रतिबले एकमेकांस लंबरूप असणाऱ्या $ए_1$, $ए_2$ आणि $ए_3$ या तीन प्रधान प्रतिबलांच्या स्वरूपात मांडता येतात (परिच्छेद ७ पाहा). उपर्युक्त नियमानुसार विवक्षित दिशेतील विकृती म्हणजे या प्रधान प्रतिबलांपैकी प्रत्येकामुळे स्वतंत्रपणे त्या दिशेत निर्माण होणाऱ्या विकृतींची बेरीज असते.



आकृती ११५ : (अ) पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या पदार्थाच्या दंडगोल नमुन्यावर केलेला पार्श्वबंधनरहित दमन-प्रयोग. (आ) प्रयोगाचे फलित. (इ) त्रिमितींतील प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा.

आकृती ११५ इ मध्ये दाखविलेल्या समपार्श्वाचे घनफळ श आहे. त्याच्या बाजूंवर $ए_1$, $ए_2$ आणि $ए_3$ हीं प्रधान प्रतिबले कारक आहेत. हीं प्रतिबले सममूल्य म्हणजेच

$$ए_1 = ए_2 = ए_3 = ए_{ज}$$

अशी असतील, तर या प्रत्येक प्रतिबलाच्या दिशेतील विकृती पुढीलप्रमाणे असेल :

$$\frac{ठ_{ज}}{यं} - २ पॉ \frac{ठ_{ज}}{यं} = \frac{ठ_{ज}}{यं}(१ - २ पॉ)$$

म्हणून $ठ_{ज}$ या सर्व बाजूंनी लावलेल्या दाबामुळे या समपार्श्वाच्या एकांक घनफळागणिक होणाऱ्या बदलाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\frac{\Delta श}{श} = \frac{३ ठ_{ज}}{यं}(१ - २ पॉ)$$

$पॉ = ०{\cdot}५$ असल्यास $\Delta श/श$ या अवकाश-बदलाचे मूल्य शून्य होईल. म्हणून ज्यांच्या बाबतीत $पॉ = ०{\cdot}५$ आहे, असे स्थितिस्थापक, घन पदार्थ अदमनीय असतात.

प्रतिबलाचे मूल्य लहान असेल, तर दृढ मृत्तिका आणि कॉंक्रीट किंवा वालुकाश्म यांसारख्या दाणेदार घन पदार्थांच्या बाबतीत पॉयसनच्या गुणोत्तराचे मूल्य सुमारे ०·२ इतके लहान असते आणि प्रतिबलांचे मूल्य अतिशय मोठे झाल्यास ते ०·५ पेक्षाही अधिक होते. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता येईल की, या वर्गातील पदार्थ लहान भाराखाली आकुंचन पावतात; परंतु उच्छेदावस्था सन्निध आली असता, ते प्रसरण पावतात. तरीही मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वाविषयीच्या सर्व सिद्धांतांतून पॉयसनचे गुणोत्तर स्थिरमूल्य असते, असे गृहीत धरले जाते. म्हणून प्रतिबलांचे मूल्य उच्छेद-कारी प्रतिबलांच्या तुलनेने लहान असेल, तरच केवळ अशा सिद्धांतांचे निष्कर्ष यथार्थ ठरतात.

$ठ_१$, $ठ_२$ आणि $ठ_३$ या प्रधान प्रतिबलांची मूल्ये निरनिराळी असतील, तरीही त्यांच्यामुळे एकांक घनफळागणिक होणारा $\Delta श/श$ हा अवकाशबदल या प्रधान प्रतिबलांपैकी प्रत्येकाने स्वतंत्रपणे निर्मिलेल्या अवकाशबदलांच्या बेरजेइतका असतो. असतो. कोणतेही एक प्रधान प्रतिबल—उदाहरणार्थ, $ठ_१$—स्वतंत्रपणे एकांक अवकाशागणिक पुढीलप्रमाणे घट घडवून आणते.

$$\frac{\Delta श_१}{श} = \frac{ठ_१}{यं} - २ पॉ \frac{ठ_१}{यं} = \frac{ठ_१}{यं}(१ - २ पॉ) \qquad [३]$$

म्हणून तीन निरनिराळ्या मूल्यांची प्रधान प्रतिबले एकाच वेळी कारक झाली असता, निर्माण होणारा अवकाशबदल पुढीलप्रमाणे असतो :

$$\frac{\Delta श}{श} = \frac{१ - २ पॉ}{यं}(ठ_१ + ठ_२ + ठ_३) \qquad [४]$$

$\Delta श/श$ या पदास कोणतेही एक मूल्य दिल्यास समीकरण ४ हे एक पातळी दाखविणारे समीकरण ठरते. ही पातळी तिन्ही अक्षांना उ या उगमबिंदूपासून सारख्याच अंतरावर

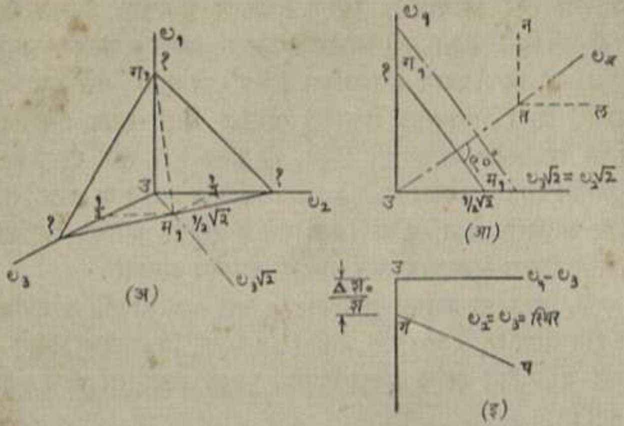
छेदते (आकृती ११६ अ पाहा). म्हणून समीकरण ४ मधील $\Delta श/श$ या पदास निरनिराळी मूल्ये दिली असता, जीं समीकरणे मिळतात, त्यांनी समांतर पातळ्यांचा एक संचच दिला जातो. तिन्ही प्रधान प्रतिबलांच्या बेरजेचे मूल्य वाढते, तसे उगमबिंदू आणि या पातळ्यांचे तिन्ही अक्षांवरील छेदनबिंदू यांमधील अंतर सरळ प्रमाणात वाढत जाते. अशा पातळीवरील कोणत्याही बिंदूने, जो प्रतिबलांचा संच दाखविला जातो, त्यामुळे निर्माण होणारा अवकाशबदल आणि उगमबिंदू उ आणि या पातळीचा, कोणत्याही एका अक्षावरील छेदनबिंदू यांतील अंतराने जे एकदिक् प्रतिबल दाखविले जावे, त्याने निर्माण होणारा अवकाशबदल हे दोन्हीही सारखेच असतात.

$ए_{२} = ए_{३}$ असेल, तर प्रतिबल-परिस्थिती $ए_{१}$ च्या अक्षाभोवती वर्तुळात्मक रीत्या सममात्र होते आणि $ए_{१}$ हे अक्षदिक् आणि $ए_{२} = ए_{३}$ हीं त्रिज्यादिक् प्रतिबले ठरतात. या प्रतिबल-परिस्थितीने एकांक अवकाशागणिक घडवून आणलेला बदल पुढीलप्रमाणे मांडता येतो :

$$\frac{\Delta श}{श} = \frac{१ - २पॉ}{यं} \cdot (ए_{१} + २ए_{३}) \qquad [५]$$

आकृती ११६ अ वरून असे दिसते की, $\frac{१}{३}ए_{१}$ तीव्रतेचे त्रिज्यादिक् प्रतिबल किंवा $ए_{१}$ तीव्रतेचे अक्षदिक् प्रतिबल यामुळे निर्माण होणारे अवकाशबदल सारखेच असतात. वर्तुळात्मक रीत्या सममात्र असलेल्या प्रतिबलांमुळे होणारे अवकाशबदल दाखविणारे सगळे बिंदू $ए_{१}$ च्या अक्षातून जाणाऱ्या एका पातळीवर असतात व ही पातळी दुसऱ्या दोन अक्षांनी केलेला कोन दुभागते. म्हणून अशा प्रतिबलांतील बदलामुळे होणारा अवकाशबदल आपण द्विमिति-आकृतीने दाखवू शकतो. आकृती ११६ आ पाहा. आकृती ११६ अ मधील $उग_{१}म_{१}$ ही पातळी फिरवून कागदाच्या पातळीत आणल्याने ही आकृती प्राप्त होते (रेन्झूल्फिक १९३७). या पातळीत $ए_{१}$ ची मूल्ये उभ्या अक्षावर दाखविली जातात. तसेच $ए_{३}\sqrt{२}$ ची मूल्ये आडव्या अक्षावर दाखविली जातात. $ग_{१}म_{१}$ (आकृती ११६ आ) या रेषेला समांतर असणाऱ्या कोणत्याही एका रेषेवर असणारे दोन बिंदू घेतले असता, त्यांच्या सहनिर्देशकांतील फरकाने जो प्रतिबलांतील बदल व्यक्त होतो, त्यामुळे होणारा अवकाशबदल शून्य असतो. भूमिति-नियमांनुसार $ग_{१}म_{१}$ या रेषेला लंबरूप असणाऱ्या $उए_{ज}$ या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू $ए_{१} = ए_{२} = ए_{३} = ए_{ज}$ ही प्रतिबल-परिस्थिती दाखवितो.

वर्तुळात्मक सममात्रता असलेल्या प्रतिबल-परिस्थितीमुळे होणारा अवकाशबदल दाखविण्याची दुसरी एक आलेखात्मक पद्धत आकृती ११६ इ मध्ये दाखविली आहे. (कॅसाग्रांड १९३६). या रेखाकृतीत भुजा $ए_{१} - ए_{३}$ हा फरक दाखवितात आणि कोटी तदनुषंगिक अवकाशबदल दाखवितात. $ए_{३}$ चे मूल्य मात्र स्थिर ठेवलेले आहे. मूळच्या शून्य मूल्यापासून सर्वच प्रधान प्रतिबले $ए_{१०} = ए_{२} = ए_{३}$ या मूल्याप्रत वाढविली



आकृती ११६ : (अ) पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या पदार्थातील प्रधान प्रतिबले आणि एकांक अवकाशबदल यांमधील संबंध दाखविणारी रेखाकृती. (आ) आणि (इ) दोन प्रधान प्रतिबले सममूल्य असली, तर हाच संबंध व्यक्त करण्याच्या सोप्या पद्धती.

असता, एकांक अवकाशागणिक होणारी अवकाशांतील घट पुढीलप्रमाणे असते :

$$\frac{\Delta श_{०}}{श} = \frac{१-२पॉ}{यं} \cdot ३ए_{१०} \qquad [६]$$

$ए_{२} = ए_{३}$ हे मूल्य स्थिर ठेवून $ए_{१}$ मध्ये यानंतर वाढ केली, तर $\frac{\Delta श_{०}}{श}$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे होते :

$$\frac{\Delta श}{श} = \frac{\Delta श_{०}}{श} + (१-२पॉ)\,\frac{ए_{१}-ए_{३}}{यं}$$

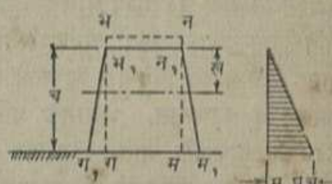
आकृती ११६ इ मध्ये हा संबंध *गघ* या सरळ रेषेने दाखविला आहे. ही रेषा उभ्या अक्षास उगमबिंदूच्या खाली $\Delta श_{०}/श$ या अंतरावर छेदते. $ए_{३}$ या त्रिज्यादिक् बलाचे मूल्य स्थिर राहून $ए_{१}$ या अक्षदिक् प्रतिबलात झालेली वाढ आकृती ११६ आ मध्ये *तन* या उभ्या रेषेने दाखविली आहे आणि $ए_{१}$ चे मूल्य स्थिर राहून $ए_{२} = ए_{३}$ मध्ये झालेली वाढ *तल* या आडव्या रेषेने दाखविली आहे. त्रिदिक् दमनप्रयोगात (परिच्छेद ६ पाहा) या दोन प्रकारांपैकी कोणत्याही प्रकारचा बदल निर्माण करता येतो.

प्रत्यक्षातील मृत्तिकांवर केलेल्या त्रिदिक् दमन-प्रयोगांचे निष्कर्ष आकृती ११६ आ आणि इ यांमधील रेखाकृतींसारख्या पद्धतीनें मांडले, तर एका दृष्टिक्षेपात मृत्तिकेचे

गुणधर्म आदर्श, स्थितिस्थापक पदार्थापेक्षा किती प्रमाणात वेगळे आहेत, हे आपल्या ध्यानात येतें.

१३४. पार्श्वीय प्रतिबंध असलेल्या समपार्श्वात स्वतःच्या वजनामुळे निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती : *घ* घनता असलेला *गमभन* हा समपार्श्व (आकृती ११७) आपण पूर्णतया घर्षणरहित तळावर ठेवू. त्याच्या वजनामुळे जो दाब निर्माण होतो त्यामुळे केवळ उभ्या दिशेत दमन होते असे नव्हे, तर पार्श्वीय प्रसरणही होते. समपार्श्व वजनरहित असता, तर मात्र त्याचा आकार *गमभन* या आयताने दाखविल्यासारखा राहिला असता. समपार्श्वाच्या माथ्यापासून *ख* खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असेल :

$$ल = घख$$



आकृती ११७ : स्थितिस्थापक पदार्थाच्या समपार्श्व खंडाला स्वतःच्या वजनामुळे येणारे विरूपत्व. पार्श्वीय बंधन निर्माण करणाऱ्या घर्षणरहित, उभ्या भिंतीवर येणारा आडवा दाब उजव्या आकृतीत दाखविला आहे.

समीकरण १३३ (२) वरून समपार्श्वाच्या दर एकांक रुंदीतील पार्श्वीय प्रसरण पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$ठ_{आ} = पॉ\,\frac{ल}{यं} = \frac{पॉ\,घ}{यं} \cdot ख \qquad [१]$$

आकृती ११७ मध्ये $भ_१ग_१$ आणि $न_१म_१$ या रेषांनी दाखविल्याप्रमाणे हे प्रसरण खोलीच्या सरळ प्रमाणात वाढत जाते.

पूर्णतया घर्षणरहित, उभ्या भिंती किंवा समपार्श्वातील पदार्थाचाच परंतु घर्षणयुक्त तळावर ठेवलेला व चहूबाजूंनी वेढणारा थर, यांच्याद्वारे हा समपार्श्व पार्श्वीयदृष्ट्या प्रतिबंधित केला, तर पार्श्वीय प्रसरण होऊ शकत नाही आणि परिणामी समपार्श्वाच्या प्रत्येक उभ्या बाजूवर आडवा दाब कारक होतो. *ख* या खोलीवर त्याचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य $ल_३$ गृहीत धरू. हे मूल्य समपार्श्वाचे *ख* खोलीवरील पार्श्वीय प्रसरण थोपवून शून्यमूल्य करण्यास पुरेसे असले पाहिजे. या दाबामुळे प्रत्येक आडव्या दिशेत निर्मिलेली विकृती पुढीलप्रमाणे असेल :

$$ठ' = \frac{ल_३}{यं} - पॉ\,\frac{ल_३}{यं} = \frac{ल_३}{यं}(१ - पॉ)$$

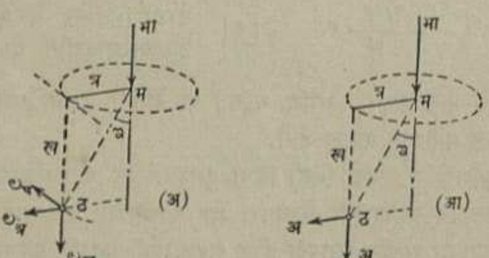
$ठ' = ठ_{आ}$ (समी. १) नियुक्त केल्यास, आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$ल_३ = खघ \cdot \frac{पॉ}{१ - पॉ} = घखमृ_० \qquad [२]$$

येथे
$$मृ_{०} = \frac{पॉ}{१ - पॉ} \qquad [३]$$

आहे आणि तो मृत्तिकादाब-सिद्धांतात येणाऱ्या स्तब्धावस्थेतील मृत्तिकादाब-गुणांकासारखा (समी. १० (१)) आहे. व्यवहारतः अदमनीय असणाऱ्या पदार्थांच्या बाबतीत *पॉ* चे मूल्य ०·५ असते आणि त्या परिस्थितीत $मृ_{०} = १$ असतो.

१३'५. अपारप्राय घनराशीच्या क्षितिजसमांतर पृष्ठभागावरील बिंदु-भाराने निर्माण होणारी प्रतिबले आणि विस्थापने : घन राशीच्या पृष्ठभागाच्या अति लहान क्षेत्रावर किंवा त्या राशीच्या अंतर्भागातील लहानशा पोकळीत कारक असणाऱ्या बाह्य बलास बिंदुभार म्हणतात व ज्या ठिकाणी तो कारक होतो, त्या स्थानास कारक-बिंदू म्हणतात. भारामुळे प्रतिबल-परिस्थितीत निर्माण होणाऱ्या विक्षेपाचे केंद्र त्याने दाखविले जाते. अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठावर कारक होणाऱ्या तिरक्या बिंदुभाराचा उभा घटक जी प्रतिबल-परिस्थिती निर्माण करतो, ती कारकबिंदूतून जाणाऱ्या उभ्या रेषेभोवती वर्तुळात्मक रीत्या सममात्र असते; आणि आडव्या घटकामुळे, जी प्रतिबल-परिस्थिती निर्माण होते, ती त्या घटकाच्या कारक-रेषेतून जाणाऱ्या उभ्या पातळीच्या संदर्भात सममात्र असते.



आकृती ११८ : (अ) *भा* या बिंदुभारामुळे अपारप्राय घनराशीच्या अंतरंगात ठ या ठिकाणी निर्माण होणारी प्रतिबले. (आ) त्याच ठिकाणची विस्थापने.

ज्या वेळी एखाद्या अपारप्राय घनराशीवर लंबरूप बिंदुभार कारक होतो, त्यावेळी निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती व्यक्त करण्यास अगदी सोपी, परंतु तितकीच महत्त्वाची असते (आकृती ११८ अ). समजा,

भा : भार;

त्र : पृष्ठाखाली असलेल्या व यदृच्छया निवडलेल्या ठ या बिंदूचे *भा* च्या *म* या कारकबिंदूतून जाणाऱ्या उभ्या अक्षापासून मोजलेले आडवे त्रिज्यात्मक अंतर;

ऊ : मठ हा सदिश आणि कारकबिंदूतून काढलेला उभा अक्ष यांतील कोन;
ख : पृष्ठभागापासून खाली मोजलेली ठ बिंदूची खोली;
$\text{ए}_{\text{ख}}, \text{ए}_{\text{त्र}}, \text{ए}_{\text{प}}$: अनुक्रमे उभे प्रतिबल, आडवे त्रिज्यादिक् प्रतिबल आणि आडवे परिधीय प्रतिबल; सर्व प्रतिबले लंबदिक्;
$\text{ड}_{\text{त्रख}}$: त्र आणि ख यांच्या दिशांतील कार्तनिक प्रतिबल आणि
पॉ : घनराशीच्या बाबतीतील पॉयसनचे गुणोत्तर

आहेत. प्रतिबल-परिस्थिती म मधून जाणाऱ्या उभ्या अक्षाभोवती सममात्र असल्यामुळे उभ्या, त्रिज्यादिक् पातळ्यांवर कार्तनिक प्रतिबले शून्यमूल्य आहेत. सीमालक्षणांची काटेकोरपणे पूर्ती करणाऱ्या प्रतिबलविषयक फलनाचा अवलंब करून इतर प्रतिबलांची मूल्ये गणितसिद्ध केलेली आहेत (बॉसिनेस्क, १८८५). हीं प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतात :

$$\text{ए}_{\text{ख}} = \frac{\text{३भा}}{\text{२}\pi\text{ख}^{\text{२}}}\,\text{कोज्या}^{\text{५}}\,\text{ऊ} \qquad [\text{१अ}]$$

$$\text{ए}_{\text{त्र}} = \frac{\text{भा}}{\text{२}\pi\text{ख}^{\text{२}}}\left[\text{३ कोज्या}^{\text{३}}\,\text{ऊ ज्या}^{\text{२}}\,\text{ऊ} - (\text{१} - \text{२पॉ})\,\frac{\text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{ऊ}}{\text{१} + \text{कोज्या ऊ}}\right] \qquad [\text{१आ}]$$

$$\text{ए}_{\text{प}} = -(\text{१} - \text{२पॉ})\,\frac{\text{भा}}{\text{२}\pi\text{ख}^{\text{२}}}\left[\text{कोज्या}^{\text{३}}\,\text{ऊ} - \frac{\text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{ऊ}}{\text{१} + \text{कोज्या ऊ}}\right] \qquad [\text{१इ}]$$

$$\text{ड}_{\text{त्रख}} = \frac{\text{३भा}}{\text{२}\pi\text{ख}^{\text{२}}}\,.\,\text{कोज्या}^{\text{४}}\,\text{ऊ ज्या ऊ} \qquad [\text{ई१}]$$

हीं समीकरणे बॉसिनेस्कची समीकरणे म्हणून प्रसिद्ध आहेत. पॉ चे मूल्य ०·५ पेक्षा कमी असते, तेव्हा $\text{ए}_{\text{प}}$ हे परिधीय प्रतिबल ऋण असते. येथे हे लक्षात येईल की, $\text{ए}_{\text{ख}}$ हेच एक लंबरूप उभे प्रतिबल असे आहे की, जे पॉयसन-गुणोत्तरावर अवलंबून नाही. या आणि पुढच्या सर्व परिच्छेदांतून स्थितिस्थापक पदार्थाची घनता शून्य गृहीत धरलेली आहे. त्यामुळे वरील गणिताने केवळ पृष्ठीय भारामुळे निर्मिलेली प्रतिबले प्राप्त होतील. घ घनता असलेल्या स्थितिस्थापक पदार्थांतील एकूण प्रतिबले मिळविण्यासाठी भारामुळे निर्माण झालेली प्रतिबले आणि त्या पदार्थाच्या वजनामुळे निर्माण झालेली प्रतिबले यांचे मेलन केले पाहिजे. हीं प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतात :

$$\text{ए}_{\text{ख}} = \text{घ}\cdot\text{ख} \qquad [\text{२ अ}]$$

$$\text{ए}_{\text{त्र}} = \text{ए}_{\text{प}} = \text{मृ}_{\text{०}}\,\text{घख} \qquad [\text{२ आ}]$$

आणि

$$\text{ड}_{\text{त्रख}} = \text{०} \qquad [\text{२ इ}]$$

येथे मृ० म्हणजे स्तब्ध मृत्तिकादाबाच्या गुणांकासारखा एक गुणांक आहे.

भा या बिंदुभाराने निर्माण झालेली प्रधान प्रतिबले समी. १च्या साहाय्याने गणितसिद्ध केल्यास आपणांस असे आढळते की, घनराशीतील कोणत्याही ठिकाणच्या महत्तम प्रधान प्रतिबलाची दिशा या राशीच्या समतल पृष्ठभागास *म* या कारक-बिंदूच्या लगतच्या परिसरात छेदते (आकृती ११८ अ) आणि $ऌ_2$ आणि $ऌ_3$ हीं इतर दोन प्रधान प्रतिबले अगदी अल्पमूल्य असतात. पॉ = ०.५ असल्यास $ऌ_2 = ऌ_3 = ०$ असतात आणि $ऌ_1$ या महत्तम प्रधान प्रतिबलाची दिशा *म* या बिंदूतून जाते व त्याची तीव्रता पुढीलप्रमाणे असते :

$$ऌ_1 = \frac{३}{२}\frac{भा}{\pi ख^2} कोज्या^3 ढ \qquad [२]$$

याचा अर्थ असा की, पॉ = ०.५ असल्यास *भा* या भारामुळे निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती एकदिक् असते.

घनराशीच्या समतल पृष्ठावरील एखाद्या बिंदुस्थानी आडवा बिंदुभार कारक असेल, तर त्यामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले देणारी समीकरणे सेरुटी याने सिद्ध केली आहेत (१८८२, लव्हने उद्धृत केलेली, १९३४). तीं समीकरणे, उपर्युक्त समी. १ इतकी सोपी नाहीत. समतल पृष्ठभागाच्या खाली असलेल्या, एखाद्या बिंदुस्थानी कारक असलेल्या उभ्या आणि आडव्या बलांमुळे निर्माण होणारी प्रतिबले व्यक्त करणारी समीकरणे तर त्यांहूनही क्लिष्ट आहेत (मिंडलिन १९३६). व्यावहारिक समस्या सोडविण्यासाठी हीं समीकरणे वापरायची असतील, तर अचूकपणा थोडासा बाजूला ठेवून, त्यांना सुबोध रूप द्यावे लागते.

खोली जशी वाढत जाईल, त्याप्रमाणे मिंडलिनच्या समीकरणाने व्यक्त होणारी प्रतिबल-परिस्थिती आणि अपार घनराशीच्या अंतर्भागातील बिंदुस्थानी कारक असणाऱ्या एखाद्या बलाने निर्माण केलेली परिस्थिती, या दोन्ही सारख्या होऊ लागतात. तदनुषंगिक प्रतिबलविषयक समीकरणे केल्विनने सिद्ध केली आहेत (सुमारे १८५०). त्याच्या समीकरणांमध्ये पॉ = ०.५ हे विशेष मूल्य (अदमनीय, स्थितिस्थापक घन पदार्थांच्या बाबतीतील पॉयसनचे गुणोत्तर) नियुक्त केले असता, असे आढळते की, अपार घनराशीच्या अंतरंगातील *भा* या बिंदुभाराने त्या घनराशीमध्ये जीं प्रतिबले निर्माण होतात, तीं त्याच *भा* मूल्याचा लंबदिक् भार एखाद्या अपारप्राय घनराशीच्या समतल पृष्ठावर कारक झाला असता निर्माण होणाऱ्या, त्याच ठिकाणच्या प्रतिबलांच्या निम्मे असतात. म्हणून पॉ = ०.५ असेल, आणि *भा* हे बल अपार घनराशीच्या अंतरंगात कारक झाले असेल, तर त्या घनराशीत निर्माण होणारी प्रतिबले समी. १ ने मिळणाऱ्या प्रतिबलांना दोनाने भागून मिळू शकतात.

अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीतील प्रतिबले ज्ञात असतील, तर तदनुषंगिक विस्थापने स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांताच्या मूलभूत समीकरणांच्या साहाय्याने ठरविता

येतात. व्यावहारिक दृष्टिकोणातून पाहता, ज्यात विशेष गम्य वाटावे, अशी विस्थापने म्हणजे अपारप्राय घनराशीच्या समतल पृष्ठावर लावलेल्या *भा* या उभ्या बिंदुभाराने निर्माण केलेली विस्थापने हीं होत. तीं बॉसिनेस्कने गणितसिद्ध केली आहेत (१८८५). अशा बिंदुभाराने निर्मिलेली प्रतिबल-परिस्थिती त्या भाराच्या कारक रेषेभोवती सममात्र असल्यामुळे ठ या बिंदूचे विस्थापन (आकृती ११८ आ) त्याच्या दोन घटकांच्या साहाय्याने निश्चित करता येते. उदाहरणार्थ, समजा,

$अ_उ$ = ठ बिंदूचे उभे विस्थापन (अधस् दिशेत धन),

$अ_{आ}$ = आडवे त्रिज्यादिक् विस्थापन (बहिर्गामी दिशेत धन)

आहेत. तद्विषयक समीकरणे खाली दिली आहेत :

$$अ_उ = \frac{भा}{२\pi त्र} \cdot \frac{१+पॅ}{यं}\left[२\,(१-पॅ)+कोज्या^२\,ऌ\right] ज्या\,ऌ \qquad [४ अ]$$

आणि

$$अ_{आ} = \frac{भा}{२\pi त्र} \cdot \frac{१+पॅ}{यं}\left[-(१-२\,पॅ)+कोज्या\,ऌ+कोज्या^२\,ऌ\right] \cdot ज्या\,ऌ\;स्प\,\frac{ऌ}{२} \qquad [४ आ]$$

पृष्ठभागाजवळ $ऌ=९०^\circ$, $कोज्या\,ऌ=०$, $ज्या\,ऌ=१$ आणि $स्प\,ऌ/२=१$ आहेत. म्हणून या मूल्यांची नियुक्ती करून, भारापासून त्र अंतरावर असणाऱ्या पृष्ठभागावरील बिंदूचे विस्थापन पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$अ_{उ_०} = \frac{भा}{\pi त्र} \cdot \frac{१-पॅ^२}{यं} \qquad [५]$$

$$अ_{आ_०} = -\frac{भा}{२\pi त्र} \cdot \frac{१-पॅ-२पॅ^२}{यं} \qquad [५ आ]$$

१३६. अपारप्राय घनराशीच्या क्षितिजसमांतर पृष्ठभागावरील लवचिक क्षेत्रभारामुळे निर्मिलेली प्रतिबले : भार आणि अपारप्राय घनराशीचा पृष्ठभाग यांमध्ये पादकासारखी ताठ वास्तू प्रविष्ट केलेली नसेल, तेव्हा त्या भाराच्या बाबतीत लवचिक असा शब्दप्रयोग केला जातो. समजा, भाराचे क्षेत्रफळ *आ* आहे आणि एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य *भ* आहे. हा भार असंख्य, स्वतंत्र बिंदुभारांमध्ये विभागता येईल. त्या प्रत्येक बिंदुभाराचे मूल्य $भ\cdot d आ$ होईल. घनराशी पूर्णतया स्थितिस्थापक आहे असे गृहीत धरल्यामुळे, एकूण भाराने निर्माण होणारे प्रतिबल हे $भ\cdot d आ$ या

बिंदुभारांनी निर्मिलेल्या प्रतिबलांच्या बेरजेइतके असेल; म्हणून तज्जन्य प्रतिबल-परिस्थिती चलानयनाने ठरविता येईल.

घनराशीच्या पृष्ठभागावर अनंत लांबीच्या, सरळ रेषाभाराने (एकांक मूल्य $भ'$) पृष्ठीय विकृतीची परिस्थिती निर्माण होते. आकृती ११९ अ मध्ये ही रेषा ठ ने दाखविली आहे. या रेषेस लंबरूप असलेल्या प्रत्येक सरळ पातळीवरील ट या यदृच्छया निवडलेल्या बिंदुस्थानी पुढीलप्रमाणे प्रतिबले असतात :

$$\sigma_{ख} = \frac{२भ'}{\pi ख} \text{कोज्या}^{४}\, \theta \qquad [१ अ]$$

$$\sigma_{क्ष} = \frac{२भ'}{\pi ख} \text{कोज्या}^{२}\, \theta\, \text{ज्या}^{२}\, \theta \qquad [१ आ]$$

आणि

$$\tau_{क्षख} = \frac{२भ'}{\pi ख} \text{कोज्या}^{३}\, \theta\, \text{ज्या}\, \theta \qquad [१ इ]$$

या समीकरणांत पॉयसनचे गुणोत्तर समाविष्ट झालेले नाही, हे लक्षात घेतले पाहिजे. २ र या स्थिरमूल्य रुंदीच्या आणि अनंत लांबीच्या पट्टिकेच्या (आकृती ११९ आ) दर एकांक क्षेत्रावर $भ$ भार ठेवला असता, निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांची मूल्ये चलानयनाने खालीलप्रमाणे मिळतात.

$$\sigma_{ख} = \frac{भ}{\pi} \Big[\text{ज्या}\, \theta\, \text{कोज्या}\, \theta + \theta \Big]_{\theta_१}^{\theta_२} \qquad [२ अ]$$

$$\sigma_{क्ष} = \frac{भ}{\pi} \Big[-\text{ज्या}\, \theta\, \text{कोज्या}\, \theta + \theta \Big]_{\theta_१}^{\theta_२} \qquad [२ आ]$$

आणि

$$\tau_{क्षख} = \frac{भ}{\pi} \Big[\text{ज्या}^{२}\, \theta \Big]_{\theta_१}^{\theta_२} \qquad [२ इ]$$

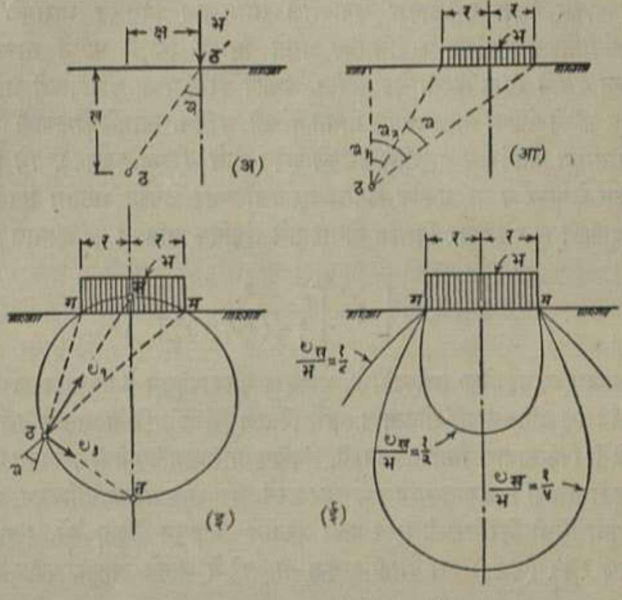
समीकरणे ७ (१) आणि (२) यांच्या आधारे तदनुषंगिक प्रधान प्रतिबलांची मूल्ये पुढीलप्रमाणे मिळतात :

$$\sigma_{१} = \frac{भ}{\pi} (\theta_{०} + \text{ज्या}\, \theta_{०}) \qquad [३ अ]$$

आणि

$$\sigma_३ = \frac{भ}{\pi}(\alpha_0 - ज्या\ \alpha_0) \qquad [३\ आ]$$

येथे $\alpha_0 = \alpha_२ - \alpha_१$ आहे (आकृती ११९ आ पाहा). या समीकरणांवरून असे दिसते की, *भ* चे मूल्य दिलेले असेल, तर तज्जन्य प्रधान प्रतिबले केवळ α_0 या पदावर



आकृती ११९ : (अ) आणि (आ) अपारप्राय घनराशींच्या पृष्ठभागावर कारक असलेले, रेषाभार आणि पट्टिकाभार; (इ) पट्टिकाभारामुळे ठ या ठिकाणी येणाऱ्या प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा; (ई) क्षितिजलंब दाब आणि अनंत लांबीच्या पट्टिकेवरील एकांक भार यांतील गुणोत्तरांची समान मूल्ये दाखविणाऱ्या रेषा (दाबकंद).
(आकृती आ आणि इ मध्ये कृपया α ऐवजी α_0 वाचावे).

अवलंबून असतात. अर्थातच *गम* आणि ठ मधून जाणाऱ्या वर्तुळावरील (आकृती ११९ इ) प्रत्येक बिंदुस्थानी प्रधान प्रतिबलांची तीव्रता एकच असते. थोडीशी आकडेमोड करून असेही दाखविता येईल की, *गमठ* या वर्तुळावरील प्रत्येक बिंदुस्थानी असलेल्या, दोन प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा अनुक्रमे *स* आणि *त* या बिंदूंतून जातात. उपर्युक्त वर्तुळ आणि भारयुक्त पट्टिकेचे सममात्रतापृष्ठ हीं परस्परांस जेथे छेदतात, त्या ठिकाणी हे दोन बिंदू आहेत. तसेच समीकरण २अ च्या साहाय्याने असेही दाखविता येते की, ज्यांच्या ठिकाणी $\sigma_ख$ या उभ्या, लंबरूप प्रतिबलाचे मूल्य एकच

आहे, असे सर्व बिंदू एका वक्र रेषेवर स्थित असतात (आकृती ११९ ई). $σ_{ख}$ च्या निरनिराळ्या मूल्यांनुसार काढलेल्या अशा वक्ररेषांचे आकार एखाद्या कंदाच्या छेदातील पापुद्र्यांसारखे दिसतात. त्यामुळे भारयुक्त क्षेत्राखालील भागास दाब-कंद असे म्हणण्याचा प्रघात आहे. या खुलाशावरून हे स्पष्ट होईल की, अशा कंदाच्या सीमेची मापे, तेथील उभे लंबदिक् प्रतिबल उपरस्थ भाराचा विशिष्ट अंश—उदा. १/२ किंवा १/४—आहे असे म्हटल्याविना देता येणे शक्य नाही.

आयताकार किंवा वर्तुळाकार क्षेत्रावरील समप्रमाण वितरित भारामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांचे गणित काहीसे क्लिष्ट असते आणि त्याची फलिते साध्या समीकरणांच्या संचाने व्यक्त करता येत नाहीत. तथापि ही समस्या सोडविलेली आहे आणि तद्विषयक फलिते कोष्टकांच्या स्वरूपात ग्रथित केलेली आहेत. त्यामुळे कोणत्याही ठिकाणची प्रतिबले साध्या अंतर्वेशन पद्धतीने ठरविणे शक्य होते (लव्ह १९२८). *त्रि* त्रिज्येच्या वर्तुळाकार क्षेत्रावर *भ* या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा भार ठेवला असता, त्या क्षेत्राच्या मध्यबिंदूखाली *ख* खोलीवर निर्माण होणारे उभे लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$σ_{ख}=भ\left\{१-\left[\frac{१}{१-(त्रि/ख)^{२}}\right]^{\frac{३}{२}}\right\} \qquad [४]$$

पुष्कळशा व्यावहारिक समस्यांमध्ये, भारयुक्त घनराशीतून घेतलेल्या आडव्या छेदांवरील लंबदिक् प्रतिबलांची तीव्रता व त्यांचे वितरण यांची माहिती असली तरी भागते. ही माहिती विनासायास मिळविण्यासाठी, लंबदिक् प्रतिबलाविषयीची समीकरणे परिमाणरहित गुणोत्तरांच्या स्वरूपात मांडणे श्रेयस्कर ठरते. या स्वरूपातील समीकरण, परिमाणरहित गुणोत्तरांची निरनिराळी मूल्ये घेऊन एकदाच सोडवून ठेवता येते. उदाहरणार्थ, समीकरण १३५ (१ अ) च्या दोन्ही बाजूंना $भा/ख^{२}$ ने भागले असता, पुढील समीकरण मिळते :

$$σ_{ख}\cdot\frac{ख^{२}}{भा}=\frac{३}{२\pi}\,कोज्या^{५}ब=\frac{३}{२\pi}\left[\frac{१}{१+(त्र/ख)^{२}}\right]^{५/२}=फ(त्र/ख)=ऋ_{σ} \qquad [५]$$

$ऋ_{σ}$ हा शुद्ध अंक आहे. त्याला **प्रभावमूल्य (प्रभावांक)** असे म्हणतात. कारण त्याने ठ येथील $σ_{ख}$ या उभ्या लंबदिक् प्रतिबलावर *म* येथील (आकृती ११८ अ) उभ्या बिंदुभाराचा जो प्रभाव पडतो तो निश्चित केला जातो. त्याचे मूल्य *त्र/ख* या गुणोत्तराच्या मूल्यावरच केवळ अवलंबून असते. *त्र/ख* च्या निरनिराळ्या मूल्यांना अनुषंगिक असणारी $ऋ_{σ}$ ची मूल्ये परिशिष्टातील कोष्टक १ मध्ये दिली आहेत. समीकरण ५ आपल्याला पुढीलप्रमाणेही मांडता येईल :

$$σ_{ख}=ऋ_{σ}\frac{भा}{ख^{२}} \qquad [६]$$

अपारप्राय घनराशीवर, $भ'$ या एकांक मूल्याचा रेषाभार कारक असेल, तर त्या राशीतील ठ या कोणत्याही बिंदुस्थानी (आकृती ११९ अ) निर्माण होणारे $\sigma_{\text{ख}}$ हे उभे लंबदिक् प्रतिबल समी. १ अ ने मिळते. ते पुढील स्वरूपातही मांडता येते.

$$\sigma_{\text{ख}} = \frac{भ'}{ख} \cdot \frac{२}{\pi} \text{कोज्या}^{४} \vartheta = \frac{भ'}{ख} \cdot \frac{२}{\pi} \left[\frac{१}{१ + (क्ष/ख)^{२}} \right]^{२} = \frac{भ'}{ख} क_{\sigma} \quad [\text{७ अ}]$$

येथे

$$क_{\sigma} = \frac{२}{\pi} \text{कोज्या}^{४} \vartheta = \frac{२}{\pi} \left[\frac{१}{१ + (क्ष/ख)^{२}} \right]^{२} \quad [\text{७ आ}]$$

हे रेषाभाराचे प्रभावमूल्य आहे. हे समीकरण इतके सोपे आहे की, $क_{\sigma}$ ची मूल्ये ठरविण्यासाठी कोष्टके सिद्ध करण्याची आवश्यकता उरत नाही.

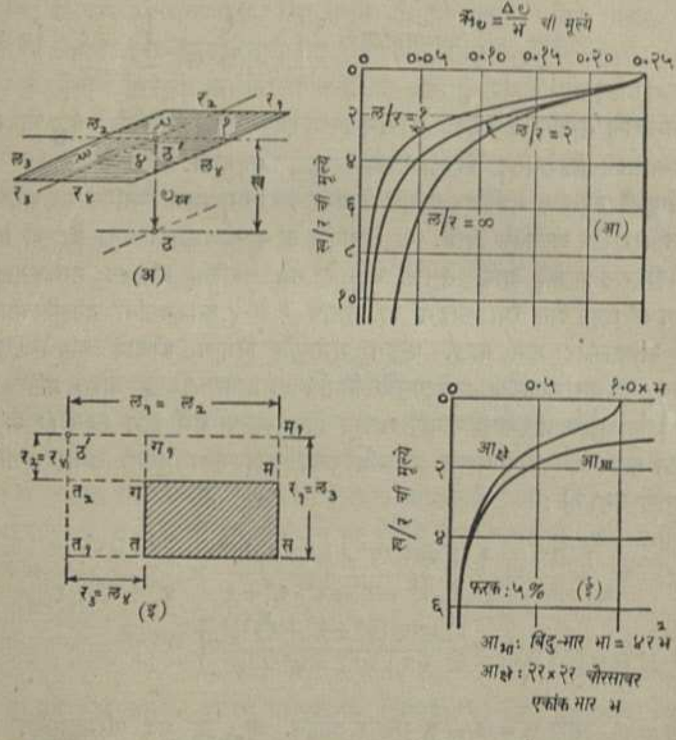
आकृती १२० अ मध्ये दर एकांक क्षेत्रावर $भ$ हा समप्रमाण वितरित भार वाहणारे, आयताकार क्षेत्र दाखविले आहे. या क्षेत्रातील $ठ'$ या कोणत्याही एका बिंदूच्या खाली $ख$ खोलीवर ठ हा बिंदू आहे. तेथील $\sigma_{\text{ख}}$ हे उभे लंबदिक् प्रतिबल ठरविण्यासाठी, आपण $ठ'$ मधून दोन रेषा काढून या क्षेत्राचे १ ते ४ आकड्यांनी दाखविल्याप्रमाणे चार आयताकार भाग पाडू. एकूण भारामुळे निर्माण होणारे $\sigma_{\text{ख}}$ हे लंबदिक् प्रतिबल, या चार भागांपैकी प्रत्येकामुळे निर्माण होणाऱ्या $\Delta\sigma_{\text{ख}}$ अशा प्रतिबलांच्या बेरजेइतके असेल. प्रारंभाची पायरी म्हणून बॉसिनेस्कच्या समीकरण १३५ (१ अ) चा उपयोग करून व चलानयनाचा अवलंब करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते (न्यूमार्क १९३५) :

$$क_{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{भ} = \frac{१}{४\pi} \left[\frac{२पफ(प^{२}+फ^{२}+१)^{१/२}}{प^{२}+फ^{२}+प^{२}\cdot फ^{२}+१} \times \frac{प^{२}+फ^{२}+२}{प^{२}+फ^{२}+१} + \text{स्प}^{-१} \frac{२पफ(प^{२}+फ^{२}+१)^{१/२}}{प^{२}+फ^{२}-प^{२}फ^{२}+१} \right] \quad [८]$$

येथे $प = र/ख$ आणि $फ = ल/ख$ हे शुद्धांक आहेत. $क_{\sigma}$ हे पद परिमाणरहित आहे आणि ते आयताकार अधिभाराचा, त्याच्या कोपऱ्याखाली कोणत्याही खोलीवरील उभ्या लंबदिक् प्रतिबलावर पडणारा प्रभाव दाखविते. $ल/र = फ/प$ ची निरनिराळी मूल्ये घेऊन तदनुषंगिक $क_{\sigma} = \Delta\sigma/भ$ ची मूल्ये आडव्या अक्षावर आणि $१/प = ख/र$ ची मूल्ये उभ्या अक्षावर स्थित केली असता, आपल्याला आकृती १२० आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आलेख मिळतात (स्टाईनब्रेनेर १९३४).

परिशिष्टातील कोष्टक क्र. २ आणि आकृती १ यांमध्ये प आणि फ यांची निरनिराळी मूल्ये घेऊन, तदनुषंगिक $क_{\sigma}$ ही (समीकरण ८) प्रभावमूल्ये दिली आहेत. परिशिष्टामध्ये

बिंदुभाराच्या बाबतीतील (कोष्टक १) आणि वर्तुळाकार अधिभाराच्या बाबतीतील (कोष्टक ३) प्रभावमूल्येही दिली आहेत. आकृती १२० अ मधील ठ येथील उभे लंबदिक् प्रतिबल ठरविण्याच्या प्रश्नाकडे पुनः वळू. तेथील १ ते ४ क्षेत्रांपैकी प्रत्येकासाठी अनुक्रमे प आणि फ ही गुणोत्तरे ठरविली पाहिजेत आणि आलेखाच्या किंवा कोष्टकाच्या साहाय्याने $\text{क}_{\text{ए}1}$ ते $\text{क}_{\text{ए}4}$ हीं तदनुषंगिक प्रभावमूल्ये ठरविली पाहिजेत. त्यांचा उपयोग करून एकूण लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.



आकृती १२० : (अ) अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठावरील समप्रमाण वितरित आयताकार क्षेत्रव्यापी भार; (आ) (अ) मधील १ ते ४ या चार भागांपैकी कोणत्याही एकावरील भारामुळे ठ या बिंदुस्थानी येणारे क्षितिजलंब प्रतिबल दाखविणाऱ्या प्रभावांकाची मूल्ये; (इ) ठ जर भारित क्षेत्राच्या बाहेर पडत असेल, तर प्रभावांकाची मूल्ये गणितसिद्ध करण्याची पद्धत स्पष्ट करणारी रेखाकृती; (ई) चौरसाकृती क्षेत्रावरील समप्रमाणात वितरित भार काढून त्याऐवजी त्याच मूल्याचा बिंदुभार त्या क्षेत्राच्या मध्यबिंदूच्या ठिकाणी ठेवला असता, तेथून काढलेल्या उभ्या रेषेवर ठिकठिकाणी येणारा उभा एकांक दाब कसा बदलतो ते स्पष्ट करणारी रेखाकृती (आधार : स्टाईनब्रेनर १९३४).

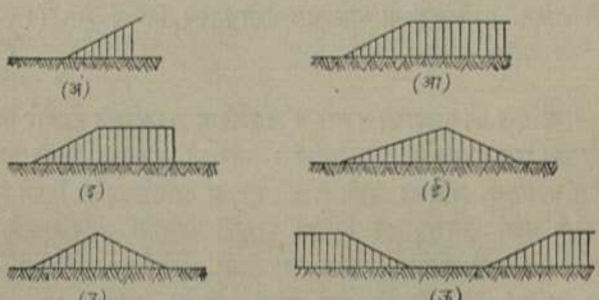
$$\text{ए}_{\text{ख}}=\text{भ}\,(\text{क्ष}_{\text{ए}_1}+\text{क्ष}_{\text{ए}_2}+\text{क्ष}_{\text{ए}_3}+\text{क्ष}_{\text{ए}_4}) \qquad [९]$$

जर ठ' हा बिंदू भारयुक्त क्षेत्राच्या बाहेर असेल, तर आपण $\text{ठ}'\,\text{म}_1\text{सत}_1$ (आकृती १२० इ) हा आयत काढू. त्याच्या बाजू आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहेत. आकृतीवरून पुढील समीकरण मांडता येईल.

$$\text{गमसत क्षेत्र}=\text{ठ}'\,\text{म}_1\text{सत}_1-\text{ठ}'\text{त}_2\text{मम}_1-\text{ठ}'\text{ग}_1\,\text{त}\,\text{त}_1+\text{ठ}'\,\text{ग}_1\text{गत}_2 \qquad [१०]$$

म्हणून *भ* या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याच्या *गमसत* या अधिभारामुळे ठ' या बिंदूच्या खाली *ख* खोलीवर असलेल्या ठ या बिंदुस्थानी निर्मिलेले $\text{ए}_{\text{ख}}$ हे उभे लंबदिक् प्रतिबल, वरील समीकरणात उजव्या बाजूस लिहिलेल्या प्रत्येक क्षेत्रावर त्याच एकांक मूल्याचा भार ठेवला असता, निर्माण होणाऱ्या लंबदिक् प्रतिबलांच्या बीजगणिती बेरजेइतके असेल. म्हणून या प्रत्येक क्षेत्रासाठी परिशिष्टांतील कोष्टक २ च्या साहाय्याने $\text{क्ष}_{\text{ए}_1}$ ते $\text{क्ष}_{\text{ए}_4}$ ही प्रभावमूल्ये ठरविल्यानंतर $\text{ए}_{\text{ख}}$ या उभ्या लंबदिक् प्रतिबलासाठी आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येईल.

$$\text{ए}_{\text{ख}}=\text{भ}\,(\text{क्ष}_{\text{ए}_1}-\text{क्ष}_{\text{ए}_2}-\text{क्ष}_{\text{ए}_3}+\text{क्ष}_{\text{ए}_4}) \qquad [११]$$



आकृती १२१ : अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठावरील लवचिक भारांचे काही प्रकार. या भारांमुळे निर्माण होणारे उभे प्रतिबल गणितसिद्ध करण्याची समीकरणे प्रसिद्ध झालेली आहेत.

मागील परिच्छेदात वर्णिलेली पद्धत ही मर्यादित क्षेत्रव्यापी भारामुळे आडव्या छेदावर येणारी लंबदिक् प्रतिबले ठरविण्यासाठी शोधलेल्या अनेक पद्धतींपैकी केवळ एक आहे. (बर्मिस्टर १९३८ आणि त्याच्या प्रबंधावरील न्यूमार्क, क्रायनाईन आणि इतरांची चर्चा पाहा.)

आकृती १२० ई मधील *आ*_क्ष आलेखाच्या भुजा दर एकांक क्षेत्रावर *भ* किंवा

एकूण ४$र^{२}भ$ इतका अधिभार वाहणाऱ्या चौरस क्षेत्राच्या मध्यबिंदूखाली निरनिराळ्या खोलीवर येणारी उभी लंबदिक् प्रतिबले दाखवितात. $अ/_{भा}$ या आलेखाच्या भुजा, त्याच ठिकाणांची परंतु उपर्युक्त चौरस क्षेत्राऐवजी त्याच्या मध्यबिंदुस्थानी $भा = ४र^{२}भ$ एवढा बिंदुभार ठेवला असता, मिळणारी प्रतिबले दाखवितात. आकृतीवरून असे दिसते की, $ख/_{र}$ चे मूल्य ६ पेक्षा अधिक झाल्यास, या दोन आलेखांतील फरक फारच कमी होतो. म्हणून घनराशीवर मर्यादित क्षेत्र व्यापणारा पट्टिकाभार ठेवला असता, *ख* खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबरूप प्रतिबले ठरवावयाची असतील, तर त्या भाराऐवजी एकूण त्याच मूल्याचे, परंतु एकमेकांपासून $ख/३$ पेक्षा अधिक अंतरावर नसलेले बिंदुभार नियुक्त करण्यास प्रत्यवाय नसतो. छेदाच्या विवक्षित बिंदुस्थानी अशा बिंदुभारांमुळे निर्माण होणारी प्रतिबले तदनुषंगिक प्रभावमूल्ये देणाऱ्या कोष्टकांच्या साहाय्याने ठरविता येतात.

तिरके उतार असलेल्या भरावासमान असणारे विविध अधिभार आकृती १२१ अँ ते ऊ यांमध्ये दाखविले आहेत. पुस्तकाच्या पृष्ठास लंबरूप असणाऱ्या दिशेत हे भार अनंतापर्यंत पसरलेले आहेत. या अधिभारांच्या वजनामुळे आडव्या छेदावर निर्माण होणारी लंबदिक् प्रतिबले ठरविणाऱ्या समीकरणांचे संकलन ग्रेने (१९३६) त्यांच्या मूळ प्रकाशनांचे संदर्भ देऊन केले आहे; कोष्टके आणि तक्ते जुर्गेन्सन् (१९३४) याने सिद्ध केली आहेत. अलिकडच्या काळातील संशोधनांचे निष्कर्ष होल (१९४१) याने प्रकाशित केले आहेत.

१३७. मर्यादित क्षेत्रव्यापी उभ्या व लवचिक भारामुळे होणारे अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागाचे अवसीदन : घनराशी पूर्णतया स्थितिस्थापक आहे असे गृहीत धरल्यास, प्रतिबल आणि विकृती यांच्या अधिमेलनाचा नियम तिला लागू पडतो. तेव्हा अशा क्षेत्रभारामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले ठरविण्यासाठी परिच्छेद १३६ मध्ये जसा चलानयनाचा अवलंब केला होता, तसे करून त्यांच्यामुळे होणारे अवसीदन ठरविता येते. ही रीत स्पष्ट व्हावी म्हणून आकृती १२० अ मधील आयताकार क्षेत्राच्या आत असलेल्या $ठ'$ या बिंदूचे उभ्या दिशेतील विस्थापन ठरवू. या क्षेत्रावर *भ* हे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य असलेला समप्रमाण वितरित अधिभार आहे. $ठ'$ या बिंदूपासून *त्र* या कोणत्याही अंतरावर कारक असलेल्या $dभा = भ \cdot dक्ष \cdot dय$ या अधिभारामुळे होणारे $ठ'$ या बिंदूचे उभ्या दिशेतील $dअ_{उ_{०}}$ हे विस्थापन समीकरण १३५ (५ अ) च्या साहाय्याने ठरविता येईल. त्यावरून चलानयनाने रुंदी र आणि लांबी ल असलेल्या आयताकार भारयुक्त क्षेत्राच्या कोपऱ्यांचे $\Delta न$ हे अवसीदन देणारे पुढील समीकरण मिळते.

$$\Delta न = भर \frac{१ - पॉ^{२}}{यं} \cdot \frac{१}{\pi} \left[क\, लघु \frac{१ + \sqrt{क^{२} + १}}{क} + लघु \left(क + \sqrt{क^{२} + १} \right) \right] \quad [१ अ]$$

येथे
$$क = \frac{ल}{र} \qquad [१ अ]$$

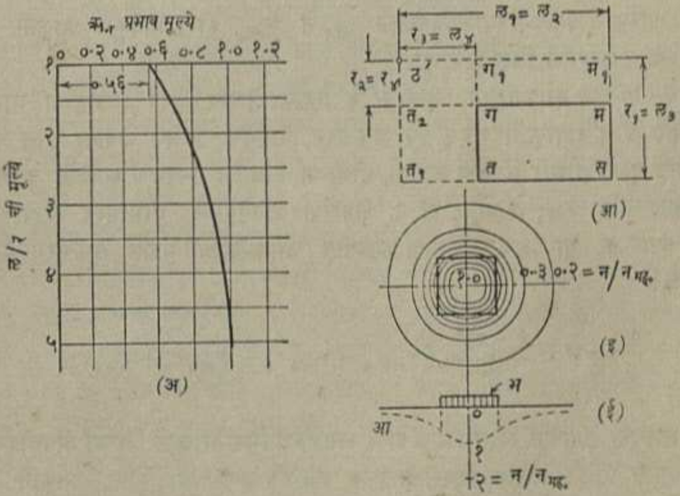
हा शुद्धांक आहे (श्लायचर १९२६).

$$ऋ_न = \frac{१}{\pi}\left[क \, लघु \frac{१+\sqrt{क^२+१}}{क} + लघु\left(क+\sqrt{क^२+१}\right)\right] \qquad [२ अ]$$

असे नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते:

$$\Delta न = भर \frac{१-पॉ^२}{यं} ऋ_न \qquad [२ आ]$$

$ऋ_न$ हाही शुद्धांकच आहे. त्यामुळे आयताकार क्षेत्रव्यापी आणि समप्रमाण वितरित अधिभाराचा, त्या क्षेत्राच्या कोपऱ्याच्या अवसीदनावर पडणारा प्रभाव दाखविला जातो. $ऋ_०$ (समीकरण, १३६ (८)) या प्रभावमूल्यासारखाच हा अंक आहे. $ऋ_न$ आणि भारयुक्त क्षेत्राची लांबी आणि रुंदी यांचे गुणोत्तर क यांतील संबंध आकृती १२२ अ मध्ये दाखविला आहे. $क=\infty$ असताना $ऋ_न=\infty$ असतो. याचा अर्थ



आकृती १२२ : (अ) अपारप्राय घनराशीवरील आयताकार (ल×र) भारित क्षेत्राच्या कोपऱ्याचे अवसीदन देणारे प्रभावांक; जर ल/र=∞ असेल तर $ऋ_न=\infty$ असतो; (आ) भारित क्षेत्राच्या बाहेर असणाऱ्या बिंदुस्थानाचे अवसीदन ठरविण्याची पद्धत स्पष्ट करणारी रेखाकृती; (इ) चौरसाकृती भारक्षेत्राच्या बाबतीतील समान अवसीदनाच्या रेषा; (ई) अवसीदनाचे स्वरूप दाखविणारा छेद.

असा की, अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागावर समप्रमाण वितरित पट्टिकाभार ठेवला असता, पट्टीचे अवसीदन अनंत असते. परिमित मूल्याच्या कोणत्याही भाराच्या आणि रुंदीच्या बाबतीत हे विधान लागू पडते.

भारक्षेत्राच्या आत असणाऱ्या ठ' (आकृती १२० अ) या बिंदूचे अवसीदन ठरविण्यासाठी १ ते ४ यांपैकी प्रत्येक आयताच्या बाबतीत क चे मूल्य आपण ठरवू. आलेखावरून (आकृती १२२ अ) तदनुषंगिक $क्ष_{न}$ ची मूल्ये मिळवू; तीं $क्ष_{न_1}$ ते $क्ष_{न_4}$ अशी असतील; त्यांवरून ठ' बिंदूचे एकूण अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$न = भ \frac{१ - पॉ^२}{यं} (र_1 क्ष_{न_1} + र_2 क्ष_{न_2} + र_3 क्ष_{न_3} + र_4 क्ष_{न_4}) \qquad [३]$$

ठ' हा बिंदू जर *गमसत* या भारयुक्त क्षेत्राच्या बाहेर असेल, तर आपण $ठ' म_1 सत_1$ (आकृती १२२ आ) हा आयत काढू. त्याच्या बाजू आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहेत. या आकृतीवरून आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$\text{क्षेत्र } गमसत = ठ'म_1सत_1 - ठ'ग_1तत_1 - ठ'म_1मत_2 + ठ'ग_1गत_2$$

या समीकरणाच्या उजव्या बाजूकडे मांडलेल्या सर्व क्षेत्रांना ठ' हा बिंदू समान आहे. या क्षेत्रांच्या अवसीदनांच्या बाबतीतील $क्ष_{न_1}$ ते $क्ष_{न_4}$ हीं प्रभावमूल्ये आकृती ११२ अ च्या साहाय्याने मिळू शकतात.

गमसत क्षेत्र व्यापणाऱ्या आणि *भ* हे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य असणाऱ्या भारामुळे होणारे ठ'चे (आकृती १२२ इ) अवसीदन, उपर्युक्त प्रत्येक क्षेत्रावर तोच एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा भार लावला असता, होणाऱ्या अवसीदनांच्या बीजगणिती बेरजेइतके असते. तेव्हा $क्ष_{न_1}$ ते $क्ष_{न_4}$ हीं या क्षेत्रांच्या बाबतीतील प्रभावमूल्ये ठरविल्यानंतर ठ' च्या न या अवसीदनाच्या बाबतीत आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$न = भ \cdot \frac{१ - पॉ^२}{यं} (क्ष_{न_1} र_1 - क्ष_{न_2} र_2 - क्ष_{न_3} र_3 + क्ष_{न_4} र_4) \qquad [४]$$

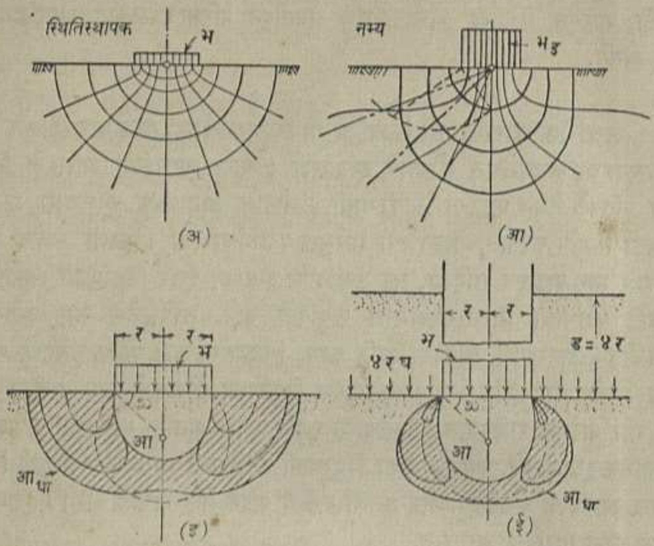
भारयुक्त क्षेत्राच्या आत आणि बाहेर असलेल्या निरनिराळ्या बिंदूंच्या अवसीदनाच्या गणिताची फलिते **समान अवसीदनदर्शक वक्रांनी** दाखविता येतात. आकृती १२२ इ मध्ये चौरसाकृती भारक्षेत्राच्या बाबतीत मिळणारे असे वक्र काढले आहेत. भारयुक्त क्षेत्रातून घेतलेल्या छेदाने, **अवसीदनाचे चित्र** मिळते. (आकृती १२२ ई). अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीच्या पृष्ठभागाच्या एखाद्या भागावर समप्रमाण वितरित भार ठेवला असता, निर्माण होणाऱ्या अवसीदनाचे स्वरूप नेहमीच एखाद्या वाडग्याच्या आकारासारखे खोलगट असते. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता

येईल की, भारयुक्त क्षेत्राच्या मध्यभागाचे अवसीदन परिघाजवळच्या अवसीदनापेक्षा अधिक असते.

१३८. लवचिक भाराखाली स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेतून नम्य समतोलाच्या अवस्थेप्रत होणारे संक्रमण : वाढत जाणाऱ्या भारामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले जेव्हा एखाद्या बिंदुस्थानी उच्छेदास आवश्यक असणारी प्रतिबल-परिस्थिती निर्माण करतात, तेव्हा त्या भारयुक्त पदार्थाचा त्या ठिकाणी उच्छेद होतो. त्यानंतरही भार वाढतच राहिला, तर उच्छेदाची अवस्था इतर ठिकाणीही पसरत जाते व शेवटी पदार्थाची भारधारणक्षमता उल्लंघिली जाते. सापेक्षतेने ताठ असणाऱ्या घनपदार्थांत–उदाहरणार्थ, काँक्रीट, अति कडक, चिकण मृत्तिका किंवा चुनेगची वालुका यांमध्ये–उच्छेद होत असताना, उच्छेदाच्या ठिकाणचा समाकर्षणगुण नाहीसा होतो आणि भार वाढतच राहिल्यास, उच्छेदाची व्याप्ति वाढत जाऊन भाराखालील पदार्थास अधिकाधिक इजा पोचते. त्यामुळे एका बिंदुस्थानी उच्छेदाची प्रतिबल-परिस्थिती निर्माण करण्यास आवश्यक असलेला भार आणि एखादे पादक पेलू शकेल असा महत्तम भार हे जवळजवळ सारखेच असतात.

पूर्णत्वाने नम्य असणाऱ्या पदार्थांतही जेव्हा स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेतून उच्छेदसमीप अवस्थेप्रत संक्रमण होते तेव्हा तेही काही ठिकाणी सुरू होऊन नंतर इतरत्र पसरते; परंतु या संक्रमणामुळे त्या पदार्थाच्या सामर्थ्याचा नाश होत नाही. त्यामुळे भारयुक्त पदार्थाच्या एखाद्या ठिकाणी उच्छेदसमीप अवस्था निर्माण करण्यास लागणाऱ्या भारापेक्षा त्याच्या बाबतीतील लक्ष्मणभार पुष्कळच अधिक असतो. उच्छेदसमीप अवस्थे-पासून अंतिम उच्छेदावस्थेपर्यंतच्या संक्रमणकालात भारवाढ होत राहिल्यास, फक्त नम्य समतोलावस्थेत गेलेल्या विभागाच्या व्याप्तीत वाढ होत राहते.

आदर्श स्थितिस्थापकत्व आणि आदर्श नम्यत्व या दोहोंचा संगम ज्या पदार्थात झालेला आहे, त्यामध्ये विसर्पणास प्रारंभ होण्यापूर्वी भारामुळे निर्माण झालेली प्रतिबले भाराच्या सरळ प्रमाणात वाढत असतात आणि प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा न बदलता तशाच राहतात. विसर्पणास प्रारंभ झाल्यानंतर हा नियम लागू पडत नाही; तसेच प्रधान प्रतिबलांच्या दिशासुद्धा बदलतात. प्रतिबलांचे प्रक्षेपणमार्ग काढले असता, या बदलाची कल्पना येणे फार सोईचे होते. (व्यावहारिक बलविज्ञानावरील कोणतेही पाठ्यपुस्तक पाहा; उदाहरणार्थ, टिमोशेंको १९४०). अनेक बिंदूंच्या बाबतीत प्रधान प्रतिबलांच्या दिशा निश्चित करून, त्या दिशांना प्रत्येक ठिकाणी स्पर्शवत् असणाऱ्या आलेखांचे दोन संच काढले असता, हे प्रक्षेपणमार्ग मिळू शकतात. प्रधान प्रतिबले एकमेकांना काटकोनांत छेदत असल्यामुळे प्रक्षेपणमार्गांचे हे दोन संचसुद्धा क्षरणजालातील संचांप्रमाणे एकमेकांस काटकोनांत छेदतात. अनंत लांबीची आणि लवचिक स्वरूपाची भारयुक्त पट्टिका आदर्श घनराशीवर ठेवली असता, अनुक्रमे स्थितिस्थापक आणि नम्य



आकृती १२३ : (अ) अपारप्राय घनराशीचा भारित भाग स्थितिस्थापक अवस्थेत असताना लवचिक पट्टिका-भाराखाली मिळणाऱ्या प्रक्षेपणरेषा; (आ) घनराशीत सार्वत्रिक कार्तनिक उच्छेद होण्याच्या क्षणी मिळणाऱ्या प्रक्षेपणरेषा; (इ) पृष्ठभागावर ठेवलेला पट्टिकाभार वाढविला असता, वाळूत नम्यावस्था पसरत जाते, तिचे स्वरूप; (ई) (इ) प्रमाणेच; परंतु या ठिकाणी पट्टिका भूपृष्ठापासून खाली आहे (आधारः ओ. के. फ्रोह्लिश – १९३४ अ).

समतोलाची अवस्था दाखविणारे प्रक्षेपण-मार्ग आकृती १२३ अ आणि आ यांमध्ये दाखविले आहेत.

जेव्हा स्थितिस्थापक समतोल आणि नम्य समतोल यांच्या दरम्यानची अवस्था असते तेव्हा अधिभार आणि स्वतःचे वजन यांमुळे घनराशीत निर्माण होणारी प्रतिबले व्यक्त करणारी समीकरणे आणि विसर्पणरूपी उच्छेदाबाबतची प्रतिबल-परिस्थिती व्यक्त करणारी समीकरणे यांचा संयोग करून नम्य विसर्पण-विभागाच्या बाह्य सीमेचा अंदाज करता येतो. भारयुक्त पदार्थातून घेतलेल्या प्रत्येक छेदावर ज्या ठिकाणी अधिभारनिर्मित आणि स्ववजननिर्मित प्रतिबले यांची बेरीज केली असता, विसर्पणरूपी उच्छेदाच्या अटींची पूर्तता होते, त्या ठिकाणी ही सीमा असते. पुढील उदाहरणाने ही रीत स्पष्ट होईल. अनंत लांबीच्या लवचिक पट्टिकेवर ठेवलेल्या समप्रमाण अधिभारामुळे एखाद्या राशीत निर्माण होणारी प्रतिबले, समीकरण १३६ (२) ने ठरविता येतात आणि स्वतःच्या वजनामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले पुढील समीकरणांच्या साहाय्याने ठरविता येतात.

$$\sigma_{ख} = घख, \quad \sigma_{क्ष} = मृ_{०} घख \quad \text{आणि} \quad ड_{क्षख} = ०$$

येथे $मृ_{०}$ हा स्तब्ध मृत्तिकादाबाचा गुणांक आहे. (समीकरण १०(१)). या समीकरणांचा संयोग, समी. १३६ (२), ७ (१) आणि ७ (२) यांच्याशी केला असता, $\sigma_{१}$ आणि $\sigma_{३}$ हीं प्रधान प्रतिबले आपल्याला प्राप्त होतात. विसर्पणरूपी उच्छेदाची प्रतिबल-परिस्थिती समीकरण ७ (६) ने दिली जाते.

$$\frac{\sigma_{१} + \sigma_{३}}{२} \text{ ज्या } \phi = \frac{\sigma_{१} - \sigma_{३}}{२} - स \text{ कोज्या } \phi \cdot \qquad ७(६)$$

या ठिकाणी ϕ हा कार्तनिक विरोधाचा कोन असून *स* म्हणजे समाकर्षण आहे. *स* = ० आणि *मृ*० = १ (आदर्शवालुका; या वालुकेत स्वतःच्या वजनामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांचे वितरण स्थिरजलदाबाच्या वितरणासारखे असते.) हीं सुकरतादायी गृहीते या गणितात प्रविष्ट करून फ्रोह्लिशने (१९३४ अ) स्थितिस्थापक समतोल आणि नम्य समतोल या दरम्यानच्या निरनिराळ्या अवस्थांमधील नम्य विसर्पण-विभागाच्या सीमा ठरविल्या. त्या सीमारेषा आकृती १२३ इ आणि १२३ ई मध्ये दाखविल्या आहेत. आकृती १२३ इ मध्ये वालुकापृष्ठावर ठेवलेल्या भारयुक्त पट्टिकेच्या दोन्ही बाजूंस कोणताही अधिभार नाही. नम्य विसर्पण-विभागाची रुंदी पृष्ठभागाजवळ महत्तम आहे. आकृती १२३ ई मधील पट्टिकेच्या तळाच्या पातळीवर, दोन्ही बाजूंस, दर एकांक क्षेत्रावर घ·ड मूल्याचा समप्रमाण वितरित अधिभार आहे. हा अधिभार ड जाडीच्या वालुकाथराच्या वजनामुळे निर्माण झाला आहे. भारयुक्त पट्टिकेच्या पातळीला नम्य विसर्पण विभागाची रुंदी शून्य आहे. या पातळीपासून काही खोलीवर ही रुंदी महत्तम होते. दोन्हीही उदाहरणांत (आकृती १२३ इ आणि ई) भाराचे मूल्य वाढविले असता, नम्य विसर्पण-विभागाचे नीचतम बिंदू पट्टिकेच्या कडांतून निघणाऱ्या एका वर्तुळावरून पुढे सरकतात. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे या वर्तुळाचा मध्यबिंदू भाराच्या मध्यापासून र·स्प ϕ इतक्या खोलीवर असतो. शेवटी नम्य विसर्पणाचे हे दोन विभाग एकमेकांत मिसळून एकच विभाग होतो. हा विभाग आणि भारयुक्त क्षेत्र या दोहोंमध्ये, त्यांना अलग करणारा, एक स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेत असलेला विभाग राहतो. या विभागाच्या तळाकडील सीमेतून घेतलेला छेद आकृतीमध्ये $आ_{घा}$ या आलेखाने दाखविलेला आहे. स्थितिस्थापक समतोलांतून नम्य समतोलात संक्रमण होण्याची ही अंतिम अवस्था येऊ लागली म्हणजे तेथे बॉसिनेस्कची समीकरणे लागू पडत नाहीत आणि तदनंतरची उरलेली प्रक्रिया नम्यता सिद्धांताच्या आधारे वर्णिता येते.

स्थितिस्थापक वर्तनातून नम्य वर्तन हा बदल आकस्मिकपणे घडून येतो, असे गृहीत धरून फ्रोह्लिशने गणित मांडलेले आहे. प्रत्यक्षात, प्रत्येक मृत्तिकेच्या बाबतीत, प्रत्येक बिंदुस्थानी, स्थितिस्थापक विरूपत्वाची प्रक्रिया नकळत नम्य

विसर्पणाकडे जात असते. नम्य विरूपत्वाच्या भागातील समतोलाच्या अटीही फ्रोह्‌लिशच्या सिद्धांतात दुर्लक्षिलेल्या आहेत. त्यामुळे नम्य विसर्पणाच्या विभागाची खोली अमर्यादपणे वाढत जाणे शक्य आहे, असा चुकीचा निष्कर्ष त्यांतून निघतो. प्रकरण ८ मध्ये विशद केल्याप्रमाणे नम्य विसर्पणाच्या विभागाची खोली शक्यतो एका विवक्षित क्रांतिकारी मूल्यापलीकडे जाऊ शकत नाही व हे मूल्य भारित क्षेत्राची रुंदी आणि अंतर्गत घर्षणाचा गुणांक, यांवर अवलंबून असते. तथापि भारित क्षेत्राच्या मध्याखाली, नम्य विसर्पणाचे विभाग एकमेकांत विलीन होण्याची अवस्था येईपर्यंत, (ही अवस्था आकृती १२६ मध्ये $आ_{धा}$ या आलेखांनी दाखविली आहे) हा सिद्धांत बराचसा विश्वासार्ह वाटतो. जर भाराने लांब पट्टीसारखे क्षेत्र व्यापलेले असेल, तर नम्य विसर्पण-विभागांचे विलीनीकरण घडवून आणण्यास आवश्यक असलेला भार, फ्रोह्‌लिशच्या सिद्धांतानुसार, स्थूलमानाने अंतिम भारधारणक्षमतेच्या नीचतर मर्यादेइतका असतो. ही मर्यादा आकृती ३८ इ मधील तुटक आलेखांनी ठरविता येते (परिच्छेद ४६ पाहा).

नम्य पदार्थाच्या समाकर्षणाचे मूल्य $स$ असून अंतर्गत घर्षणकोनाचे मूल्य शून्य असल्यास समीकरण ७ (६) मधील $ज्या\ \varnothing$ हे पदही शून्य होते आणि उच्छेद-क्षणाची प्रतिबल-परिस्थिती पुढील समीकरणाने दिली जाते.

$$\sigma_1 - \sigma_3 = २स$$

अनंत लांबीच्या, लवचिक पट्टिकेवरील एकांक क्षेत्रस्थ भार $\pi \cdot स$ इतका होताक्षणीच, एका अर्धवर्तुळावर, प्रत्येक ठिकाणी वरील उच्छेद-परिस्थिती निर्माण होते. या अर्ध-वर्तुळाचा मध्यबिंदू आकृती ११९ इ मधील $गम$ च्या मध्यभागी असतो. तेव्हा $\varnothing = ०$ असल्यास, भारित क्षेत्राच्या कडांतून जाणाऱ्या दंडगोलाकार छेदावर, प्रत्येक ठिकाणी नम्य अवस्थेचा प्रादुर्भाव एकाच वेळी होतो असे म्हटले पाहिजे. समीकरण ४६ (९ऊ) प्रमाणे या पदार्थाची भारधारणक्षमता पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$भ_{स} = ५{\cdot}१४\ स = (\pi + २)\ स$$

नम्य समतोल केंद्राच्या निर्मितीसाठी आवश्यक असणाऱ्या $\pi स$ या भारापेक्षा उपर्युक्त भारधारणक्षमता ३९% अधिक आहे.

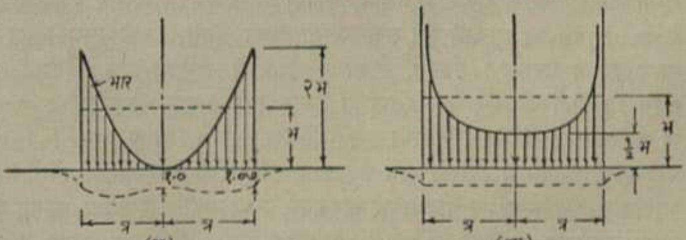
१३९ पादक-तळावरील स्पर्शदाबाचे वितरण : पादक आणि त्याखालची आधार-मृत्तिका यांमधील स्पर्शपृष्ठावर अस्तित्वात असलेल्या लंबदिक् प्रतिबलास **स्पर्शदाब** अशी संज्ञा आहे. अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीच्या समतल पृष्ठ-भागावर परिमित क्षेत्र व्यापणारा व समप्रमाणात वितरित असलेला अधिभार ठेवला असता, होणारे भारित क्षेत्राचे अवसीदन वाडग्याच्या आकाराचे असते, हे परि. १३७

मध्ये दाखविले होतेच. आकृती १२२ इ आणि ई यांमध्ये दाखविलेले अवसीदनही असेच आहे. हे अवसीदन निदान काही अंशी तरी समप्रमाणात घडवून आणावयाचे असेल, तर एकांक क्षेत्रस्थ भाराचे मूल्य, वर्तुळाकार क्षेत्राच्या मध्यभागापेक्षा परिघाजवळ बरेच अधिक असले पाहिजे. आकृती १२४ अ मधील अधिभार मध्याजवळ शून्य असून परिघाकडे अंतराच्या वर्गाच्या प्रमाणात वाढत जाणारा आहे; तथापि मध्यभागाचे अवसीदन परिघाच्या अवसीदनाइतकेच आहे. आकृतीत ते भारक्षेत्राच्या तळाखाली तुटक रेषेने दाखविले आहे (बॉसिनेस्क १८८५). तेव्हा संपूर्णतः ताठ असलेल्या पादकाच्या साहाय्याने पूर्णतया समप्रमाणात असलेले अवसीदन हेतुतः घडवून आणले, तर स्पर्शदाब मध्यापासून परिघाकडे वाढत गेला पाहिजे. अर्थात त्यासाठी आधार-भूमी पूर्णपणे स्थितिस्थापक असली पाहिजे. स्थितिस्थापक पादकाच्या बाबतीत स्पर्शदाबाचे वितरण ज्या गोष्टींवर अवलंबून असते, त्या म्हणजे आधार-माध्यमाचे स्थितिस्थापकताविषयक गुणधर्म, विनमनाच्या बाबतीतील पादकाचा ताठपणा आणि पादकावरील भाराचे वितरण या होत.

ताठ तसेच लवचिक अशा दोन्ही प्रकारांच्या पादकांच्या तळावरील स्पर्शदाबाचे गणित म्हणजे स्थितिस्थापकत्व-विषयक प्रगत सिद्धांतांच्या प्रांतातील एक समस्या आहे. पुढील परिच्छेदातून त्यांतील सर्वांत महत्त्वाच्या निष्कर्षांचा सारांश समाविष्ट केला आहे. सर्वांत सोपी समस्या म्हणजे, वर्तुळाकार, ताठ पादकाच्या तळावरील स्पर्शदाब ठरविणे ही म्हणता येईल (आकृती १२४ आ). पादकाची त्रिज्या त्र आहे आणि त्यावर

$$भा = \pi त्र^2 भ$$

हा केंद्रभार ठेवलेला आहे. पादकाच्या तळावरील *भा* या एकूण भाराला $\pi त्र^2$ या क्षेत्रफळाने भागून *भ* चे मूल्य मिळते. पादक आणि आधारभूत माध्यम या दोहोंतील स्पर्शपृष्ठ समतल राहिले (ताठ पादक), तर आणि स्पर्शपृष्ठावर कार्तनिक प्रतिबलांचा



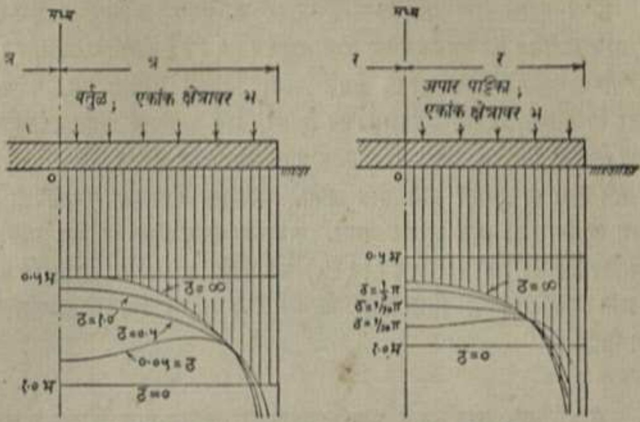
आकृती १२४ : (अ) वर्तुळाकार क्षेत्राचे बहुतांशी समप्रमाण अवसीदन होण्यासाठी आवश्यक असणारा लवचिक भार. (आ) वर्तुळाकार, ताठ पादकाच्या तळावरील स्पर्शदाब (आधार : बॉसिनेस्क १८८५).

अभाव असेल (पूर्णपणे घर्षणरहित तळ), तर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे स्पर्शदाबाचे मूल्य मध्याजवळ *भ*/२ आणि परिघाजवळ अनंत असते (बॉसिनेस्क १८८५). दाब-वितरणाच्या स्वरूपाची कल्पना पुढील पद्धतीने करता येईल. पादकाचा परिघ हा ज्याचे विषुव-वृत्त आहे, असा एक अर्धगोल कल्पून त्याच्या पृष्ठभागावर पादकावरील *भा* हा भार समप्रमाणात पसरा; या अर्धगोलाकृती पृष्ठभागावर अशा प्रकारे येणाऱ्या भाराचा पादकतळाच्या पातळीवर प्रत्यालेख काढा; त्यावरून मिळणारी मूल्ये आणि स्पर्शदाब सारखे असतात. अर्धगोलाच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ, पादकाच्या वर्तुळाकार क्षेत्राच्या दुप्पट असल्यामुळे, त्यावरील समप्रमाण वितरित भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य *भ*/२ असेल. म्हणून पादकाच्या मध्याजवळील एकांक क्षेत्रस्थ दाब हा सुद्धा *भ*/२ असतो. पादकाच्या तळाने व्यापलेल्या क्षेत्रावर जर *भ* या तीव्रतेचा, समप्रमाण वितरित, लवचिक अधिभार ठेवला असता, तर त्यामुळे उत्पन्न होणाऱ्या सरासरी अवसीदनापेक्षा उपर्युक्त उदाहरणात मिळणारे अवसीदन ७·३% कमी असते (श्लायचर १९२६).

वर्तुळाकार, स्थितिस्थापक पादकाच्या तळावरील स्पर्शदाबाचे वितरण आकृती १२५ अ मध्ये दाखविले आहे. पादकाची त्रिज्या *त्र* आहे, जाडी *च* आहे आणि त्यावर *भ* या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा भार ठेवला आहे (बोरोविका १९३६). पादकाचा ताठपणा जितका जास्त, तितकी त्याच्या तळावरील स्पर्शदाबाच्या वितरणातील समप्रमाणता कमी असते. या उदाहरणातील अंतिम समीकरणांत पुढील गुणक समाविष्ट झालेला आहे.

$$\text{ठ} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \text{पॉ}^2_{\text{नि}}}{-\text{पॉ}^2} \cdot \frac{\text{यं}_{\text{पा}}}{\text{यं}_{\text{नि}}} \cdot \left(\frac{\text{च}}{\text{त्र}}\right)^3 \qquad [1]$$

या ठिकाणी पॉ$_{\text{पा}}$ आणि पॉ$_{\text{नि}}$ हीं अनुक्रमे पादक आणि निम्नस्तर यांच्या बाबतीतील पॉयसनच्या गुणोत्तराची मूल्ये आहेत; आणि यं$_{\text{पा}}$ आणि यं$_{\text{नि}}$ हीं यंगच्या मापांकाची मूल्ये आहेत. वरील गुणक म्हणजे पादकांच्या तौलनिक ताठपणाचे गमक समजता येईल. ठ=० या मूल्याने पूर्ण लवचिकपणा व्यक्त होतो. ठ चे मूल्य ० ते ०·१ या मूल्यांच्या दरम्यान असते, तेव्हा स्पर्शदाबाचे लघुतम मूल्य पादकमध्य आणि परिघ या दोहोंच्या दरम्यान पडणाऱ्या बिंदुस्थानी असते. आकृतीत ठ=०·०५ या आलेखात ते दिसेल. ताठपणा वाढत गेल्यास दाबाचे वितरण, आकृती १२४ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे म्हणजे ताठ पादकाच्या तळावरील वितरणासारखे होऊ लागते. वर्तुळाकार, स्थितिस्थापक पादकाच्या माथ्यावर, मध्यभागी भार ठेवला असता, उत्पन्न होणारा स्पर्शदाब हावेलने (१९३७) गणितसिद्ध केला. रुंदी २ र, जाडी च आणि लांबी अनंत अशा मापाच्या, स्थितिस्थापक लादीवर समप्रमाणवितरित भार ठेवला असता, तिच्या विनमनविषयक ताठपणाचा, तिच्या तळावरील दाबाच्या वितरणावर पडणारा प्रभाव आकृती १२५ आ मध्ये दाखविला आहे. (बोरोविका १९३८). ठ चे



(अ) (आ)

आकृती १२५ : (अ) विनमन-विषयक ताठपणा निरनिराळ्या प्रमाणांत असलेल्या वर्तुळाकार पाटांवर समप्रमाण भार ठेवला असता, तळावर येणारा स्पर्शदाब. (आ) लादीवर ठेवलेल्या तशाच भाराच्या बाबतीतील स्पर्शदाब (आधार : बोरोविका १९३६ व १९३८).

मूल्य समीकरण १ वरून मिळते. ठ = ० म्हणजे लादी पूर्णत्वाने लवचिक व ठ = ∞ म्हणजे ती पूर्णत्वाने ताठ असा अर्थ होतो.

अपारप्राय घनराशीच्या समतल पृष्ठभागावर ठेवलेल्या व अनन्त लांबीच्या स्थितिस्थापक तुळईखालील स्पर्शदाब गणितसिद्ध करण्याच्या समस्येचे शास्त्रपूत आणि काटेकोर उत्तर बियोने(१९३७) सिद्ध केले. काटेकोर सिद्धांतानुसार मिळणाऱ्या निष्कर्षांशी शक्य तितके सुसंवादित्व प्रस्थापित करण्यासाठी, स्थितिस्थापक निम्नस्तरावर ठेवलेल्या तुळयांच्या बाबतीतील प्राथमिक सिद्धांतात (परिच्छेद १२६) जो निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा गुणांक समाविष्ट करावा लागतो, त्याचे मूल्य ठरविणे बियोच्या शास्त्रपूत उत्तराने शक्य झाले. या संशोधनाचा निष्कर्ष असा होता की, सरासरी एकांक भार आणि तदनुषंगिक सरासरी अवसीदन यांतील गुणोत्तर, हे केवळ निम्नस्तराचा स्थितिस्थापकत्व मापांक आणि तुळईची रुंदी यांच्यावरच अवलंबून असणारे एक क्लिष्ट फलन नसून तुळईच्या विनमनविषयक ताठपणाचाही त्यात समावेश होतो. तेव्हा विवक्षित निम्नस्तरासाठी, निम्नतर-प्रतिक्रिया-गुणांकाचे निश्चित मूल्य ठरवून देणे शक्य नाही.

शेवटी सांगायचे म्हणजे, अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्या स्थितिस्थापक तुळईवर यदृच्छया निवडलेला कोणताही भारव्यूह ठेवला असता, निर्माण होणारा स्पर्शदाब ठरविणारी सत्यसमीप समीकरणे हावेलने (१९३८) सिद्ध केली आहेत.

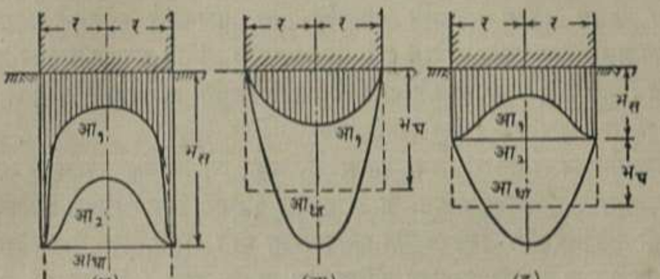
या परिच्छेदात उद्धृत केलेल्या सर्व संशोधनांत पादकतळावर कार्तनिक प्रतिबलांचा अभाव आहे असे गृहीत धरले आहे. प्रत्यक्षात अशी वस्तुस्थिती कधीच असत

नाही. भारित पदार्थांतील प्रतिबल-परिस्थितीवर कार्तनिक प्रतिबलांचा प्रभाव कसा पडतो, याचे संशोधन करण्याचा प्रयत्न फ्रोह्लिशने (१९३४) बॉसिनेस्कप्रणीत (१८८५) समीकरणांच्या आधारे केला होता. त्याने असा निष्कर्ष काढला की, घर्षणबलांचा रोख जर त्रिज्यात्मक दिशेने मध्यभागाकडे असेल, तर भारयुक्त क्षेत्राखाली घेतलेल्या आडव्या छेदावर निर्माण होणाऱ्या लंबदिक् प्रतिबलांत वाढ होईल असे अपेक्षिता येते. खाली जावे तसा हा प्रभाव कमी होत जातो. भारयुक्त क्षेत्राच्या दुप्पटीपेक्षा अधिक मूल्याच्या खोलीवर ही वाढ क्षुल्लक असते. पायाच्या तळावरील कार्तनिक प्रतिबलांच्या वितरणाविषयीचे संशोधन व्होगट्ने (१९२५) केले होते. पादकांच्या तळावरील कार्तनिक प्रतिबलाचा स्पर्शदाबाच्या वितरणावर जो परिणाम होतो त्याचा अभ्यास अद्याप झालेला नाही.

१४०. भारातील वाढीमुळे स्पर्शदाबाच्या वितरणात होणारा बदल : पादकावरील भारात केलेली वाढ भारित राशीचे स्थितिस्थापक समतोलाच्या अवस्थेतून, उत्तरोत्तर नम्य समतोलाच्या अवस्थेत स्थित्यंतर होण्यास कारणीभूत होते. भारित पदार्थांतील प्रतिबलांची तीव्रता आणि त्यांचे वितरण, यांवरच परिच्छेद १३८ मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे या स्थित्यंतराचा प्रभाव पडतो असे नाही, तर पादकावरील स्पर्शदाबाचे वितरणही त्यामुळे बदलते. मागील परिच्छेदात वर्णिलेल्या स्पर्शदाब विषयक सिद्धांतांतून असा निष्कर्ष निघाला होता की, ताठ पादकावर कोणत्याही परिमित मूल्याचा भार ठेवलेला असेल, तर पादकाच्या परिबाजवळील स्पर्शदाबाचे मूल्य अनंत असते. अशा प्रकारची प्रतिबल-परिस्थिती सहन करू शकेल, असा कोणताच पदार्थ नसल्यामुळे, भार लावताक्षणीच तेथे नम्य विसर्पणास प्रारंभ होतो. भारात वाढ होईल तशी नम्य विसर्पणाच्या विभागाची व्याप्ति वाढत जाते—आकृती १२३ इ आणि ई यांमध्ये हे दाखविलेच आहे—आणि त्याचबरोबर स्पर्शदाबाचे प्रत्यक्षातील वितरण आणि गणितसिद्ध केलेले वितरण, यांतील अंतर जास्त जास्त स्पष्ट होत जाते. आकृती १२३ इ आणि ई यांमध्ये दाखविलेले नम्य विसर्पणाचे दोन विभाग एकमेकांत विलीन होताक्षणीच जे स्पर्शदाबाचे वितरण निर्माण होते, ते घनराशीवरील भार त्या राशीच्या भारधारणक्षमतेइतका झाला असता, निर्माण होणाऱ्या वितरणासारखे होऊ लागते. या वितरणाची चर्चा परिच्छेद ४८ मध्ये केली आहे.

भारित पदार्थांच्या स्थितिस्थापक ते नम्य अवस्थांतराचा ताठ पादकतळावरील दाबाच्या वितरणावर होणारा परिणाम आकृती १२६ अ, आ आणि इ यांमध्ये दाखविला आहे. खूप खोलवर पसरलेल्या, समांग मृत्तिकाराशीच्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्या, रुंदी २ र आणि लांबी अनंत असलेल्या, पूर्णतया ताठ लादीच्या तळावरील स्पर्शदाब या आकृतीत दाखविले आहेत. प्रत्येक आकृतीतील भार, मूळच्या लहान मूल्यापासून पादकाच्या भारधारणक्षमतेपर्यंत वाढत जातो, असे गृहीत धरले आहे. तसेच

पादकाचा तळ घर्षणरहित आहे असेही आणखी गृहीत धरले आहे. पादकपरिघाच्या लगतच्या परिसरापलीकडे नम्य समतोलाची अवस्था प्रस्थापित करण्याच्या दृष्टीने फारच लहान असणाऱ्या भारामुळे निर्माण होणारे स्पर्शदाब $आ_1$ आलेखाच्या कोटींनी दाखविले आहेत. पादकावरील भार जेव्हा त्याच्या अंतिम भारधारणक्षमते-इतका होतो, तेव्हाचे स्पर्शदाब $आ_{धा}$ आलेखाच्या कोटींनी मिळतात. या दोन मर्यादांच्या मधल्या अवस्थेतील स्पर्शदाब $आ_2$ या आलेखाने व्यक्त केले आहेत. प्रत्येक



आकृती १२६ : अपारप्राय राशीचे समाकर्षण आणि अंतर्गत घर्षणकोन तसेच एकांक भाराची तीव्रता यांचा ताठ पट्टिका-पादकाच्या घर्षणरहित तळावरील स्पर्शदाबाच्या वितरणावर पडणारा प्रभाव. (अ) $\phi = ०$; (आ) स $= ०$; (इ) स आणि $\phi > ०$.

आकृतीत पट्टीच्या एकांक लांबीवर ठेवलेला, प्रत्येक अवस्थेतील एकूण भार, पादकाचा तळ आणि विशिष्ट आलेख यांनी सीमित केलेल्या क्षेत्राइतका आहे. आकृती १२६ अ मधील पादक अंतर्गत घर्षणरहित, आदर्श चिक्कण पदार्थावर ठेवलेले आहे; आणि भारात वाढ होईल, तसा हा पदार्थ आदर्श स्थितिस्थापक अवस्थेतून आदर्श नम्य अवस्थेप्रत जातो. आकृती १२६ आ मधील पादक आदर्श वालुकेवर ठेवलेले आहे आणि आकृती १२६ इ मध्ये ते वालुका व चिकण मृत्तिका यांच्या मिश्रणावर ठेवलेले आहे, असे गृहीत धरले आहे. $आ_{धा}$ आलेखांनी व्यक्त होणाऱ्या स्पर्शदाबांची चर्चा करून ते परिच्छेद ४८ मध्ये गणितसिद्ध केले आहेत.

भारित पदार्थामध्ये, सर्व ठिकाणी हूकचा नियम लागू पडतो असे गृहीत धरले असता, मिळणारे स्पर्शदाबाचे वितरण आकृती १२६ अ मध्ये तुटक रेषेने दाखविले आहे. हा आलेख आणि आकृती १२५ आ मध्ये $ठ = \infty$ अशा चिन्हाने दाखविलेला आलेख हे दोन्ही सारखेच आहेत. पट्टीच्या कडांजवळील स्पर्शदाबाचे सैद्धांतिक मूल्य अनन्त आहे. परिणामी, या परिच्छेदाच्या प्रारंभीच विशद केल्याप्रमाणे, भार लावताक्षणीच या कडांजवळ नम्य विसर्पणास प्रारंभ होतो. अर्थातच पट्टिकेच्या कडांजवळील स्पर्श-

दाबाचे मूल्य नम्य विसर्पणासाठी आवश्यक असलेल्या प्रतिबल-लक्षणांशी सुसंवादी असणाऱ्या महत्तम मूल्याइतके होते आणि तदनंतरच्या भारवाढीच्या प्रक्रियेतही त्याचे हे मूल्य टिकून राहते. भाराचे मूल्य लहान असताना मिळणारे स्पर्शदाबाचे वितरण *आ*$_1$ या सलग आलेखाने दाखविले आहे. भार वाढत गेल्यास, लादीच्या मध्याखालील स्पर्शदाब वाढत जातो (आलेख आ$_2$) आणि शेवटी दाबाचे वितरण समप्रमाण होते. ते *आ*$_{धा}$ या आडव्या रेषेने दाखविले आहे. या रेषेचा कोटी *भ*$_{स}$ म्हणजे भारित पदार्थाची भारधारणक्षमता आहे. *भ*$_{स}$ चे मूल्य ५·१४*स* इतके असते (समीकरण ४६ (९ऊ)). येथे *स* म्हणजे भारित पदार्थाचे समाकर्षण होय. पादकतळ घर्षणयुक्त असल्यास कडांजवळील अंतिम एकांक क्षेत्रस्थ दाब, मध्याजवळील अंतिम दाबाहून काहीसा अधिक असतो (आकृती ३९ अ मध्ये हे दाखविले आहे) आणि स्पर्शदाबाचे सरासरी मूल्य ५·७ *स* (समीकरण ४६ (७इ)) इतके असते.

समाकर्षणहीन वालुकाराशीच्या पृष्ठावर ठेवलेल्या लादीखालील स्पर्शदाब आकृती १२६ आ मध्ये दाखविले आहेत. या उदाहरणात पृष्ठभागाजवळ लादीच्या कडांजवळील लहानसे प्रतिबलदेखील उच्छेदकालीन प्रतिबलापेक्षा मोठे असते. त्यामुळे कडांजवळील स्पर्शदाबाचे मूल्य कधीही शून्याहून अधिक असू शकत नाही (परिच्छेद १६ पाहा). भारात वाढ होईल, त्याप्रमाणे तळाच्या मध्यभागाजवळील स्पर्शदाब वाढत जातो आणि उच्छेदक्षणी स्पर्शदाबाच्या वितरणाचा आलेख *आ*$_{धा}$ आलेखाने दाखविल्याप्रमाणे स्थूलमानाने परिवलयाकृती असतो. या अवस्थेत *भ*$_{घ}$ या सरासरी स्पर्शदाबाचे मूल्य, धारणगुणक *प*$_{घ}$ (समीकरण ४५ (४ आ)) $\times$ वालुकेची घनता $\times$ पादकाची अर्धी रुंदी या गुणाकाराइतके असते.

मृत्तिकेच्या भारधारणक्षमतेमध्ये समाकर्षणाबरोबरच अंतर्गत घर्षणाचाही वाटा असेल, तर अशा उदाहरणात भार वाढवीत नेल्यानंतर, क्रमाने येणाऱ्या अवस्था आकृती १२६ इ मधील *आ*$_1$, *आ*$_2$ आणि *आ*$_{धा}$ या आलेखांनी दाखविल्या जातात. आकृती ३९ इ मध्ये अशीच परिस्थिती दाखविलेली आहे. एखाद्या ताठ पादकाचा तळ दृढ वालुकास्तरात पृष्ठभागापासून बऱ्याच खोलीवर ठेवलेला असेल, तर तेथील स्पर्शदाबाचे वितरण अशाच प्रकारचे असेल असे अपेक्षिता येते.

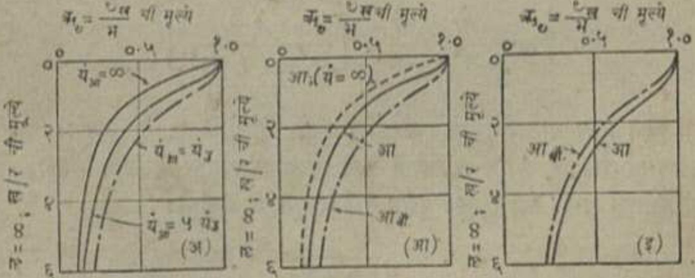
निम्नस्तरप्रतिक्रिया-गुणांक स्थिरमूल्य असतो (प्रकरण १६), या गृहीतावर आधारित असलेल्या गणितकृतींनुसार फलरूप भार तळाच्या गुरुत्वमध्यातून जात असेल, तर ताठ पादकाच्या तळावरील स्पर्शदाब नेहमीच पूर्णतया समप्रमाण असला पाहिजे. या अतिशय सुकरतादायी गृहीतामुळे होणाऱ्या संभाव्य चुकांचे स्वरूप आणि महत्त्व आकृती १२६ वरून स्पष्ट होतात.

१४१. अपारप्राय, लंबदैशिक घनराशी व समांग नसलेल्या अपारप्राय घनराशी यांच्या समतल पृष्ठभागावर उभा भार ठेवला असता, निर्माण

होणारी प्रतिबले : येथपर्यंत चर्चा केलेल्या सिद्धांतांतील, अपारप्राय घनराशी स्थिति-स्थापकतेच्या बाबतीत समदैशिक आणि समांग आहेत, असे गृहीत धरले होते. प्रत्यक्षात अशी परिस्थिती क्वचितच आढळते. स्थितिस्थापकत्वविषयक समदैशिकत्व आणि समांगत्व यांच्या आदर्श परिस्थितीहून वेगळेपणाची अगदी नेहमी अनुभवास येणारी उदाहरणे म्हणजे, मृत्तिकांची स्तरयुक्त किंवा पापुद्र्यांनी युक्त अशी रचना—जी व्यवहारतः सर्व निक्षेपित राशींचे एक व्यवच्छेदक लक्षण आहे—आणि दमनीयतेमध्ये खोलीनुसार प्रकर्षाने होणारी घट—जी बाळसर मृत्तिकांचे वैशिष्ट्य आहे—ही होत.

एकापाठोपाठ प्रकर्षाने दमनीय आणि अल्पदमनीय असे थर असलेल्या मृत्तिकाराशीला चहूबाजूंनी $ए_1 = ए_2 = ए_3$ अशा मूल्याचा कार्यसाधक दाब लावला असता, उत्पन्न होणारी स्तरलंब दिशेतील विकृती स्तरसमांतर दिशेतील विकृतीपेक्षा फारच लहान असते. प्रत्येक स्तरयुक्त मृत्तिकाराशीचा स्तरसमांतर दिशेतील सरासरी पाझर-गुणांक स्तरलंब दिशेतील गुणांकापेक्षा अधिक असतो, तसल्याच स्वरूपाची ही घटना आहे (परिच्छेद ८९ पाहा). स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांतात, बारीक थरांनी युक्त मृत्तिकाराशीच्या ठिकाणी गृहीत धरावयाची तत्सम वस्तू म्हणजे जिचा प्रत्येक स्तरसमांतर दिशेतील स्थितिस्थापत्व-मापांक $यं_{आ}$ या एकाच मूल्याचा आहे आणि उभ्या दिशेतील $यं_{उ}$ हा मापांक त्यापेक्षा लहान मूल्याचा आहे अशी अपारप्राय, समांग परंतु लंबदैशिक, स्थितिस्थापक घनराशी होय. वुल्फने (१९३५) $यं_{आ}/यं_{उ}$ या गुणांकाचे मूल्य *अ* आहे, असे गृहीत धरले. म्हणजेच—

$$\frac{यं_{आ}}{यं_{उ}} = अ \qquad [१]$$



आकृती १२७ : लवचिक पट्टिका-भाराच्या मध्यरेषेखाली येणारा एकांक उभा दाब आणि खोली यांमधील संबंध. (अ) आडव्या दिशेतील स्थितिस्थापकत्व-मापांक उभ्या दिशेतील मापांकापेक्षा अधिक आहे. (आ) आडव्या दिशेत, ताणल्या न जाणाऱ्या परंतु लवचिक थरांनी घनराशी प्रबलित झालेला आहे आणि (इ) स्थितिस्थापकत्व-मापांक खोलीनुसार वाढत जाणारा आहे. तुटक आलेख समदैशिक, समांग अशा अपारप्राय घनराशीला लागू पडणारे आहेत.

या गृहीतानुसार त्याने एखादा बिंदुभार, तसेच २र रुंदीचा आणि अनंत लांबीचा लवचिक पट्टिकाभार यांमुळे उत्पन्न होणारी प्रतिबले गणितसिद्ध केली. (तसेच होल पाहा १९४१.) एखाद्या पट्टिकेवर *भ* या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्याचा भार ठेवला असता, तिच्या मध्यरेषेपासून खाली *ख* खोलीवर उत्पन्न होणाऱ्या $\sigma_{ख}$ या लंबदिक्, उभ्या प्रतिबलावर उपर्युक्त भाराचा जो प्रभाव पडतो, तो दाखविणारी क $\sigma = \sigma_{ख}/भ$ ची मूल्ये आकृती १२७ अ मधील आलेखांच्या भुजांनी दिली जातात. तेथे खोली आणि पट्टिकेची अर्धी रुंदी यांतील $ख_{र}$ या गुणोत्तराची मूल्ये कोटी म्हणून स्थित केली आहेत. या आलेखांवरून असे दिसते की, खाली जावे तसे प्रतिबलांची मूल्ये कमी होतात. हे कमी होण्याचे प्रमाण $यं_{आ}/यं_{उ} = अ$ ची मूल्ये लहान असताना कमी असते आणि तीच उच्च असताना ते प्रमाण फारच मोठे असते. $यं_{आ} = यं_{उ}$ असेल, तर तेव्हाचा आलेख बॉसिनेस्कच्या समीकरणांचा अवलंब करून मिळणाऱ्या आलेखासारखाच असतो.

अधिभारजन्य प्रतिबलांच्या वितरणावर पडणाऱ्या स्तरयुक्त रचनेच्या प्रभावाचे संशोधन आणखी एका पद्धतीने करणे शक्य आहे. अपारप्राय घनराशी पूर्णतया लवचिक असणाऱ्या आडव्या पडद्यांच्या साहाय्याने प्रबलित केलेला आहे आणि त्यामुळे आडव्या दिशेतील विरूपत्वास पूर्णपणे प्रतिबंध केला जातो. परंतु उभ्या दिशेतील विरूपत्वास मात्र कुठलाही अडथळा येत नाही, असे या पद्धतीत गृहीत धरले जाते. या पद्धतीचा अवलंब करून वेस्टरगार्डने (१९३८) उभ्या दिशेत कारक असलेल्या *भा* या बिंदुभाराने ठ या बिंदुस्थानी निर्माण होणारे उभे, लंबदिक् प्रतिबल (आकृती ११८ अ) पुढील समीकरणाने व्यक्त केले :

$$\sigma_{ख} = \frac{भा}{ख^{२}} \cdot \frac{थ}{२\pi} \cdot \left[\frac{१}{थ^{२} + (त्र/ख)^{२}}\right]^{\frac{३}{२}} \qquad [२]$$

येथे त्र म्हणजे *भा* या भाराच्या कारकबिंदूपासून मोजलेले ठ या बिंदूचे आडव्या दिशेतील अंतर आहे आणि *ख* म्हणजे ठ ची भूपृष्ठभागापासून मोजलेली खोली आहे. *थ* हा स्थिरांक असून त्याचे मूल्य पुढील समीकरणाने दिले जाते :

$$थ = \sqrt{\frac{१ - २\,पॉ}{२(१ - पॉ)}} \qquad [३]$$

येथे पॉ म्हणजे दोन पडद्यांच्या मध्ये असलेल्या पदार्थाच्या बाबतीतील पॉयसनचे गुणोत्तर आहे. $पॉ = ०$ असल्यास, *थ* चे मूल्य $थ_{०} = \frac{१}{\sqrt{२}}$ असे होते.

$\sigma_{ख}$ चे बॉसिनेस्क-प्रणीत मूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$\sigma_{ख} = \frac{भा}{ख^{२}} \cdot \frac{३}{२\pi} \left[\frac{१}{१ + (त्र/ख)^{२}} \right]^{\frac{५}{२}} \qquad १३६\ (५)$$

२र रुंदीच्या, समप्रमाण-वितरित पट्टिकाभाराच्या मध्यरेषेखालील $\sigma_{ख}$ या उभ्या लंबदिक् प्रतिबलांच्या बाबतीतील $श्र\sigma = \sigma_{ख}/भ$ हीं प्रभावांकाची मूल्ये आणि $ख/र$ हें गुणोत्तर यांतील संबंध आकृती १२७ आ मधील *आ* या आलेखाने दाखविला आहे. बॉसिनेस्कप्रणीत प्रभाव-मूल्यांचा आलेख $आ_{बॉ}$ आणि $अ = \infty$ किंवा $यं_{आ} = \infty$ या परिस्थितीतील वुल्फप्रणीत उत्तरें देणारा आलेख $आ_{वु}$ या दोहोंच्या मध्ये हा आलेख पडतो. $पॉ = ०$ म्हणजेच $थ = थ_{०} = \frac{१}{\sqrt{२}}$ (समी. ३ पाहा) गृहीत धरून, वेस्टरगार्डप्रणीत समीकरणानुसार मिळणारी प्रभावमूल्ये फादमने (१९४१) गणितसिद्ध केली आहेत. त्याने सिद्ध केलेल्या कोष्टकांमध्ये बिंदुभार, रेषाभार आणि वर्तुळाकार किंवा आयताकार क्षेत्रावर ठेवलेले समप्रमाण-वितरित क्षेत्रभार यांच्या बाबतीतील प्रभावमूल्ये समाविष्ट केलेली आहेत.

बॉसिनेस्कने स्वीकारलेल्या आदर्श, स्थितिस्थापक घनराशी आणि मृत्तिका यांच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांच्या बाबतीत आढळून येणारे दुसरे वेगळेपण म्हणजे मृत्तिकाराशीत पृष्ठभागापासून खाली जावे, तशी दमनीयतेमध्ये होणारी घट हें होय. अशा मृत्तिकांच्या बाबतीत अधिमेलन सिद्धांत लागू पडत नाही, या वस्तुस्थितीतून हें वेगळेपण निर्माण होते. समाकर्षणहीन वालुकांमध्ये तर तें वैशिष्ट्याने दृष्टोत्पत्तीस येते. प्रयोगशाळेत प्रयोग करून तें सहज दाखविता येते.

ज्यावर आधीच सर्व बाजूंनी दाब लावलेला आहे, अशा पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या पदार्थाच्या नमुन्यावर आपण भार लावला, तर असे आढळते की, या भारामुळे उत्पन्न होणारी उभी विकृती आधीच्या दाबावर अवलंबून नसते. याउलट, हाच प्रयोग आपण वालुकेच्या नमुन्यावर केला, तर असे आढळते की, सर्व बाजूंनी आधीच लावलेल्या दाबाचे मूल्य वाढवीत नेले, तर नंतर लावलेल्या भारामुळे निर्माण होणाऱ्या विकृतीत घट होते. एखाद्या थरातील वाळू स्वतःच्या वजनामुळे सर्व बाजूंनी निर्माण होणाऱ्या दाबाच्या प्रभावाखाली असते. ह्या दाबाची तीव्रता थरपृष्ठापासून खोल जावे, तशी वाढत जाते. त्यामुळे प्रतिबलात झालेल्या विवक्षित फरकामुळे निर्माण होणारी वालुकेतील विकृती वालुका थराच्या पृष्ठापासून खाली जावे, तशी घटत जाते. वालुकांच्या या गुणधर्माची दखल तर घ्यावयाची, परंतु अधिमेलन सिद्धांत लागू पडतो, असे गृहीत धरण्यामुळे प्राप्त होणारा सोपेपणा तर सोडावयाचा नाही, हें साधण्यासाठी पुढील मार्गाचा अवलंब केला जातो. वालुकेचे वर्तन तंतोतंतपणे हूकच्या नियमानुसार होते, असे गृहीत धरावयाचे, परंतु त्याचबरोबर असेही गृहीत धरावयाचे की,

वालुकेच्या स्थितिस्थापकत्व–मापांकाचे मूल्य खोलीनुसार एका निश्चित सूत्रानुसार वाढत जाते. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता येईल की, वालुका प्रत्येक क्षितिजसमांतर दिशेत स्थितिस्थापक आणि समदैशिक आहे, परंतु उभ्या दिशेत मात्र ती स्थितिस्थापकतेच्या बाबतीत समांग नाही, असे या पद्धतीत आपण गृहीत धरतो.

अशा पदार्थातील प्रतिबले अनुमानित करण्याच्या उद्देशाने, ग्रिफिथ (१९२९) आणि फ्रोह्‌लिश (१९३४ अ) यांनी अदमनीय व स्थितिस्थापक घनराशीच्या बॉसिनेस्कप्रणीत सिद्धांताला (पॉयसनचे गुणोत्तर पॉ = ०·५) अंशतः अनुभवाधिष्ठित असा थोडासा बदल सुचविला; तो असा की, पॉ = ०·५ असल्यास अपारप्राय, समांग घनराशीतील ठ या कोणत्याही बिंदुस्थानी (आ. ११८ अ) *भा* या उभ्या बिंदुभारामुळे उत्पन्न होणारी प्रतिबले म्हणजे $७_१$ या एकदिक् प्रधान प्रतिबलाचे घटक असतात. या $७_१$ प्रतिबलाची तीव्रता बॉसिनेस्कच्या समीकरण १३५ (३) ने ठरविता येते.

$$७_१ = \frac{३\,भा}{२\,\pi\,ख^२} \cdot कोज्या^३\,\vartheta$$

या समीकरणातील $कोज्या^३\,\vartheta$ या पदातील घातांक बदलून त्याऐवजी द्र हा घातांक नियुक्त केल्यास, घनराशीच्या प्रत्येक आडव्या छेदावरील एकूण दाब *भा* या बिंदुभारा-इतका असला पाहिजे ही अटही पुरी झाली पाहिजे. ही अट पुरी करणारे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडले जाते :

$$७_१ = \frac{द्र\,भा}{२\pi ख^२}\, कोज्या^{द्र}\,\vartheta \qquad [४]$$

द्र या मूल्यास **केंद्रीकरण निर्देशांक** असे म्हटले जाईल, कारण त्याच्यामुळे *भा* या बिंदुभारामुळे आडव्या छेदावर निर्माण होणाऱ्या दाबाची तीव्रता निश्चित होते. त्याचे मूल्य असे निवडले पाहिजे की, तें राशीच्या समांग स्वरूपाहून असलेल्या वेगळे-पणाच्या प्रकाराशी सुसंगत असेल. या गृहीतानुसार ठ येथील उभी, त्रिज्यादिक् आणि परिधीय, लंबरूप प्रतिबले (आकृती ११८ अ) आणि कार्तनिक प्रतिबले पुढील समीकरणांनी प्राप्त होतात :

$$७_{ख} = \frac{द्र\,भा}{२\pi ख^२}\, कोज्या^{द्र+२}\,\vartheta \qquad [५\ अ]$$

$$७_{त्र} = \frac{द्र\,भा}{२\pi ख^२}\, कोज्या^{द्र}\,\vartheta\ ज्या^२\,\vartheta \qquad [५\ आ]$$

$$७_{प} = ० \qquad [५\ इ]$$

$$\text{ड}_{\text{ऋख}} = \frac{\text{द्र} \text{ भा}}{२\pi \text{ख}^२} \text{ कोज्या}^{\text{द्र}+१} \text{ ज्या } \vartheta \qquad [५ ई]$$

वालुकांच्या स्थितिस्थापकत्वाविषयी काही सुकरतादायी गृहीते स्वीकारून फ्रोहूलिशने असा निष्कर्ष काढला की, वालुकांच्या बाबतीतील केंद्रीकरण निर्देशांक स्थूलमानाने द्र = ४ असला पाहिजे. त्या निष्कर्षानुसार पट्टिकेच्या मध्यरेषेखालील उभ्या लंबरूप प्रतिबलावर पडणारा पट्टिकाभाराचा प्रभाव दाखविणारी $\text{ऋ}_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{ख}}}{\text{भ}}$ हीं मूल्ये आकृती १२७ इ मधील *आ* या आलेखाने दाखविली आहेत. $\text{आ}_{\text{बॉ}}$ या बॉसिनेस्कच्या आलेखाच्या संदर्भातील या आलेखाचे स्थान लक्षात घेता, असे दिसूते की, वालुकेच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांची प्रवृत्ती भारित पट्टिकेच्या मध्यरेषेखालील लंबरूप प्रतिबलांचे केंद्रीकरण वाढविण्याकडे असते.

सर्वसाधारणपणे बघता, हा सैद्धान्तिक निष्कर्ष स्थानिक अधिभार ज्यांवर कारक आहेत, अशा वालुकास्तरांच्या तळावरील लंबदिक् प्रतिबले प्रत्यक्षात मोजली असता, मिळणाऱ्या फलितांशी जुळणारा आहे. तथापि मोजलेली प्रतिबले आणि समीकरण १३५ (१ अ) च्या साहाय्याने गणितसिद्ध केलेली प्रतिबले यांत जो फरक पडतो तो फरक प्रयोगामध्ये वालुकास्तर आणि दाबमापक मंजूषा ज्यावर ठेवलेल्या असतात, त्या तळाच्या ताठपणातून बहुतांशाने निर्माण झालेला असतो. (परिच्छेद १४९ पाहा). ही वस्तुस्थिति बऱ्याच संशोधकांकडून दुर्लक्षिली गेली. त्यामुळे सिद्धांत आणि अनुभव यांतील विसंवाद टाळण्यासाठी सुचविलेल्या पद्धतींपैकी कित्येक पद्धती प्रायोगिक फलितांविषयीच्या अपुऱ्या समजावर आधारित आहेत (स्ट्रोह्श्नायडर १९१२, कोगलर आणि शायडिंग १९२७); म्हणून त्यांचा वापर थांबविला पाहिजे.

१४२. भारित क्षेत्राच्या आकारमानाचा अवसीदनावरील परिणाम : अपारप्राय, स्थितिस्थापक आणि समदैशिक राशीच्या पृष्ठावर एखादा बिंदु-भार ठेवला असेल, तर पृष्ठावरील कोणत्याही बिंदूचे अवसीदन समीकरण १३५ (५ अ) च्या साहाय्याने किंवा भारित क्षेत्र आयताकार किंवा चौरस असेल, तर समीकरण १३७ (३) आणि आकृती १२२ अ मधील माहितीच्या साहाय्याने ठरविता येते हें आपण पाहिले. या पद्धतीने मिळणाऱ्या फलितांचे स्वरूप पुढील उदाहरणांच्या द्वारे स्पष्ट होईल :

अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागावर २र × २र मापाच्या चौरस क्षेत्रावर समप्रमाण अधिभार ठेवला असता, त्याच्या मध्यबिंदूचे अवसीदन

$$\text{न}_० = २\cdot२४ \text{ भर} \frac{१ - \text{पॉ}^२}{\text{यं}}$$

असते. येथे यं हा यंगचा मापांक आहे आणि पॉ हें पॉयसनचे गुणोत्तर आहे. या क्षेत्राच्या कोपऱ्यांचे अवसीदन :

$$न_{को} = \frac{१}{२} न_{०}$$

आणि सरासरी अवसीदन

$$न_{स} = ०{\cdot}८४८\ न_{०} = १{\cdot}९०\ \frac{भ}{यं} (१ - पॉ^{२})\ र = र \times \text{स्थिरांक} \qquad [१]$$

असते. असाच भार त्र त्रिज्येच्या वर्तुळाकार क्षेत्रावर ठेवला असता, त्याच्या मध्यबिंदूचे अवसीदन पुढीलप्रमाणे होते.

$$न_{०} = २भत्र\ \frac{१ - पॉ^{२}}{यं} \qquad [२]$$

परिघाचे अवसीदन खालीलप्रमाणे होते;

$$न_{प} = \frac{२}{\pi} न_{०} \qquad [३]$$

आणि सरासरी अवसीदन पुढीलप्रमाणे असते.

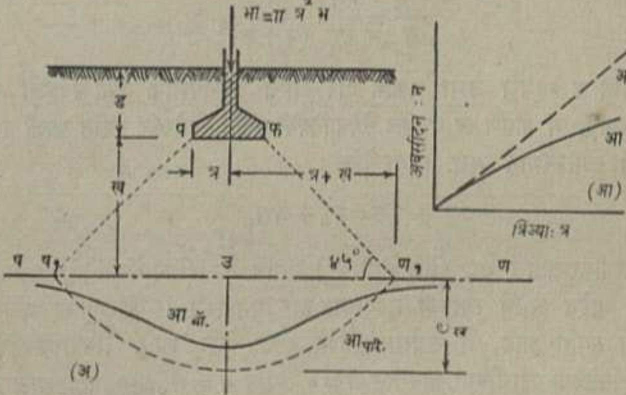
$$न_{स} = ०{\cdot}८५\ न_{०} = १{\cdot}७\ \frac{भ}{यं} (१ - पॉ^{२})\ त्र = त्र \times \text{स्थिरांक} \qquad [४]$$

(श्लायचर १९२६). समी. १ आणि ४ यांवरून असे दिसून येते की, अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्या चौरस आणि वर्तुळाकार क्षेत्रांचे सरासरी अवसीदन या क्षेत्रांच्या रुंदीच्या सरळ प्रमाणात वाढते.

या आणि अशाच दुसऱ्या उदाहरणांतून पुढील निष्कर्ष निघतो. आयताकार भारित क्षेत्राची लांबी व रुंदी यांतील गुणोत्तर ग व त्यावरील भार भ दिलेले असतील, तर त्या क्षेत्राच्या मध्याखालचे अवसीदन आणि सरासरी अवसीदन, हीं दोन्हींही भारित क्षेत्राच्या रुंदीच्या सरळ प्रमाणात वाढतात. वर्तुळाकार क्षेत्राचे अवसीदन त्रिज्येच्या सरळ प्रमाणात वाढते. तथापि हे निष्कर्ष एखाद्या उदाहरणात लागू करताना भारित पदार्थ स्थितिस्थापकत्वदृष्ट्या समदैशिक आणि समांग असून त्याचे आचरण हूकच्या नियमानुसार होते, असे गृहीत धरले होते, हें लक्षात ठेवले पाहिजे. हीं गृहीते आणि प्रत्यक्ष परिस्थिती यांमधील पुढील भेद आता लक्षात घेतले जातील : (अ) पदार्थाचे दमनीयत्व पृष्ठभागापासून खाली जावे, तसे कमी होत जाते. (आ) भारित पदार्थाचे आचरण हूकच्या नियमानुसार होत नाही. (इ) प्रतिबल-परिस्थिती न बदलताही विकृती कालपरत्वे वाढत जाते.

व्यवहारात नैसर्गिक मृत्तिकानिक्षेपांच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांची आपल्याला मिळणारी माहिती कधीही काटेकोरपणे अचूक असत नाही. या कारणास्तव बॉसिनेस्कने गृहीत धरलेल्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांहून प्रत्यक्षातील उपर्युक्त वेगळेपणांचा अवसीदनावर कसा प्रभाव पडतो, याचे काटेकोर विश्लेषण करावयाचे झाल्यास, तें केवळ शास्त्रीय जिज्ञासेसाठी करावयाचे एवढेच. व्यावहारिक उपयोगासाठी आवश्यक असणारी माहिती मिळवावयाची असेल, तर मूलतःच सुकरतादायी रूप दिलेल्या गृहीतांचा आधार घ्यावा लागतो.

पृष्ठभागापासून खोलीनुसार कमी होत जाणाऱ्या दमनीयत्वाच्या प्रभावाची सर्वसाधारण कल्पना येण्यासाठी आपण असे गृहीत धरू की, भारित क्षेत्राखाली *ख* खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबल आणि तदनुषंगिक उभी विकृती यांतील *म* हे गुणोत्तर पूर्णपणे *ख* वर अवलंबून आहे. तसेच आडव्या छेदावरील लंबरूप प्रतिबलांचे खरे वितरण विचारात न घेता, त्याऐवजी त्याला मिळतेजुळते, परंतु सोप्या समीकरणाने व्यक्त करता येईल, असे वितरण गृहीत धरू. उदाहरण म्हणून आपण वर्तुळाकार पादकाचे अवसीदन विचारार्थ घेऊ आणि असे गृहीत धरू की, पादकाच्या तळावरील स्पर्शदाबाच्या आलेखाचा छेद आकृतीच्या पातळीत परिवलयाकृती आहे.



आकृती १२८ : (अ) जिची दमनीयता खोलीनुसार घटत जाते, अशा मृत्तिकेवर ठेवलेल्या वर्तुळाकार, भारित पादकाखाली आडव्या छेदावर येणाऱ्या उभ्या दाबाचे वितरण; (आ) मृत्तिकेच्या थराची खोली अनंत आहे, अशा गृहीतानुसार मिळणारा पादकाची त्रिज्या आणि अवसीदन यांमधील संबंध (सलग रेषा).

आकृती १२८ अ मध्ये पादकाचा छेद दाखविला आहे. *पण* या आडव्या छेदावरील लंबरूप प्रतिबलांचे बॉसिनेस्कप्रणीत वितरण *आ*बॉ या आलेखाने दाखविले आहे.

गणिताच्या सुकरतेसाठी त्याऐवजी $आ_प$ हे परिवलय गृहीत धरू. या परिवलयाच्या कोटिमूल्यांनी छेदावरील उभ्या एकांक दाबाचे मूल्य मिळते. *षण* ही रेषा आणि परिवलय जेथे एकमेकांस छेदतात त्या $ष_1$ आणि $ण_1$ या बिंदूंतच पादकाच्या बाह्य कडांमधून क्षितिजाशी ४५° कोन करून काढलेल्या अनुक्रमे $पष_1$ आणि $फण_1$ या रेषा येऊन मिळतात, असे गृहीत धरले आहे. पादकाच्या मध्याखाली *षण* वरील एकांक क्षेत्रस्थ उभा दाब $\sigma_ख$ असेल, तर परिवलयाकृतीने व्यक्त होणारा एकूण दाब $१/२\ \pi (त्र+ख)^2 \sigma_ख$ इतका होतो. हा दाब पादकावरील एकूण भार $भा=\pi त्र^2 भ$ इतकाच असला पाहिजे; म्हणून

$$\pi त्र^2 भ = \pi/२\ (त्र+ख)^2 \sigma_ख$$

म्हणजेच—

$$\sigma_ख = २भ \frac{त्र}{(त्र+ख)^2}$$

हें मूल्य बॉसिनेस्कच्या समीकरणानुसार मिळणाऱ्या मूल्याहून काहीसे मोठे आहे. पादकाच्या मध्याखाली *ख* खोलीवर येणारी उभी विकृती पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\frac{\sigma_ख}{म} = \frac{२भ}{म} \cdot \frac{त्र^2}{(त्र+ख)^2}$$

या ठिकाणी *म* म्हणजे उभा एकांक दाब आणि तदनुषंगिक उभी विकृती यांतील गुणोत्तर आहे. *म* आणि *ख* यांतील संबंधाविषयी सर्वांत सोईस्कर गृहीत खाली दिलेल्या सरळ-रेषा समीकरणाने व्यक्त करता येईल :

$$म = म_० + अख \qquad [५]$$

या समीकरणातील $म_०$ (ग्रॅम सेंमी. ^{२}) आणि अ (ग्रॅम सेंमी. $^{-३}$) हे प्रायोगिक स्थिरांक आहेत आणि त्यांच्या मूल्यांच्या द्वारे घनराशी स्थितिस्थापकत्वदृष्ट्या किती प्रमाणात समांग आहे, हे सर्वसाधारणपणे व्यक्त केले जाते. स्थितिस्थापकत्वदृष्ट्या समांग असलेल्या पदार्थांच्या बाबतीत $अ=०$ आणि $म=म_०$ असतात. याउलट, ज्या पदार्थांचे दमनीयत्व, खोल जावे तसे कमी होत जाते, त्याच्या बाबतीत $म_०$ आणि *अ* हीं दोन्हीही पदे शून्यापेक्षा अधिक मूल्यांची असतात.

समीकरण ५ आधारभूत मानल्यास, पादकाच्या अवसीदनाबाबत आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$न = \int^{\infty} \frac{२भ}{म_० + अख} \cdot \frac{त्र^2}{(त्र+ख)^2} \cdot dख = २भत्र \frac{म_० - त्रअ\left(१ + लघु\dfrac{म_०}{त्रअ}\right)}{(म_० - त्रअ)^2} \qquad [६]$$

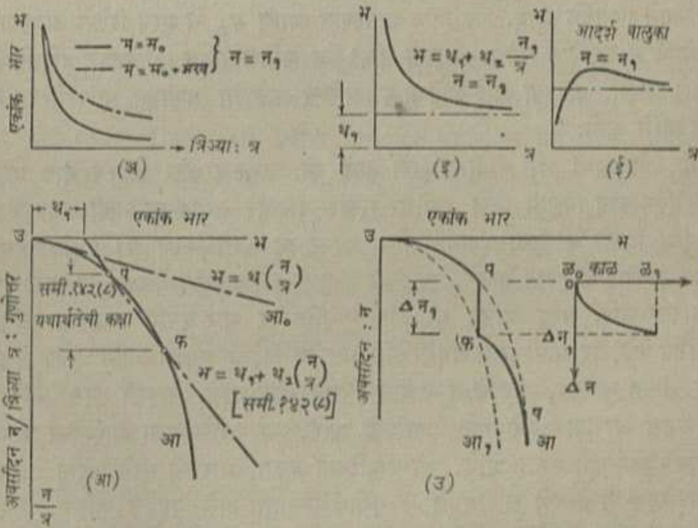
भारित पदार्थ पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असेल, तर $अ = ०$ होऊन अवसीदनाचे मूल्य खालीलप्रमाणे मिळते :

$$न = २भत्र \frac{१}{म_०}$$

$अ = ०$ (पूर्णतया समांग पदार्थ) असेल, तर न चे अचूक मूल्य पुढील समीकरणाने दिले जाते, हें वर पाहिलेंच आहे.

$$न = २भत्र \frac{१ - पॉ^२}{यं} \qquad १४२\ (२)$$

$म_० = \frac{यं}{१ - पॉ^२}$ असेल, तर हीं दोन्ही समीकरणे एकच होतात. पादकाची त्रिज्या आणि त्याचे अवसीदन यांतील $अ = ०$ असताना मिळणारा संबंध आकृती १२८ आ मध्ये $आ_०$ या सरळ रेषेने दाखविला आहे. मृत्तिकांचा विचार करताना अ चे मूल्य शून्याहून अधिक आहे, असेच नेहमी गृहीत धरले पाहिजे. तसे केल्यास त्र



आकृती १२९ : वर्तुळाकार क्षेत्राचे $न_१$ मूल्याचे अवसीदन होण्यासाठी आवश्यक असलेला एकांक क्षेत्रस्थ भार. (अ) आदर्श स्थितिस्थापक राशीवर; (इ) चिकण-मृत्तिकेवर; (ई) वाळूवर. (आ) स्थिर क्रमाने भार लावीत गेल्यास, एकांक क्षेत्रस्थ भार आणि अवसीदन यांमध्ये मिळणारा प्रायोगिक संबंध; (उ) (आ) प्रमाणेच, परंतु भार लावत असताना मध्येच एकदा खंड पडला आहे.

आणि *न* यांमधील संबंध दाखविणारा आलेख *आ*$_{प्र}$ सारखा मिळतो. $म_०$ चे मूल्य तेंच राहून *त्र* ची मूल्ये वाढत गेल्यास *अ* चे मूल्य जितके अधिक, तितका आलेखाचा उतार त्वरेने कमी होतो.

अवसीदनाचे $न_१$ हें मूल्य दिलेले असेल, तर भारित क्षेत्राची त्रिज्या आणि एकांक क्षेत्रस्थ भार यांतील संबंधही समीकरण ६ ने ठरविता येतो. *न* ऐवजी $न_१$ नियुक्त करून हें समीकरण *भ* साठी सोडविले असता, पुढील मूल्य मिळते :

$$भ = न_१ \cdot \frac{१}{२त्र} \cdot \frac{(म_० - त्रअ)^२}{म_० - त्रअ\left(१ + लघु\frac{म_०}{त्रअ}\right)} \qquad [७]$$

$अ = ०$ असल्यास, समीकरण ७ चे स्वरूप पुढीलप्रमाणे होते :

$$भत्र = \frac{१}{२} न_१ \, म_० = स्थिरांक$$

हें अतिपरिवलयाचे समीकरण आहे. हें अतिपरिवलय आकृती १२९ अ मध्ये सलग आलेखाने दाखविले आहे. $अ > ०$ असल्यास आणि $म_०$ चे मूल्य दिलेले असल्यास, *त्र* आणि *भ* यांमधील संबंध आकृती १२९ अ मधील तुटक आलेखाने दाखविल्या-प्रमाणे असतो. पहिल्या आलेखापेक्षा हा आलेख आडव्या अक्षाप्रत असंपाती पद्धतीने कमी त्वरेने जातो.

या गणितामध्ये असे गृहीत धरले आहे की, उभा एकांक क्षेत्रस्थ दाब आणि तदनुषंगिक उभी विकृती यांचे गुणोत्तर एकांक दाबावर अवलंबून नाही. त्यामुळे *त्र* चे मूल्य दिलेले असल्यास, गणितसिद्ध अवसीदन (समीकरण ६) एकांक क्षेत्रस्थ दाबाच्या सरळ प्रमाणात वाढते. हा संबंध आकृती १२९ *आ*मध्ये $आ_०$ या सरळ रेषेने दाखविला आहे. परंतु आपण प्रत्यक्षातील मृत्तिकेवर भार-प्रयोग करून या संबंधाचे संशोधन केले, तर आपल्याला नेहमी असे आढळते की, अवसीदन आणि एकांक क्षेत्रस्थ भार यांतील गुणोत्तर, भाराचे मूल्य वाढेल, तसे वाढत जाते. आकृती १२९ आ मध्ये ही घटना *आ* या आलेखाने दाखविली आहे. या आलेखाचा प्रारंभाचा भागच केवळ स्थूलमानाने सरळ आहे. ही वस्तुस्थिती बघता, भारांची मूल्ये लहान असता-नाच केवळ समीकरणे ६ आणि ७ यथार्थ ठरतात असे म्हटले पाहिजे. मोठ्या भाराखाली अवसीदनाच्या प्रमाणात होणारी वाढ, ही मृत्तिकांचे वर्तन हूकच्या नियमानुसार होत नाही, या वस्तुस्थितीचा परिपाक आहे. एकांक क्षेत्रस्थ भाराचे मूल्य दिलेले असताना, भारित वर्तुळाकार क्षेत्राची त्रिज्या आणि अवसीदन यांतील संबंधावर पडणारा उपर्युक्त वस्तुस्थितीचा प्रभाव स्थूलमानाने अजमावण्यासाठी आकृती १२९ आ मधील *आ* या आलेखाच्या मधल्या भागासाठी पुढील

समीकरणाने व्यक्त होणारी रेषा नियुक्त करू :

$$म = थ_1 + थ_2 \left(\frac{न}{त्र}\right) \qquad [८]$$

हें समीकरण आकृतीत दाखविलेल्या कक्षेतच लागू आहे. तसेच स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांच्या बाबतीत साधारणपणे समांग असलेल्या मृदू, चिक्कण मृत्तिकेच्या आडव्या थरावर भार ठेवलेला आहे, असे आपण गृहीत धरले, तर $थ_1$ आणि $थ_2$ची मूल्ये त्र या त्रिज्येवर अवलंबून राहणार नाहीत. या गृहीतांनुसार, $न_1$ हें विवक्षित सरासरी अवसीदन निर्माण करण्यास आवश्यक असलेला भार पुढीलप्रमाणे मांडता येतो.

$$म = थ_1 + थ_2 \frac{न_1}{त्र} \qquad [९]$$

हें समीकरण अतिपरिवलयाचे आहे. आकृती १२९ इ पाहा. या आकृतीत $म = थ_1$ या समीकरणाने क्षितिजसमांतर असंपात रेषा दाखविली जाते. हें समीकरण पुढील स्वरूपातही मांडता येईल :

$$म = थ_1 + \frac{थ_2 न_1}{२} \frac{२त्र\pi}{त्र^2\pi} = थ_1 + क_प \frac{प_{त्र}}{आ} \qquad [१०]$$

या ठिकाणी $प_{त्र}$ आणि *आ* म्हणजे भारित क्षेत्राची परिमिती व क्षेत्रफळ आहेत आणि $थ_1$ (ग्रॅम सेंमी.$^{-2}$) आणि $क_प$ (ग्रॅम सेंमी.$^{-1}$), हे प्रायोगिक स्थिरांक आहेत. हे स्थिरांक निरनिराळ्या त्रिज्यांच्या वर्तुळाकार क्षेत्रांवर भार-प्रयोग करून ठरविता येतात. हौसेलने (१९२९) प्रयोग करून असे दाखविले की, चिक्कण मृत्तिकेवर ठेवलेल्या चौरस आणि आयताकार भारित क्षेत्रांच्या बाबतीत सुद्धा समीकरण १० लागू पडते, परंतु हें विधान प्रयोगात अभिप्रेत असलेल्या परिस्थितीच्या कक्षेपुरतेच खरे आहे. $न_1$ हें अवसीदन निर्मिण्यासाठी आवश्यक असलेला एकूण भार पुढीलप्रमाणे असतो :

$$भा = आम = आथ_1 + क_प\, प_{त्र} \qquad [११]$$

$क_प$ (ग्रॅम सेंमी.$^{-1}$) या पदास **परिमितीय कर्तन** म्हणतात. या समीकरणांच्या यथार्थत्वासाठी आवश्यक असलेल्या अटी वर निवेदित केल्या आहेतच.

परिमितीय कर्तन या शब्दप्रयोगामुळे $क_प$ हे पद म्हणजे परिमितीच्या एकांक लांबीवरील कार्तनिक विरोध आहे, असा चुकीचा समज होण्याचा संभव आहे. तेव्हा हें आवर्जून स्पष्ट केले पाहिजे की, लांबीच्या मापात कार्तनिक विरोध सांगता येईल, असा पदार्थच अस्तित्वात नाही. $क_प$ या पदाचे प्राकृतिक महत्त्व लक्षात येण्यासाठी आपण पूर्णतया स्थितिस्थापक, समदैशिक आणि समांग असणाऱ्या पदार्थांच्या बाबतीत समीकरण ११ लावू व त्यातून मिळणारे फलित आणि

विवक्षित अवसीदन निर्मिण्यासाठी काटेकोर, शास्त्रपूत समीकरणानुसार मिळणाऱ्या भाराच्या मूल्याशी त्याची तुलना करू. अशा पदार्थांच्या बाबतीत आकृती १२९ आ मधील आणि समीकरण ११ मधील $थ_१$ चे मूल्य शून्य ठरते आणि *भा* चे मूल्य पुढीलप्रमाणे होते :

$$भा = क_प \, प_त्र$$

२र × २र अशा चौरस क्षेत्रावर एकांक क्षेत्रस्थ भार *भ* असेल, तर एकूण भार $भा = ४र^२ भ$ होईल. चौरसाची परिमिती $प_त्र = ८र$ होईल. हीं मूल्ये मागील समीकरणात नियुक्त करून आणि *भ* साठी तें सोडवून आपल्याला *भ* चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळेल.

$$भ = क_प \frac{८र}{४र^२} = २क_प \frac{१}{र} \qquad [१२]$$

भ म्हणजे *न* इतके अवसीदन होण्यासाठी आवश्यक असलेल्या भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य आहे. एकांक क्षेत्रस्थ भार आणि भारित क्षेत्राचे सरासरी अवसीदन यांतील संबंध देणारे समीकरण १४२ (१) खाली मांडले आहे :

$$न = १\cdot९ \, भ \frac{१ - पॉ^२}{यं} \cdot र$$

$न_१$ इतके अवसीदन निर्मिण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य पुढीलप्रमाणे असेल :

$$भ = न_१ \frac{यं}{१\cdot९ \, (१ - पॉ^२)} \cdot \frac{१}{र}$$

हें समीकरण आणि समीकरण १२ एकत्र विचारात घेऊन पूर्णतया स्थितिस्थापक पदार्थांच्या बाबतीत आपल्याला $क_प$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$क_प = \frac{न_१ यं}{३\cdot८ \, (१ - पॉ^२)} \qquad [१३]$$

या समीकरणावरून हे स्पष्ट होईल की, $क_प$ हे परिमितीय कर्तन म्हणजे काही एखादा विशिष्ट कार्तनिक विरोध नाही, की ज्याचा उगम भारित क्षेत्राच्या परिमितीच्या ठिकाणी असावा. $क_प$ या पदाला तसे प्राकृतिक महत्त्व काहीच नाही. तो केवळ ग्रॅ. सेंमी.$^{-१}$ हीं परिमाणे असलेला एक प्रायोगिक गुणांक आहे. समीकरण १० च्या उजव्या बाजूकडे $थ_१$ हें पद प्रविष्ट होण्यास भारित पदार्थांचे स्थितिस्थापकतेच्या बाबतीतील अपूर्णत्व कारणीभूत होते. आकृती १२९ आ पाहा. भारित पदार्थ जर पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असेल, तर हे पद नाहीसे होऊन $भा = क_प - प_त्र$ होतो. या ठिकाणी हेंही सांगितले पाहिजे की, अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीच्या पृष्ठभागा-

पैकी मर्यादित क्षेत्रावर भार लावला असता, पृष्ठभागाचा प्रत्येक बिंदू खाली सरकतो. हा भार वाढविला असता, भारित क्षेत्राभोवतीच्या पृष्ठभागाचे अवसीदन वाढते. याउलट, आपण तोच भार अपारप्राय परंतु स्थितिस्थापकत्वदृष्ट्या अपूर्ण असलेल्या घनराशीवर–उदाहरणार्थ, चिक्कण मृत्तिकेवर–लावला, तर भाराचे मूल्य *फ* (आकृती १२९ आ) या बिंदूच्या भुजेइतके होता क्षणीच, भारित क्षेत्राच्या सीमांपलीकडचा भाग उंचावतो. या घटनेला **किनार-क्रिया** म्हणतात. तिचा उल्लेख परिच्छेद ४६ मध्ये केला आहे आणि आकृती ३७ अ आणि आ यांमध्ये ती दाखविली आहे.

पूर्णत्वाने समाकर्षणहीन वालुकेच्या बाबतीतसुद्धा, विवक्षित आकारमानाच्या क्षेत्रावरील भार वाढवीत गेल्यास, होणारे अवसीदन भारातील वाढीच्या प्रमाणापेक्षा अधिक त्वरेने वाढते. आकृती १२९ आ मध्ये *आ* आलेखाने हें दाखविले आहे. तथापि समीकरण ९ मधील $थ_१$ आणि $थ_२$ हीं पदे *त्र* या त्रिज्येवर अवलंबून नाहीत, असे स्थूलमानाने सुद्धा म्हणता येत नाही. या टोकाच्या उदाहरणाचे सैद्धांतिक संशोधन आइकहॉर्नने (१९३१) केले आहे. या संशोधनाची फलिते आकृती १२९ ई मध्ये दाखविली आहेत. $न_१$ हें विवक्षित अवसीदन निर्मिण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य $त्र_१$ या विशिष्ट त्रिज्येच्या वेळी महत्तम असेल, या निष्कर्षाचा प्रत्यय प्रयोगाद्वारे पुनः पुनः आला आहे.

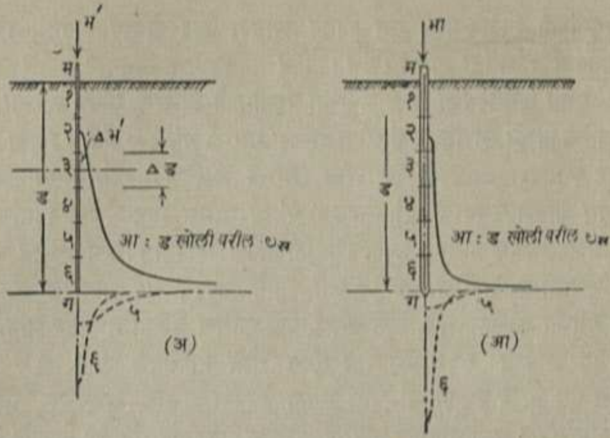
काळाचा अवसीदनावरील प्रभाव आकृती १२९ उ मध्ये दाखविला आहे. एखाद्या मृत्तिकाराशीवर भार-प्रयोग केला असता, भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य आणि अवसीदन यांच्या बाबतीत मिळणारा संबंध या आकृतीत दाखविला आहे. भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य स्थिर प्रमाणात वाढवीत नेले, तर होणारे अवसीदन दाखविणारी रेषा म्हणजे *उपपआ* हा सलग आलेख होय. याउलट, जर भार न वाढविता मध्येच काही तास किंवा दिवस म्हणजेच $ळ_०$ ते $ळ_१$ या कालावधीत तसाच ठेवला, तर आलेखामध्ये त्या काळात *पफ* ही उभी रेषा मिळते. कोणत्याही स्वरूपाच्या मृत्तिकेत असेच घडते. भारमूल्य स्थिर ठेवले असताना मिळणारा काळ आणि अवसीदन यांतील संबंध *पफ* या रेषेच्या उजव्या बाजूस दाखविला आहे. भार वाढविण्याची क्रिया पूर्वीच्याच क्रमानुसार $ळ_१$ या कालानंतर जर पुढेही चालू ठेवली, तर भार-अवसीदन आलेख हळूहळू *उपपआ* या आलेखाप्रत जाऊ लागतो. *उपपआ* म्हणजे भार-वाढीत खंड पडू न देता होणारे अवसीदन दाखविणारा मूळचा आलेख आहे. *पफ* या उभ्या रेषेने दाखविल्या जाणाऱ्या कालजन्य परिणामाचे तौलनिक महत्त्व आणि त्याची प्राकृतिक कारणे निरनिराळ्या मृत्तिकांच्या बाबतीत निरनिराळी असतात. वालुका किंवा वाळसर मृत्तिकांवरील प्रयोगांत काळाचा परिणाम, मुख्यतः प्रतिबल-परिस्थितीतील बदलानुसार आवश्यक असणाऱ्या वालुकाकणांच्या फेररचनेस लागणाऱ्या विलंबामुळे दिसून येतो; तर चिक्कण मृत्तिकांच्या बाबतीत, प्रकरण १३ मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे त्यांच्या रंध्रांत असलेल्या

पाण्याच्या स्थैतिक जलीय समतोलात अल्पकाल विक्षेप आल्यामुळे मुख्यतः तो दिसून येतो. दोन्ही उदाहरणांत अंतिम फलित एकच असते, तें म्हणजे भारित पदार्थाचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म, भार लावण्याच्या वेगावरच जणू अवलंबून आहेत, हे होय.

शेवटी सांगावयाचे म्हणजे मागील काही परिच्छेदांत मांडलेल्या सिद्धांतांतून असे गृहीत धरले आहे की, ज्यावर भार ठेवला जातो त्या दमनीय पदार्थाची खोली अनंत आहे. प्रत्यक्षात प्रत्येक दमनीय मृत्तिकास्तराची जाडी परिमित असते आणि तो सापेक्षतः अदमनीय असलेल्या थरावर आधारित असतो. भारित क्षेत्र आणि हा तळाचा थर यांतील अंतर हा आणखी एक बदलणारा घटक आहे. या घटकाचा अवसीदनावर जो प्रभाव पडतो त्याची चर्चा परिच्छेद १५० मध्ये केली जाईल. त्याचे स्पष्टीकरण आकृती १३८ मध्ये केलेले आहे.

अवसीदन आणि भारित क्षेत्राचे आकारमान यांतील संबंधाविषयी, सांप्रत आपल्याला जें ज्ञान आहे, त्याचे येथवर केलेले समालोचन असे दर्शविते की, हा संबंध तसा क्लिष्ट आहे. ज्यांचे स्वरूप बदलत जाते, अशा अनेक घटकांचा संबंध त्यात येतो, त्यामुळे सर्व उदाहरणांत लागू पडेल, अशा सोप्या सूत्राने तो व्यक्त करणे शक्य नाही. याच कारणास्तव, लहान प्रमाणावर केलेले भारप्रयोग मर्यादित प्रमाणातच उपयुक्त ठरतात. अशा प्रयोगांची फलिते मोठ्या क्षेत्रावर ठेवलेल्या भारामुळे होणाऱ्या अवसीदनाच्या बाबतीत लागू केल्यास, अतिशय चुकीचे निर्णय घेतले जाऊ शकतात. अशा पद्धतीने निर्णय घेण्याचा प्रयत्न कोणत्याही प्रकरणात करण्यापूर्वी, लहान क्षेत्राचे अवसीदन आणि मोठ्या क्षेत्राचे अवसीदन यांमधील फरकावर ज्यांचा प्रभाव पडण्याचा संभव आहे अशा सर्व गोष्टींचा काळजीपूर्वक विचार केला पाहिजे. त्यांपैकी सर्वांत पहिली गोष्ट म्हणजे, खोल जावें तसे मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वात होणारे बदल ही आहे. पूर्वीच्या काळी या गोष्टीकडे नेहमीच दुर्लक्ष झाले होते.

१४३. स्थूणांच्या त्वचाघर्षणाच्या द्वारे संक्रमित होणाऱ्या भारामुळे अपारप्राय घनराशीत निर्माण होणारी प्रतिबले : आकृती १३० अ मध्ये फलकस्थूणावलीचा एक छेद दाखविला आहे. तिच्या माथ्याच्या कडेवरील भाराचे एकांक लांबीवरील मूल्य *भ'* आहे. आकृती १३० आ मध्ये एका आधार-स्थूणेचा छेद दाखविला आहे. तिच्यावरील भार *भा* आहे. दोन्ही ठिकाणी मृत्तिकाराशी समांग आहे. स्थूणांच्या अग्रांचा विरोध फारच कमी असल्यामुळे, व्यवहारतः संपूर्ण भार, स्थूणा आणि मृत्तिका यांमधील स्पर्शपृष्ठावर जीं कार्तनिक प्रतिबले कारक होतात त्यांच्या द्वारे मृत्तिकेवर संक्रमित केला जातो. हा कार्तनिक विरोध विषमाकर्षणजन्य किंवा घर्षणजन्य किंवा दोन्हीही प्रकारांचा असणे संभवनीय असते. स्पर्शपृष्ठावरील या कार्तनिक विरोधास प्रचलित पद्धतीनुसार त्वक्-घर्षण म्हटले जाईल; मग त्याची



आकृती १३० : (अ) भारित स्थूणावलीच्या तळकडेला लागून घेतलेला आडवा छेद आणि (आ) एका भारित स्थूणेच्या तळाग्राला लागून घेतलेला छेद. या छेदांवरील उभ्या दाबाचे आसन्नमान वितरण.

प्राकृतिक कारणे काहीही असोत. पुढील विवेचन चिकण मृत्तिकेत ठोकलेल्या स्थूणांविषयी आहे. भारित स्थूणेमुळे भोवतालच्या पदार्थात निर्माण होणारी प्रतिबलपरिस्थिती गणितसिद्ध करण्यासाठी स्थूणेवरील प्रतिबलांचे वितरण माहीत असणे आवश्यक आहे. चिकण मृत्तिकेतील स्थूणांच्या त्वचेवरील प्रतिबल-परिस्थिती, पूर्णत्वाने स्थिति थापक आणि बंधनगुणयुक्त असणाऱ्या धारक-पदार्थामध्ये निविष्ट असलेल्या स्थूणांच्या त्वचेवरील परिस्थितीसारखीच बरीचशी असेल, असे अपेक्षिता येईल.

जिलेटिनमध्ये निविष्ट केलेल्या, ताठ भिंतीवर भार लावून केलेल्या प्रारूप प्रयोगांवरून हे माहीत झालेले आहे की, राशीच्या पृष्ठभागापासून खालच्या दिशेने भिंतीच्या तळापासून थोडे अंतर वरपर्यंत, कार्तनिक प्रतिबले जवळजवळ समप्रमाणात वितरित असतात. खालच्या कडेच्या थोडेसे वर, या प्रतिबलात वाढ होते आणि तळाशी त्यांचे मूल्य फलक-स्थूणा आणि भोवतीचा पदार्थ यांतील बंधन-गुणापेक्षा अधिक होते. परंतु व्यावहारिक दृष्ट्या विचार करता, समप्रमाण वितरणातील हा विक्षेप दुर्लक्षिता येईल. म्हणून भारित फलक-स्थूणांच्या निविष्ट भागाच्या पृष्ठावरील ड हें कार्तनिक प्रतिबल फलक-स्थूणावलीच्या दर एकांक लांबीवरील एकूण भार भ' भागिले फलक-स्थूणा आणि मृत्तिका यांमधील एकूण स्पर्शक्षेत्र, म्हणजेच—

$$ड = \frac{भ'}{२ड}$$

इतके असते असे गृहीत धरणे समर्थनीय ठरते.

फलकस्थूणांच्या तळाच्या कडेला लागून आडवा छेद घेतला असता, त्यावरील लंबदिक्-प्रतिबलांची तीव्रता आणि त्यांचे वितरण यांविषयीचे अनुमान पुढील पद्धतीने करता येते. प्रथम फलकस्थूणा Δ *ह* उंचीच्या पट्टयांमध्ये विभागू. प्रत्येक पट्टीच्या एकांक लांबीच्या प्रत्येक बाजूने मृत्तिकेवर संक्रमित होणारा भार Δ *भ*$'/२ =$ *ड* Δ *ह* इतका असेल. *ह* खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावरील उपरोक्त लंबदिक्-प्रतिबले अनुमानण्यासाठी आपण प्रथम बॉसिनेस्कच्या सिद्धांतानुसार Δ *भ*$'$ या प्रत्येक भार-अंशाने निर्माण होऊ शकतील, अशी लंबदिक्-प्रतिबले ठरवू. त्यासाठी प्रत्येक पट्टीच्या निम्म्या उंचीतून घेतलेला छेद हाच एखाद्या घनराशीचा पृष्ठभाग आहे, असे कल्पून या काल्पनिक पृष्ठभागावर Δ *भ*$'$ हा रेषाभार कारक आहे, असे समजू. पट्टी क्रमांक ३ च्या मध्यातून जाणारे असे काल्पनिक पृष्ठ आकृती १३० अ मध्ये तुटक रेषेने दाखविले आहे. Δ *भ* म्हणजे हे काल्पनिक पृष्ठ आणि स्थूणा यांमधील संपात रेषेच्या एकांक लांबीवरील उभा भार ठरतो. रेषाभारामुळे घनराशीतील उपरोक्त आडव्या छेदावर निर्माण होणारी लंबरूप प्रतिबले समीकरणे १३६ (१ अ) च्या साहाय्याने त्वरित ठरविता येतील. *ग* मधून काढलेल्या आडव्या रेषेच्या खाली क्रमांक ५ व ६ या पट्टयांच्या बाबतीतील अशी प्रतिबले दाखविली आहेत. अशा प्रकारे *ग* मधून काढलेल्या आडव्या छेदावरील कोणत्याही बिंदुस्थानाचे लंबरूप प्रतिबल मिळविण्यासाठी Δ *भ*$'$ मूल्याच्या सर्व भारांशांनी त्या ठिकाणी निर्मिलेल्या प्रतिबलांची बेरीज केली पाहिजे. तसे करून आडव्या छेदाच्या एका बाजूकडे मिळणारी प्रतिबले *आ* आलेखाच्या कोटीमूल्यांनी दाखविली आहेत (आकृती १३० अ).

अशाच प्रकारची कृती एका सुट्या स्थूणेच्या तळालगत घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबदिक्-प्रतिबले अनुमानण्यासाठीही वापरता येईल (आकृती १३० आ). अशा स्थूणेच्या पृष्ठावरील कार्तनिक प्रतिबलांचे वितरणसुद्धा व्यवहारतः समप्रमाणात असते असे प्रयोगांती आढळून आले आहे. या समस्येचे उत्तर स्थूलमानाने मिळवायचे असेल, तर आपण स्थूणेचे काही भाग पाडू. मग या प्रत्येक भागावर कारक असणाऱ्या कार्तनिक-प्रतिबलाच्या ऐवजी तेथे बिंदुभार आहे, असे गृहीत धरू. तसेच भागाच्या मध्यातून जाणारी पातळी, हा अपारप्राय राशीचा पृष्ठभाग आहे व त्यावर हा बिंदुभार कारक आहे, असेही गृहीत धरू. या गृहीतानुसार मिळणारी प्रतिबले परिशिष्टातील कोष्टक १ च्या (बिंदुभाराची प्रभावमूल्ये देणारे कोष्टक) साहाय्याने ठरविता येतील. क्र. ५ व ६ या भागांच्या बाबतीत असे गणित मांडून मिळणारी फलिते, आकृती १३० *आ* मध्ये दाखविली आहेत. तेथील *आ* या आलेखाच्या कोटींची मूल्ये व्यक्तिशः प्रत्येक भागाच्या बाबतीत मिळणाऱ्या आलेखांच्या कोटींच्या बेरजेइतकी आहेत. या पद्धतीत होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते. कारण प्रत्येक भागाच्या मध्याच्या वर असलेल्या पदार्थांचे अस्तित्व त्याच्या खाली असणाऱ्या पदार्थांत बिंदुभाराने निर्माण केलेली प्रतिबले कमी करण्यास कारणीभूत होत असते. या पद्धतीचा अवलंब केल्याने सैद्धांतिक

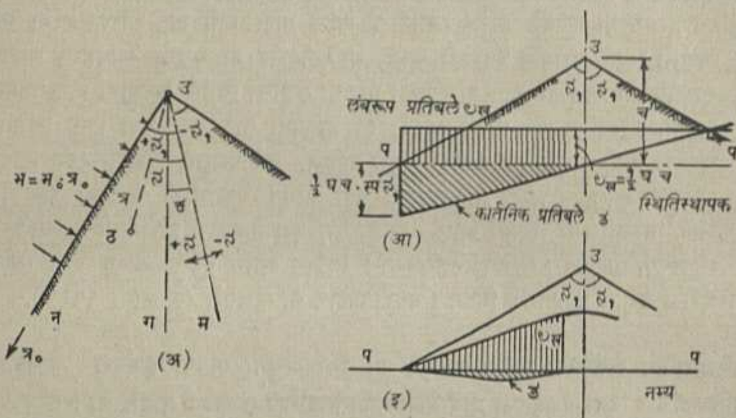
द्दष्टया होणारी चूक कमी करावयाची असेल, तर हीं प्रतिबले ठरविण्यासाठी मिंडलिनची समीकरणे वापरता येतात (परिच्छेद १३५ पाहा). तथापि स्थूणेच्या भोवतालच्या पदार्थांचे वर्तन पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असते, असे गृहीत धरण्याने होणारी चूक उपर्युक्त सोईस्कर गणितकृतीचा अवलंब केल्याने होणाऱ्या चुकीपेक्षा फार मोठी असण्याचा संभव असतो.

येथे हे साक्षेपाने सांगितले पाहिजे की, उपर्युक्त पद्धतींपैकी कोणतीही पद्धत, सुट्या स्थूणांलगतची प्रतिबले ठरविण्यासाठीच केवळ वापरता येईल, कारण स्थूणा सर्व बाजूंनी समांग पदार्थाने वेढलेली आहे, या गृहीतावर या पद्धती आधारित आहेत. स्थूणासमूहाच्या अंतर्भागात असलेल्या एखाद्या स्थूणेचा विचार करताना तिच्याभोवती असणारा स्थितिस्थापक धारक-पदार्थ, हा साक्षेपतः ताठ असलेल्या इतर स्थूणांनी प्रबलित झालेला असतो हे लक्षात घेतले पाहिजे. खरे पाहता, जिलेटनमध्ये निविष्ट झालेल्या स्थूणासमूहातील प्रतिबलपरिस्थिती जाणून घेण्यासाठी केलेल्या प्रायोगिक संशोधनातून असे दिसून आले आहे की, स्थूणासमूहाच्या अंतर्गत असलेल्या स्थूणेच्या बाजूवरील कार्तनिक-प्रतिबलांचे वितरण आणि स्वतंत्र अशा एका स्थूणेवरील तशाच प्रतिबलांचे वितरण यांत काहीच साम्य नसते (टेरझागी १९३५).

वालुकेत ठोकलेल्या भारित फलकस्थूणा किंवा स्थूणा यांच्या पृष्ठांवरील कार्तनिक-प्रतिबलांच्या वितरणाबाबतची प्रायोगिक माहिती अद्याप उपलब्ध नाही. या वितरणाच्या बाबतीतील सैद्धांतिक संशोधनास प्रयोगाद्वारे पुरेशी पुष्टी मिळाल्याविना त्यावर विसंबता येणार नाही.

१४४. अपारप्राय, स्थितिस्थापक शंकूमधील प्रतिबल-वितरण : एकमेकींस छेदणाऱ्या दोन पातळ्यांनी सीमित झालेला राशी म्हणजे अपारप्राय शंकू होय. आकृती १३१ अ पाहा. या शंकूवर गुरुत्वजन्य बल *उग* या दिशेत कारक आहे आणि शंकूच्या दोन बाजूंमधील कोन दुभागणाऱ्या *उम* रेषेशी ही दिशा θ कोन करते. शंकूची एक बाजू—उदाहरणार्थ, १३१ अ मधील *उन*—फार उभट उताराची आहे व तीवर $भ_० त्र_०$ हा बाह्य दाब कारक आहे. या दाबाची तीव्रता, शंकूच्या शिरोबिंदूपासून मोजलेल्या अंतराच्या सरळ प्रमाणात वाढणारी आहे. या सर्व गोष्टींमुळे हा शंकू म्हणजे गुरुत्वाधारी कॉंक्रीट धरणाचा, सुबोध रूप दिलेला छेद आहे, असे मानता येईल; कारण त्याच्याही उभट बाजूवर जलाशयाच्या खोलीनुसार वाढत जाणारा पाण्याचा दाब कारक असतो. त्यामुळेच अशा शंकूतील प्रतिबले गणितसिद्ध करण्याच्या समस्येकडे प्रथम लक्ष दिले गेले. या समस्येचे काटेकोर उत्तर प्रथम लेव्हीने (१८९८) प्रकाशित केले. शंकू अपारप्राय आहे, या गृहीतावर ते आधारित आहे. या गृहीतामुळे धरणाच्या तळाच्या अगदी लगतच्या परिसरासाठी ते लागू करता येत

नाही. तथापि धरण पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असेल, तर इतर भागांच्या बाबतीत मात्र तें उत्तर सापेक्षतः अचूक मूल्ये देईल, अशी अपेक्षा करता येते. लेव्हीने असे सिद्ध केले की, जर शंकूचे वर्तन तंतोतंतपणे हूकच्या नियमानुसार होत असेल, तर शंकूच्या केवळ स्वतःच्या वजनामुळे किंवा त्यासहित ह्याच्या एका बाजूवर कारक होणाऱ्या स्थैतिक जलदाबामुळे, कोणत्याही सरळ छेदावर निर्माण होणाऱ्या लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण, नेहमीच सरळ रेषेने व्यक्त करता येते.



आकृती १३१ ; (अ) अपार शंकूचा उभा छेद. शंकूच्या डाव्या पृष्ठावर द्रवाचा दाब कारक आहे; (आ) सममात्र शंकूतून घेतलेल्या क्षितिजलंब छेदावर त्याच्या वजनामुळे येणाऱ्या लंबरूप आणि कार्तनिक प्रतिबलांचे वितरण (शंकू पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक आहे); (इ) वरीलप्रमाणेच, परंतु येथे शंकू आदर्श वालुकेचा असून ती नम्य समतोलाच्या अवस्थेत आहे.

हीच समस्या फिलंजरने (१९१२) एका निराळ्या पद्धतीने सोडविली आणि हाच निष्कर्ष काढला. पुढील समीकरणे फिलंजरप्रणीत उत्तरातील आहेत. समजा,

$\sigma_{त्र}$, $\sigma_{प}$ = ठ येथील अनुक्रमे त्र या सदिशाच्या दिशेतील, व त्या दिशेला काटकोनात असलेल्या दिशेतील लंबरूप-प्रतिबले (दमनकारी म्हणजे धन);

τ = उपर्युक्त लंबदिक् प्रतिबले ज्यावर कारक आहेत, अशा पातळ्यांवरील कार्तनिक प्रतिबल;

θ' = शंकूच्या बाजूंनी साधलेला २θ_1, हा कोन दुभागणारी रेषा आणि सदिश त्र यांतील कोन (उम या द्विभाजन-रेषेपासून सव्य बाजूकडील विचलनाच्या वेळी θ' धन समजावा) आणि

ध = शंकूची धनता

आहेत; तर शंकूच्या वजनामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतील :

$$\text{ऌ}_{\text{त्र}} = \text{त्रध}\,[(\text{अ} + \text{कोज्या ढ})\,\text{कोज्या ठ} + (\text{ब} + \text{ज्या ढ})\,\text{ज्या ठ} - \text{क कोज्या ३ ठ} - \text{ह ज्या ३ ठ}] \qquad [\text{१ अ}]$$

$$\text{ऌ}_{\text{प}} = \text{त्रध}\,[(\text{३ अ} + \text{कोज्या ढ})\,\text{कोज्या ठ} + (\text{३ ब} + \text{ज्या ढ})\,\text{ज्या ठ} + \text{क कोज्या ३ ठ} + \text{ह ज्या ३ ठ}] \qquad [\text{१ आ}]$$

आणि

$$\text{ड} = \text{त्रध}\,(\text{अ ज्या ठ} - \text{ब कोज्या ठ} + \text{क ज्या ३ ठ} - \text{ह कोज्या ३ ठ}) \qquad [\text{१ इ}]$$

येथे

$$\text{अ} = -\frac{\text{कोज्या ढ ज्या ३ ठ}_1}{\text{२ (ज्या ठ}_1 + \text{ज्या ३ ठ}_1)}, \quad \text{ब} = \frac{\text{ज्या ढ कोज्या ३ ठ}_1}{\text{२ (कोज्या ठ}_1 - \text{कोज्या ३ ठ}_1)},$$

$$\text{क} = \frac{\text{कोज्या ढ}}{\text{८ कोज्या}^2\,\text{ठ}_1} \quad \text{आणि} \quad \text{ह} = -\frac{\text{ज्या ढ}}{\text{८ ज्या}^2\,\text{ठ}_1}$$

आहेत. बाह्य दाबामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतात :

$$\text{ऌ}_{\text{त्र}} = \text{त्रभ}_0\,(\text{अ कोज्या ठ} + \text{ब ज्या ठ} - \text{क कोज्या ३ ठ} - \text{ह ज्या ३ ठ}) \qquad [\text{२ अ}]$$

$$\text{ऌ}_{\text{प}} = \text{त्रभ}_0\,(\text{३अ कोज्या ठ} + \text{३ब ज्या ठ} + \text{क कोज्या ३ ठ} + \text{ह ज्या ३ ठ}) \qquad [\text{२ आ}]$$

आणि

$$\text{ड} = \text{त्रभ}_0\,(\text{अ ज्या ठ} - \text{ब कोज्या ठ} + \text{क ज्या ३ ठ} - \text{ह कोज्या ३ ठ}) \qquad [\text{२ इ}]$$

येथे

$$\text{अ} = \frac{\text{ज्या ३ ठ}_1}{\text{१६ ज्या ठ}_1\,\text{कोज्या}^3\,\text{ठ}_1}, \quad \text{ब} = -\frac{\text{कोज्या ३ ठ}_1}{\text{१६ कोज्या ठ}_1\,\text{ज्या}^3\,\text{ठ}_1},$$

$$\text{क} = -\frac{\text{१}}{\text{१६ कोज्या}^3\,\text{ठ}_1} \quad \text{आणि} \quad \text{ह} = \frac{\text{१}}{\text{१६ ज्या}^3\,\text{ठ}_1}$$

वरील समीकरणे सोडवून मिळणाऱ्या मूल्यांवरून असे दिसून येते की, शंकूच्या माथ्यास समांतर पद्धतीने घेतलेल्या छेदपृष्ठावरील लंबदिक् आणि कार्तनिक प्रतिबले या दोहोंचे वितरण सरळ रेषात्मक आलेखाने दाखविता येईल. $\text{भ}_0 = ०$ आणि ढ $= ०$ (म्हणजे सममात्र शंकू) असल्यास, शंकूच्या माथ्यापासून ख खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावर, प्रत्येक बिंदुस्थानी लंबदिक् प्रतिबलाचे मूल्य $\frac{\text{धख}}{\text{२}}$ इतके असते आणि

त्यावरील कार्तनिक प्रतिबलांचे मूल्य छेदाची मध्यरेषा आणि विचाराधीन बिंदू यांतील अंतरानुसार सरळ प्रमाणात वाढत जाते.

आकृती १३१ आ मध्येही एक शंकू दाखविला आहे. त्याच्या शिरोबिंदूतून जाणाऱ्या उभ्या पातळीच्या संदर्भात तो सममात्र आहे आणि त्यावर फक्त त्याचे स्वतःचे वजन कारक आहे. या शंकूतून ११ हा छेद घेतला आहे व शंकूच्या अर्ध्या भागात या आडव्या छेदावर निर्माण होणारी लंबदिक् प्रतिबले $\sigma_{ख}$ आणि कार्तनिक प्रतिबले ड यांचे वितरण या आकृतीत दाखविले आहे. आकृती १३१ इ मध्ये नम्य समतोलाच्या अवस्थेतील वालुका-भराव दाखविला असून त्याच्या तळावर निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांचे वितरण दाखविले आहे. या भरावाचा छेद आकृती १३१ आ मधील उ११ या शंकूच्या छेदासारखाच आहे. परिच्छेद ६५ मध्ये या प्रतिबलांचा ऊहापोह केलेला आहे. कोणत्याही मृत्तिका-भरावातील प्रतिबले, बहुतांशी समीकरणे १ व २ यांच्या साहाय्याने मिळणाऱ्या प्रतिबलांऐवजी आकृती १३१ इ मध्ये दाखविलेल्या प्रतिबलांसारखी असतात याविषयी संशय नाही, मग उतारांचे घसरणीच्या बाबतीतील सुरक्षिततांकांचे मूल्य काहीही असो. वस्तुतः मृत्तिका-भरावाच्या तळावरील लंबदिक् प्रतिबले समप्रमाण असावीत, असे कल्पनेतसुद्धा येणार नाही, म्हणून समीकरणे १ व २ यांवरून मिळणारी मूल्ये, एका मर्यादित उदाहरणातच लागू आहेत, असे म्हणावे लागेल. प्रत्यक्षात असे उदाहरण कधीच आढळत नाही. अपवाद केवळ गुरुत्वाधारी धरणातील सरळ छेदांचाच म्हणता येईल.

समीकरणे १ व २ यांना पूरक म्हणून फिलंजरच्या प्रकाशनात अपारप्राय शंकूच्या एका बाजूवर समप्रमाणवितरित, बाह्य दाब कारक असताना निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांची समीकरणे समाविष्ट केलेली आहेत. अपारप्राय शंकूच्या सीमेवर कोणत्याही प्रकारची बले कारक झाली असता, त्यात उत्पन्न होणारी प्रतिबले गणितसिद्ध करण्याची एक पद्धत ब्राह्ट्झने शोधली आहे (१९३३).

१४५. समतल पृष्ठभागाच्या अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीत खणलेले कूप आणि भुयारे यांच्या परिसरातील प्रतिबलांचे वितरण : स्थितिस्थापक, अपारप्राय घनराशीतील दंडगोलाकृती कूपाचा छेद आकृती १३२ अ मध्ये दाखविला आहे. या राशीची घनता *घ* आहे. समजा,

ख = पृष्ठभागापासून अधस् दिशेने मोजलेले अंतर,

त्र = कूपाच्या मध्यरेषेशी एकरूप असलेल्या *ख* अक्षापासून त्रिज्यात्मक दिशेत मोजलेले आडवे अंतर,

$त्र_{०}$ = कूपाची त्रिज्या,

$\sigma_{ख}$, $\sigma_{त्र}$, $\sigma_{प}$ = अनुक्रमे उभे प्रतिबल, आडवे त्रिज्यादिक् प्रतिबल आणि परिघीय आडवे प्रतिबल (सर्व प्रतिबले लंबदिक्),

$ड_{त्रख}$ = त्र आणि ख यांच्या पातळीवरील कार्तनिक-प्रतिबल

आहेत. कूप खणण्यापूर्वी ख खोलीवरील कोणत्याही बिंदुस्थानी पुढीलप्रमाणे प्रतिबले होती :

$$\sigma'_{\text{ख}} = \text{घख}, \quad \sigma_{\text{त्र}} = \sigma'_{\text{प}} = \text{मृ}_{\circ}\,\text{घख} \text{ आणि } \text{ड}'_{\text{त्रख}} = \circ \qquad [१]$$

येथे $\text{मृ}_{\circ}$ हा स्तब्धावस्थेतील मृत्तिका-दाब-गुणांक आहे (समीकरण १०(१)). दंडगोलाकृती छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले शून्यमूल्य असल्यामुळे, संकल्पित कूपाच्या बाह्य सीमांनी मर्यादित होणाऱ्या अवकाशात, मूळ पदार्थाऐवजी $\text{मृ}_{\circ}\,\text{घ}$ या घनतेचे द्रव भरले आहे अशी कल्पना केली, तरी भोवतीच्या पदार्थातील प्रतिबल-परिस्थिती बदलणार नाही. तेथे कोणत्याही बिंदुस्थानी कारक असलेली प्रतिबले दोन घटकांत विभागता येतील. एक घटक त्या पदार्थाच्या वजनातून निर्माण झालेला आणि दुसरा या जड द्रवाच्या दाबामुळे निर्माण झालेला. या दोन प्रतिबल-घटकांची बेरीज समीकरण १ ने मिळणाऱ्या खननपूर्व प्रतिबलांइतकीच राहील. केवळ द्रवाने निर्माण केलेली प्रतिबले सहज-रीत्या गणितसिद्ध करण्यासारखी असतात. कूप खणल्यानंतर, त्याच्या भिंतीवरील कार्तनिक प्रतिबले शून्यमूल्य असतील. त्याचप्रमाणे त्रिज्यादिक् लंबरूप प्रतिबलेसुद्धा शून्यमूल्य असतील. म्हणून कूप खणल्यामुळे भोवतीच्या पदार्थातील प्रतिबलांवर होणारा परिणाम आणि त्याच आकारमानाच्या दंडगोलाकृती कूपातून उपरोक्त जड द्रव उपसून बाहेर टाकले असता होणारा परिणाम, हे सारखेच असतात (बियो १९३५ क).

जाड भित असलेल्या पोकळ दंडगोलावर आतल्या बाजूने एखादा दाब कारक असेल, तर अशा परिस्थितीतील प्रतिबले लामीच्या सूत्रांच्या साहाय्याने मिळविता येतात (लामी १८५२; टिमोशेंको १९४१ पाहा). पृष्ठभागापासून ख खोलीवर आणि कूपाच्या मध्यरेषेपासून त्र अंतरावर जड द्रवाच्या दाबामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले या सूत्रांनुसार पुढीलप्रमाणे मांडता येतात :

$$\sigma''_{\text{ख}} = \circ \qquad [२\ अ]$$

$$\sigma''_{\text{त्र}} = \text{मृ}_{\circ}\,\text{घख}\,\frac{\text{त्र}^{२}_{\circ}}{\text{त्र}^{२}} \qquad [२\ आ]$$

$$\sigma''_{\text{प}} = -\,\text{मृ}_{\circ}\,\text{घख}\,\frac{\text{त्र}_{\circ}^{२}}{\text{त्र}^{२}} \qquad [२\ इ]$$

$$\text{ड}''_{\text{त्रख}} = \circ \qquad [२\ ई]$$

कूप खणल्यानंतर त्याभोवतीच्या घनराशीतील कोणत्याही बिंदुस्थानाची प्रतिबले, समी. १ ने मिळणारी मूळ प्रतिबले आणि समी. २ ने मिळणारी प्रतिबले यांतील फरकाएवढी असली पाहिजेत. अर्थातच ती पुढीलप्रमाणे असतील :

$$\sigma_{\text{ख}} = \sigma'_{\text{ख}} - \sigma''_{\text{ख}} = \text{घख} \qquad [३\ अ]$$

$$\sigma_{\text{त्र}} = \sigma'_{\text{त्र}} - \sigma''_{\text{त्र}} = \text{मृ}_\circ \text{ घ ख} \left(१ - \frac{\text{त्र}_\circ^{२}}{\text{त्र}^{२}}\right) \qquad [\text{३ आ}]$$

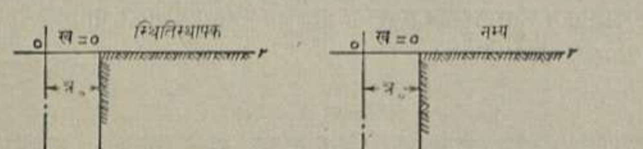
$$\sigma_{\text{प}} = \sigma'_{\text{प}} - \sigma''_{\text{प}} = \text{मृ}_\circ \text{ घ ख} \left(१ + \frac{\text{त्र}_\circ^{२}}{\text{त्र}^{२}}\right) \qquad [\text{३ इ}]$$

आणि

$$\text{ਤ}_{\text{त्रख}} = ० \qquad [\text{३ ई}]$$

वेस्टरगार्डने (१९४०) हींच समीकरणे प्रतिबल-फलनाच्या साहाय्याने सिद्ध केली आहेत. कूपाच्या भिंतीवर ($\text{त्र} = \text{त्र}_\circ$) त्रिज्यादिक् प्रतिबल शून्यमूल्य असते; परिधीय प्रतिबल आडव्या प्रतिबलाच्या मूळ मूल्याच्या दुप्पट असते आणि $\sigma_{\text{ख}}$ हे उभे प्रतिबल (समीकरण ३ अ) ख खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावर कूप खणण्यापूर्वी कारक असणाऱ्या $\sigma_{\text{ख}}$ या प्रतिबलाइतके असते; हे या समीकरणावरून दिसून येते. त्यानुसार मिळणारे आडव्या छेदावरील प्रतिबलांचे वितरण आकृती १३२ अ मध्ये दाखविले आहे. याउलट, कूपाभोवतालची मृत्तिका जर नम्य समतोलाच्या अवस्थेत असेल, तर आडव्या छेदावरील प्रतिबलांचे वितरण आकृती १३२ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते (परिच्छेद ७३ आणि ७४ पाहा).

सर्व मृत्तिकांमधील—अतिशय कडक असणाऱ्या मृत्तिकाही त्यांत आल्या—प्रतिबल वितरण आकृती १३२ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते, कारण कूपभिंतीलगत समीकरण ३ इ ने मिळणारी तीव्र परिधीय प्रतिबले मृत्तिकेच्या दमनसामर्थ्याहून अधिक असण्याचा



आकृती १३२ : उभ्या दंडगोलाकृती विवराभोवतालच्या राशीतून घेतलेल्या क्षितिज-समांतर छेदावरील प्रतिबल-परिस्थिती. (अ) पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक राशी आणि (आ) पार्श्वीय आधाराविना उभी राहण्यास समर्थ असलेली समाकर्षणयुक्त वालुका.

संभव असतो. परिणामतः हीं प्रतिबले कूपभिंतीच्या परिसरातील मृत्तिकेत नम्य-विसर्पण निर्माण करतात आणि ही क्रिया नम्य समतोलाची अवस्था येईपर्यंत किंवा उच्छेदाची अवस्था येईपर्यंत चालू राहते. तेव्हा आकृती १३२ अ मध्ये दाखविलेले प्रतिबल-वितरण एका मर्यादित उदाहरणापुरतेच यथार्थ ठरते. कठीण व भक्कम खडकातील कूपाच्या परिसराचा अपवाद सोडता, या उदाहरणातील परिस्थिती प्रत्यक्षात आढळत नाही.

ज्या उपपत्तीच्या साहाय्याने समीकरण ३ प्राप्त झाले, तीच उपपत्ती अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीत भुयार खणले असता, तेथील प्रतिबल-परिस्थितीची कल्पना येण्यासाठी वापरता येते. विश्लेषणाच्या सुबोधतेसाठी, आपण असे गृहीत धरू की, भुयार दंडगोलाकृती आहे आणि समीकरण १ मधील $मृ_{०}$ चे मूल्य एक आहे. याचाच अर्थ असा की, भुयार खणण्यापूर्वी त्या घनराशीमध्ये स्थैतिक जलदाबासारखी प्रतिबल-परिस्थिती आहे. समजा,

ह = समतल भूपृष्ठ आणि भुयाराची मध्यरेषा यांतील उभे अंतर,

$त्र_{०}$ = भुयाराची त्रिज्या,

घ = घनराशीची घनता आणि

$\sigma_{त्र}$, $\sigma_{प}$ = भुयाराच्या मध्येरेषेपासून कोणत्याही त्र या त्रिज्यात्मक अंतरावरील त्रिज्यादिक् आणि परिधीय प्रतिबले (दोन्हीही लंबरूप)

आहेत. $मृ_{०} = १$ या गृहीतानुसार भूपृष्ठापासून ख खोलीवर संकल्पित भुयाराच्या भिंतीवरील कोणत्याही बिंदुस्थानाचे मूळचे प्रतिबल पुढील सोप्या समीकरणाने ठरविता येते.

$$\sigma'_{त्र} = \sigma'_{प} = घख \qquad [४]$$

भुयार खणल्यामुळे, त्याच्या भिंतीच्या प्रत्येक बिंदुस्थानी असलेले घख हे मूळचे त्रिज्यादिक् प्रतिबल शून्य होते. तेव्हा खननानंतर घनराशीतील प्रतिबल-परिस्थिती, मूळ प्रतिबल आणि त्याच ठिकाणी भुयाराच्या भिंतीवरील घख या त्रिज्यादिक् दाबामुळे निर्माण झालेले प्रतिबल यांतील फरकाबरोबर असेल. हा दाब भुयारामध्ये घ घनतेचे द्रव भरून निर्माण करता येईल. द्रवातील दाब इतका असावा की, जलस्तंभमापिकेत ते द्रव घनराशीच्या समतल पृष्ठभागाच्या पातळीपर्यंत चढले पाहिजे. द्रवदाबामुळे निर्माण झालेली प्रतिबल-परिस्थिती स्वतंत्रपणे जाणून घेण्यासाठी भुयाराभोवतीच्या पदार्थामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले तात्पुरती बाजूला ठेवू. त्यासाठी हे द्रवपूर्ण भुयार वजनरहित पदार्थात खणलेले आहे, असे गृहीत धरले पाहिजे.

भुयाराच्या $२त्र_{०}$ या व्यासाच्या तुलनेत ह ही खोली (आकृती १३३ अ) फार मोठी असेल, तर भुयाराच्या भिंतीवरील प्रत्येक बिंदुस्थानी असलेल्या द्रवभाराचे एकांक

क्षेत्रावरील मूल्य घड इतके आहे, असे मानता येते; आणि भोवतालच्या पदार्थातील प्रतिबल-परिस्थितीवर द्रवदाबाचा प्रभाव ज्या कक्षेपर्यंत पडू शकतो तिच्यापलीकडे भूपृष्ठ स्थित आहे, असे म्हणता येते. म्हणून जाड भिंतीच्या नलिकांतील प्रतिबलांविषयीच्या लामीच्या समीकरणांच्या, म्हणजेच समीकरण २ च्या, साहाय्याने प्रतिबले गणितसिद्ध करता येतात. या समीकरणात $मृ_{०} = १$ आणि $ख = ड$ नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरणे मिळतात :

$$\sigma''_{त्र} = घड\frac{त्र_{०}^{२}}{त्र^{२}} \text{ आणि } \sigma''_{प} = -घड\frac{त्र_{०}^{२}}{त्र^{२}} \qquad [५]$$

कूपांचा ऊहापोह करताना असे दाखविले होते की, भोवतालच्या पदार्थातील खननानंतरची प्रतिबले, मूळ प्रतिबले आणि कूपातील जड द्रवाने निर्मिलेली प्रतिबले यांतील फरकाएवढी असतात. $मृ_{०} = १$ आणि भुयाराची $त्र_{०}$ ही त्रिज्या ड च्या तुलनेत फारच लहान आहे, असे गृहीत धरल्यामुळे भुयाराच्या भिंतीच्या स्थानी असणारी मूळ प्रतिबले (खननपूर्व प्रतिबले) स्थूलमानाने पुढीलप्रमाणे मांडता येतील.

$$\sigma'_{त्र} = \sigma'_{प} = डघ$$

भुयारातील जड द्रवाने निर्मिलेली प्रतिबले समीकरण ५ चा अवलंब करून ठरविता येतील; म्हणून भुयार खणल्यानंतरची प्रतिबले पुढीलप्रमाणे असतील :

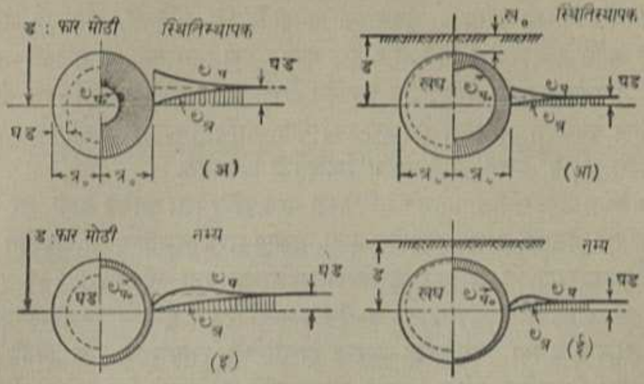
$$\sigma_{त्र} = \sigma'_{त्र} - \sigma''_{त्र} = डघ\left(१ - \frac{त्र_{०}^{२}}{त्र^{२}}\right) \qquad [६ अ]$$

आणि

$$\sigma_{प} = \sigma'_{प} - \sigma''_{प} = डघ\left(१ + \frac{त्र_{०}^{२}}{त्र^{२}}\right) \qquad [६ आ]$$

आकृती १३३ अ मध्ये तदनुषंगिक प्रतिबल-वितरण दाखविले आहे. भुयाराच्या सममात्र पातळीच्या डाव्या बाजूस घड हा द्रवदाब, त्याच्या भिंतीपासून मध्यबिंदूकडे त्रिज्यादिशेत स्थित केला आहे. $मृ_{०} = १$ असे गृहीत धरले होते, त्यामुळे खननपूर्व काळातील परिघीय आणि त्रिज्यादिक् अशी दोन्ही प्रतिबले घड या द्रवदाबाइतकी आहेत. उजव्या बाजूस $त्र = त्र_{०}$ या परिस्थितीतील $\sigma_{प०}$ हीं परिघीय प्रतिबले वरील पद्धतीनेच दाखविली आहेत. भुयाराच्या छेदाच्या मध्यातून काढलेल्या आडव्या रेषेच्या वर जे आलेख काढले आहेत त्यावरून भुयाराच्या मध्यातून जाणाऱ्या आडव्या छेदावर कारक असणारी अनुक्रमे $\sigma_{त्र}$ आणि $\sigma_{प}$ हीं त्रिज्यादिक् आणि परिघीय प्रतिबले मिळतात.

आकृती १३३ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे भुयार भूपृष्ठापासून फारसे खोल नसेल, तर स्थैतिक जलदाबाशी असणारे साम्य तसेच राहते; परंतु समीकरणे २ वापरता येत नाहीत. कारण भिंतीवरील द्रवजन्य दाबाचे वितरण स्थूलमानाने सुद्धा समप्रमाण



आकृती १३३ : पूर्णपणे स्थितिस्थापक असलेल्या राशीत घेतलेल्या क्षितिजसमांतर दंडगोलाकृती भुयाराच्या मध्यातून जाणाऱ्या आडव्या छेदावरील प्रतिबल-परिस्थिती (अ) भूपृष्ठापासून बऱ्याच खोलीवरील भुयार. (आ) उथळ खोलीवरील भुयार. प्रत्येक आकृतीत डाव्या बाजूला भुयार खणण्यापूर्वीची प्रतिबल-परिस्थिती दाखविली आहे. भुयाराभोवती पार्श्वीय आधाराविना उभी राहू शकेल, अशी समाकर्षणयुक्त वालुका असल्यास प्रतिबल-परिस्थिती (इ) आणि (ई) मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असते.

नसते. छपराकडून तळाकडे दाब त्वरेने वाढत जातो. तसेच भुयार व त्याभोवतालचा पदार्थ म्हणजे जाड भिंतीची नलिका आहे, असेही मानता येत नाही; कारण छपराच्या वरच्या बाजूस भिंतीची जाडी फारच कमी असते. छपराच्या दुर्बलतेमुळे, द्रवदाबाचे आडवे घटक—ज्यांची प्रवृत्ती भुयाराची दोन अर्धुके एकमेकांपासून अलग करण्याकडे असते—छपरामध्ये अति तीव्र अशी ताण प्रतिबले निर्माण करतात. भुयाराच्या व्यासाशी तुलना करता छपराची जाडी मोठी असती, तर छपराच्या ठिकाणी असणारे परिधीय ताण-प्रतिबल स्थूलमानाने $घख_0$ या द्रवदाबाइतके धरता आले असते. छपराची जाडी कमी करून $ख_0$ या तिच्या वास्तव मूल्याप्रत आणली, तरी या क्रियेचा छपरातून घेतलेल्या उभ्या छेदावर येणाऱ्या एकूण ताण-बलावर फारच थोडा परिणाम होतो. तथापि तसे केल्याने ताणजन्य बले ज्यावर कारक आहेत, असे क्षेत्र कमी होते. तेव्हा छपराची जाडी जर फारच कमी झाली, तर छेदाच्या एकांक क्षेत्रावरील ताण $घख_0$ पेक्षा पुष्कळच अधिक होईल हे उघड आहे. भुयाराच्या भिंतीवरील एखाद्या बिंदूचे छपराच्या उच्चतम बिंदूपासूनचे अंतर जसे वाढत जाईल, तसे त्याचे भूपृष्ठापासून मोजलेले अंतरही वाढत जाते. म्हणून छपराच्या बिंदूपासून अंतर वाढत जाईल, तसे परिधीय ताण-प्रतिबलाचे मूल्य द्रवदाबाप्रत जाऊ लागते आणि तळाजवळ तर ते त्याहून कमी होण्याचा संभव असतो. कारण छप्पर ताणले गेल्यामुळे तळाजवळील ताण कमी होण्याचा संभव असतो. ही लक्षणे भुयाराच्या भिंतीवरील द्रवदाबजन्य

ताण-प्रतिबले निश्चित करतात. भुयाराच्या खननानंतरची प्रतिबले, खननपूर्व परिधीय प्रतिबले आणि द्रवदाबजन्य प्रतिबले यांतील फरकाएवढी असतात. ही प्रतिबले आकृती १३३ आ मधील उजव्या बाजूकडील रेखांकित क्षेत्राच्या त्रिज्यादिक् रुंदीने व्यक्त होतात. मध्यरेषेतून घेतलेल्या आडव्या छेदावरील परिधीय आणि त्रिज्यादिक् प्रतिबले अनुक्रमे $ऽ_प$ आणि $ऽ_त्र$ या सलग आलेखांच्या कोटींइतकी असतात.

भुयाराच्या परिसरातील प्रतिबले मृत्तिकेच्या वश्यत्वबिंदूपेक्षा अधिक झाली, तर वरील विश्लेषण त्या ठिकाणी लागू करता येत नाही. तज्जन्य नम्य समतोलाच्या अवस्थेस अनुषंगिक असणारी प्रतिबले खोलवर असलेल्या भुयाराच्या बाबतीत आकृती १३३ इ मध्ये आणि कमी खोलीवरील भुयाराच्या बाबतीत आकृती १३३ ई मध्ये दाखविली आहेत. प्रत्येक छेदाच्या डाव्या बाजूकडील भागात दाखविलेले, भुयाराची भिंत आणि तुटक रेषा यांतील त्रिज्यादिक् अंतर, भुयार खणण्यापूर्वीच्या अवस्थेतील प्रतिबलपरिस्थिती दाखविते.

दंडगोलाकृती भुयाराच्या परिसरातील स्थितिस्थापक समतोलावस्थेस अनुषंगिक असणारी प्रतिबले गणितसिद्ध करण्याची समस्या मिंडलीन (१९३९) याने काटेकोर पद्धतीने सोडविली आहे. समीकरण १ मध्ये प्रविष्ट झालेल्या मृ० या स्तब्ध मृत्तिकादाब गुणांकाची पुढील मूल्ये त्याने गृहीत धरली.

(अ) $मृ_० = १$

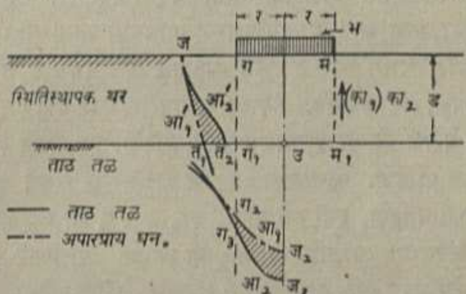
(आ) $मृ_० = \frac{पॉ}{१ - पॉ}$ (समीकरण १३४ (३) पाहा)

(इ) $मृ_० = ०$

येथे *पॉ* म्हणजे पॉयसनचे गुणोत्तर होय. तथापि त्याने मिळविलेली अंतिम समीकरणे इतकी गुंतागुंतीची आहेत की, कोष्टके आणि आलेख यांच्या रूपात त्यांचा मथितार्थ मांडल्याशिवाय व्यावहारिक समस्यांच्या बाबतीत त्यांचा वापर करणे शक्य होत नाही. बॉसिनेस्कप्रणीत समीकरणांच्या बाबतीतही हेच करावे लागले आहे. येथेही पुनः हे स्पष्ट केले पाहिजे की, हे निष्कर्ष केवळ कठीण खडकातील भुयारांच्या बाबतीतच लागू करता येतील; आणि तेही अशा गृहीतावर की, खडक सुरुंगांमुळे व्यथित झालेला नाही. काँक्रीटच्या मोठ्या धरणातील नलिकामार्गांच्या भिंती किंवा निरीक्षणार्थ ठेवले जाणारे छत्रपथ यांतील प्रतिबले गणितसिद्ध करणे हे ह्या सिद्धांताच्या व्यावहारिक उपयोगाचे मुख्य क्षेत्र आहे. मृत्तिकेत खणलेल्या भुयारांच्या परिसरात आकृती १३३ इ आणि १३३ ई यांमध्ये दाखविलेली प्रतिबल-परिस्थिती निर्माण होईल, असे अपेक्षिले पाहिजे. ज्याचे वर्तन हूकच्या नियमानुसार घडत नाही, अशा पदार्थात खोदलेल्या भुयारांच्या परिसरातील प्रतिबल-परिस्थितीचे संशोधन करण्याचा प्रयत्न झिमडने (१९२६) केला आहे. त्याने शोधलेली अंतिम समीकरणेसुद्धा क्लिष्ट आहेत. तथापि त्यांचा अर्थबोध होण्याच्या दृष्टीने आलेख आणि कोष्टके काही अंशी साहाय्यक ठरतात.

ताठ आधारावरील स्थितिस्थापक थर आणि शंकू यांविषयीचे सिद्धांत

१४६. **समस्या :** अपारप्राय राशींच्या आडव्या समतल पृष्ठभागावर ठेवलेल्या भारांमुळे त्यात निर्माण होणारी प्रतिबले आणि अवसीदन यांचा ऊहापोह मागील प्रकरणात केला गेला. तसेच अपारप्राय शंकूमधील प्रतिबलांचाही विचार झाला. निसर्गात मृत्तिकेच्या थराखाली किंवा त्रिकोणी राशीखाली परिमित खोलीवर सापेक्षतः ताठ स्वरूपाचा तळ आढळतो. अशा तळाच्या ताठपणाचा, स्थितिस्थापक राशीतील प्रतिबल-परिस्थिती आणि अवसीदन, यांवर पडणाऱ्या प्रभावाचा अभ्यास पुढील परिच्छेदांतून करावयाचा आहे. ‘अधिभारजन्य प्रतिबलांवर स्तरयुक्त रचनेचा प्रभाव’ या विषयाचाही अभ्यास त्यात समाविष्ट आहे.



आकृती १३४ : स्थितिस्थापक थराखालील ताठ तळावर येणाऱ्या लंबरूप प्रतिबलांची, तसेच उभ्या छेदांवरील कार्तनिक प्रतिबलांची तीव्रता आणि त्यांचे वितरण. थरावर लवचिक पट्टिकाभार ठेवला असून उभे छेद पट्टिकेच्या कडांतून घेतले आहेत.

१४७. **पृष्ठभागावर ठेवलेल्या भारामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांवर पडणारा ताठ तळसीमेचा प्रभाव :** एखाद्या अपारप्राय स्थितिस्थापक राशीच्या पृष्ठभागावर २र रुंदीचा, समप्रमाण वितरित असा पट्टिकाभार ठेवला असता, आडव्या छेदावर येणारी लंबरूप प्रतिबले आ. १३४ मध्ये $आ_1$ या आलेखाने दाखविली आहेत. तसेच ग मधून घेतलेल्या उभ्या छेदावरील कार्तनिक प्रतिबले, $आ'_1$ या तुटक आलेखाने दाखविली आहेत; $गग_1$ वरील $का_1$ हे एकूण कार्तनिक बल $ग_1त_1ज$ या क्षेत्रफळाइतके आहे. $गग_1मम_1$ या समपार्श्व खंडाची एकांक लांबी विचारात घेतली,

तर $ग_1 म_1$ या तळावर येणाऱ्या $दा_1$ या एकूण लंबरूप दाबाचे अर्धे मूल्य $ग_1 ग_2 ज_2 उ$ या क्षेत्राइतके आहे. या खंडाचा समतोल साधावयाचा, तर त्याच्या तळावरील एकूण लंबरूप दाब ($दा_1$) आणि दोन्ही उभ्या छेदांवरील ($गग_1$ आणि $मम_1$) कार्तनिक बले (२ $का_1$) यांची बेरीज पृष्ठभागावरील एकूण भाराइतकी (भा) असली पाहिजे; म्हणजेच

$$भा = २र \cdot भ = दा_1 + २ \cdot का_1 \qquad [१]$$

उपरोक्त आडव्या छेदाच्या ठिकाणी ड खोलीवर एखाद्या, पूर्णत्वाने ताठ थराचे पृष्ठ असेल, तर $गग_1$ आणि $मम_1$ या उभ्या छेदांच्या अगदी खालच्या भागातील कार्तनिक प्रतिबले, एखाद्या अपारप्राय घन राशीतील त्याच खोलीवरील उपरोक्त प्रतिबलांच्या मानाने फारच लहान असतात; कारण ताठ तळाचे अस्तित्व त्याच्या जवळच्या पदार्थात कोणात्मक विरूपत्व मुक्तपणे निर्माण होण्यास प्रतिबंध करते. थर आणि तळ यांमध्ये विषमाकर्षण नाही व घर्षणही नाही, अशी परिस्थिती असेल, तर $ग_1$ आणि $म_1$ येथील कार्तनिक प्रतिबले शून्य असतात. थर तळाला चिकटलेला आहे (विषमाकर्षणामुळे) असे गृहीत धरले असता, मिळणारे $गग_1$ वरील कार्तनिक प्रतिबलांचे वितरण $आ'_2$ या सलग आलेखाने दाखविले आहे. वर विदित केलेल्या कारणास्तव या आलेखाचा खालचा भाग $आ'_1$ या आलेखाच्या खालच्या भागाच्या मानाने $गग_1$ च्या पुष्कळच जवळ आहे आणि $का_2$ हे एकूण कार्तनिक बल ($गग_1 त_2 ज$ क्षेत्रफळ) $का_1$ ($गग_1 त_1 ज$ क्षेत्र)पेक्षा लहान आहे. खंडाच्या तळावरील उभा दाब $दा_2$ आणि कार्तनिक बले $२का_2$ यांची बेरीज ही $भा$ इतकीच असली पाहिजे. अर्थातच $दा_1$ पेक्षा $दा_2$ चे मूल्य अधिक असले पाहिजे. कोणत्याही आडव्या छेदावरील एकूण उभा दाब नेहमी $भा$ इतकाच असला पाहिजे, हेही खरे आहे. $दा_2 > दा_1$ या लक्षणासह या अटीची पूर्ती करणारे दाबवितरण आकृतीमध्ये $आ_2$ या सलग आलेखाने दाखविले आहे. त्यातील महत्तम कोटीमूल्य $आ_1$ आलेखातील महत्तम कोटीमूल्यापेक्षा मोठे आहे आणि उतार अधिक उभट आहेत. $ग_2 ग_3 ज_3 ज_2$ हे रेखांकित क्षेत्र $जत_1 त_2$ या रेखांकित क्षेत्राइतकेच आहे.

१४८. स्थितिस्थापक थरावर ठेवलेले बिंदुभार व रेखाभार यांमुळे ताठ तळावर येणारा दाब : स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर परिमित क्षेत्र व्यापणारा भार कारक झाला असता, थराखालील ताठ तळावर येणाऱ्या दाबाची तीव्रता आणि त्याचे वितरण ठरविण्यासाठी बॉसिनेस्कप्रणीत १३५ (१अ) आणि १३६ (१अ) यांसारखी समीकरणे उपलब्ध असणे आवश्यक आहे. अशी समीकरणे दोन निरनिराळ्या गृहीतांच्या आधारे सिद्ध करता येतात. एकात स्थितिस्थापक थर आणि त्याचा तळ यांत ना विषमाकर्षण ना घर्षण (घर्षणरहित तळ) अशी परिस्थिती गृहीत धरली जाते, तर दुसऱ्यात दोन्हीही गोष्टी पूर्णत्वाने अस्तित्वात आहेत (संलग्नतागुणी तळ)

असे गृहीत धरले जाते. स्थितिस्थापक थरावरील रेषात्मक भारामुळे येणारा दाब गणितसिद्ध करण्याची समस्या, मेलानने (१९३१) घर्षणरहित तळाच्या बाबतीत आणि मार्ग्युरेने संलग्नतागुणी तळाच्या बाबतीत (१९३१) सोडविली आहे. त्याचप्रमाणे बिंदुभार कारक असताना निर्माण होणारा दाब व्यक्त करणारी समीकरणे घर्षणरहित तळाच्या बाबतीत मेलानने (१९१९) सिद्ध केली आहेत आणि संलग्नतागुणी तळाच्या बाबतीत बियो (१९३५ अ) आणि पास्तर (१९३५) यांनी सिद्ध केली आहेत. संलग्नतागुणी तळावरील स्थितिस्थापक थरावर ठेवलेल्या बिंदुभाराच्या बाबतीत बियोने मिळविलेले उत्तर, या पद्धतीने प्राप्त होणाऱ्या फलितांचे एक उदाहरण म्हणून सांगता येईल. समजा,

भा = बिंदुभार,

ह = स्थितिस्थापक थराची जाडी,

त्र = ताठ आणि संलग्नतागुणी तळावरील कोणत्याही ठ या बिंदूचे *भा* च्या कारकरेषेपासून मोजलेले आडवे त्रिज्यादिक् अंतर,

पॉ = स्थितिस्थापक थराच्या बाबतीतील पॉयसनचे गुणोत्तर आणि

$द_{ह}$ = तळावरील ठ येथील लंबरूप दाबाचे एकांक मूल्य

आहेत. पॉ = ०.५ असल्यास $द_{ह}$ हा दाब पुढील समीकरणाने ठरविता येतो.

$$द_{ह}=\frac{भा}{ह^{२}}\cdot\frac{३}{२\pi}\left\{\frac{२}{\left[१+\left(\frac{त्र}{ह}\right)^{२}\right]^{५/२}}-\frac{०.२५}{\left[१+\left(\frac{त्र}{२ह}\right)^{२}\right]^{५/२}}\right.$$
$$-०.०३९\times\frac{१-३\left(\frac{त्र}{४ह}\right)^{२}+\frac{३}{८}\left(\frac{त्र}{४ह}\right)^{४}}{\left[१+\left(\frac{त्र}{४ह}\right)^{२}\right]^{९/२}}$$
$$\left.-०.१५४\,\frac{१-५\left(\frac{त्र}{३ह}\right)^{२}+\frac{१५}{८}\left(\frac{त्र}{३ह}\right)^{४}}{\left[१+\left(\frac{त्र}{३ह}\right)^{२}\right]^{११/२}}\right\}\qquad[१]$$

ठ हा बिंदू जर अपारप्राय घनराशीत स्थित असेल, तर तेथील $\sigma_{ख}$ हे उभे लंबरूप प्रतिबल मिळविण्यासाठी बॉसिनेस्कप्रणीत १३५ (१ अ) या समीकरणात खालील मूल्ये नियुक्त केली पाहिजेत :

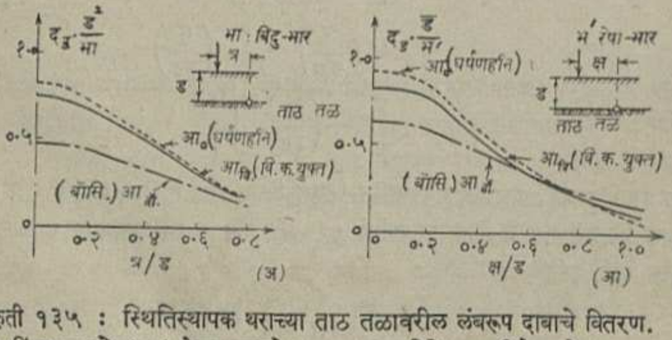
$$ख=ह \text{ आणि कोज्या } \psi=\frac{ह}{\sqrt{ह^{२}+त्र^{२}}}$$

त्यावरून ते मूल्य असे मिळते :

$$\vartheta_{ख} = \frac{भा}{ह^{२}} \cdot \frac{३}{२\pi} \left[\frac{१}{१ + (त्र/ह)^{२}} \right]^{\frac{५}{२}}$$

या उदाहरणावरून हे स्पष्ट दिसून येते की, ताठ तळावरील दाब व्यक्त करणारी समीकरणे कोणत्याही दृष्टीने बॉसिनेस्कप्रणीत समीकरणांइतकी साधी नाहीत. घनराशीवर बिंदुभार ठेवला असता, तिच्या ताठ तळावर येणारा दाब ठरविण्यासाठी केलेल्या संशोधनाची फलिते आकृती १३५ अ मध्ये दाखविली आहेत. अपारप्राय राशीच्या पृष्ठावर *भा* हा भार ठेवला असता, ह खोलीवरील आडव्या छेदावर मिळणारे लंबरूप प्रतिबलांचे वितरण याच आकृतीत $आ_{बॉ}$ या आलेखाने दाखविले आहे. बॉसिनेस्कप्रणीत समीकरण १३५ (१ अ) चा त्यासाठी उपयोग केलेला आहे. इतर सर्व गोष्टी त्याच ठेवून स्थितिस्थापक थराखालचा ताठ तळ पूर्णपणे घर्षणरहित आहे, असे गृहीत स्वीकारून मिळणारे वितरण $आ_{०}$ आलेखाने दाखविलेले आहे. तळ विषमाकर्षणयुक्त असेल, तर मिळणारे दाबवितरण $आ_{वि}$ आलेखाने दाखविले आहे. $आ_{०}$ आलेखाचा महत्तम कोटी $आ_{बॉ}$ आलेखाच्या महत्तम कोटीपेक्षा सुमारे ७१ % अधिक आहे. $आ_{वि}$ आलेखात हे मूल्य कमी होऊन सुमारे ५६ % होते.

कागदाच्या पातळीला काटकोनात असलेल्या सरळ रेषेच्या एकांक लांबीवर *भ* मूल्य असणारा उभा भार ठेवला असता, ह खोलीवर आडव्या छेदावर निर्माण होणारी लंबरूप प्रतिबले आकृती १३५ आ मध्ये दाखविली आहेत. अपारप्राय घनराशीच्या बाबतीत बॉसिनेस्कप्रणीत (समीकरण १३६ (१ अ)) पद्धतीने मिळणारे उत्तर $आ_{बॉ}$ आलेखाने दाखविले आहे. पूर्णत्वाने घर्षणरहित असलेल्या ताठ तळावर ठेवलेल्या राशीच्या बाबतीतील प्रतिबले $आ_{०}$ आलेखाने दाखविली आहेत आणि तळास चिकटणाऱ्या स्थितिस्थापक थराच्या बाबतीतील प्रतिबले $आ_{वि}$ आलेखाने दाखविली



आकृती १३५ : स्थितिस्थापक थराच्या ताठ तळावरील लंबरूप दाबाचे वितरण. (अ) बिंदुभारामुळे (आ) रेखाभारामुळे (आधार : विवेचनात दिले आहेत).

आहेत. घर्षणरहित ताठ तळाच्या उदाहरणांतील महत्तम लंबरूप प्रतिबल बॉसिनेस्क-प्रणीत मूल्याहून ४४% अधिक आहे. विषमाकर्षणयुक्त तळाच्या बाबतीत हे मूल्य २८% अधिक आहे.

आकृती १३५ अ आणि आ यांमधील आलेखांच्या समीकरणांतील पदांना मूल्ये दिली असता, बियोला (१९३५ अ) असे आढळून आले की, भाराच्या कारक बिंदूच्या सरळ खाली असणाऱ्या प्रतिबलासाठी काढलेल्या, अशा आलेखांचे महत्तम कोटी खालीलप्रमाणे असतात :

	बिंदुभार	*रेषाभार*
अपारप्राय राशीतील छेद (*आ*$_{\text{बॉ}}$ आलेख)	३/२π = ०·४७७	२/π = ०·६३७
विषमाकर्षणयुक्त ताठ तळ (*आ*$_{\text{वि}}$ आलेख)	१·५५७ × ३/२π	१·२८१ × २/π
घर्षणरहित पृष्ठाचा ताठ तळ (*आ*$_{0}$ आलेख)	१·७११ × ३/२π	१·४४१ × २/π

अपारप्राय घनराशीवर ठेवलेल्या बिंदुभारामुळे तसेच रेषात्मक भारामुळे तिच्या समतल पृष्ठभागापासून विवक्षित खोलीवर पुरलेल्या व पूर्णत्वाने लवचिक असलेल्या आडव्या पडद्यावर निर्माण होणाऱ्या लंबरूप प्रतिबलांचे वितरणसुद्धा बियोने (१९३५ अ) गणितसिद्ध केले. त्यासाठी घनराशी व पडदा यांमधील स्पर्शपृष्ठाजवळील पार्श्वीय विस्थापन शून्य गृहीत धरले होते. त्याला असे आढळून आले की, भाराच्या सरळ खाली, पडद्यावर येणारे लंबरूप प्रतिबल पडदा नसलेल्या अपारप्राय घनराशीतील आडव्या छेदावरील तशाच प्रतिबलापेक्षा ५% कमी असते.

१४९. स्थितिस्थापक थरावर ठेवलेला, परिमित क्षेत्रव्यापी लवचिक भार : स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर परिमित क्षेत्र व्यापणारा व समप्रमाणात वितरित असलेला भार ठेवलेला असेल, तर थराच्या तळावर येणाऱ्या दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य आणि त्याचे वितरण, यांचे काटेकोर गणित काहीसे क्लिष्टच असते. आकृती १३५ अ मध्ये *आ*$_{\text{वि}}$ आलेखाने व्यक्त होणारा दाब समीकरण १४८ (१) च्या साहाय्याने कुमिंग्जने (१९४१) गणितसिद्ध केला आहे. त्याने त्यासाठी पुढील गोष्टी गृहीत धरल्या : भाराने व्यापलेले क्षेत्र वर्तुळाकार असून त्याची त्रिज्या *त्रि* आहे आणि एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य *भ* आहे, स्थितिस्थापक थराच्या बाबतीतील पॉयसनचे गुणोत्तर ०·५ आहे, थराची जाडी *ड* आहे आणि थर ताठ तळाला पूर्णत्वाने चिकटलेला आहे. या गृहीतांनुसार, भारित क्षेत्राच्या मध्यबिंदूखाली, ताठ तळावर येणाऱ्या दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य, *द*$_{\text{ड}}$, देणारे पुढील समीकरण त्याने सिद्ध केले :

$$
द_ड = भ \left\{ १ - \frac{२}{\left[१+\left(\frac{त्रि}{ड}\right)^२\right]^{३/२}} + \frac{१}{\left[१+\left(\frac{त्रि}{२ड}\right)^२\right]^{३/२}} + \frac{०.२३४\left(\frac{त्रि}{ड}\right)^४ - ०.९३५\left(\frac{त्रि}{४ड}\right)^२}{\left[१+\left(\frac{त्रि}{४ड}\right)^२\right]^{७/२}} + \frac{१.५५५\left(\frac{त्रि}{३ड}\right)^४ - २.०८\left(\frac{त्रि}{३ड}\right)^२}{\left[१+\left(\frac{त्रि}{३ड}\right)^२\right]^{९/२}} \right\} \qquad [१]
$$

ताठ तळावरील अन्य बिंदूंच्या ठिकाणी येणाऱ्या उभ्या दाबाचे समीकरण तर याहून अधिक क्लिष्ट असेल हे सहज कळेल. हा दाब ठरविणारी सोपी परंतु कमी अचूक अशी समीकरणे मिळविण्यासाठी पुढील वस्तुस्थितीचा उपयोग होतो. आकृती १३५ अ आणि आ यांमधील सलग आलेखांचा आकार आणि तेच भार अपारप्राय राशीवर ठेवले असता मिळणाऱ्या आलेखांचा आकार हे दोन्ही सारखेच असतात. अपारप्राय राशीवर एखादा बिंदुभार किंवा रेषात्मक भार ठेवला असेल, तर या राशीच्या पृष्ठ-भागापासून ड खोलीवर येणारा उभा दाब ठरविण्यासाठी आपल्याला बॉसिनेस्कच्या १३५ (१ अ) आणि १३६ (१ अ) या समीकरणांमध्ये ख च्या ठिकाणी ड हे मूल्य नियुक्त करावे लागते. या रीतीचा अवलंब करूनच आकृती १३५ अ आणि आ यांमधील $आ_{ब}$ हे आलेख मिळविले होते. जर आपण ड ऐवजी योग्य असे काल्पनिक ड' (ड पेक्षा लहान) हे मूल्य नियुक्त केले, तर बॉसिनेस्कचे आलेख ड खोलीवर ताठ तळ असताना मिळणाऱ्या दाबाचे खरे वितरण दाखविणाऱ्या आलेखासारखेच जवळ-जवळ होतात. स्थितिस्थापक थरावर क्षेत्रव्यापी भार ठेवला असता, त्याच्या ताठ तळावर येणाऱ्या दाबाचे अनुमान करण्यासाठी सुद्धा हीच पद्धत वापरता येते. (टेरझागी १९३२). $द_ड$ (समीकरण १) हा दाब निर्मिणारा क्षेत्रव्यापी भार, जर अपारप्राय राशीच्या पृष्ठावर ठेवलेला असेल, तर भारित क्षेत्राच्या मध्याखाली ड खोलीवर निर्माण होणारे उभे लंबदिक् प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$
σ_ख = भ \left\{ १ - \left[\frac{१}{१+(त्रि/ड)^२}\right]^{३/२} \right\} \qquad १३६ (४)
$$

हे मूल्य $द_ड$ (समीकरण १) पेक्षा लहान आहे; परंतु या समीकरणातील ड ऐवजी आपण

$$
ड' = ०.७५ ड \qquad [२]
$$

नियुक्त केले, तर $\sigma_{ख}$ चे मूल्य जवळजवळ $\bar{द}_{ड}$ (समीकरण १) च्या मूल्याइतकेच होते. तेव्हा त्याचे समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\bar{द}_{ड} = भ \left\{ १ - \left[\frac{१}{१ + (त्रि/०\cdot७५\,ड)^{२}} \right]^{३/२} \right\} \qquad [३]$$

आकृती १३६ अ मध्ये सलग आलेखाच्या भुजा म्हणजे $\bar{द}_{ड}$ ची समीकरण १ ने मिळणारी अचूक मूल्ये आहेत आणि तुटक आलेखाच्या भुजा म्हणजे सोईस्कर रूप दिलेल्या समीकरण ३ ने मिळणारी मूल्ये आहेत. हे दोन आलेख एकरूपच आहेत असे म्हणता यावे इतके जवळ आहेत. कारक भार सारखाच असेल, तर ड जाडीच्या स्थितिस्थापक थराच्या ताठ तळावरील उभ्या दाबाचे वितरणसुद्धा अपारप्राय राशीच्या पृष्ठभागाखाली ०·७५ ड खोलीवर असलेल्या क्षितिजसमांतर छेदावरील वितरणासारखेच पुष्कळसे असते. हीं विधाने, भारव्याप्त क्षेत्राचा आकार कसाही असला तरी यथार्थ असतात. म्हणून असे म्हणता येईल की, कारक भार सारखेच असल्यास ड जाडीच्या स्थितिस्थापक थराच्या ताठ तळावरील दाब स्थूलमानाने अपारप्राय घनराशीतून ड$'$=०·७५ ड खोलीवर घेतलेल्या आडव्या छेदावरील दाबाइतकाच असतो.

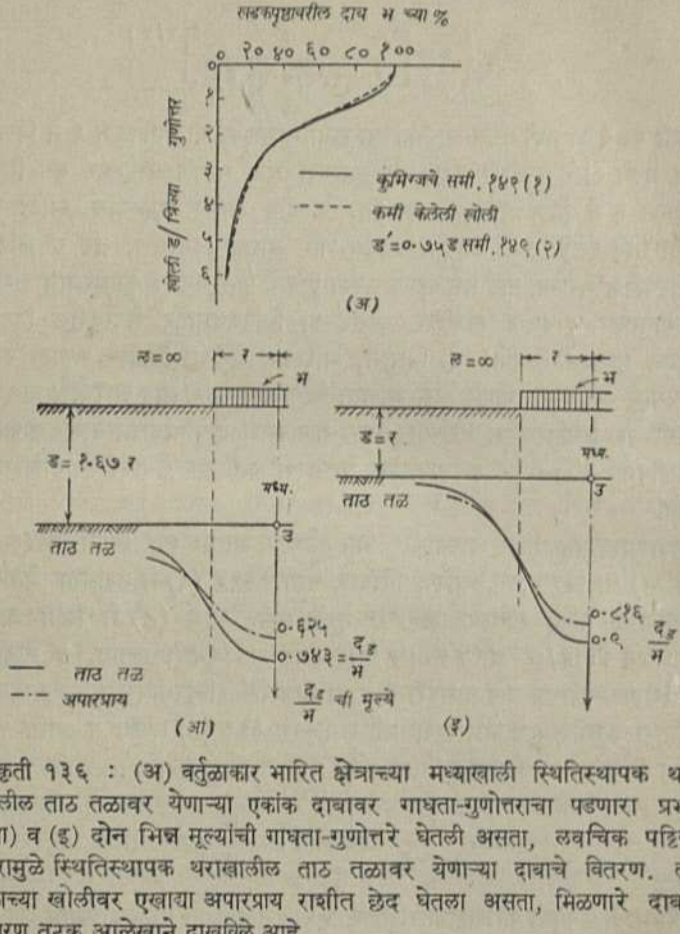
अपारप्राय घनराशीवर आयताकार भार ठेवला असता त्या खाली ठ (आकृती १२० अ) या बिंदुस्थानचे लंबदिक्-प्रतिबल, समी. १३६ (९) ने ठरविता येते. या समीकरणात प्रविष्ट झालेल्या $ऋ_{०}$ ची मूल्ये समी. १३६ (८) ने दिली जातात. तीं पूर्णपणे प=र/ख आणि फ=ल/ख यांवर अवलंबून असतात. ड जाडीच्या, स्थितिस्थापक थराच्या ताठ तळावरील ठ या कोणत्याही बिंदुस्थानच्या $\bar{द}_{ड}$ या एकांक दाबाचे सत्यसमीप मूल्य मिळविण्यासाठी समीकरण १३६ (८) मधील प आणि फ या पदांऐवजी पुढील पदे नियुक्त केली पाहिजेत :

$$प' = \frac{र}{०\cdot७५ड} \text{ आणि } फ' = \frac{ल}{०\cdot७५ड} \qquad [४]$$

तदनुषंगिक प्रभावमूल्ये परिशिष्टातील कोष्टक २ च्या साहाय्याने मिळू शकतात.

स्थितिस्थापक थरावर अनंत लांबीचा पट्टिकाभार ठेवला असता, त्याच्या ताठ तळावर येणाऱ्या दाबाचे वितरण आकृती १३६ आ आणि इ यांमध्ये दाखविले आहे. आकृती १३६ आ मध्ये ड चे मूल्य पट्टिकेच्या २र या रुंदीच्या ०·८४ पट आहे आणि आकृती १३६ इ मध्ये ते ०·५ पट आहे. अपारप्राय राशीतून ड खोलीवर घेतलेल्या छेदावर येणारे $\sigma_{ख}$ हे लंबदिक् प्रतिबल आणि भ हे भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य यांतील $\sigma_{ख}$/भ या गुणोत्तराची मूल्ये प्रत्येक आकृतीत तुटक आलेखाच्या कोटीमूल्यांनी दाखविली आहेत; तर सलग आलेखाच्या कोटीमूल्यांनी त्याच खोलीवरील ताठ

तळावर येणारा $द_{ह}$ हा दाब आणि $भ$ यांतील $\frac{द_{ह}}{भ}$ हे गुणोत्तर दाखविले आहे.



आकृती १३६ : (अ) वर्तुळाकार भारित क्षेत्राच्या मध्याखाली स्थितिस्थापक थराखालील ताठ तळावर येणाऱ्या एकांक दाबावर गाधता-गुणोत्तराचा पडणारा प्रभाव (आ) व (इ) दोन भिन्न मूल्यांची गाधता-गुणोत्तरे घेतली असता, लवचिक पट्टिकाभारामुळे स्थितिस्थापक थराखालील ताठ तळावर येणाऱ्या दाबाचे वितरण. ताठ तळाच्या खोलीवर एखाद्या अपारप्राय राशीत छेद घेतला असता, मिळणारे दाबाचे वितरण तुटक आलेखाने दाखविले आहे.

आकृती १३६ आ आणि इ यांमध्ये दाखविलेल्या फलितांची तुलना केली असता, असे दिसून येते की, $द_{ह}$ या दाबाच्या महत्तम मूल्यावर पडणारा तळाच्या ताठपणाचा प्रभाव ड/र हे गाधता–गुणोत्तर बदलत जाईल, तसा बदलत जातो. समीकरण २ आणि १३६ (२ अ) एकत्रित केली असता असे दिसते की, ड ही खोली भारित पट्टिकेच्या रुंदीच्या सुमारे ५ पट असल्यास हा प्रभाव महत्तम असतो. ड/र चे मूल्य अति लहान किंवा अति मोठे असेल, तर हा प्रभाव क्षुल्लक असतो.

या परिच्छेदात दिलेली समीकरणे स्थितिस्थापक थराच्या तळावर आणि त्याच्या अगदी लगतच्या परिसरात निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलांनाच फक्त लागू पडतात; कारण सेंट व्हेनान्टच्या तत्त्वानुसार तळाच्या ताठपणाचा स्थितिस्थापक थरातील प्रतिबल-परिस्थितीवर पडणारा प्रभाव, तळापासून वर जावे, तसा शीघ्रतेने कमी होत जातो. थराच्या वरच्या अर्ध्या जाडीत, प्रतिबलांची परिस्थिती, तोच भार कारक असणाऱ्या, अपारप्राय, स्थितिस्थापक राशीतील परिस्थितीशी जवळवजळ एकरूप असते. म्हणून या परिच्छेदातील समीकरणे अशा थराच्या पृष्ठावरील भारित क्षेत्राचे अवसीदन ठरविण्या-साठी वापरता येत नाहीत.

१५०. स्थितिस्थापक थरांच्या पृष्ठावरील भारांमुळे होणारे अवसीदन ठरविण्याची आसन्नमान पद्धत : ताठ तळावरील स्थितिस्थापक थरावर परिमित क्षेत्र व्यापणारा भार ठेवला असता, होणारे अवसीदन काटेकोरपणे गणितसिद्ध करण्याची समस्या अद्याप सोडविली गेलेली नाही. तथापि व्यावहारिक उपयोगाच्या दृष्टीने पुरेसे अचूक असणारे सत्यसमीप उत्तर स्टाईनब्रेनेरने (१९३४) शोधले आहे. अपारप्राय राशीच्या समतल पृष्ठभागावर समप्रमाणवितरित, आयताकार भार ठेवला असता, होणारे त्या क्षेत्राच्या कोपऱ्यांचे अवसीदन $\Delta न$ त्याने प्रथम गणितसिद्ध केले. नंतर या कोपऱ्यांच्या खाली $ह$ खोलीवर असणाऱ्या बिंदूंचे $\Delta न'$ हे उभे विस्थापन ठरविले आणि असे गृहीत धरले की, ताठ तळावरील $ह$ जाडीच्या स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर तोच भार ठेवला असता, होणारे भारित क्षेत्राच्या कोपऱ्यांचे $\Delta न_{ह}$ हे अवसीदन, $\Delta न - \Delta न'$ या फरकाइतके असते. म्हणजेच

$$\Delta न_{ह} = \Delta न - \Delta न' \qquad [१]$$

समजा,

$ल$ = आयताकार क्षेत्राची लांबी,
$र$ = त्या क्षेत्राची रुंदी,
$दी = ल/र$ दीर्घतागुणक,
$ह$ = स्थितिस्थापक थराची जाडी,
$गा = ह/र$ गाधतागुणक,
$भ$ = भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य,
$यं$ = थराचा स्थितिस्थापकत्व-मापांक आणि
$पॉ$ = पॉयसनचे गुणोत्तर

आहेत.

आयताकार क्षेत्राच्या कोपऱ्यांचे अवसीदन ($\Delta न$) समीकरण १३७ (१) च्या साहाय्याने मिळते. अपारप्राय राशीच्या पृष्ठावर बिंदुभार ठेवला असता होणारे, या

राशीच्या अंतरंगातील बिंदूचे उभे विस्थापन $अ_उ$ समीकरण १३५ (४अ) वरून मिळते आणि आयताकार क्षेत्राच्या एका कोपऱ्याखाली ड खोलीवर असणाऱ्या बिंदूचे $\Delta न$ हे उभे विस्थापन चलानयनाने सहज गणितसिद्ध करता येते. या रीतीचा अवलंब करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\Delta न_ड = \Delta न - \Delta न' =$$

$$भ \frac{र}{यं} \left[(१ - पॉ^२)\, ब_१ + (१ - पॉ - २पॉ^२)\, ब_२ \right] = भ \cdot \frac{र}{यं} \cdot क्र_न \qquad [२अ]$$

येथे

$$ब_१ = \frac{दी}{\pi} \left[दी\, लघु \frac{(१ + \sqrt{दी^२ + १})\sqrt{दी^२ + गा^२}}{दी\,(१ + \sqrt{दी^२ + गा^२ + १})} \right.$$

$$\left. + लघु \frac{(दी + \sqrt{दी^२ + १})\sqrt{१ + गा^२}}{दी + \sqrt{दी^२ + गा^२ + १}} \right] \qquad [२आ]$$

आणि

$$ब_२ = \frac{गा}{२\pi} \cdot स्प^{-१} \cdot \frac{दी}{गा\sqrt{दी^२ + गा^२ + १}} \qquad [२इ]$$

आहे आणि

$$क्र_न = (१ - पॉ^२)\, ब_१ + (१ - पॉ - २पॉ^२)\, ब_२ \qquad [३]$$

हे मूल्य म्हणजे एक शुद्धांक आहे. त्याने ड जाडीच्या, स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर आयताकार अधिभार ठेवला असता, त्याच्या कोपऱ्यांच्या अवसीदनावर पडणारा प्रभाव स्थूलमानाने दिला जातो. $दी = ल/र$ या दीर्घतागुणकाची निरनिराळी मूल्ये गृहीत धरून, प्रत्येक वेळी मिळणारा $गा = ड/र$ हा गाधता-गुणक आणि समीकरण ३ मधील $ब_१$ आणि $ब_२$ यांची मूल्ये, यांमधील संबंध आकृती १३७ अ मध्ये दाखविला आहे. पॉयसन गुणोत्तर $पॉ = ०$ असल्यास, $क्र_न$ हे प्रभावमूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$क्र_न = ब_१ + ब_२ \qquad [४]$$

जर $पॉ = ०·५$ असेल, तर समीकरण ३ मधील उजव्या बाजूच्या दुसऱ्या पदाचे मूल्य शून्य होते आणि प्रभावमूल्य पुढील प्रमाणे होते.

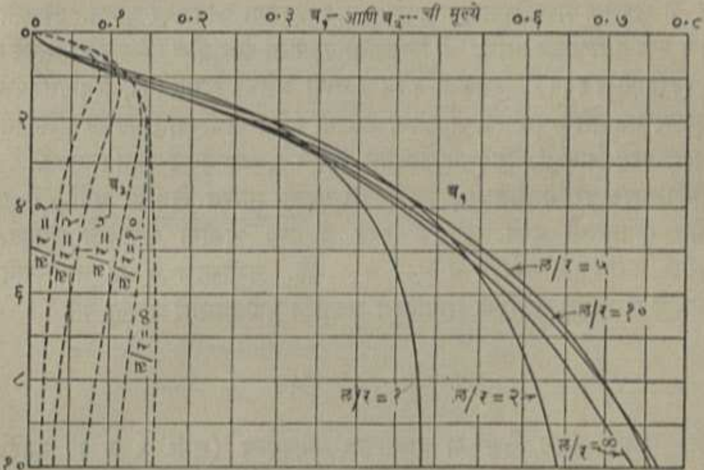
$$क्र_न = ०·७५\, ब_१ \qquad [५]$$

पॉ चे मूल्य या दोन मूल्यांच्या दरम्यान असल्यास, समीकरण ३ आणि आकृती १३७ अ मध्ये दिलेली फलिते यांच्या साहाय्याने $क्र_न$ चे मूल्य ठरविता येते.

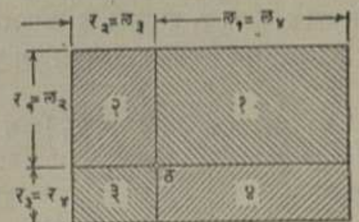
आकृती १३७ आ मध्ये दाखविलेल्या आयताकार क्षेत्राच्या आत स्थित असलेल्या

ठ या बिंदूचे अवसीदन ठरवायचे असेल, तर आपण १ ते ४ या प्रत्येक क्षेत्राच्या बाबतीत मिळणारी *दी* आणि *गा* यांची मूल्ये घेऊन तदनुषंगिक $\text{क}_{\text{न}_1}$ ते $\text{क}_{\text{न}_4}$ ही प्रभावमूल्ये ठरवू. त्यासाठी समीकरण ३ आणि आकृती १३७ अ यांमध्ये दाखविलेली फलिते यांचे साहाय्य घ्यावे लागते. त्यावरून ठ चे अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येते :

$$\text{न} = \frac{\text{भ}}{\text{यं}} \left(\text{क}_{\text{न}_1} \cdot \text{र}_1 + \text{क}_{\text{न}_2} \cdot \text{र}_2 + \text{क}_{\text{न}_3} \cdot \text{र}_3 + \text{क}_{\text{न}_4} \cdot \text{र}_4\right) \qquad [६]$$



(अ)



(आ)

आकृती १३७ : स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर ठेवलेल्यां भारामुळे होणारे अवसीदन. (अ) ताठ तळावरील स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठावर आयताकार क्षेत्रव्यापी भार ठेवला असता, आयताच्या कोपऱ्याचे अवसीदन कळण्यासाठी उपयुक्त असणारा आलेख. (आ) भारित क्षेत्राच्या आत पडणाऱ्या बिंदुस्थानचे अवसीदन ठरविण्याची पद्धत विशद करणारी रेखाकृती (आधार : स्टाईनब्रेनेर १९३४).

ठ चे स्थान भारित क्षेत्राच्या बाहेर असेल, तर त्याचे अवसीदन परिच्छेद १३७ मध्ये वर्णिलेल्या आणि आकृती १२२ आ मध्ये विशद केलेल्या बीजगणितीय बेरजेच्या पद्धतीने ठरविता येते.

लवचिक भार वर्तुळाकार (व्यास = २ त्र) असेल, तर अशा क्षेत्राच्या अवसीदनावर पडणारा गाधतागुणोत्तर आणि पॉयसनप्रणीत गुणोत्तर यांचा प्रभाव, आकृती १३८ अ ते इ यांमध्ये दाखविला आहे. गाधता-गुणोत्तराचे मूल्य सुमारे २/३ पेक्षा कमी आणि पॉयसनप्रणीत गुणोत्तर १/२ च्या जवळपास असेल, तर महत्तम अवसीदनाचे स्थान या क्षेत्राच्या मध्यबिंदूपासून सुमारे २त्र/३ इतक्या अंतरावर असते. आकृती १३८ इ मध्ये हे दाखविले आहे. या निष्कर्षाचा पडताळा क्षेत्रातील प्रयोगांनीही आलेला आहे (टेरझागी १९३५). आकृती १३८ इ वरून असेही दिसते की, स्थितिस्थापक थर फारसा जाड नसेल, तर त्याचा उघडा पृष्ठभाग भारित क्षेत्राच्या लगतच्या परिसरात उंचावतो; परंतु त्यासाठी पॉयसन-गुणोत्तराचे मूल्य ०·५ च्या जवळ असावे लागते.

स्थितिस्थापक थराची जाडी $ड_1$ आणि चौरसाकृती भारित क्षेत्राची अर्धी रुंदी र यांमधील गुणोत्तराची मूल्ये आकृती १३८ ई मध्ये भुजांनी दाखविली आहेत. थरावरील भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य $भ_1$ आहे. समीकरण ६ च्या साहाय्याने आपल्याला या भारित क्षेत्राच्या मध्यबिंदूचे अवसीदन पुढीलप्रमाणे मांडता येते:

$$न = ४ \cdot \frac{भ}{यं} \cdot र \cdot ऋ_न$$

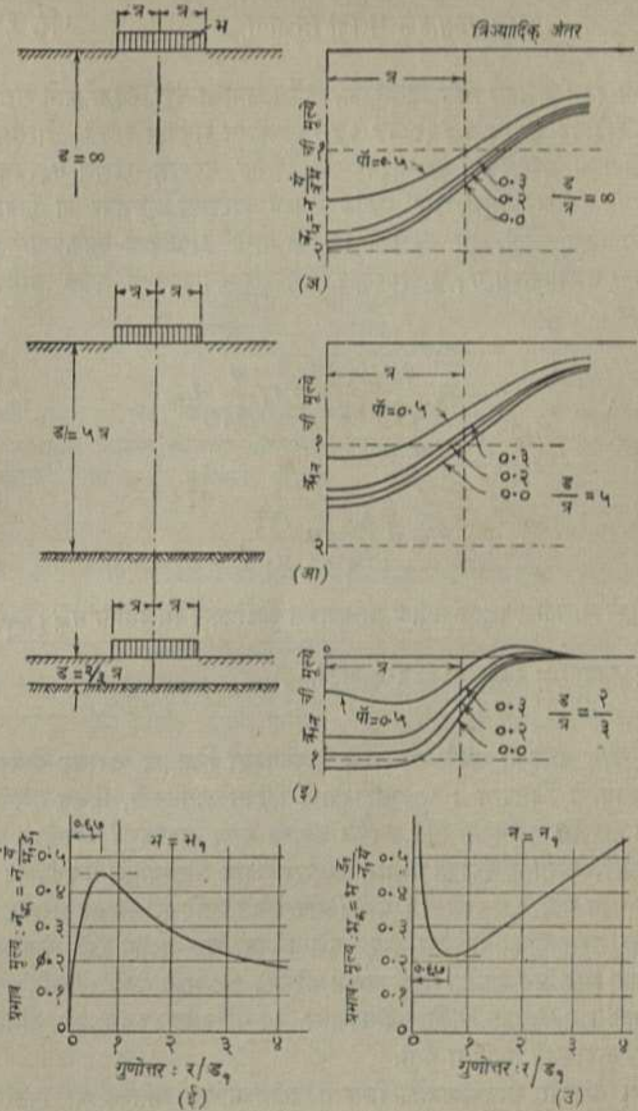
येथे $ऋ_न$ म्हणजे चौरस क्षेत्रांच्या बाबतीतील प्रभावमूल्य (समी. २ व ३) आहे. अशा क्षेत्रांच्या बाबतीत समीकरण २ मधील *दी* चे मूल्य एक असते. म्हणून पॉयसन गुणोत्तराचे मूल्य दिलेले असेल, तर प्रभावांकाचे मूल्य ($ऋ_न$) फक्त गाधतागुणकावर अवलंबून राहते. स्थितिस्थापक थराची $ड_1$ ही जाडी दिलेली असता, भारित क्षेत्राच्या २र रुंदीचा अवसीदनावर पडणारा प्रभाव ठरविण्यासाठी आपण पुढील समीकरण मांडू:

$$न = ४ \frac{भ}{यं} \frac{र}{ड_1} ड_1 \cdot ऋ_न = भ \frac{ड_1}{यं} \left(४ \frac{र}{ड_1} ऋ_न \right) = भ \frac{ड_1}{यं} न_{ऋ} \qquad [७]$$

म्हणून—

$$न_{ऋ} = न \frac{यं}{भड_1} \qquad [८]$$

पॉ चे मूल्य दिलेले असल्यास, $न_{ऋ}$ हे प्रभाव मूल्य केवळ $र/ड_1$ या गुणोत्तरावर अवलंबून असते. *पॉ* = ०·५ गृहीत धरून (अदमनीय, स्थितिस्थापक थर) $र/ड_1$ च्या निरनिराळ्या मूल्यांना अनुषंगिक अशी $न_{ऋ}$ ची मूल्ये आकृती १३८ ई मधील आलेखाच्या कोटीमूल्यांनी दिली आहेत.



आकृती १३८ : (अ) ते (इ) तीन निरनिराळी गाधता-गुणोत्तरे घेऊन स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर वर्तुळाकार क्षेत्रव्यापी, लवचिक भार लावला असता, मिळणारे अवसीदन; (ई) विवक्षित मूल्याचा एकांक-क्षेत्रस्थ भार ठेवला असताना, स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठावरील भारित, चौरस क्षेत्राच्या आकारमानाचा त्या क्षेत्राच्या मध्यबिंदूच्या अवसीदनावर पडणारा प्रभाव; (उ) मध्यबिंदूचे विवक्षित अवसीदन होण्यासाठी आवश्यक असणाऱ्या एकांक क्षेत्रस्थ भारावर पडणारा भारित चौरस क्षेत्राच्या आकारमानाचा प्रभाव.

आकृती १३८ ई वरून असे दिसते की, भारित क्षेत्राची रुंदी स्थूलमानाने थराच्या जाडीच्या १·३ पट असल्यास ($२र = १·३ह_१$) अवसीदन महत्तम असते. चौरसाकृती भारित क्षेत्राच्या मध्यबिंदूचे अवसीदन एका विशिष्ट मूल्याचे–म्हणजे $न_१$ इतके–असावे असे दिलेले असेल, तर एकांक क्षेत्रस्थ भाराच्या मूल्यावर या क्षेत्राच्या रुंदीचा जो प्रभाव पडतो, तो आकृती १३८ उ मध्ये दाखविला आहे. समीकरण ८ मधील $न$ साठी आपण $न_१$ हे स्थिरमूल्य दिले, तर आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येते :

$$भ = न_१ \frac{यं}{ह_१} \left(\frac{१}{न_{ऋ}} \right) = न_१ \frac{यं}{ह_१} भ_{ऋ}$$

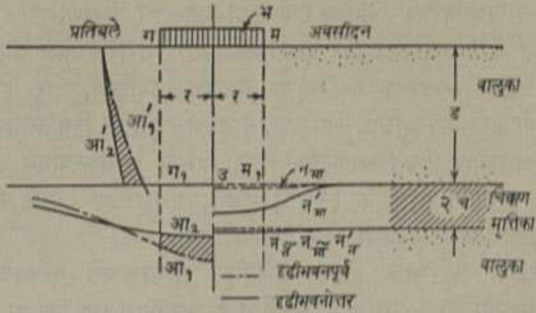
येथे

$$भ_{ऋ} = \frac{१}{न_{ऋ}} = भ \frac{ह_१}{न_१ \, यं}$$

$भ_{ऋ}$ ची मूल्ये आकृती १३८ उ मधील आलेखाच्या कोटींवरून मिळतात. $भ_{ऋ}$ (लघुतम) $= १/न_{ऋ}$ (महत्तम) $= १/०·४५ = २·२$ असते.

१५१. दोन वालुका-थरांच्या मध्ये असणाऱ्या चिकण थरावर येणाऱ्या उभ्या दाबाचे वितरण : वालुकास्तरांमध्ये बंदिस्त असलेल्या, चिकण मृत्तिकेच्या थरांचे जे सावकाश दृढीभवन होते त्यामुळे बऱ्याच वेळा महत्त्वपूर्ण अवसीदन घडून आलेले आहे. अशा मृत्तिकांचा पाझरगुणांक फार लहान असल्यामुळे हे दृढीभवन फार सावकाश घडून येते, हे प्रकरण १३ मध्ये विशद केलेले आहेच. चिकण थराची जाडी फार नसेल, तर वाळूच्या दोन थरांमध्ये असलेला असा थर पार्श्वीय दृष्ट्या जवळजवळ पूर्णपणे बद्ध आहे असे मानता येते. म्हणून परिच्छेद ९८ मध्ये निर्दिष्ट केलेली, मूलभूत गृहीते त्यास लागू पडतात आणि दृढीभवनाचा वेग परिच्छेद १०२ मध्ये वर्णिलेल्या पद्धतीच्या साहाय्याने ठरविता येतो.

चिकण थराच्या सावकाशपणे होणाऱ्या दृढीभवनाचा प्रतिबलांच्या वितरणावर पडणारा प्रभाव आता विचारात घ्यावयाचा आहे. त्यासाठी आपण आकृती १३९ मध्ये दाखविलेल्या २र रुंदीच्या भारित पट्टिकेच्या खाली निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलपरिस्थितीचा विचार करू. तेथे एका वालुका-थराच्या पृष्ठावर भार लावलेला असून त्या थराची जाडी ह आहे आणि त्याखालच्या चिकण थराची जाडी २च आहे. आपण असेही गृहीत धरू की, चिकण थर अस्तित्वात नसता, तर बॉसिनेस्कप्रणीत सिद्धांत या वाळूच्या बाबतीत लागू पडला असता.



आकृती १३९ : दोन वालुकाथरांच्या मध्ये असलेल्या चिकण थरात लवचिक पट्टिकाभारामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले व त्याचे अवसीदन यांवर त्या थराच्या सावकाशपणे होणाऱ्या दृढीभवनाचा परिणाम.

अपारप्राय, समांग घनराशीच्या पृष्ठावर पट्टिकाभार ठेवला असता, त्याच्या खाली आडव्या छेदावर येणारी लंबदिक्-प्रतिबले समीकरण १३६ (२अ) ने आणि पट्टिकेच्या कडांतून जाणाऱ्या उभ्या छेदांवरील कार्तनिक प्रतिबले समीकरण १३६ (२इ) ने ठरविता येतात. त्यानुसार ह खोलीवरील आडव्या छेदावर येणारी लंबदिक्-प्रतिबले, आकृती १३९ मध्ये हा छेद आणि तुटक आलेख $आ_1$ यांतील उभ्या अंतराने दाखविली आहेत आणि $गग_1$ या उभ्या छेदावरील कार्तनिक-प्रतिबले तो छेद आणि तुटक आलेख $आ'_1$ यांतील आडव्या अंतराने दाखविली आहेत.

चिकण थराचे दृढीभवन सावकाशपणे होत असल्यामुळे दृढीभवन-प्रक्रियेच्या सुरवातीला त्याचे वर्तन लवचिक परंतु जवळजवळ अदमनीय थराप्रमाणे असते; आणि या अवस्थेतील प्रतिबलांचे वितरण वालुका आणि चिकण मृत्तिका यांची स्थितिस्थापकता सारखीच आहे असे मानले असता, मिळणाऱ्या वितरणासारखे असते. या सुरवातीच्या अवस्थेत चिकण थराचा माथा आणि तळ या दोहोंचे अवसीदन ($न_{मा}$ आणि $न_{त}$) जवळजवळ सारखेच असते. आकृती १३९ मध्ये उजवीकडे हे दाखविले आहे.

दृढीभवनाची प्रक्रिया जशी प्रगत होत जाते तसे चिकण थराच्या माथ्याचे अवसीदन तळापेक्षा अधिक होत जाते. दृढीभवनाच्या अंतिम अवस्थेत हा फरक फार महत्त्वपूर्ण असण्याचा संभव असतो. अधिभाराच्या कडांतून घेतलेल्या उभ्या छेदांवर जीं कार्तनिक-प्रतिबले येतात त्यांवर पडणारा माथ्याच्या अधिकतर अवसीदनाचा प्रभाव, ताठ तळाच्या प्रभावाच्या उलट असतो. या अवसीदनामुळे $ग_1$ आणि $म_1$ यांच्या परिसरातील प्रतिबले वाढतात. त्यांचे वितरण आकृती १३९मधील $आ'_2$ या आलेखाने दाखविल्याप्रमाणे असते. $गमम_1ग_1$ या खंडाच्या उभ्या बाजूंवरील कार्तनिक प्रतिब

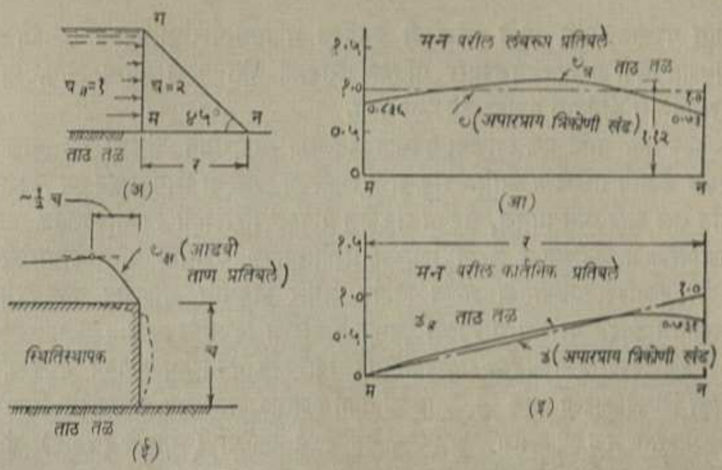
ही वाढ त्याच्या तळावरील लंबदिक्-दाब कमी करण्यास कारणीभूत होते. म्हणून बॉसिनेस्कप्रणीत समीकरणावर आधारित असणाऱ्या, परिशिष्टातील कोष्टक २ च्या साहाय्याने चिकण थरावरील लंबदिक्-दाब आपण ठरविला, तर होणारी चूक सुरक्षिततेत भर टाकणारी असते. याउलट, वाळूच्या थरातील स्थितिस्थापकत्व-विषयक समांगतेच्या अभावाचा दाब-वितरणावर पडणारा प्रभाव दुर्लक्षिल्यामुळे होणारी चूक (परिच्छेद १४१ आणि आकृती १२७ इ पाहा), असुरक्षित बाजूची असते आणि तीमुळे वर उल्लेखिलेल्या चुकीची अंशतः भरपाई होते.

वाळुकाथराच्या दमनामुळे होणारे अवसीदन साधारणपणे दुर्लक्षिले जाते. या पद्धतीनुसार पृष्ठभागावरील कोणत्याही बिंदूचे $न$ हे अवसीदन त्या बिंदूच्या लंबात खाली चिकण थराच्या जाडीत होणाऱ्या घटीएवढे असते. दृढीभवन पूर्ण झाल्यानंतर ही घट पुढीलप्रमाणे असते :

$$न = न'_{मा} - न'_{त} = २दृचप_{द}$$

येथे $दृ$ म्हणजे चिकण थराच्या जाडीच्या मध्यातून घेतलेल्या आडव्या छेदावरील लंबदिक् प्रतिबल आहे. त्याचे मूल्य आकृती १२० आ मधील आलेखाच्या साहाय्याने मिळविता येते. २च ही थराची जाडी आहे आणि $प_{द}$ हा अवकाशक्षयाचा गुणांक आहे (समीकरण ९८ (५)). $न'_{मा}$ आणि $न'_{त}$ हीं पदे चिकण थराच्या उभय पृष्ठांची अवसीदने व्यक्त करतात.

१५२. ताठ तळावरील स्थितिस्थापक शंकू : परिच्छेद १४४ मध्ये स्थिति-स्थापक शंकूमधील प्रतिबलांविषयीची समीकरणे दिलेली आहेत. शंकूच्या बाजू अनंतापर्यंत पसरलेल्या आहेत या गृहीतावर तीं आधारित आहेत. या प्रतिबलांमुळे शंकूतून घेतलेल्या प्रत्येक आडव्या छेदात परातीच्या आकारासारखे विरूपत्व येते. शंकूखाली परिमित खोलीनंतर आडवा ताठ तळ असेल, तर त्या तळावरील प्रतिबलांचे वितरण अपारप्राय शंकूतून घेतलेल्या आडव्या छेदावरील वितरणाहून भिन्न असेल हे उघड आहे. आकृती १३४ मध्ये स्पष्ट केलेल्या उपपत्तीच्या आधारे, तळाच्या ताठपणामुळे त्याच्या मध्यभागावरील लंबदिक् प्रतिबले वाढतील आणि कडांजवळची प्रतिबले कमी होतील, अशी आपली अपेक्षा असते. शंकू-तळ विषमाकर्षणयुक्त आहे या गृहीतानुसार बुल्फने केलेल्या (१९१४) गणिती संशोधनातून मिळालेल्या फलितांशी आपली ही अपेक्षा सुसंगतच आहे. शंकूच्या तळाचे विस्थापन शून्य असले पाहिजे, या अटीची पूर्ती करण्याकरिता बुल्फने पुढील गोष्टी केल्या. समीकरण १७ (५) मधील फ हे प्रतिबलविषयक फलन बदलून त्याऐवजी त्याने बहुपदांची एक श्रेणी गृहीत धरली. या बहुपदातील गुणांक त्याने अशा पद्धतीने निवडले की, तळाच्या बाबतीतील सीमालक्षण-विषयक अट निदान स्थूलमानाने का होईना पुरी व्हावी. त्याने विचारार्थ घेतलेल्या



आकृती १४० : (अ) ताठ तळावरील स्थितिस्थापक शंकूचा छेद; त्यावर पाण्याचा दाब कारक आहे. (आ) शंकूतळावरील लंबरूप प्रतिबलांचे वितरण; (इ) शंकूतळा-वरील कार्तनिक-प्रतिबलांचे वितरण (अ ते इ : आधार : बुल्फ १९१४); (ई) क्षितिज-लंब, पार्श्वीय सीमा असलेल्या स्थितिस्थापक थराच्या पृष्ठभागावर येणारी ताण प्रतिबले.

शंकूचा छेद आकृती १४० अ मध्ये दाखविला आहे. शंकूच्या उभ्या बाजूवर स्थैतिक द्रवदाब कारक आहे, या द्रवाची घनता शंकूतील पदार्थाच्या निम्मे आहे व शंकूची तिरपी बाजू क्षितिजाशी ४५° चा कोन करते. अपारप्राय शंकूच्या बाबतीतील समी. १४४ (१) आणि १४४ (२) यांचा अवलंब करून, या सोईस्कर गृहीतांनुसार तळावरील लंबदिक् प्रतिबलांचे वितरण ठरविले, तर ते पूर्णतया समप्रमाण असले पाहिजे. अशा प्रकारचे वितरण आकृती १३९ आ मध्ये एका आडव्या तुटक रेषेने दाखविले आहे. तळाच्या ताठपणामुळे या वितरणात बदल होतो. हे बदललेले वितरण सलग आलेखाने दाखविले आहे. तळाच्या ताठपणाचा तळावरील कार्तनिक-प्रतिबलांच्या वितरणावर पडणारा प्रभाव आकृती १४० इ मध्ये दाखविला आहे. आकृती १३१ आ आणि १३१ इ यांमध्ये अनुक्रमे अपारप्राय शंकूमध्ये मिळणारी स्थितिस्थापक आणि नम्य समतोल अवस्थेतील प्रतिबल-वितरणे दाखविली आहेत. या दोन वितरणांतील फरकाशी तुलना करता, या उदाहरणातील तळाच्या ताठपणाचा तळावरील प्रतिबल-वितरणावर होणारा परिणाम दुर्लक्षणीय आहे असे दिसते. तळापासून वरच्या पातळीवर घेतलेल्या छेदांच्या बाबतीत तर हा परिणाम अधिकच क्षुल्लक असतो. कारण तळापासून उंच जावे, तसे प्रतिबल-वितरण त्वरेने अपारप्राय शंकूमधील वितरणासारखे होऊ लागते. स्थितिस्थापक शंकूच्या गणिती सिद्धांतात ब्राहट्झने (१९३३) आणखी भर टाकली आहे. त्याने मांडलेली समीकरणे खडकावरील कॉंक्रीटच्या धरणांन

लागू पडतील; परंतु त्याने मांडलेली सैद्धांतिक प्रतिबल-परिस्थिती आणि मातीच्या धरणात किंवा भरणात असणारी प्रतिबल-परिस्थिती यांत काही साम्य आहे, असे दाखविणारा कोणताच पुरावा उपलब्ध नाही.

एक उभा आणि एक आडवा पृष्ठभाग असलेल्या अपारप्राय शंकूचा छेद आकृती १४० ई मध्ये दाखविला आहे.· शंकूचा च खोलीच्या खालचा भाग काढून त्या ठिकाणी ताठ तळ आहे असे मानले, तर या शंकूतील प्रतिबल-परिस्थिती विषमाकर्षणयुक्त ताठ तळावरील ह जाडीच्या व उभ्या पृष्ठाच्या स्थितिस्थापक थरातील परिस्थितीसारखीच होते. स्वतःच्या ·वजनामुळे थरात निर्माण होणारे विरूपत्व आकृतीत तुटक रेषेने दाखविले आहे. थराच्या माथ्याचा पृष्ठभाग ताणलेल्या स्थितीत आहे.

जिलेटिनच्या एका लहान प्रारूपात मोजलेल्या विकृतींच्या मूल्यांवरून ग्रंथकर्त्याने असा निष्कर्ष काढला आहे की, आडव्या पृष्ठभागावरील ताणजन्य प्रतिबलांचे वितरण स्थूलमानाने, मूळ पृष्ठ आणि $\sigma_{क्ष}$ चिन्हांकित सलग वक्ररेषा (आकृती १४० ई) यांनी सीमित केलेल्या क्षेत्राने दाखविल्याप्रमाणे असते. उभ्या बाजूच्या वरच्या कडेपासून सुमारे च/२ अंतरावर ताण प्रतिबल महत्तम असते. तेथे ताणजन्य तडा निर्माण होऊन उच्छेदास प्रारंभ होतो. एकदा उच्छेदास प्रारंभ झाला की, तो कार्तनिक पद्धनतीन तड्याच्या तळापासून थराच्या पायथ्यापर्यंत एका वक्र पृष्ठावरून पसरतो.

१५३. औपम्य नियम आणि गणिती-साम्य यांचा आधार घेऊन प्रायोगिक पद्धतीने ठरविलेली प्रतिबले : गुरुत्वाकर्षण किंवा रंध्रजलदाब यांच्यासारख्या बलांमुळे स्थितिस्थापक पदार्थात निर्माण होणारी प्रतिबले ठरविण्याच्या कार्यात ताठ सीमांमुळे क्लिष्टता येते. म्हणून आकृती १४० ई मध्ये दाखविलेल्या समस्येसारख्या, अनेक व्यावहारिक महत्त्वाच्या समस्यांच्या बाबतीत अद्याप गणिताधिष्ठित उत्तरे मिळालेली नाहीत. परंतु अशा उदाहरणांत लहान प्रमाणाच्या प्रारूपांवर प्रयोग करून आवश्यक ती माहिती मिळविता येते. अशा प्रयोगांच्या फलितांचा अन्वयार्थ औपम्य-नियमांनुसार लावता येतो. ज्या गोष्टींचा विचार करावयाचा असतो, तद्विषयक सर्वसामान्य समीकरणांनी हे नियम निश्चित करता येतात. उदाहरणार्थ, क्षरणजालाची समीकरणे किंवा स्थितिस्थापक घनराशींतील अधिभारजन्य प्रतिबलांचे वितरण व्यक्त करणारी समीकरणे, एका बाजूस गुणांकाच्या रूपात फक्त शुद्धांकच येतील अशा स्वरूपात मांडणे नेहमीच शक्य असते. त्यामुळे समीकरणाच्या दुसऱ्या बाजूची मात्रा प्रारूपासठी स्वीकारलेल्या प्रमाणावर अवलंबून राहत नाही.

ठरवायची प्रतिबले जर केवळ गुरुत्वाकर्षणजन्य किंवा रंध्रजलदाबजन्य असतील, तर औपम्यनियम अगदी सोपा असतो. कारण ही प्रतिबले वस्तूच्या रेखात्मक परिमाणांच्या सरळ प्रमाणात वाढणारी असतात. परंतु प्रयोगात मात्र बऱ्याच अडचणी येतात; कारण या बलांमुळे लहान प्रारूपात निर्माण होणारी प्रतिबले फारच लहान असतात.

गुरुत्वाकर्षणामुळे निर्माण होणारी प्रतिबल-परिस्थिती अभ्यासताना बुकीने (१९३१) ही अडचण प्रारूप अपकेंद्रणयंत्रावर ठेवून सोडविली. अशा प्रकारे वास्तु-बलांची तीव्रता आणि तज्जन्य प्रतिबले कोणत्याही इष्ट मूल्यापर्यंत वाढविणे त्याला शक्य झाले. या पद्धतीचा अवलंब करून, भूपृष्ठापासून निरनिराळ्या खोल्यांवरील खाणकामाची सुरक्षित रुंदी ठरविण्याचा त्याने प्रयत्न केला (बुकी (१९३४)).

प्रयोगातील अडचणींचे निवारण करण्याची दुसरी पद्धत म्हणजे गणितीय साम्य-गुणाचा अवलंब करणे ही होय. जलशास्त्र आणि व्यावहारिक बलविज्ञान यांत वापरली जाणारी कित्येक कलन-समीकरणे व इतर क्षेत्रातील, उदाहरणार्थ, उष्णतेचे संवहन किंवा अभिसरण याविषयीचे मूलभूत संबंध व्यक्त करणारी, कलन-समीकरणे सारखीच असतात. या सारखेपणामुळे **गणिती साम्यगुण** प्रस्थापित करता येतो. असा एक गणिती साम्यगुण परिच्छेद १०० मध्ये वर्णिला आहे. तसेच आणखी इतरही अनेक माहीत आहेत (टिमोशेंको १९३४). पदार्थविज्ञानाच्या एका क्षेत्रातील विशिष्ट समस्येतील सीमालक्षणे, परिच्छेद १०० मध्ये वर्णिल्याप्रमाणे, दुसऱ्या क्षेत्रातील समस्येतील तशाच लक्षणांशी जुळतील अशी निवडली, तर दोन्ही समस्यांच्या कलन-समीकरणांची उत्तरे अंकदृष्ट्या सारखीच असतात.

परिपीडनामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रतिबल-परिस्थितीसाठी साबणपटलाचे साम्य हें गणिती साम्यगुणाचे एक सुविख्यात उदाहरण आहे (प्रांड्ट्ल १९०३, साउथवेल १९३६ पाहा). या साम्यगुणामुळे समप्रमाणात ताणलेल्या साबणाच्या पटलाचे विचलन हे परिपीडनविषयक कलन-समीकरणातील प्रतिबल-फलनासारखे असते. मात्र त्यासाठी खालील अटी पुऱ्या झाल्या पाहिजेत. साबणाच्या पटलाने व्यापलेले क्षेत्रफळ, ज्या दंडाला पीळ लावलेला असेल, त्याच्या छेदाशी समान असले पाहिजे. तसेच पटलावर समप्रमाण वितरित दाब कारक असला पाहिजे. असा दाब एका बाजूने लावलेल्या हवादाबाने निर्माण करता येतो. एकदा प्रतिबलविषयक फलन समजले म्हणजे प्रतिबले आलेखपद्धतीच्या चलानयनाने किंवा दुसऱ्या एखाद्या रीतीने ठरविता येतात. सापेक्षतः पटलाचे विचलन मोजणे सोपे आहे; परंतु दंडातील प्रतिबले मोजणे अशक्य आहे. असे एक पटल-साम्य ब्राह्ट्झने (१९३६) पाझरक्षम धरणांच्या जलाभेद्य तळावरील रंध्रजलदाब ठरविण्यासाठी वापरले आहे.

१५४. प्रतिबल ठरविण्याची प्रकाश-विकार पद्धत : प्रकाशदृष्ट्या समदैशिक पदार्थात प्रतिबल-निर्मितीमुळे दुहेरी वक्रीभवन होते, या ब्रूस्टरच्या नियमावर प्रकाश-विकार पद्धत आधारित आहे. पारदर्शक पदार्थाच्या पत्र्यास प्रतिबल लावले आणि त्यातून ध्रुवीकृत म्हणजेच दिशाबद्ध प्रकाशाचा किरण पाठविला, तर तो दोन घटकांत विभागला जातो. त्यांपैकी एक घटक ७, या प्रधान-प्रतिबलाच्या दिशेला काटकोनात असलेल्या

पातळीत दिशाबद्ध झालेला असतो आणि दुसरा σ_2 या दुसऱ्या प्रधान-प्रतिबलाला काटकोनात असलेल्या दिशेत बद्ध झालेला असतो.

या दोन किरणांतील दशांतर प्रधान-प्रतिबलांतील $\sigma_1 - \sigma_2$ या फरकाच्या सरळ प्रमाणात वाढते. या दोन घटकांच्या दिशाबद्धतेच्या पातळ्यांचे स्थान आणि त्यांमधील दशांतर मोजले असता, आपल्याला प्रतिबलांचे प्रक्षेपणपथ काढण्यासाठी आवश्यक असलेली सर्व माहिती मिळते. तसेच प्रकाशविकार प्रयोगासाठी वापरलेल्या प्रारूपांतील प्रत्येक बिंदुस्थानच्या प्रधान-प्रतिबलांतील फरक ठरविण्यासाठी आवश्यक असलेली माहितीही मिळते. प्रधान-प्रतिबलांची बेरीज करण्यासाठी लागणारी माहिती प्रतिबलनिर्मितीमुळे प्रारूपाच्या जाडीमध्ये पडलेला फरक मोजून मिळविता येतो. त्यासाठी डेन हारटोगने शोधलेली व गणिती साम्यगुणावर अधिष्ठित असलेली साबणपटल-पद्धती किंवा अन्य स्वतंत्र पद्धतींचा (साउथवेल १९३६) अवलंब केला जातो. अगदी अलीकडे ब्राहट्झ आणि सोरेन्स यांनी (१९३९) प्रत्येक प्रकारची प्रधान प्रतिबले एकदमच ठरविता येतील, अशी एक पद्धत सुचविलेली आहे.

काच, सेल्यूलाइड, बेकेलाइट, फेनोलाइट किंवा एखादा पारदर्शक पदार्थ प्रारूप बनविण्यासाठी वापरतात. दिशाबद्ध प्रकाशाच्या शलाकेच्या मार्गात काटकोन करून ते उभे केले जाते आणि विचाराधीन समस्येनुसार त्यावर बले लावली जातात. बहुतांश उपकरणांमध्ये प्रारूपात शिरणाऱ्या शलाकेच्या दिशाबद्धतेची पातळी स्थिर ठेवून प्रारूपच शलाकेला समांतर असणाऱ्या अक्षाभोवती भ्रमण करू शकेल; तसेच परस्परांशी काटकोन करणाऱ्या, आणि किरणदिशेस काटकोनात असणाऱ्या, दोन दिशांत सरकवता येईल, अशी व्यवस्था केलेली असते (कोकर आणि फिलॉन १९३१). प्रतिबल-प्रक्षेपणरेषा आलेख-पद्धतीने ठरविता येतात.

वर वर्णिलेले तंत्र केवळ एका पातळीतील प्रतिबल-परिस्थितीचे संशोधन करण्यासाठीच वापरता येते. तथापि अगदी अलीकडे प्रकाश-विकार पद्धतीचा वापर त्रिदिक् प्रतिबल-परिस्थितीच्या संशोधनासाठीही यशस्वी रीत्या केलेला आहे (हिल्ट्शर १९३८).

कॉंक्रीटच्या वास्तूतील प्रतिबले ठरविण्यासाठी प्रकाश-विकार पद्धतीचा वापर यु. एस. ब्युरो ऑफ रेक्लमेशनकडून फार मोठ्या प्रमाणावर केला जातो. मृत्तिका-बल-विज्ञानविषयक समस्यांच्या बाबतीत ती वापरताना पडणाऱ्या मर्यादा सर्वसाधारणपणे स्थितिस्थापकत्व-सिद्धांताच्या मर्यादांसारख्याच आहेत (परिच्छेद १३२ पाहा).

प्रकरण १९

कंपनविषयक समस्या

१५५. विषयप्रवेश : मनोऱ्यावरील पाण्याची टाकी किंवा एखादी उंच इमारत यांसारखी स्वतः स्थितिस्थापक असणारी किंवा स्थितिस्थापक आधारावर ठेवलेली वास्तू एखाद्या आघातामुळे किंवा एकदम लावून व नंतर काढून घेतलेल्या बलामुळे, तिच्या नेहमीच्या स्थानापासून अल्पकाळापुरती बाजूस ढकलली गेली, तर आधारमृत्तिकेतील आणि त्या वास्तूच्या अवयवांतील स्थितिस्थापक बले आणि बाह्य बले, यांमध्ये तदनंतर समतोल राहत नाही आणि कंपनास प्रारंभ होतो. भूकंप, स्फोट, चालू असलेली यंत्रे, वाहनांची रहदारी, स्थूणा ठोकण्याची क्रिया आणि अशा कित्येक इतर गोष्टी वास्तूंच्या स्थैतिक समतोलात बिघाड निर्माण करू शकतात. एखाद्या प्रेरणेने समतोलात निर्मिलेल्या अशा विक्षेपाचे मान दोन प्रकारे व्यक्त करता येते. एका प्रकारात विक्षेप निर्माण करणाऱ्या बलाची तीव्रता दिली जाते आणि दुसऱ्यात वास्तूचा गुरुत्वमध्य त्याच्या मूळ समतोल अवस्थेतील स्थानापासून त्या बलाने किती अंतरापर्यंत विस्थापित केला, ते अंतर दिले जाते. या बलास **विक्षेपकारी बल** आणि त्याने घडविलेल्या विस्थापनास **प्रारंभिक विस्थापन** असे म्हणतात.

एखाद्या ताठ वस्तूचा स्थितिस्थापक आधार अशा स्वरूपाचा असेल की, ती वस्तू केवळ एका सरळ रेषेला समांतर किंवा एखाद्या पातळीत, एका बद्ध अक्षाभोवतीच कंप पावू शकेल, तर त्या वस्तूला **एका कोटीची स्वाधीनता** आहे असे म्हटले जाते. एरवी तिला स्वाधीनतेच्या दोन किंवा तीन कोटीही असतात. एखाद्या वस्तूचे विस्थापन व्यक्त करण्यासाठी लागणाऱ्या सहनिर्देशकांच्या किंवा मात्रांच्या संख्येइतक्याच त्या वस्तूच्या **स्वाधीनतेच्या कोटी** असतात. अतिशय व्यापक उदाहरणात कोणत्याही वस्तूची हालचाल तीन सरळरेषात्मक आणि तीन भ्रमणात्मक घटकांत विभागता येते आणि हा प्रत्येक घटक एकेका अलग मूल्याने व्यक्त करता येतो. म्हणून कोणत्याही ताठ वस्तूच्या स्वाधीनता-कोटी सहापेक्षा अधिक असू शकत नाहीत. या वस्तूतील कणांची सापेक्ष स्थाने बदलत नसतील तर त्या वस्तूस **एकराशी व्यूह** म्हणतात. याउलट, एखाद्या व्यूहात अनेक ताठ वस्तू सापेक्षतः लवचिक अवयवांनी एकमेकींस जोडलेल्या असतील, तर तेथे **अनेक-राशी व्यूह** विचारात घ्यावा लागतो.

एकाच प्रेरणेमुळे निर्माण होणाऱ्या कंपनांस **मुक्त कंपने** म्हणतात. कोणत्याही एका बिंदूच्या, विवक्षित दिशेतील परम सीमेच्या स्थानाप्रत, त्याची एकामागोमाग दोन आगमने होण्यास लागणारा काल म्हणजे त्या दिशेतील कंपनाचा **स्वाभाविक काल** होय.

स्थितिस्थापक आधारावर ठेवलेल्या आणि एका कोटीची स्वाधीनता असणाऱ्या, ताठ व्यूहास फक्त एकच **स्वाभाविक काल** असतो. एखाद्या व्यूहास अनेक कोटींची स्वाधीनता असेल, तर तिच्या मुक्त कंपनांच्या घटकांच्या स्वाभाविक वारंवारता निरनिराळ्या असतात.

एका प्रेरणेने निर्माण झालेल्या मुक्त कंपनांहून निराळी अशी कंपने म्हणजे विवक्षित कालखंडानंतर पुनःपुनः कारक होणाऱ्या, एखाद्या नियतकालिक प्रेरणेमुळे निर्माण झालेली **बलप्रवृत्त** किंवा **प्रवृत्त कंपने** होत. चालू असलेली यंत्रे, रस्त्यावरील रहदारी, स्थूणा ठोकण्याचे काम आणि तत्सम इतर अनेक कारणांमुळे **नियतकालिक प्रेरणा** निर्माण होऊ शकते. नियतकालिक प्रेरणेचे उगमस्थान वास्तूपासून लांब अंतरावर असेल, तर ती वास्तूच्या तळापर्यंत निम्नस्तरातून येऊन पोचते. या निम्नस्तराच्या आत ही प्रेरणा ध्वनि-लहरीप्रमाणे प्रवास करते. जसजसा काळ व्यतीत होतो, त्याप्रमाणे प्रेरणेचे अधिष्ठान आणि प्रेरणेच्या प्रभावामुळे कंप पावणाऱ्या क्षेत्राची बाह्य सीमा यांतील अंतर वाढत जाते. या बाह्य सीमेस **लहरीची अग्रसीमा** म्हणतात. ही सीमा ज्या वेगाने पुढे सरकते त्यास **लहरीचा संचार-वेग** म्हणतात. हा वेग बऱ्याच अंशी किंवा पूर्णपणे निम्नस्तराच्या स्थितिस्थापकत्व-गुणावर अवलंबून असल्यामुळे, नमुने न घेता किंवा अन्य प्रयोग न करता, अशा निम्नस्तराचे काही स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म ठरवायचे असतील, तर त्यासाठी कंपन-पद्धतींचा अवलंब करणे शक्य असते.

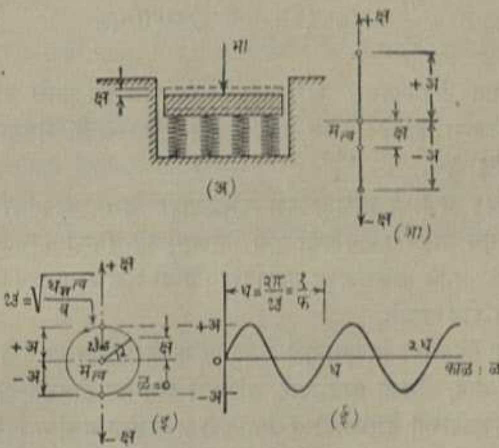
मृत्तिकेच्या प्राकृतिक गुणधर्मांचा तिच्यावर स्थित असलेल्या वास्तूंच्या कंपनांवर पडणारा प्रभाव आणि त्या कंपनांचा त्या वास्तूंच्या अवसीदनावर होणारा परिणाम यांचा ऊहापोह करण्यात या प्रकरणाचा बराचसा भाग खर्ची पडणार आहे. हा प्रभाव दाखविण्यासाठी एककोटी स्वाधीनता असणाऱ्या एकराशी व्यूहांच्या एकदिक् कंपनांचा विचार केला, तरी पुरे होते. कंपनांचा प्रत्यक्ष वास्तूंवरच जो परिणाम होतो, तद्विषयक सिद्धांत मात्र या ग्रंथाच्या कक्षेत येत नाहीत.

या विषयातील मूलभूत तत्त्वांचे आकलन होण्यासाठी अमंदीकृत, मुक्त आणि प्रवृत्त एकदिक् कंपनांच्या सिद्धांताचे ज्ञान असले, तरी पुरे होते. कंपनांचा वास्तूंवर आणि त्यांच्या पायांवर होणारा परिणाम यांचा ऊहापोह करणारी प्रकाशने समजण्याची पात्रता येण्यासाठी, वाचकाला मंदीकरणाच्या परिणामांचे ज्ञान असणेही आवश्यक आहे. एंजिनच्या पायाचा पूर्वकल्प करण्याच्या पद्धतींत भ्रमणाच्या बद्ध अक्षाभोवतीच्या कंपनांच्या सिद्धांताचीही आवश्यकता भासते. पुढील परिच्छेदांतून अमंदीकृत कंपनांचे सिद्धांत मोठ्या मुद्रणात व मंदीकृत कंपनांचे सिद्धांत लहान मुद्रणात छापलेले आहेत; आणि बद्ध अक्षाभोवतीच्या कंपनांचे सिद्धांत अभ्यासावयाचे असतील, तर वाचकांनी नेहमीची पाठ्यपुस्तके बघावीत; उदाहरणार्थ, टिमोशिंको (१९३७).

या प्रकरणात कंपनयंत्रांच्या साहाय्याने मृत्तिकाविषयक वस्तुस्थितीचे क्षेत्रातील

अन्वेषण, भूकंपनसाधित मृत्तिका-अन्वेषणाची तत्त्वे आणि भूकंपांचे प्राकृतिक परिणाम या विषयांचाही विचार केला आहे.

या विषयाच्या मूलभूत तत्त्वांचे प्राथमिक स्पष्टीकरण व्हावे, एवढ्यापुरताच या संपूर्ण प्रकरणाचा आशय मर्यादित केला आहे. तथापि याचबरोबर मृत्तिकेचे कंपनविषयक सिद्धांत ज्यांवर आधारित आहेत, अशा गृहीतांच्या विबाध्य स्वरूपाकडेही येथे विशेष लक्ष वेधले आहे; कारण या विषयातील पुष्कळशी प्रकाशने, विशेषतः एंजिनांच्या पायांचा



आकृती १४१ : (अ) मुक्त कंपने दाखविण्यासाठी सर्पिलांच्या आधारावर ठेवलेला ठोकळा. (आ ते ई) कंपनांच्या आलेखात्मक मांडणीचे तीन निरनिराळे प्रकार.

आणि कंपनयंत्रांद्वारे मृत्तिका-अन्वेषणाचा ऊहापोह करणारी प्रकाशने, तद्विषयक गणितातील भयावह स्थूल गृहीतांचा उल्लेख करण्यात हेळसांड करतात; परिणामी अनभिज्ञ वाचक त्यांतील फलितांच्या विश्वासार्हतेविषयी अनाठायी विश्वास बाळगण्यास प्रवृत्त होतो.

१५६. मुक्त एकतान कंपने : सर्पिलांच्या गादीवर ठेवलेला समपार्श्व ठोकळा आकृती १४१ अ मध्ये दाखविला आहे. ही सर्पिले एकसारखी असून समान अंतरांवर ठेवलेली आहेत आणि पूर्णतया स्थितिस्थापक आहेत. ठोकळ्याचे वजन *व* आहे. निम्नस्तर-प्रतिक्रियेची कल्पना मांडताना जे चित्र मनासमोर असते, (परिच्छेद १२४) त्यासारखीच ही व्यवस्था आहे. या ठोकळ्याच्या केंद्रभागी *भा* हा उभा भार लावला असता, तो *क्ष* इतके अंतर खाली उतरतो. ठोकळ्याच्या तळाच्या एकांक क्षेत्रावरील भार *भ* = *भा*/*आ* इतका आहे. सर्पिले पूर्णपणे स्थितिस्थापक असल्यामुळे,

$$\frac{म}{क्ष} = प्र_{नि}\ (\text{ग्रॅम सेंमी}^{-3}) \qquad [१]$$

हे गुणोत्तर स्थिरमूल्य असते. हे समीकरण मूलतः समीकरण १२४ (१) सारखेच आहे. $प्र_{नि}$ हे पद सर्पिल-शय्येवर ठेवलेला ठोकळा किंवा पादक यांच्या बाबतीतील निम्नस्तर-प्रतिक्रियेचा गुणांक व्यक्त करते.

$$\frac{भा}{क्ष} = थ_{स}\ (\text{ग्रॅम सेंमी}^{-1}) = आप्र_{नि} \qquad [२]$$

या गुणोत्तरास ठोकळ्याच्या आधाराचा **सर्पिल-स्थिरांक** असे म्हणतात. त्याने ठोकळ्याला बलाच्या कारक दिशेने एकांक अंतरातून खाली नेण्यासाठी लागणारा एकूण भार व्यक्त होतो.

आकृती १४१ अ मध्ये दाखविलेल्या ठोकळ्यावर उभा भार $भा_१$ लावावयाचा आणि नंतर लगेच काढून घ्यावयाचा असे केल्यास, ही क्रिया ठोकळ्याच्या कंपनास कारणीभूत होते आणि ठोकळ्याचा गुरुत्वमध्य त्याच्या मूळ स्थानातून जाणाऱ्या उभ्या रेषेवर वरखाली होत राहतो.

ठोकळ्याच्या कंपनजन्य हालचालीचे जे गणित खाली मांडले आहे ते पुढील गृहीतांवर आधारित आहे; ठोकळा ताठ आहे, सर्पिलांचे वस्तुमान ठोकळ्याच्या मानाने क्षुल्लक आहे आणि ठोकळ्याच्या हालचालीला कोणत्याही घर्षणजन्य बलांचा विरोध होत नाही.

$भा_१$ हा भार काढून घेतल्यानंतर ळ या समयी ठोकळ्याचा गुरुत्वमध्य त्याच्या $म_{त्व}$ या मूळ स्थानापासून क्ष अंतरावर आहे (आकृती १४१ आ). ठोकळ्यातील प्रत्येक कणाचा वेग $\frac{dक्ष}{dळ}$ आणि प्रवेग $\frac{d^2क्ष}{dळ^2}$ असणार. न्यूटनच्या गतिविषयक दुसऱ्या नियमानुसार वस्तूचे वस्तुमान आणि प्रवेग यांचा गुणाकार म्हणजे त्या वस्तूवर प्रवेगाच्या दिशेत कारक असणारे बल होय. ही वस्तुस्थिती या ठिकाणी पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येईल.

$$\frac{व}{त्व}\,\frac{d^2\,क्ष}{d\,ळ^2} + भा = ० \qquad [३]$$

येथे त्व हा गुरुत्वाकर्षणजन्य प्रवेग आहे आणि $भा$ म्हणजे ठोकळ्याचा गुरुत्वमध्य, त्याच्या मूळ $म_{त्व}$ या स्थानापासून उभ्या दिशेत क्ष अंतरावर ठेवण्यासाठी आवश्यक असलेले बल आहे. उपर्युक्त वस्तुस्थितीचे या स्वरूपातील लेखन म्हणजे ज्यास डी-ॲलेम्बर्टचे एकदिक् गतीचे तत्त्व म्हणतात तेच होय. समीकरण २ वरून आपल्याला पुढील संबंध मिळाला होता :

$$भा = थ_{स}क्ष$$

म्हणून—

$$\frac{व}{त्व} \cdot \frac{d^{२}क्ष}{dळ^{२}} + थ_{स}क्ष = ० \qquad [४]$$

या समीकरणाचे उत्तर पुढीलप्रमाणे आहे :

$$क्ष = थ_{१} ज्या \left(ळ\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}}\right) + थ_{२} कोज्या \left(ळ\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}}\right)$$

येथे $थ_{१}$ आणि $थ_{२}$ हे चलानयनातील स्थिरांक आहेत. ठोकळ्याचा गुरुत्वमध्य जेव्हा त्याच्या समतोलावस्थेतील स्थानामधून प्रथमच जातो, त्या क्षणापासून कालमापन केल्यास आणि ऊर्ध्वदिक् हालचाल धन मानल्यास, त्याचा अर्थ $ळ = ०$ असताना $क्ष = ०$ आहे असा होतो. या लक्षणाची पूर्तता करावयाची झाल्यास, उपर्युक्त समीकरणातील $थ_{२} = ०$ असला पाहिजे. त्यानुसार पुढील समीकरण मिळते :

$$क्ष = थ_{१} ज्या \left(ळ\sqrt{\frac{थ_{स} त्व}{व}}\right)$$

$भा_{१}$ हे विक्षेपकारी बल ठोकळ्यावर कार्य करावयाचे ज्या क्षणी थांबेल, त्या क्षणापर्यंत गुरुत्वमध्याचे विस्थापन पुढीलप्रमाणे होईल.

$$क्ष = -\frac{भा_{१}}{थ_{स}} = -अ \qquad [५]$$

ही अट $थ_{१} = अ$ असल्यावाचून पूर्ण होऊ शकत नाही. म्हणून शेवटी समीकरणाचे रूप खालीलप्रमाणे होते :

$$क्ष = अ. ज्या \left(ळ\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}}\right) \qquad [६]$$

$\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}}$ या पदाचे परिमाण सेकंद $^{-१}$ असे आहे. हे कोणात्मक वेगाचे परिमाण आहे. तो वेग असा :

$$ॡ = \sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}} \qquad [७]$$

आणि तो एखाद्या बिंदूचा वर्तुळाच्या परिघावरून फिरण्याचा वेग आणि त्या वर्तुळाची त्रिज्या यांतील गुणोत्तराइतका आहे. समीकरण ७ ने व्यक्त होणारा ω हा कोणात्मक वेग म्हणजे एक स्थिरांक आहे आणि त्याला उपर्युक्त प्रेरणेमुळे निर्माण झालेल्या कंपनाची **स्वाभाविक चक्रीय वारंवारता** असे म्हणतात. समीकरण ६ मध्ये ω नियुक्त केल्यास त्याचे स्वरूप पुढीलप्रमाणे होते.

$$क्ष = अ \text{ ज्या } ωळ \qquad [८]$$

ठोकळ्याच्या गुरुत्वमध्याच्या समतोल अवस्थेतील स्थानाभोवती ω या स्थिरमूल्य कोणात्मक वेगाने फिरणाऱ्या अ लांबीच्या सदिशाने हा अन्योन्य संबंध व्यक्त करता येतो. आकृती १४१ इ पाहा. ळ या कोणत्याही समयी क्ष हे अंतर (समीकरण ८) भ्रमण पावणाऱ्या सदिशाचे फिरणारे टोक आणि त्याच्या वर्तुळाकार पथाचा आडवा व्यास यांतील लंबांतराइतके असते. समीकरण ८ ची पूर्तता करणाऱ्या कंपनांना **एकतान कंपने** म्हणतात.

समीकरण ८ आलेख-पद्धतीने व्यक्त करण्याची दुसरी रीत आकृती १४१ ई मध्ये दाखविली आहे. तीमध्ये क्ष हे अंतर आणि काळ यांतील संबंध दाखविला जातो. या रीतीने मिळणारा आलेख हा नेहमीचा *ज्या*-आलेख आहे.

आकृती १४१ इ मधील सदिशाला एक संपूर्ण वर्तुळाकार प्रदक्षिणा करण्यास लागणारा अवधि ध आणि आकृती १४१ ई मधील एका संपूर्ण लहरीला लागणारा वेळ हे समान असतात. हा कालावधि पुढील समीकरणाने ठरविता येतो :

$$ω ध = २\pi$$

म्हणजेच—

$$ध = \frac{२\pi}{ω} \qquad [९]$$

ध म्हणजे कंपनाचा **नियतकाल** (एका कंपनाचा कालावधि) आहे. अर्थातच एकांक कालातील फेरे किंवा आवर्तने पुढील समीकरणाने मिळतील.

$$फ = \frac{१}{ध} = \frac{ω}{२\pi} = \frac{१}{२\pi}\sqrt{\frac{य_{सत्व}}{व}} \qquad [१०]$$

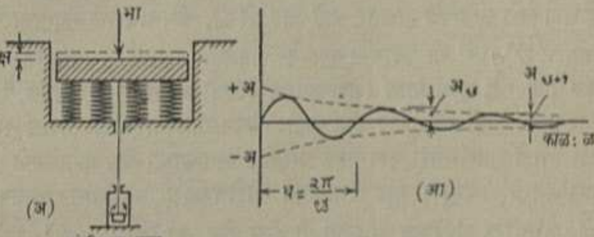
ही कंपनाची **वारंवारता** होय.

ठोकळ्याच्या कंपनयुक्त हालचालीस कोणत्याही घर्षणात्मक बलामुळे विरोध झालेला नाही, या गृहीतावर अवलंबून वरील समीकरणे सिद्ध केली आहेत. तंतोतंत अशी परिस्थिती प्रत्यक्षात कधीच आढळत नाही. परिणामी कंपनाचा आयाम हळूहळू कमी

होत जातो आणि शेवटी शून्य होतो. या प्रक्रियेस **मंदीकरण** असे म्हणतात. मृत्तिकेवर एखादा ताठ व्यूह ठेवलेला असेल आणि तो कंप पावत असेल, तर त्वरेने घडणाऱ्या विरूपत्वास होणारा मृत्तिकेचा स्निग्धत्वजन्य विरोध हाच त्या कंपनांच्या मंदीकरणास मुख्यतः कारणीभूत असतो. या विरोधाविषयीचे आपले ज्ञान अद्यापही अपुरे आहे. सांप्रत साधारणपणे, असे गृहीत धरले जाते की, मंदत्वकारक बल हे स्थिरांक $थ_{मं}$ गुणिले मृत्तिकेच्या विरूपत्वाचा वेग या गुणाकाराइतके असते. या स्थिरांकाचा आणि मृत्तिकेच्या इतर स्थितिस्थापकत्वविषयक स्थिरांकांचा कोणताही संबंध नाही. मृत्तिकेवर ठेवलेल्या पादकाच्या बाबतीत मृत्तिकेचा ळ समयी असणारा विरूपत्व-वेग पादकाच्या हालचालीच्या त्याच वेळच्या वेगावर म्हणजेच $\frac{dक्ष}{dळ}$ वर अवलंबून असतो; म्हणून मंदत्वकारक बल पुढीलप्रमाणे असते, असे गृहीत धरतात :

$$ब_{मं} = थ_{मं}\ (\text{ग्रॅम सेंमी}^{-1}\ \text{सेकंद})\ \frac{dक्ष}{dळ} \qquad [११]$$

आकृती १४१ अ मध्ये दाखविलेली सर्पिल-शय्या म्हणजे पादकाखाली असणाऱ्या मृत्तिकाधाराचे एक काल्पनिक चित्रण आहे. सर्पिल-शय्येच्या स्थितिस्थापकत्व गुणावर अवलंबून नसणारे मंदत्वकारक बल वरील व्यूहात समाविष्ट करावयाचे झाल्यास, आकृती १४२ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका स्थिर पात्रामध्ये स्निग्ध द्रव्य भरून त्यात



आकृती १४२ : (अ) मंदीकृत मुक्त कंपने दाखविण्यासाठी मंदत्वपात्राला जोडलेला सर्पिलाधारावरील ठोकळा. (आ) ठोकळ्याच्या हालचालीचे आलेखात्मक चित्रण.

एक लहान दट्टया ठेवून तो सर्पिलांवरील ठोकळ्यास जोडून देतात. अशा पात्रास **मंदीकरण-पात्र** असे म्हणतात. स्निग्ध द्रवामुळे उत्पन्न होणारे मंदत्वकारक बल, समीकरण ११ वरून स्थूलमानाने ठरविता येते. डी अलेम्बर्टच्या तत्त्वानुसार पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$\frac{व}{त्व}\cdot\frac{d^2क्ष}{dळ^2} + थ_{मं}\frac{dक्ष}{dळ} + थ_{स}\,क्ष = ० \qquad [१२]$$

$थ_{मं}$ या स्थिरांकाची परिमाणे ग्रॅमसेंमी$^{-1}$ सेकंद अशी आहेत आणि $थ_{स}$ या सर्पिल-स्थिरांकाची परिमाणे ग्रॅमसेंमी$^{-1}$ अशी आहेत. गुणांकांच्या परिमाणांत सारखेपणा येण्यासाठी $थ_{स}$ चे मूल्य $ऱ्ह$ या चक्रीय वारंवारतेच्या (समीकरण ७) स्वरूपात मांडण्याचा प्रघात आहे आणि $थ_{मं}$ ऐवजी पुढील पद वापरण्याचा प्रघात आहे :

$$थ_{मं} = २मं . \frac{व}{त्व} \qquad [१३]$$

येथे $मं$ या गुणकाचे परिमाण चक्रीय वारंवारतेच्या परिमाणासारखे म्हणजे सेकंद$^{-1}$ असे आहे. $मं$ या गुणकास **मंदत्व-गुणक** असे म्हणतात. समीकरण ७ वरून आपल्याला पुढील समीकरण मांडता येते :

$$थ_{स} = \frac{व}{त्व} \cdot ऱ्ह^{२}$$

समीकरण १२ मध्ये $थ_{स}$ आणि $थ_{मं}$ ऐवजी वरील मूल्ये नियुक्त केल्यास पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{d^{२}क्ष}{dळ^{२}} + २मं \frac{dक्ष}{dळ} + ऱ्ह^{२}क्ष = ० \qquad [१४]$$

हे समीकरण सोडविले असता, असे आढळते की, कंपनावरील मंदत्वकारक बलाचा परिणाम $\sqrt{मं^{२} - ऱ्ह^{२}}$ या पदाच्या मूल्यावर अवलंबून असतो. (उदाहरणार्थ, टिमोशेंको १९३७ पाहा.) हे मूल्य सत्य (मंदत्वकारक बलाची मोठी मूल्ये) असेल, तर पहिल्या विस्थापनामुळे कंपन निर्माणच होत नाही. कंपन पावण्याऐवजी ठोकळा सावकाशपणे त्याच्या समतोलावस्थेतील स्थानाप्रत परततो. परतण्याचा वेग क्रमाक्रमाने कमी होत जाणारा असतो. त्यामुळे मूळ स्थानाप्रत पोहोचण्यास लागणारा कालावधि अनंत असतो. **अतिरिक्त मंदीकृत अवस्था** ती हीच होय. या उलट $\sqrt{मं^{२} - ऱ्ह^{२}}$ हे मूल्य काल्पनिक (लहान मंदत्व-कारक बले) असेल, तर विक्षेपकारी बल एकदम काढून घेतल्याने ठोकळा कंप पावतो; परंतु अशा कंपनाचा नियतकाल $ध_{मं}$ हा त्याच्या स्वाभाविक नियतकालापेक्षा थोडा लहान असतो. हे नेहमीचे उदाहरण आहे. $ध_{मं}$ हा नियतकाल आणि $ध$ हा स्वाभाविक नियतकाल, यांमध्ये फारच थोडा फरक असल्यामुळे, त्याच्याकडे दुर्लक्ष केले जाईल आणि $ध_{मं} = ध$ असे गृहीत धरले जाईल.

कंपनाच्या नेहमीच्या उदाहरणातील काळ आणि विस्थापन यांतील संबंध आकृती १४२ *आ* मध्ये दाखविला आहे. जर $अ_{छ}$ आणि $अ_{छ+१}$ हे कोणत्याही दोन, एका मागोमाग घडणाऱ्या आंदोलनांचे आयाम असतील, तर $\frac{अ_{छ}}{अ_{छ+१}}$ हे गुणोत्तर स्थिरमूल्य असते.

$$\frac{अ_{छ}}{अ_{छ+१}} = \epsilon^{पमं}$$

म्हणजेच—

$$लघु\, अ_{छ} - लघु\, अ_{छ+१} = पमं \qquad [१५]$$

या मूल्यास लघुगणकीय घट म्हणतात. तीमुळे मंदीकरणाची तीव्रता दाखविली जाते. $अ_{छ}$, $अ_{छ+१}$ आणि $प$ यांची मूल्ये ठोकळ्याच्या मुक्त कंपनांच्या आयामांचे प्रत्यक्ष मापन करून मिळविता येतात. म्हणून $मं$ चे मूल्य पुढील साध्या समीकरणाने प्राप्त होऊ शकते :

$$मं\,(\text{सेकंद}^{-१}) = \frac{१}{प}\, लघु\, \frac{अ_{छ}}{अ_{छ+१}} \qquad [१६]$$

१५७. बलप्रवृत्त एकतान कंपने : कंपनास कारणीभूत होणाऱ्या प्रेरणेची, ठराविक कालावधीने पुनरावृत्ती होत असल्यास, तज्जन्य कंपनांस बलप्रवृत्त कंपने असे म्हणतात. वादळी वाऱ्यांची स्पंदने आणि स्थूणा ठोकताना मारलेले ठोके हीं अशा प्रकारच्या प्रेरणांची उदाहरणे आहेत. बलप्रवृत्त कंपनांची महत्त्वाची वैशिष्ट्ये विशद करून सांगण्यासाठी आकृती १४३ अ मध्ये दाखविलेला ठोकळा विचारात घेऊ. त्याचे वजन $व$ आहे आणि तो स्थितिस्थापक आधारावर ठेवलेला आहे. तसेच आपण असे गृहीत धरू की, त्यावर उभ्या दिशेत एक नियतकालिक प्रेरणा कारक आहे आणि या प्रेरणेची तीव्रता पुढील समीकरणाने व्यक्त होते.

$$भा = भा_{१}\, ज्या\, ॡ_{१} ळ \qquad [१]$$

$ळ$ या समयी ठोकळ्याचे उभ्या दिशेतील विस्थापन $क्ष$ असेल, तर डी अलेम्बर्टच्या तत्त्वानुसार पुढील समीकरण मांडता येईल :

$$\frac{व}{त्व} \cdot \frac{d^{२}क्ष}{dळ^{२}} + थ_{स} क्ष = भा_{१}\, ज्या\, ॡ_{१} ळ$$

या ठिकाणी $थ_{स}$ हा स्थितिस्थापक आधाराचा सर्पिल-स्थिरांक आहे. $भा_{१}$ ने निर्मिलेल्या $अ_{१}$ या विस्थापनाचे मूल्य समी. १५६ (२) च्या साहाय्याने पुढीलप्रमाणे मिळते :

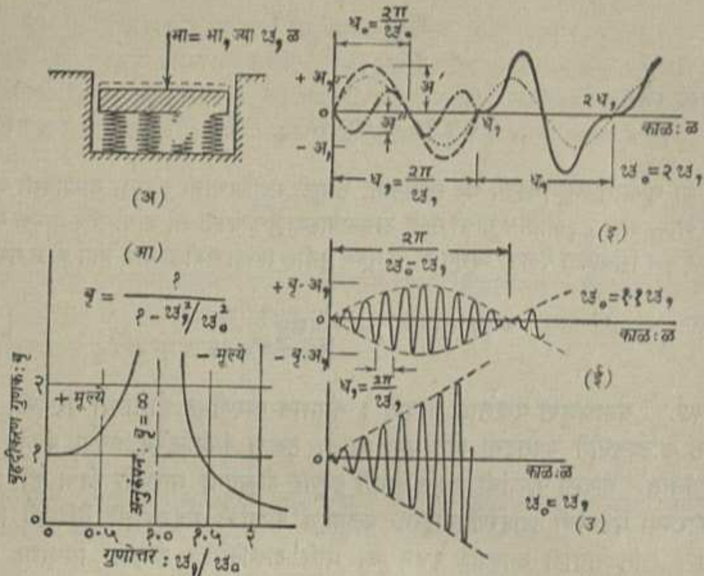
$$अ_{१} = \frac{भा_{१}}{थ_{स}} \qquad [२]$$

म्हणजेच

$$भा_{१} = अ_{१} \cdot थ_{स}$$

आणि

$$\frac{व}{त्व} \cdot \frac{d^{२}क्ष}{dळ^{२}} + क्षथ_{स} = अ_{१}\, थ_{स}\, ज्या\, ॡ_{१} ळ \qquad [३]$$



आकृती १४३ : (अ) $ॐ_०$ या स्वाभाविक चक्रीय वारंवारतेच्या व सर्पिलांच्या आधारावर ठेवलेल्या ठोकळ्यावर नियतकालिक प्रेरणा लावून अमंदीकृत, बलप्रवृत्त कंपनांची निर्मिती. (आ) चक्रीय वारंवारता-गुणोत्तर $ॐ_१/ॐ_०$ आणि बृहदीकरण गुणक यांमधील संबंध (इ ते उ) चक्रीय वारंवारता-गुणोत्तराची तीन निरनिराळी मूल्ये घेऊन बलप्रवृत्त कंपनांचे आलेखद्वारा चित्रण.

समीकरण १५६ (७) चा आधार घेऊन $थ_स$चे मूल्य ठोकळ्याच्या $ॐ_०$ या स्वाभाविक चक्रीय वारंवारतेच्या रूपात नियुक्त केल्यास उपर्युक्त समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\frac{d^{२}क्ष}{dळ^{२}} + ॐ_{०}^{२}क्ष = अ_{१}ॐ_{०}^{२}\,ज्या\,ॐ_{१}ळ \qquad [४]$$

या समीकरणाचे उत्तर पुढीलप्रमाणे आहे :

$$क्ष = \frac{अ_{१}}{१ - ॐ_{१}^{२}/ॐ_{०}^{२}}\left(ज्या\,ॐ_{१}ळ - \frac{ॐ_{१}}{ॐ_{०}}\,ज्या\,ॐ_{०}ळ \right) \qquad [५]$$

या समीकरणावरून असे दिसते की, या उदाहरणात ठोकळ्याचे कंपन दोन घटकांत विभागता येईल. त्यांपैकी पहिला असा—

$$क्ष' = \frac{अ_१}{१ - ω_१^२/ω_०^२} ज्या\ ω_१ ळ \qquad [६ अ]$$

हा घटक म्हणजे $ω_१$ या चक्रीय वारंवारतेचे कंपन आहे आणि त्याचा आयाम पुढीलप्रमाणे आहे :

$$अ' = \frac{अ_१}{१ - ω_१^२/ω_०^२} = बृ\ अ_१ \qquad [६ आ]$$

येथे—

$$बृ = \frac{१}{१ - ω_१^२/ω_०^२} \qquad [६ इ]$$

असून त्यास **बृहदीकरणाचा गुणक** असे म्हणतात. बृ आणि $ω_१/ω_०$ हे गुणोत्तर यांतील संबंध दाखविणारा आलेख आकृती १४३ आ मध्ये काढला आहे. $ω_१/ω_० = १$ असताना तदनुषंगिक बृ चे मूल्य अनंत आहे. हे अमंदीकृत बलप्रवृत्त कंपनांचे **अनुकंपनाचे** लक्षण आहे. कंपनाचा दुसरा घटक असा—

$$क्ष'' = \frac{अ_१}{१-ω_१^२/ω_०^२} \frac{ω_१}{ω_०} ज्या\ ω_० ळ = अ_१ बृ \frac{ω_१}{ω_०} ज्या\ ω_० ळ \qquad [७ अ]$$

हे $ω_०$ या चक्रीय वारंवारतेचे मुक्त कंपन आहे आणि त्याचा आयाम पुढीलप्रमाणे आहे.

$$अ'' = अ_१ बृ \frac{ω_१}{ω_०} \qquad [७ आ]$$

या दोहोंचे फलरूप असणाऱ्या कंपनाचे स्वरूप दाखविण्यासाठी आकृती १४३ इ मधील आलेख काढलेले आहेत. ज्याची स्वाभाविक चक्रीय वारंवारता प्रेरणेच्या चक्रीय वारंवारतेच्या दुप्पट आहे, अशा सर्पिलाधिष्ठित ठोकळ्याची कंपने तेथे दाखविली आहेत. प्रेरणेचा नियतकाल $प_१ = २\pi / ω_१$ असा आहे. *भा* हे स्पंदनयुक्त विक्षेपकारी बल स्थैतिक रीत्या कारक झाले असते, तर जीं कंपने निर्माण झाली असती, तीं आकृतीत बारीक तुटक रेषेने व्यक्त केली आहेत. परंतु हे बल गतिमान असल्यामुळे ठोकळ्याचे प्रत्यक्षातील कंपन निराळे असते. उगमबिंदूपासून $प_१$ अंतरापर्यंत काढलेल्या दोन ठळक, तुटक रेषांनी प्रत्यक्षातील कंपनाचे घटक दाखविले आहेत आणि $प_१$ अंतरानंतरचा सलग आलेख प्रत्यक्षातील एकूण फलरूप कंपन दाखवितो.

फलरूप कंपनांच्या आयामावर $ω_१/ω_०$ या गुणोत्तराचा जो प्रभाव पडतो त्याचा समीकरण ५ च्या अनुरोधाने मागोवा घेतला असता, पुढील निष्कर्ष निघतात. प्रेरणेच्या

वारंवारतेचे ω_1 हे मूल्य जसजसे ठोकळ्याच्या ω_0 या स्वाभाविक वारंवारतेच्या मूल्या-जवळ येऊ लागते, तशी कंपनांची चक्रीय वारंवारता ω_1 होते आणि आयाम मात्र बदलत राहतो. आकृती १४३ ई पाहा. या घटनेस **विस्पंद-कंपन** असे म्हणतात. $\omega_1 = \omega_0$ या परिस्थितीत विस्पंद-कंपनांचा नियतकाल अनंत होतो. परिणामी आकृती १४३ उ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आयाम काळाच्या सरळ प्रमाणात वाढतच राहतो आणि अनंत मूल्याप्रत जाऊ लागतो. ही अनुकंपनाची घटना आहे. ठोकळा कंपनाच्या टोकाला आला की, अगदी त्याच क्षणी प्रत्येक वेळी ठोकळ्यावर प्रत्येक नवी प्रेरणा कारक व्हावी, ही परिस्थिती अनुकंपनास कारणीभूत होते. म्हणजेच अशा प्रकारे पाठोपाठ येणाऱ्या प्रेरणांचा परिणाम संकलनात्मक असतो.

समीकरण ५ वरून आणखी काही गोष्टी स्पष्ट होतात. ω_1/ω_0 या गुणोत्तराचे मूल्य जर अगदी लहान असेल, म्हणजेच वस्तूची किंवा व्यूहाची स्वाभाविक वारंवारता, प्रेरणेच्या वारंवारतेच्या मानाने फार मोठी असेल, तर बृहदीकरणाच्या अंकाचे मूल्य एक असते आणि अशा व्यूहाचे कंपन प्रेरणेच्या कंपनासारखे असते. याउलट, ω_1/ω_0 चे मूल्य फारच मोठे असेल, तर बृहदीकरणाच्या अंकाचे मूल्य जवळ जवळ शून्य असते. तेव्हा अशा प्रेरणेमुळे उत्पन्न होणाऱ्या कंपनाची चक्रीय वारंवारता ω_0 असते आणि त्याचा अ$_1$ ω_0/ω_1 हा आयाम फार लहान असतो.

तसेच ω_1/ω_0 ह्या गुणोत्तराचे मूल्य एकाहून लहान असेल, तेव्हा बृहदीकरणाचा गुणक बृ (समीकरण ६ इ) धन असतो आणि ते एकाहून अधिक असेल, तर तो ऋण असतो. $\omega_1/\omega_0 = १$ या ठिकाणी आकस्मिक रीत्या होणाऱ्या या फरकाचा प्राकृतिक अर्थ पुढीलप्रमाणे आहे. ω_1/ω_0 चे मूल्य एकापेक्षा लहान असताना प्रेरणा आणि समीकरण ६ ने व्यक्त होणारे बलप्रवृत्त कंपन हीं दोन्ही एककालिक असतात. ω_1/ω_0 चे मूल्य एकाहून अधिक असल्यास प्रवृत्त कंपनापेक्षा प्रेरणा अर्ध्या नियतकालाने आधी येते. प्रवृत्त कंपनातील या विलंबाला **दशांतर** असे म्हणतात.

अशा कंपनाची दोन्ही घटक-कंपने साधी एकतान कंपने असल्यामुळे, प्रत्येक कंपन भ्रमण करणाऱ्या सदिशाच्या मुक्त अग्राची जी हालचाल होते तिच्या उभ्या घटकाने व्यक्त करता येईल (आकृती १४१ इ). एखाद्या कंपनाच्या बाबतीत हे दोन घटक एक-कालिक नसतील, तर त्या घटकांना अनुषंगिक असणाऱ्या व भ्रमण करणाऱ्या सदिशांमध्ये एक कोन निर्माण झाला पाहिजे. या कोनास **दशा-कोन** असे म्हणतात. अर्ध्या नियतकालाइतक्या दशांतरासाठी π इतका दशाकोन आवश्यक असतो. बलप्रवृत्त कंपन अमंदीकृत असेल, तेव्हा त्याच्या दोन घटकांतील दशांतर एक तर शून्य तरी असते ($\omega_1/\omega_0 < १$) किंवा अर्ध्या नियतकालाइतके तरी असते ($\omega_1/\omega_0 > १$). त्यामुळे ω_1/ω_0 चे मूल्य एकाहून अधिक झाले असता, दशाकोनाच्या मूल्यामध्ये शून्य ते π इतकी आकस्मिक वाढ अभिप्रेत असते. बलप्रवृत्त कंपन मंदीकृत असेल, तेव्हा दशाकोन शून्यापासून सावकाशपणे π पर्यंत वाढत जातो (खाली पाहा).

नियतकालिक प्रेरणेमुळे सर्पिलशय्येवर येणारा महत्तम उभा दाब पुढीलप्रमाणे असतो :

$$दा'_{अ} = अ_{महत्तम} थ_{स}$$

येथे $अ_{महत्तम}$ हा बलप्रवृत्त कंपनांचा महत्तम आयाम आहे. आकृती १४३ इ वरून हे स्पष्ट होईल की, $अ_{महत्तम}$चे मूल्य $अ' + अ''$हून अधिक असणार नाही. म्हणून

$$दा'_{अ} \leqq दा_{अ} = (अ' + अ'') थ_{स}$$

$दा_{अ}$ ही $दा'_{अ}$च्या महत्तम मूल्याची मर्यादा ठरते. पुढील गणितामध्ये $दा'_{अ} = दा_{अ}$ असे गृहीत धरले जाईल. $अ'$ आणि $अ''$ची मूल्ये अनुक्रमे समीकरण ६ आ आणि ७ आ यांनी दिली जातात. ही मूल्ये वरील समीकरणात नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते :

$$दा_{अ} = \pm बृ_{अ_1} (१ + ऋ_1/ऋ_0) थ_{स}$$

$अ_1 = भा_1/थ_{स}$ आहे (समीकरण २), तेव्हा हेच समीकरण असेही मांडता येईल :

$$दा_{अ} = \pm भा_1 बृ \left(१ + \frac{ऋ_1}{ऋ_0}\right) = \pm भा_1 \frac{१}{१ - ऋ_1/ऋ_0}. \qquad [८]$$

येथे नेहमीप्रमाणे $बृ$ हा बृहदीकरण गुणक आहे (समीकरण ६ इ) आणि $\frac{ऋ_1}{ऋ_0}$ हे प्रेरणेची चक्रीय वारंवारता आणि ठोकळ्याची स्वाभाविक वारंवारता यांतील गुणोत्तर आहे. $दा_{अ}$ या बलाने सर्पिल-शय्येवर येणारा प्रेरणाजन्य महत्तम दाब व्यक्त केला जातो. त्यामुळे सर्पिल-शय्येवरील एकूण उभ्या दाबाच्या दोन मर्यादा पुढीलप्रमाणे ठरतात :

$$व + दा_{अ} \text{ आणि } व - दा_{अ}$$

समीकरण ८ वरून असे दिसते की, ही दोन टोकाची मूल्ये केवळ $भा_1$ या विक्षेपकारी बलावरच अवलंबून नसून $\frac{ऋ_1}{ऋ_0}$ या गुणोत्तरावरही अवलंबून असतात.

ठोकळा जर मंदीकरण पात्राशी जोडलेला असेल (आकृती १४२ अ पाहा), तर त्यावरील कारक बले म्हणजे विक्षेपकारी बल $भा$ (समीकरण १), जडत्वजन्य बल $\frac{व}{त्व} \frac{d^2 क्ष}{dळ^2}$ आणि सर्पिल-शय्येची प्रतिक्रिया $क्ष\, थ_{स}$ इतकीच नसून—

$$दा_{मं} = थ_{मं} \frac{dक्ष}{dळ} \qquad १५६ (११)$$

हें मंदत्वकारी बलही त्यावर कारक असते.

$$थ_{मं} = २मं \frac{व}{त्व} \qquad १५६ (१३)$$

असल्यामुळे,

$$दा_{मं} = २मं \cdot \frac{व}{त्व} \cdot \frac{dक्ष}{dळ}$$

असेही लिहिता येईल. या ठिकाणी मं (सेकंद$^{-1}$) हा मंदत्वगुणक आहे. समीकरण ३ मध्ये डाव्या बाजूस असणाऱ्या बलांमध्ये दा$_{मं}$ हे बल मिळविले पाहिजे. तसे करून पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$\frac{व}{त्व} \cdot \frac{d^२क्ष}{dळ^२} + २मं \cdot \frac{व}{त्व} \cdot \frac{dक्ष}{dळ} + क्ष \cdot थ_{स} = अ_१ \cdot थ_{स}\ ज्या\ ω_१ळ$$

$थ_{स}$ चे मूल्य समीकरण १५६ (७) च्या साहाय्याने ठोकळ्याच्या $ω_०$ या स्वाभाविक, चक्रीय वारंवारतेच्या स्वरूपात मांडल्यास आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$\frac{d^२क्ष}{dळ^२} + २मं \frac{dक्ष}{dळ} + ω_०^२ क्ष = अ_१ ω_०^२\ ज्या\ ω_१ळ \qquad [९]$$

समीकरण ४ ने व्यक्त केलेल्या कंपनाप्रमाणेच वरील कलन समीकरणाने व्यक्त होणारे कंपनही दोन घटकांचे बनलेले असते. एक मुक्त कंपनाचा आणि दुसरा प्रवृत्त कंपनाचा. तथापि मंदीकरणाची क्रिया घडत असेल, तर मंदत्वकारी बलामुळे मुक्त कंपने त्वरित लोप पावतात. त्यामुळे पुढे दिलेला प्रवृत्त घटक म्हणजेच एकूण कंपन असे मानून मुक्त घटकाकडे दुर्लक्ष करण्याची प्रथा आहे.

$$क्ष = अ_१ \frac{१}{\sqrt{\left[१-\left(\frac{ω_१}{ω_०}\right)^२\right]^२ + \left(\frac{२मं}{ω_०}\right)^२ \times \left(\frac{ω_१}{ω_०}\right)^२}} \times$$
$$\times\ ज्या \left[ω_१ळ - चापस्प \frac{२ω_१मं}{ω_०^२ - ω_१^२}\right] \qquad [१०]$$

या समीकरणात पुढील पदे नियुक्त केल्यास समीकरण ११ इ मिळते :

$$बृ_१ = \frac{१}{\sqrt{\left[१-\left(\frac{ω_१}{ω_०}\right)^२\right]^२ + \left(\frac{२मं}{ω_०}\right)^२ \left(\frac{ω_१}{ω_०}\right)^२}} \qquad [११ अ]$$

आणि

$$ϖ = चापस्प \frac{२ω_१मं}{ω_०^२ - ω_१^२} \qquad [११ आ]$$

$$क्ष = अ_१ बृ_१ \cdot ज्या(ω_१ळ - ϖ) \qquad [११ इ]$$

ज्याची वारंवारता प्रेरणेच्या वारंवारतेइतकी आहे, अशा एकतान कंपनाचे हे समीकरण आहे. $बृ_1$ हे पद म्हणजे बृहदीकरणाचा गुणक आहे. बलप्रवृत्त कंपन प्रेरणेच्या मागे पडते आणि या विलंबाची महत्ता ϖ या दशाकोनाने ठरविली जाते (समीकरण ११ आ). बलप्रवृत्त कंपनाचा आयाम पुढीलप्रमाणे असतो :

$$अ = अ_1 बृ_1 = \frac{अ_1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{2मं}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} \qquad [12]$$

म्हणून सर्पिल-शय्येवर पडणारा प्रेरणाजन्य महत्तम दाब पुढीलप्रमाणे असतो :

$$दा_अ = थ_{स} अ = थ_{स} अ_1 बृ_1 = भा_1 बृ_1 \qquad [13]$$

या ठिकाणी $बृ_1$ हा मंदीकृत, बलप्रवृत्त कंपनांच्या बाबतीतील (समीकरण ११ अ) बृहदीकरणाचा गुणक आहे.

$अ$ हा आयाम (समीकरण १२) पुढील समीकरणाची पूर्तता झाल्यास महत्तम असता :

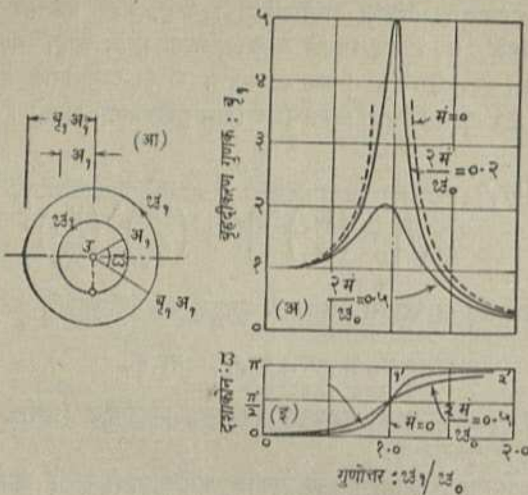
$$\omega_1 = \omega_{1अनु} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2मं}{\omega_0}\right)^2}$$

हे अनुकंपनाचे लक्षण आहे. समीकरण १२ मध्ये हे मूल्य नियुक्त करून अनुकंपनाच्या अवस्थेतील आयामाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे येते :

$$अ_{महत्तम} = अ_1 \frac{1}{\frac{2मं}{\omega_0}\sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2मं}{\omega_0}\right)^2}}$$

$बृ_1$ (समीकरण ११ अ) आणि $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ हे गुणोत्तर यांतील संबंध दाखविणारे आलेख काढल्यास, ते आकृती १४४ अ मधील $\frac{2मं}{\omega_0} = 0{\cdot}2$ आणि $0{\cdot}5$ ही दोन मूल्ये घेऊन काढलेल्या आलेखाप्रमाणे असतात. या आकृतीवरून असे दिसून येईल की, अनुकंपनाच्या वेळी $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ चे मूल्य एकाच्या अगदी जवळ असते. अनुकंपनाची चक्रीय वारंवारता $\omega_{1अनु} = \omega_0$ इतकी असते असे गृहीत धरून अनुकंपनाच्या लक्षणाला सोईस्कर रूप देण्याची प्रथा आहे; म्हणजेच—

$$\omega_{1अनु} = \omega_0 \qquad [14]$$



आकृती १४४ : ω_0 या स्वाभाविक, चक्रीय वारंवारतेच्या व सर्पिलांच्या आधारावर ठेवलेल्या ठोकळ्याची मंदीकृत, प्रवृत्त कंपने. (अ आणि इ) मंदत्व–गुणकाची तीन निरनिराळी मूल्ये घेतली असता, मिळणारे बृहदीकरण–गुणक तसेच दशाकोन आणि ω_1/ω_0 हे चक्रीय वारंवारता–गुणोत्तर यांमधील संबंध (आ) भ्रमण पावणाऱ्या $अ_1 बृ_1$ या सदिशाद्वारा ठोकळ्याच्या कंपनाचे चित्रण.

पुढील समीकरणाचा अवलंब करून आयामाचे $अ_{महत्तम}$ मूल्य ठरविल्यास, फारशी चूक होत नाही :

$$अ_{महत्तम} = अ_1 \cdot \frac{\omega_0}{२मं} \qquad [१५]$$

ळ या कोणत्याही समयी नियतकालिक विक्षेपकारी बल $भा$ (समीकरण १) पुढीलप्रमाणे असते :

$$भा = भा_1 ज्या\, \omega_1 ळ = अ_1 थ_{स} ज्या\, \omega_1 ळ$$

सर्पिल-शय्येवर दुसरे कोणतेही बल कारक नसेल, तर ळ समयी उभे विस्थापन पुढीलप्रमाणे असते :

$$य = \frac{भा}{थ_{स}} = अ_1 ज्या\, \omega_1 ळ$$

ठोकळ्याची प्रत्यक्षातील विस्थापने खाली दिलेल्या समीकरण ११ इ वरून मिळतात.

$$क्ष = अ_1 बृ_1 ज्या_1 (\omega_1 ळ - \varpi)$$

$छ_1$ या चक्रीय वारंवारतेने भ्रमण पावणाऱ्या व अनुक्रमे $अ_1$ आणि $अ_1 पृ_1$ इतकी लांबी असणाऱ्या दोन सदिशांच्या गतिमान टोकांच्या विस्थापनांच्या उभ्या घटकांची मूल्ये आणि उपर्युक्त विस्थापने सारखीच असतात. आकृती १४४ आ पाहा. या दोन सदिशांमधील कोन म्हणजे दशाकोन $ट$ होय. $ळ$ या कोणत्याही समयी $य$ आणि $क्ष$ हीं अंतरे आणि $अ_1$ आणि $अ_1 पृ_1$ या सदिशांच्या गतिमान टोकांची भ्रमणकेंद्रातून जाणाऱ्या आडव्या अक्षापासून मोजलेली उभी अंतरे अनुक्रमे सारखीच असतात. दशाकोन $ट$ (समीकरण ११ आ) आणि $\frac{छ_1}{छ_0}$ यांतील संबंधांचे आलेख आकृती १४४ इ मध्ये काढले आहेत. त्यासाठी $२मं/छ_0 = ०\cdot२$ आणि $०\cdot५$ ही मूल्ये गृहीत धरली आहेत. $मं = ०$ (अमंदीकृत कंपने) असल्यास, मिळणारा आलेख वक्र रेषेऐवजी उभा सरळ रेषात्मक असतो (आकृतीतील $मं = ०$ या चिन्हाने दर्शविलेला). अमंदीकृत अशा बलप्रवृत्त कंपनांच्या बाबतीत $छ_0/छ_1 = १$ झाले असता, दशाकोनाच्या मूल्यांत होणारी ० ते π ही आकस्मिक वाढ, या रेषेने दाखविली जाते.

१५८. निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेचा गुणांक : $थ_स$ हा सर्पिल-स्थिरांक आणि सर्पिलशय्येचा (आकृती १४१ अ) $प्र_{नि}$ हा निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांक यांमधील संबंध पुढील सोप्या समीकरणाने व्यक्त होतो, हे परिच्छेद १५६ मध्ये दाखविले होते.

$$थ_स = आप्र_{नि}$$

म्हणजेच—

$$प्र_{नि} = थ_स/आ \qquad [१]$$

येथे $आ$ म्हणजे टोकळ्याच्या तळाचे क्षेत्र आहे. निम्नस्तर-प्रतिक्रिया सिद्धान्तानुसार (प्रकरण १६) आकृती १४१ अ मधील सर्पिलशय्या म्हणजे वास्तवातील मृत्तिका-धाराचे एक यांत्रिक प्रतीक आहे. प्रत्यक्षाशी तुलना करता, या दोहोंत पूर्णार्थाने साम्य नाही, हे दिसेल; कारण समप्रमाण सर्पिलशय्येच्या बाबतीतील $प्र_{नि}$ चे मूल्य भारित क्षेत्राच्या आकारमानावर अवलंबून नसते, परंतु मृत्तिकाधाराच्या बाबतीत मात्र ते भारित क्षेत्राचे आकारमान आणि अन्य अनेक गोष्टींवर अवलंबून असते आणि त्यात पुनः या गोष्टी मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वगुणावर अवलंबून नसतात (परिच्छेद १२४ पाहा).

तथापि हा सिद्धांत प्रथम मांडला गेला, त्यावेळी साधारणपणे अशी समजूत होती की, $प्र_{नि}$ चे (समीकरण १) मूल्य केवळ विवक्षित सर्पिलशय्येच्या बाबतीतच नव्हे, तर विवक्षित मृत्तिकेच्या बाबतीतही स्थिर असते. अर्थातच $प्र_{नि}$ चे मूल्य ज्ञात असेल, तर पायाचे अवसीदनही ठरविता येईल अशी समजूत होती. त्यामुळे समीकरण १ मधील साधा, सोपा सैद्धांतिक संबंध बघता, कंपनप्रयोग करून मृत्तिकेच्या

$प्र_{नि}$ हा निम्नस्तरप्रतिक्रिया-गुणांक ठरविता येईल, अशी कल्पना सुचली. असा प्रयोग एक जाड पोलादी पाट मातीच्या पृष्ठभागावर ठेवून, त्याला बदलत्या वारंवारतेची प्रेरणा लावून आणि तीमुळे निर्माण होणाऱ्या बलप्रवृत्त कंपनांचा आयाम मोजून करता येतो. हा पाट आणि प्रेरणेचे उगमस्थान या दोहोंचे मिळून कंपनयंत्र किंवा कंपक तयार होतो. प्रेरणेची वारंवारता फ आणि कंपकाची स्वाभाविक वारंवारता $फ_०$ या सममूल्य असतील, तर कंपकाचा आयाम महत्तम असतो, हे परिच्छेद १५७ मध्ये दाखविले आहेच. समीकरण १५६ (१०) वरून आपल्याला पुढील समीकरणे मांडता येतात :

$$फ_० = \frac{ω_०}{२\pi} = \frac{१}{२\pi}\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}} \qquad [२]$$

म्हणजेच

$$थ_{स} = ४\pi^२ फ_०^२ \frac{व}{त्व}$$

$$प्र_{नि} = \frac{थ_{स}}{आ} = \frac{४\pi^२}{आ} \cdot फ_०^२ \cdot \frac{व}{त्व}$$

या ठिकाणी *आ* म्हणजे कंपकाच्या तळाचे क्षेत्रफळ आहे आणि व हे कंप पावणाऱ्या व्यूहाचे वजन आहे.

समीकरण २ मधील व हे वजन म्हणजेच कंपकाचे वजन $व_१$- जे ज्ञात आहे-आणि एकंदर व्यूहाच्या कंपनात सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकाराशीचे वजन $व_{मृ}$- जे ज्ञात नाही- यांची बेरीज असते. म्हणून वरील समीकरण आपल्याला पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल :

$$प्र_{नि} = \frac{४\pi^२}{आ} \cdot फ_०^२ \; \frac{व_१ + व_{मृ}}{त्व} \qquad [३]$$

$व_{मृ}$ हे अज्ञात वजन ठरविण्याची प्रायोगिक पद्धत खाली वर्णिली आहे.

कंप पावणाऱ्या मृत्तिकेचे $व_{मृ}$ हे वजन, ताठ स्वरूपाच्या कंपन-यंत्राच्या वजनाचाच एक भाग आहे आणि स्थितिस्थापक प्रत्यानयनाच्या बलांचे जे अधिष्ठान आहे, त्यास वजन नाही, हे मनाशी गृहीत धरून समीकरण ३ मांडले आहे. प्रत्यक्षात या संचाचे वर्तन, $व_१$ वजन (कंपनयंत्राचे वजन) असलेली एक ताठ वस्तु $व_{मृ}$ वजनाच्या सर्पिलांवर ठेवलेली असावी, त्याप्रमाणे असते. कंपक आणि आधारमृत्तिका यांमधील क्रियाप्रतिक्रियांचे अधिक अचूक ज्ञान मिळवावयाचे असेल, तर कंपकाच्या तळाखाली असलेल्या मृत्तिकेवर कारक होणारी वास्तुबले विचारात घेणे आवश्यक असते. हे कार्य ई. रैसनेरने (१९३६) साध्य केले. त्यासाठी त्याने असे सुकरतादायी गृहीत स्वीकारले की, कंपकाखाली समतल पृष्ठाचा अपारप्राय राशी असून तो स्थितिस्थापक व समदैशिक

आहे. तथापि या विश्लेषणाची फलिते कंपनयंत्रसाधित अन्वेषणात लागू करण्याचा प्रयत्न अद्याप झालेला नाही.

प्रयोगातील फलितांचा अन्वयार्थ लावताना ज्या शास्त्रीय कल्पना आधारभूत मानल्या होत्या, त्यांत विसंगती असूनही कंपनयंत्राच्या साहाय्याने केलेल्या मृत्तिकांच्या अन्वेषणातून विशेष व्यावहारिक महत्त्वाच्या अनेक गोष्टी दृष्टोत्पत्तीस आल्या. आजतागायत प्राप्त झालेल्या फलितांचा सारांश पुढे दिला आहे.

विवक्षित वजन आणि तळक्षेत्र असलेल्या कंपकाची स्वाभाविक वारंवारता आणि निम्नस्तराचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म यांचा प्रत्यक्ष संबंध असतो. निम्नस्तर जितका अधिक दृढ आणि म्हणून कमी दमनीय, तितके सर्पिलस्थिरांकाचे मूल्य अधिक असते. म्हणून वाळसर मृत्तिकांत केलेल्या मनुष्यनिर्मित भरणांच्या तौलनिक दृढतेचे प्रमाण ठरविण्यासाठी कंपकांचा उपयोग करणे शक्य होते आणि तसा उपयोग यशस्वी-पणे केलेलाही आहे. अशासारख्याच कारणांस्तव कंपकाची स्वाभाविक वारंवारता आणि जिला बांधकामांतील सार्वत्रिक अनुभवाच्या आधारे वाळसर निम्नस्तराची अनुज्ञेय भारधारणक्षमता म्हणतात, या दोहोंमध्ये निश्चित असा संबंध आहे. लोरेंझच्या (१९३४) संशोधनातून घेतलेल्या पुढील माहितीवरून हा संबंध स्पष्ट होईल.

मृत्तिकाप्रकार	वारंवारता फ : सेकंद$^{-1}$	अनुज्ञेय भारधारण-क्षमता : टन/चौ. फूट
अदृढ भरण	१९·१	१
दगडी कोळशाच्या निखाऱ्यांचा दृढ भराव	२१·३	१·५
मध्यम प्रकारची बरीच दृढ अशी वाळू	२४·१	३
मिश्रकणयुक्त अति दृढ वाळू	२६·७	४·५
दृढ, भरड वाळू	२८·१	४·५
चुन्याचा दगड	३०	—
कठीण वालुकाश्म	३४	—

वरील कोष्टकातील स्वाभाविक वारंवारतेची मूल्ये मिळविण्यासाठी जो कंपक वापरला होता त्याचे वजन ६००० पौंड व तळक्षेत्र ११ चौ. फूट होते. भूकंपविषयक अभि-लेखांच्या आधारे असे म्हणता येते की, निश्चित सीमा असणाऱ्या प्रत्येक मृत्तिकाराशीची स्वतःची अशी एक स्वाभाविक वारंवारता असते. तथापि ही वारंवारता आणि अशा राशीच्या पृष्ठभागावर कंपन-प्रयोग करून प्राप्त झालेली स्वाभाविक वारंवारता या एक नसतात (रॅम्सपेक १९३८).

या कोष्टकाच्या बाबतीत हे स्पष्ट केले पाहिजे की, वारंवारता आणि अनुज्ञेय भारधारणक्षमता ही दोन्ही मूल्ये त्या त्या सर्वसामान्य वैशिष्ट्यांच्या पुरतीच लागू

आहेत. विवक्षित अवसीदनाच्या बाबतीत तीं लागू करता येणार नाहीत. कारण विवक्षित एकांक मूल्याचा भार वाहणाऱ्या क्षेत्राचे अवसीदन निम्नस्तराच्या प्राकृतिक गुणधर्मा-व्यतिरिक्त इतर अनेक गोष्टींवर अवलंबून असते (परिच्छेद १४२ पाहा).

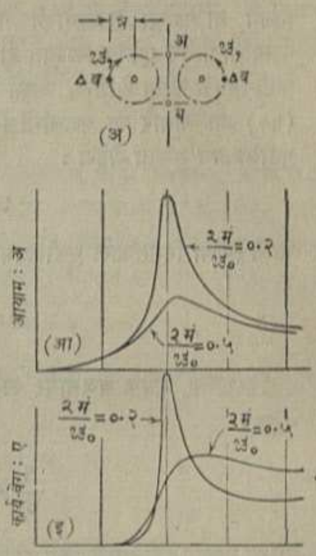
समीकरण ३ च्या साहाय्याने प्राप्त होणारी $प_{नि}$ ची मूल्ये, त्याच क्षेत्रावर केलेल्या स्थिरभार प्रयोगात प्राप्त होणाऱ्या मूल्यांपेक्षा बऱ्याच प्रमाणात मोठी असतात, असे सातत्याने आढळून आले आहे. या कारणास्तव कंपनप्रयोगाच्या साहाय्याने निश्चित केलेले, एकांक भार आणि अवसीदन यांतील गुणोत्तर निराळ्या अक्षराने दाखविले जाईल, जसे :

$$ग_{नि} = \frac{थ_{स}}{आ} \qquad [४]$$

$ग_{नि}$ म्हणजे **निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेचा गुणांक** होय. हे मूल्य म्हणजे $प_{नि}$ या निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांकासारखा (समीकरण १२४ (१)) गतिमान परि-स्थितीतील एक अंक आहे असे म्हणता येईल. उभ्या दाबामधील $\Delta द$ या बदलामुळे निर्माण होणारे अवसीदन $\Delta न$ गणितसिद्ध करण्यासाठी समी० १२४ (१) चा उपयोग करावयाचा झाल्यास $\Delta द$ च्या फक्त धनमूल्यांचे वेळीच ते लागू पडते. कारण या समीकरणातील $न$ या अवसीदनामध्ये प्रत्यावर्ती आणि स्थायी अशा दोन्ही प्रकारांचे अवसीदन समाविष्ट आहे. याउलट, समीकरण ४ हे दाबातील वाढ आणि घट अशा दोन्ही प्रकारांत लागू पडते.

भारित क्षेत्राच्या आकारमानाचा आणि अन्य गोष्टींचा निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रिया-गुणांकावर जो प्रभाव पडतो त्याची माहिती अद्यापही तशी अपुरीच आहे. लॉरेंझच्या (१९३४) मते वाळूच्या बाबतीत भारित क्षेत्राच्या आकारमानाचा $ग_{नि}$ च्या मूल्यावरील प्रभाव दुर्लक्षिण्यासारखा असतो. याउलट, दृढ अशा चिकण मिश्रित जाड वाळूवर क्षेत्रात केलेल्या प्रयोगांची फलिते सीसमॉसमधील (काळ अनिश्चित) आकृती १० मध्ये दाखविली आहेत; तीं बघता भारित क्षेत्र ०·२५ पासून १ चौ. मीटरपर्यंत वाढविले असता, $ग_{नि}$ चे मूल्य वाढत जाते असे दिसते. भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य ०·६ कि.ग्रॅ./सेंमी.^{२} असताना ते १५ पासून २३ कि.ग्रॅ./सें मी.^{३} पर्यंत आणि भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य १·५ किग्रॅ./सेंमी.^{२} असताना २७ पासून ३४ किग्रॅ./सेंमी.^{३} पर्यंत वाढते. या आकड्यांचा अर्थ असाही आहे की, भाराचे एकांक मूल्य वाढते, तसा $ग_{नि}$ वाढतो; परंतु $प_{नि}$ हा स्थैतिक निम्नस्तर-प्रतिक्रिया-गुणांक सामान्यतः अशा परिस्थितीत कमी होत जातो. लॉरेंझप्रणीत (१९३४) आकृती ५ वरून असे दिसते की, वाळूच्या बाबतीतील $ग_{नि}$ चे मूल्यही भाराच्या एकांक क्षेत्रस्थ मूल्यात वाढ झाली, तर घटत जाते.

कंपनयंत्राने मृत्तिकेत संक्रमित केलेल्या प्रेरणांची वारंवारता वाढली, तर त्याच्या तळाचे अवसीदन वाढत जाते. मृत्तिका + कंपक या संचाच्या फ₀ या स्वाभाविक वारंवारतेच्या सुमारे ½ किंवा ⅔ पेक्षा फ₁ या वारंवारतेचे मूल्य वाढताच हे अवसीदन त्वरेने वाढू लागते. प्रेरणेच्या वारंवारतेचे मूल्य फ₀ मूल्याप्रत जाऊ लागते तेव्हा होणारे कंपन-यंत्राच्या तळाचे अवसीदन, तेवढेच वजन स्थिर अवस्थेत असताना होणाऱ्या अवसीदनापेक्षां कितीतरी पटीने अधिक असते. वारंवारतेच्या ज्या मूल्यांच्या वेळी प्रेरणाजन्य अवसीदन अतिरिक्त प्रमाणात होऊ लागते तीं मूल्ये म्हणजे **लक्ष्मण-कक्षा** होय. या लक्ष्मण-कक्षेत सुमारे ०·५फ₀ आणि १·५फ₀ या दोन मर्यादांतील वारंवारता-मूल्ये समाविष्ट होतात आणि या मर्यादा कंपकाच्या आकारमानावर फारशा अवलंबून नसाव्यात असे दिसते. म्हणून वालुकेवर ठेवलेल्या पायाची वारंवारता, त्याच वालुकेवर कार्य करणाऱ्या कंपकाच्या वारंवारतेच्या लक्ष्मण-कक्षेत पडणारी असेल, तर अतिरिक्त अवसीदन होईल, अशी अपेक्षा करता येते. अर्थातच वालुकास्तरावर शीघ्र चक्रगतीने फिरणारी यंत्रे ठेवावयाची असतील तेव्हा त्यांच्या पायांचे पूर्वकल्प करताना, वारंवारता आणि अवसीदन यांतील संबंधाचे ज्ञान, हा एक आवश्यक घटक ठरतो. हेच ज्ञान वालुकाभराव कृत्रिम रीत्या दृढ करण्यासाठी वापरावयाच्या मोठ्या यंत्राच्या विकासासाठीही साहाय्यक ठरले.



आकृती १४५ : (अ) डेगेबो कंपन-यंत्रामागील तत्त्व स्पष्ट करणारी रेखाकृती (आ ते ई) आयाम, कार्यवेग आणि अवसीदन यांवर पडणारा वारंवारता-गुणोत्तराचा प्रभाव.

उपरोक्त संशोधन बहुतांशी १९३० पासून 'डेगेबो' या संस्थेने केले आहे. याच संस्थेने या पद्धतीस आवश्यक ते सैद्धांतिक कार्यही केले आहे (डेगेबो १९३३). या प्रायोगिक फलितांचे वृत्तांत सुलभपणे उपलब्ध नाहीत आणि त्यांतील फारच थोडे इंग्लिश भाषेत प्रकाशित झाले आहेत. उपर्युक्त पद्धतीविषयीचे शास्त्र आणि व्यवहार यांचे खाली दिलेले समालोचन संपूर्णतया 'डेगेबो'च्या प्रकाशनांवरच आधारित आहे.

'डेगेबो'ने विकसित केलेल्या कंपन-यंत्रात दोन समान वजनांच्या (Δव) द्वारे

नियतकालिक प्रेरणा निर्माण केल्या जातात. हीं दोन वजने समांतर अक्षांभोवती विरुद्ध दिशांत भ्रमण करतात आणि त्यांची चक्रगती अशी असते की, त्यांचा संयुक्त गुरुत्वमध्य एका उभ्या रेषेवर वरखाली व्हावा. आकृती १४५ अ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे या उभ्या हालचालीच्या सीमा *अ* आणि *ब* या आहेत. या दोन वजनांची प्रत्येक एकांक कालात होणारी भ्रमणे किंवा फेरे ($फ_१$) बऱ्याच मोठ्या कक्षेत कमी-अधिक करता येतील, अशी व्यवस्थाही या यंत्रात असते. समीकरण १५६ (१०) च्या आधारे या वजनांनी निर्मिलेल्या नियतकालिक प्रेरणांची चक्रीय वारंवारता पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$ॐ_१ = २\pi फ_१ \qquad [५]$$

आणि त्यांचा नियतकाल पुढीलप्रमाणे असेल :

$$ध = \frac{१}{फ_१} = \frac{२\pi}{ॐ_१} \qquad [६]$$

फिरणाऱ्या प्रत्येक वजनावर कारक असणारे केंद्रोत्सारी बल पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\frac{१}{२}\, भा_१ = \frac{\Delta व}{त्व}\, त्र\, ॐ_१^{२}$$

येथे *त्व* म्हणजे गुरुत्वाकर्षणाचा प्रवेग आणि *त्र* म्हणजे वजनाचे विकेंद्रत्व आहे. फेऱ्यांची संख्या तीच ठेवून चक्राकार फिरणाऱ्या वजनांचे *त्र* हे विकेंद्रत्व बदलले असता, $भा_१$ या बलाचे मूल्य बदलता येते. दोन्ही वजने एकाच वेळी, परंतु उलट्या दिशेने फिरत असल्यामुळे केंद्रोत्सारी बलांचे आडवे घटक एकमेकांस छेद देतात आणि उभे घटक म्हणजे नियतकालिक विक्षेपकारी बल ठरते. त्याची महत्ता पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येते.

$$भा = भा_१ ज्या\, ॐ_१ ळ = \frac{२\Delta व}{त्व} \cdot त्र\, ॐ_१^{२} ज्या\, ॐ_१ ळ = थ \cdot ॐ_१^{२} ज्या\, ॐ_१ ळ \qquad [७अ]$$

येथे

$$थ = \frac{२\Delta व}{त्व}\, त्र \qquad [७ आ]$$

हा एक स्थिरांक असून, तो कंपनयंत्राची रचना आणि भारांचे विकेंद्रत्व यांवर अवलंबून असतो. चक्रगतीने फिरणारी हीं वजने एका अवजड पाटावर (क्षेत्रफळ *आ*) बसविलेली असतात. पाट आणि त्यावर बसविलेली यंत्रसामग्री यांचे एकूण वजन $व_१$ आहे. *भा* (समीकरण ७ अ) हे स्पंदन पावणारे बल उभ्या दिशेत मंदीकृत प्रवृत्त कंपन निर्माण करते. हे कंपन केवळ कंपनयंत्रातच नव्हे, तर त्याच्या तळालगतच्या मृत्तिकेतही निर्माण होते. सर्पिल-स्थिरांकाच्या व्याख्येनुसार या प्रक्रियेच्या, १५७ (९)

या कलनसमीकरणामधील $थ_{स}$ हा सर्पिल-स्थिरांक म्हणजे एखाद्या कंप पावणाऱ्या संचाचा गुरुत्वमध्य कंपनाच्या दिशेत, प्रत्यावर्ती एकांक विस्थापन निर्माण करण्यास आवश्यक असलेले बल होय. निम्नस्तराच्या पृष्ठभागाचे प्रत्यावर्ती एकांक अवसीदन होण्यास आवश्यक असणाऱ्या भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य म्हणजे निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेचा गुणांक $ग_{नि}$ होय. म्हणून $आ$ क्षेत्र व्यापणाऱ्या पाटावरील कंपनयंत्राचा सर्पिलस्थिरांक पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$थ_{स} = ग_{नि}आ$$

परंतु त्यासाठी कंप पावणाऱ्या संचाच्या गुरुत्वमध्याचे उभे विस्थापन आणि पाटाचे विस्थापन ही दोन्ही सारखीच असतात, हे गृहीत आपल्याला चालवून घेतले पाहिजे. कंपित संचाचे वजन म्हणजे कंपकाचे वजन आणि कंपकाच्या हालचालीत सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकाराशीचे वजन यांची बेरीज असते. म्हणून समीकरण १५६ (७) मध्ये

$$थ_{स} = ग_{नि}आ \quad \text{आणि} \quad व = व_{१} + व_{मृ}$$

नियुक्त करून आणि $ω_{०}$ साठी ते सोडवून आपल्याला या रचनेची स्वाभाविक चक्रीय वारंवारता पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$ω_{०} = \sqrt{\frac{ग_{नि}आत्व}{व_{१} + व_{मृ}}} \qquad [८]$$

निम्नस्तरामध्येही मंदीकरणाचा गुण असल्यामुळे $भा_{१}$·ज्या $ω_{१}ळ = थω_{१}^{२}$.ज्या $ω_{१}ळ$ (समीकरण ७ अ) ही प्रेरणा स्निग्धताजन्य मंदीकरणाने युक्त अशी प्रवृत्त कंपने निर्माण करते. $भा_{१} = थω_{१}^{२}$ या स्थैतिक भारामुळे निर्माण होणाऱ्या अवसीदनातील प्रत्यावर्ती भाग असा असतो :

$$अ_{१} = \frac{थω_{१}^{२}}{थ_{स}} \qquad [९]$$

या पदाने $भा_{१}$ या महत्तम विक्षेपकारी बलाने स्थैतिक रीत्या निर्माण होणारे विस्थापन दर्शविले जाते. समीकरण ९ वरून मिळणारे $अ_{१}$ चे मूल्य समीकरण १५७ (१२)मध्ये नियुक्त केले असता, उपर्युक्त प्रवृत्त कंपनाच्या अ या आयामाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मांडता येते; प्रेरणेची चक्रीय वारंवारता $ω_{१}$ आहे.

$$अ = \frac{थω_{१}^{२}}{थ_{स}} बृ_{१} \qquad [१०]$$

येथे $बृ_{१}$ हा बृहदीकरणाचा गुणक आहे (समीकरण १५७ (११ अ)). प्रयोगात $फ_{१}$ चे मूल्य पुढीलप्रमाणे असते :

$$फ_{१} = \frac{ω_{१}}{२π}$$

समी० १० मधील ω_1 ऐवजी $फ_1 \cdot 2\pi$ नियुक्त केल्यास अ चे मूल्य असे होते :

$$अ = \frac{4\pi^2 थवृ_1}{थ_{स}} \cdot फ_1^2$$

$\frac{फ_1}{फ_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ हे गुणोत्तर आणि अ यांचा संबंध आलेखपद्धतीने मांडला असता, आकृती १४५ आ मधील आलेखासारखा आलेख मिळतो. तेथे $२\ मं/\omega_0$ या गुणोत्तराची दोन मूल्ये घेऊन आलेख काढले आहेत. $फ_1/फ_0 = \omega_1/\omega_0 = 1$ (समीकरण १५७(१४) पाहा) असल्यास, अनुकंपनाची अट स्थूलमानाने पुरी होते.

या प्रयोगात दुसऱ्या एका गोष्टीची नोंद ठेवली जाते, ती म्हणजे कंपक चालविण्यासाठी दर एकांक काळात करावे लागणारे कार्य ही होय. या कार्याचे दोन भाग पडतात. यंत्रामधील धारकगुटिकांचे घर्षण आणि यंत्रातील अन्य विरोध यांवर मात करण्यात खर्च होणारे कार्य, हा एक भाग झाला. हा भाग स्थूलमानाने वारंवारतेच्या वर्गाच्या सरळ प्रमाणात वाढतो, असे आढळून आले आहे. दुसरा भाग म्हणजे नियतकालिक विरूपतेला मृत्तिकेकडून केल्या जाणाऱ्या स्निग्धताजन्य विरोधावर मात करण्यात खर्च होणारे कार्य हा होय. हा स्निग्धताजन्य विरोध म्हणजेच मंदत्वकारी बल समीकरण १५६ (११) वरून ठरविता येते.

$$दा_{मं} = थ_{मं} \cdot \frac{dक्ष}{dळ}$$

कंप पावणाऱ्या संचाचा गुरुत्वमध्य आणि त्याचे समतोलाच्या अवस्थेतील मूळ स्थान यांमधील अंतर पुढील समीकरणाने मिळते :

$$क्ष = अ_1 वृ_1\ ज्या\ (\omega_1 ळ - \varpi) \qquad १५७\ (११इ)$$

वेग पुढीलप्रमाणे

$$\frac{dक्ष}{dळ} = अ_1 वृ_1 \omega_1\ कोज्या\ (\omega_1 ळ - \varpi)$$

आणि मंदत्वकारी बल पुढीलप्रमाणे मांडता येते :

$$दा_{मं} = थ_{मं} \frac{dक्ष}{dळ} = थ_{मं} अ_1 वृ_1 \omega_1\ कोज्या\ (\omega_1 ळ - \varpi)$$

एका पूर्ण फेऱ्याचा काल $प = १/फ_1$ असतो; म्हणून या कालात मंदत्वकारी बलावर मात करण्यात होणारे कार्य :

$$ए_{ध} = \int_0^{प} दा_{मं} \frac{dक्ष}{dळ} \cdot dळ = थ_{मं}\ अ_1^2 वृ_1^2 \omega_1 \pi$$

आणि एकांक कालातील कार्य :

$$ए = फ_{१} ए_{प} = \pi थ_{मं} अ^{२}_{१} वृ^{२}_{१} ऌ_{१} फ_{१}$$

इतके असते. या समीकरणात

$$ऌ_{१} = २ \pi फ_{१} \qquad \text{(समीकरण ५)}$$

आणि

$$अ_{१} = \frac{थ ऌ^{२}_{१}}{थ_{स}} = \frac{४\pi^{२} फ_{१}^{२} थ}{थ_{स}} \quad \text{(समीकरण ९)}$$

नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$ए = ३२\pi^{६} थ^{२} वृ_{१}^{२} \frac{थ_{मं}}{थ^{२}_{स}} फ_{१}^{६} \qquad [११]$$

$थ$ चे मूल्य समीकरण ७ आ वरून आणि $वृ_{१}$ चे मूल्य समीकरण १५७ (११ अ) वरून मिळते. समीकरण १५६ (१३) वरून $थ_{मं} = २मंव/_{त्व}$ मिळते. येथे $मं$ म्हणजे मंदीकरणाचा गुणक आहे आणि $व$ हे कंप पावणाऱ्या संचाचे वजन आहे.

$ए$ हे कामाचे प्रमाण आणि $फ_{१}/फ_{०}$ हे गुणोत्तर यांतील संबंधाचा आलेख आकृती १४५ इ मधील आलेखांसारखा असतो. तेथे $२मं/ऌ_{०}$ ची दोन मूल्ये घेऊन दोन आलेख काढलेले आहेत. $२मं/ऌ_{०}$ चे मूल्य जसे वाढते, तसा आकृती १४५ आ मधील आयाम-दर्शक आलेखाचा शिरोबिंदू उजवीकडे सरकतो आणि कार्यदर्शक आलेखाचा शिरोबिंदू खाली उतरतो आणि तेथील भाग पसरट होतो.

कंपकाच्या प्रयोगावरून आणखी एक वैशिष्ट्यपूर्ण आलेख मिळविता येतो. तो म्हणजे दशाकोनदर्शक आलेख हा होय. $मं > ०$ असेल, तर आकृती १४४ इ मधील आलेखांसारखाच हा दशाकोनदर्शक आलेख असतो. दशाकोनाविषयीच्या समीकरणात (समीकरण १५७ (११ आ)) $मं$ हा मंदत्व-गुणक प्रविष्ट असल्यामुळे, दशाकोन-दर्शक आलेखाचा आकार हा काही प्रमाणात कंपकाखालच्या मृत्तिकेचा मंदत्वकारी गुणधर्म दर्शवितो.

कंपन-प्रयोग करताना आयाम, कार्याचे प्रमाण आणि दशाकोन यांची मूल्ये या कोटी आणि कंपकाची वारंवारता $फ_{१}$ ची मूल्ये या भुजा समजून आलेख काढले जातात. निरनिराळ्या वारंवारतेच्या वेळी होणारे कंपकाच्या तळाचे एकूण अवसीदनही मोजले जाते.

कंपकाची स्वाभाविक वारंवारता $फ_{०}$ अनुकंपनाच्या वेळी सुमारे $फ_{१ अनु}$ इतकी असते. म्हणजेच वारंवारता-आयाम आलेखाच्या शिरोबिंदूच्या भुजेइतकी असते. त्यामुळे कंप पावणाऱ्या संचाचे वजन $व$ माहीत असेल, तर समीकरण ३ मध्ये $फ_{०} = फ_{१ अनु}$ नियुक्त करून, आपल्याला $ग_{नि}$ ठरविता येईल. $व$ म्हणजे कंपकाचे वजन $व_{१}$ आणि त्याच्या कंपनात सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकेचे वजन यांची बेरीज असते. $व_{मृ}$ चे

वजन अजमावण्यासाठी कंपकावर अधिभार ठेवून त्याचे वजन वाढविले जाते. या प्रयोगात संचाची स्वाभाविक चक्रीय वारंवारता ω_0 पासून ω'_0 अशी कमी होते. कंपकाच्या वजनातील वाढीचा $व_{मृ}$ वर काहीच परिणाम होत नाही असे सोपेपणासाठी गृहीत धरून आणखी एक समीकरण मिळते. त्यामुळे $व_{मृ}$ ठरविता येते.

कंपकाचे वजन १·८ टनापासून ३·३ टनापर्यंत वाढवत नेऊन केलेल्या प्रयोगांच्या फलितांवरून असे आढळून आले की, $व_{मृ}$ हे वजन १२·५ टन इतके होते (लॉरेन्झ १९३४). कंपक-तळाचे क्षेत्रफळ ३ चौ. फूट होते. याच प्रबंधाच्या शेवटी उल्लेख केलेल्या प्रयोगांच्या दुसऱ्या गटात असे आढळते की, $व_{मृ}$ चे मूल्य १ टनाहून अधिक नव्हते. या वेळी कंपकाचे वजन २·० पासून २·७ टनांपर्यंत वाढविले होते. कंपकाच्या तळाचे क्षेत्रफळ ११ चौ. फूट असावे असे दिसते. मृत्तिकाविषयक परिस्थिती दिलेली नाही. या फलितांवरून असेही दिसते की, $व_{मृ}$ या वजनाचे मूल्य बऱ्याच मोठ्या कक्षेत बदलत असावे. $व_{मृ}$ हे वजन ठरविण्याची पद्धत तशी थोडी अविश्वासार्हच असल्यामुळे अन्वेषणातून मिळणारी फलिते केवळ $व_{मृ}$ च्या परम सीमा ठरविण्यापुरतीच वापरता येतात. हीं मूल्ये घेऊन $ग_{नि}$ या निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेच्या मूल्यांची वरची आणि खालची मर्यादा ठरविता येते. हीं मूल्ये म्हणजे स्थितिस्थापकत्वजन्य प्रत्यावर्तनाच्या बलांचे अधिष्ठान असलेल्या भागातील मृत्तिकेच्या बाबतीत मिळणारी $ग_{नि}$ ची सांख्यकीय सरासरी मूल्ये असतात. कंपकाचा तळ ११ चौ. फुटापर्यंत असताना कंपनात सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकेचे वजन १५ टनांहून अधिक असते, ही गोष्ट लक्षात घेता, या अधिष्ठानाची खोली ७ फुटांच्या आतच असेल आणि कदाचित त्याहून बरीच कमीही असेल. म्हणजे फार खोलवर असलेल्या थरांचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म प्रयोगाच्या फलितांवर प्रभाव पाडू शकत नाहीत असे दिसते. हे थर असाधारणपणे विस्कळित किंवा जवळजवळ द्रवरूप असतील, तर मात्र गोष्ट वेगळी. म्हणून फार जाडी असलेल्या स्तरयुक्त भूमीचे स्थितिस्थापकविषयक गुणधर्म माहीत करून घ्यावयाचे असतील, तर कंपक-पद्धती-बरोबरच परिच्छेद १६३ मध्ये वर्णिलेल्या भूकंपपद्धतीचाही उपयोग करावा लागतो. कोणत्याही परिस्थितीत कंपक-प्रयोगाची फलिते, दृढीभवनजन्य अवसीदन ठरविण्या-साठी आधारभूत मानता येणार नाहीत; कारण कंपक-प्रयोगांवरून मिळणारे गुणधर्म आणि दमन-गुणांक $अ_{द}$ (समीकरण ९८ (१)) यांमध्ये कोणताच संबंध नसतो. फार तर या फलितांवरून दमनीय, चिक्कण मृत्तिकांच्या थरांचे अस्तित्व त्या ठिकाणी असल्यास, त्याची कल्पना वेधन-विवरे घेण्यापूर्वीच येऊ शकते.

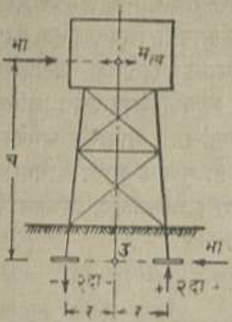
समीकरण ११ आणि समीकरण १५६ (१३) यांच्या साहाय्याने $मं$ या मंदत्व –गुणकाचे मूल्य मिळविता येते. $मं$ चे मूल्य ३ किंवा ४ सेकंद$^{-१}$ पेक्षा अधिक आणि त्याचबरोबर कंपकतळाचे महत्त्वपूर्ण अवसीदन या गोष्टी आढळल्या, तर कंपनाच्या बाबतीतील संवेदनशीलता आणि अतिरिक्त दमनीयता यांच्या त्या निदर्शक मानल्या जातात (लॉरेन्झ १९३४).

'डेगेबो' कंपक अशा प्रकारे बनविलेले आहेत की, त्यांच्याद्वारे नियतकालिक प्रेरणा उभ्या किंवा आडव्या दिशेत लावता येतात. कंपकाद्वारे आडवी नियतकालिक प्रेरणा लावली असता, मिळणारी माहिती निम्नस्तराच्या गतिमान कार्तनिक प्रतिक्रियेचा गुणांक $ग_{क}$ ठरविण्यासाठी वापरलेली आहे. हा गुणांक म्हणजे कंपकतळाचे क्षितिज-समांतर दिशेत प्रत्यावर्ती एकांक विस्थापन घडवून आणण्यासाठी आवश्यक असलेल्या बलाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य असते. (लॉरेन्झ १९३४). हा गुणांक आणि त्याचबरोबर $ग_{नि}$ हा गुणांक, एंजिनांच्या पायांची स्वाभाविक वारंवारता गणितसिद्ध करण्यासाठी, परिच्छेद १६० मध्ये वर्णन केल्याप्रमाणे वापरले जातात.

१५९. टाकीच्या मनोऱ्याची स्वाभाविक वारंवारता : अनुकंपन-निर्मितीचा संभव लक्षात घेता, रस्त्यावरील रहदारी किंवा धरणीकंप यांसारख्या नियतकालिक प्रेरणांचा वास्तूंवर आणि त्यांच्या पायांवर होणारा परिणाम बऱ्याच अंशी, प्रेरणेची वारंवारता आणि वास्तूंची स्वाभाविक वारंवारता यांमधील गुणोत्तरावर अवलंबून असतो हे उघड आहे. निम्नस्तराच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांचा त्यावर बांधलेल्या वास्तूंच्या स्वाभाविक वारंवारतेवर पडणारा प्रभाव स्पष्ट होण्यासाठी, आपण आकृती १४६ मध्ये दाखविलेल्या टाकीच्या मनोऱ्याची एकेरी प्रेरणेमुळे होणारी कंपने विचारार्थ घेऊ. मनोरा चार पादकांवर आधारित आहे आणि प्रेरणा मनोऱ्याच्या एका सममात्रता-पातळीत आडव्या दिशेने कारक आहे.

मनोऱ्याच्या वस्तुमानापैकी अधिकतम भाग टाकीच्या ठिकाणी केंद्रित झालेला आहे. टाकीचा गुरुत्वमध्य आणि तिच्यातील पाण्याचा गुरुत्वमध्य या दोहोंमधील सापेक्ष हालचालीमुळे या समस्येत मोठीच अडचण निर्माण होते (रूज १९३८). तथापि विल्यम्सच्या (१९३७) मतानुसार, व्यावहारिकदृष्ट्या संपूर्ण मनोरा हा एकराशी व्यूह आहे, असे समजता येते. अर्थात त्यासाठी पाण्याच्या खऱ्या वजनाऐवजी सुमारे $\frac{3}{4}$ वजनच गृहीत धरावे लागते. तेव्हा टाकीतील पाण्याच्या हालचालीकडे आपण दुर्लक्ष करू. तसेच टाकीला आधार देणाऱ्या मनोऱ्याच्या वजनाकडेही दुर्लक्ष करू आणि असे गृहीत धरू की, टाकीचे कार्यसाधक वजन व (टाकीचे वजन + तिच्यातील पाण्याचे तीन-चतुर्थांश वजन) हे टाकीच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्याच्या ठिकाणी केंद्रित झालेले आहे.

एखाद्या प्रेरणेमुळे निर्माण होणाऱ्या कंपनांच्या बाबतीतील मनोऱ्याची स्वाभाविक वारंवारता, पादकाखाली असणारी मृत्तिका आणि टाकीला आधार देणारा मनोरा यांच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांवर अवलंबून असते. मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापक विरूपतेमुळे होणारी विस्थापने मनोऱ्याच्या तसल्याच विस्थापनांच्या मानाने क्षुल्लक असतील, अशी एक पराकोटीची शक्यता आहे. असे झाले, तर ज्याचे खालचे टोक बद्ध आहे, अशा लवचिक उभ्या दंडाच्या वरच्या टोकाला एखादा वजनदार गोळा लावावा, तद्वत् मनोऱ्याचे वर्तन होते. अशा लक्षणांनी युक्त असलेल्या



आकृती १४६ : पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेल्या पायावरील पाण्याच्या ताठ टाकीचा उभा छेद.

मनोऱ्यात होणाऱ्या कंपनांचे संशोधन विल्यम्सने (१९३७) केले आहे. मनोरा म्हणजे स्थितिस्थापक निम्नस्तरावर आधारित असलेली एक ताठ वास्तू आहे, ही दुसरी एक पराकोटीची शक्यता आहे. निम्नस्तर आणि वास्तू यांच्या परस्परातील क्रिया-प्रतिक्रियांतच केवळ आपल्याला स्वारस्य असल्यामुळे या दुसऱ्या पर्यायाचाच विचार येथे केला जाईल.

आपण जर असे गृहीत धरले की, मनोऱ्याच्या तळाचा उ हा मध्यबिंदू कंपनामुळे विचलित होत नाही, तर मनोरा म्हणजे एककोटी स्वाधीनता असलेला एकराशी व्यूह आहे, असे मानता येईल. या व्यूहाची कंपने उ मधून जाणाऱ्या आडव्या अक्षाभोवती आकृतीच्या पातळीत होणाऱ्या आंदोलनांच्या स्वरूपाची असतील (आकृती १४६).

कंपनप्रयोग करून निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेचा गुणांक $ग_{नि}$ ठरविलेला आहे असेही आणखी गृहीत धरू. उपर्युक्त प्रेरणेमुळे उ मधून जाणाऱ्या परिभ्रमणाच्या अक्षाभोवती मनोऱ्यास उलथवून टाकू पाहणारे परिबल $प$ निर्माण होईल. या परिबलामुळे उजवीकडील दोन पादकांवर येणारा एकूण दाब वाढेल आणि तितक्याच प्रमाणात उरलेल्या दोन पादकांवरील दाब कमी होईल. ही वाढ किंवा घट २$दा$ आहे असे मानल्यास समतोल राखण्यासाठी पुढील समीकरणाची पूर्ती झाली पाहिजे :

$$प = ४दा\, र$$

म्हणजेच

$$दा = \frac{प}{४र}$$

प्रत्येक पादकाचे क्षेत्रफळ $आ$ असेल, तर $दा$ या दाबामुळे पादकांमध्ये निर्माण होणारे उभे विस्थापन पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\pm न = \pm \frac{दा}{आ} \cdot \frac{१}{ग_{नि}} = \pm \frac{प}{४आर} \cdot \frac{१}{ग_{नि}}$$

उ मधून जाणाऱ्या परिभ्रमण-अक्षाभोवती होणारे मनोऱ्याचे तज्जन्य कोणात्मक विस्थापन पुढीलप्रमाणे असेल :

$$छ = \frac{न}{र} = \frac{प}{४आर^{२}} \cdot \frac{१}{ग_{नि}}$$

मनोरा ताठ आहे आणि आडवा अक्ष अविचलित आहे, म्हणून मनोऱ्याचा $म_{त्व}$ ड हा अक्षही याच कोनातून फिरेल. त्यामुळे मनोऱ्याच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्याचे विस्थापन पुढीलप्रमाणे असेल :

$$क्ष = ठ\,च = \frac{चप}{४\,आर^{२}} \cdot \frac{१}{ग_{नि}}$$

ठ चे मूल्य फारच लहान असल्यामुळे, क्ष हे विस्थापन जवळजवळ आडवे आणि रेषात्मक असते; म्हणून टाकीचा प्रत्येक कण ठ च या अंतराइतकीच आडवी हालचाल करतो असे आपण स्थूल अनुमान करण्यापुरते म्हणू शकतो. या गृहीतामुळे ही समस्या रेखात्मक कंपनाची समस्या ठरते. तदनुषंगिक सर्पिल-स्थिरांक $थ_{स}$ ठरविण्यासाठी पुढीलप्रमाणे गणित मांडू :

$$प = भा\,च$$

म्हणजेच—

$$भा = \frac{प}{च}$$

येथे $भा$ हे टाकीच्या $म_{त्व}$ या गुरुत्वमध्यातून जाणारे आडवे बल आहे. उ या भ्रमणाच्या अक्षाभोवती $भा$ मुळे निर्माण झालेले परिबल म्हणजेच प्रेरणेचे परिबल $प$ होय. टाकीचा प्रत्येक कण एकाच वेळी $क्ष$ या आडव्या अंतराइतका विस्थापित होतो, असे आपण गृहीत धरल्यामुळे $थ_{स}$ हा सर्पिल-स्थिरांक, टाकीचे एकांक अंतरातून विस्थापन होण्यास आवश्यक असलेल्या बलाइतका असणार (परिच्छेद १५६ आणि समीकरण १५६ (२) पाहा). तेव्हा—

$$थ_{स} = \frac{भा}{क्ष} = ४\,आ\,\frac{र^{२}}{च^{२}}\,ग_{नि}$$

असे मांडता येईल. समीकरण १५६ (७) मध्ये हे मूल्य नियुक्त करून आपल्याला स्वाभाविक, चक्रीय वारंवारतेसाठी पुढील समीकरण मिळते :

$$\omega_{०} = \frac{२र}{च}\sqrt{\frac{आ}{व}\,त्व\,ग_{नि}}$$

स्वाभाविक वारंवारता (समीकरण १५६ (१०) पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$फ_{०} = \frac{\omega_{०}}{२\pi} = \frac{र}{\pi \cdot च}\sqrt{\frac{आ}{व}\,त्व\,ग_{नि}}$$

पादकांच्या तळावर, प्रत्येक एकांक क्षेत्रावर येणारा स्थैतिक दाब पुढीलप्रमाणे असेल :

$$भ = \frac{व}{४आ}$$

त्यावरून

$$फ_० = \frac{\sqrt{त्व}}{२\pi} \cdot \frac{र}{च} \cdot \sqrt{\frac{ग_{ति}}{भ}} \qquad [१]$$

असे समीकरण मिळते. एककोटी स्वाधीनता असलेल्या व एकराशी व्यूह समजता येईल, अशा ताठ मनोऱ्याच्या वारंवारतेविषयी वरील समीकरणाच्या आधारे आपण पुढील निष्कर्ष काढू शकतो. आधारमृत्तिका जितकी मृदू तितकी वारंवारता $फ_०$ कमी. मनोऱ्याची उंची दिलेली असेल, तर त्याची वारंवारता वाढविण्यासाठी एक तर तळाची रुंदी वाढविली पाहिजे किंवा पादकांच्या तळावरील दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य कमी केले पाहिजे.

मनोरा वाळूच्या थरावर बांधलेला असेल आणि त्याच्यावर कारक असणाऱ्या नियतकालिक प्रेरणेची वारंवारता वाळूच्या लक्ष्मणकक्षेमध्ये पडणारी असेल, तर अशा प्रेरणेमुळे मनोऱ्याचे स्थायी स्वरूपाचे अवसीदन वाढण्याचा संभव असतो. मग मनोऱ्याची स्वाभाविक वारंवारता कोणतीही असो. प्रेरणेची वारंवारता जर मनोऱ्याच्या स्वाभाविक वारंवारतेच्या जवळपास असेल, तर अनुकंपन घडून येते आणि त्यामुळे टाकीला आधार देणाऱ्या मनोऱ्याच्या अवयवांमध्ये तीव्र स्वरूपाच्या प्रतिबलांची भर पडते.

कंपनाच्या आयामावर आधारवास्तूच्या स्वाभाविक वारंवारतेचा पडणारा प्रभाव विचारात न घेता, धरणीकंपाच्या धक्क्यांसारख्या नियतकालिक प्रेरणांमुळे वास्तूंवर होणाऱ्या परिणामाविषयी निर्णय घेण्याची नेहमीची प्रथा आहे. वास्तूच्या स्वाभाविक वारंवारतेच्या मानाने प्रेरणेची वारंवारता मोठी किंवा फारच लहान असेल, तरच केवळ ही पद्धत समर्थनीय ठरते (परिच्छेद १६४ पाहा). एरवी तिचा अवलंब केल्यामुळे मिळणारी फलिते फसवी ठरण्याचा संभव असतो.

१६०. एंजिनांच्या पायांची स्वाभाविक वारंवारता : प्रत्येक एंजिन नियतकालिक प्रेरणेचे उगमस्थान असते. या प्रेरणेची फ, ही वारंवारता एंजिनाच्या फेऱ्यांच्या किंवा परिभ्रमणांच्या संख्येइतकी असते. प्रेरणेची वारंवारता पायाच्या स्वाभाविक वारंवारतेइतकी असेल, तर अनुकंपन घडून येते. परिणामी एंजिनाच्या तळात अतिरिक्त प्रमाणात कंपने निर्माण होतात. ही कंपने आसपासच्या भूमीत संक्रमित होतात आणि त्यांमुळे शेजारच्या इमारतींना धोका पोचण्याचा संभव असतो. अनुकंपन आणि तज्जन्य घातक परिणाम टाळण्यासाठी एंजिनाच्या पायाचा पूर्वकल्प अशा पद्धतीने केला पाहिजे की, त्याची स्वाभाविक वारंवारता प्रेरणेच्या वारंवारतेच्या मानाने एक तर खूप कमी तरी

असावी किंवा खूप अधिक तरी असावी. अनुकंपनाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक ठरविताना पायाची स्वाभाविक वारंवारता किती अचूकपणे ठरविता येईल, ही गोष्ट विचारात घेणे आवश्यक असते. अचूकतेचे प्रमाण निरनिराळ्या प्रकारांच्या पायांत निरनिराळे असते.

एंजिनखाली बांधलेला भक्कम ठोकळा किंवा भक्कम भिंती बांधून केलेली खणयुक्त वास्तू अशा पद्धतीचा पाया असेल, तर स्वाभाविक वारंवारता ठरविताना हा पाया म्हणजे स्थितिस्थापक आधारावर ठेवलेला एकराशी व्यूह आहे असे मानता येते. आधारमृत्तिकेवर येणाऱ्या स्थैतिक दाबाचे वितरण समप्रमाण व्हावे, यासाठी पायाचा तळ असा मांडावा लागतो की, एकंदर रचनेतील अचल भागांचा गुरुत्वमध्य मध्यातून काढलेल्या क्षितिजलंब रेषेवरच येईल. तसेच, एंजिने साधारणतः अशा आराखड्याप्रमाणे मांडली जातात की, त्यांचे सममात्रतेचे पृष्ठ आणि पायाचे सममात्रतेचे पृष्ठ ही दोन्ही एकच असावीत. अशा रचनेवर तिच्या तळाच्या गुरुत्वमध्यातून जाणाऱ्या उभ्या रेषेत एखादी प्रेरणा कारक झाली, तर उद्भवणारी कंपने आकृती १४१ अ मध्ये दाखविलेल्या ठोकळ्याच्या कंपनांसारखी असतात. अर्थातच अशा रचनेला एकच स्वाभाविक वारंवारता असते आणि तिचे मूल्य पुढील समीकरणाने ठरविता येते :

$$फ_० = \frac{१}{२\pi}\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व}} \qquad १५६ (१०)$$

येथे व हे कंप पावणाऱ्या संचाचे वजन आहे आणि $थ_{स}$ हा सर्पिल-स्थिरांक आहे. पाया मृत्तिकेवर ठेवलेला असेल, तर व हे वजन म्हणजे मृत्तिकेवर ठेवलेले, एकूण वजन $व_१$ (एंजिनाचे वजन + पायाचे वजन) आणि कंपनात सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकाराशीचे वजन $व_{मृ}$ यांच्या बेरजेइतके असते. म्हणून वरील समीकरण पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$फ_० = \frac{१}{२\pi}\cdot\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व_१ + व_{मृ}}} \qquad [१]$$

पायामध्ये अनुकंपनाची परिस्थिती निर्माण होण्याचे टाळावयाचे असेल, तर त्याचा पूर्वकल्प असा केला पाहिजे की, $फ_०$ चे मूल्य प्रेरणेच्या वारंवारतेपेक्षा एकतर कमी किंवा अधिक तरी असावे. या दोन प्रेरणांमधील फरक जेवढा जास्त तितके बृ (समीकरण १५७ (६इ)) या बृहदीकरण-गुणकाचे मूल्य कमी. या गुणकावरूनच पायाच्या प्रवृत्त कंपनांचा आयाम ठरविता येतो, हे मागे पाहिले आहेच. $फ_१$ जर $फ_०$ पेक्षा मोठा म्हणजेच :

$$\frac{फ_१}{फ_०} = \frac{ω_१}{ω_०} > १$$

असेल, तर $फ_1/फ_0 = ω_1/ω_0$ हे मूल्य जसे वाढत जाते, तसे वृचे मूल्य शून्याकडे जाऊ लागते. आकृती १४३ आ पाहा. याउलट, $फ_1$ चे मूल्य $फ_0$ पेक्षा लहान असेल, तर $फ_1/फ_0 = ω_1/ω_0$ चे मूल्य जसे कमी होत जाते, तसे वृचे मूल्य एकाजवळ जाऊ लागते. म्हणून शक्य असेल तेथे, पायाची स्वाभाविक वारंवारता प्रेरणेच्या वारंवारते-पेक्षा कमी राहील अशा प्रकारे पूर्वकल्प केला जातो.

$फ_0 < फ_1$ या परिस्थितीत एकच वैगुण्य असते, ते म्हणजे एंजिन चालू होताना व थांबताना अल्पकाळ अनुकंपनाची अवस्था येते. तथापि हे अनुकंपन फारच थोडा वेळ टिकते आणि त्यावेळी प्रेरणेची वारंवारताही लहान असते. अल्पकाळ होणारे हे अनुकंपन तसे निर्धोक असते, असा अनुभव आहे.

$फ_0 < फ_1$ असेल, तर मृत्तिकेच्या $व_{मृ}$ या वजनामुळे $फ_0$ चे मूल्य कमी होते आणि अनुकंपनाचा धोकाही कमी होतो. म्हणून $फ_0 < फ_1$ असेल, तेव्हा $व_{मृ}$ कडे दुर्लक्ष करण्याची नेहमीची पद्धत आहे. तीमुळे अर्थातच समीकरणाचे स्वरूप पुढीलप्रमाणे होते :

$$फ_0 = \frac{१}{२\pi}\sqrt{\frac{थ_{स}त्व}{व_1}}$$

या समीकरणातील $व_1$ म्हणजे पायाचे वजन आणि एंजिनाच्या अविचल भागांचे वजन यांची बेरीज आहे. $थ_{स} = ग_{नि}आ$ (समीकरण १५८ (४)) नियुक्त करून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$फ_0 = \frac{\sqrt{त्व}}{२\pi}\sqrt{\frac{आ}{व_1}\cdot ग_{नि}} \qquad [२]$$

येथे $आ$ म्हणजे पायाच्या तळाने व्यापलेले क्षेत्र आहे आणि $ग_{नि}$ हा निम्नस्तराच्या गतिमान प्रतिक्रियेचा गुणांक आहे. पायावरील एकूण भार म्हणजे स्थैतिक वजन $व_1$ आणि जडत्व बल $\pm दा_{अ}$ यांची बेरीज होय. मंदत्वकारी बल नगण्य असेल, तर $दा_{अ}$ चे मूल्य समीकरण १५७ (८) वरून मिळते. अन्यथा, त्यासाठी समीकरण १५७ (१३) चा अवलंब करावा लागतो. पायाच्या तळावर येणारा एकंदर भार नियतकालिक पद्धतीने $व_1 + दा_{अ}$ आणि $व_1 - दा_{अ}$ या दोन मर्यादांमध्ये बदलत राहतो. स्पंदन पावणाऱ्या भाराचा अवसीदनावर पडणारा प्रभाव स्थायी भाराच्या प्रभावापेक्षा अधिक असल्यामुळे, पायाच्या पूर्वकल्पामध्ये निम्नस्तरावर येणारा महत्तम भार पुढीलप्रमाणे असतो असे गृहीत धरण्याची प्रथा आहे (राउश १९३६) :

$$भा = व_1 + ३\, दा_{अ}$$

महत्तम दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य पुढीलप्रमाणे होईल

$$भ = \frac{भा}{आ} = \frac{व_1 + ३ दा_{अ}}{आ}$$

हे मूल्य मृत्तिकेच्या $भ_{अनुज्ञेय}$ या भारधारणक्षमतेपेक्षा अधिक असता कामा नये. तेव्हा

$$आ = \frac{व_1 + ३ दा_{अ}}{भ_{अनुज्ञेय}}$$

असे समीकरण मांडता येते. हे मूल्य समीकरण २ मध्ये नियुक्त केल्यास, त्याचे स्वरूप पुढीलप्रमाणे होते :

$$फ_0 = \frac{\sqrt{त्व}}{२ \pi} \sqrt{\frac{व_1 + ३ दा_{अ}}{व_1} \cdot \frac{ग_{नि}}{भ_{अ}}} \qquad [३]$$

$त्व = ९८१$ सेंमी. सेकंद$^{-२}$ घातल्यास,

$$फ_0 \,(सेकंद^{-1}) = ५ \sqrt{\frac{व_1 + ३दा_{अ}}{व}} \cdot \sqrt{\frac{ग_{नि}}{भ_{अ}}}$$

असे उत्तर मिळते. वाळूच्या बाबतीत $\frac{ग_{नि}}{भ_{अ}}$ (सेंमी.$^{-1}$) हे गुणोत्तर सुमारे २ (विस्कळित वाळू) ते ३ (दृढ वाळू) असे असते. त्यानुसार $फ_0$ च्या मूल्यांची कक्षा पुढीलप्रमाणे मांडता येते :

$$फ_0 \,(सेकंद^{-1}) = (७ \text{ ते } ९) \sqrt{\frac{व_1 + ३दा_{अ}}{व_1}}$$

म्हणजेच—

$$फ_0 \,(मिनिट^{-1}) = (४२० \text{ ते } ५४०) \sqrt{\frac{व_1 + ३दा_{अ}}{व}}$$

या समीकरणावरून हे दिसून येईल की, $फ_1/फ_0 > १$ ही अट पुरी करावयाची म्हणजे प्रेरणेची वारंवारता अतिशय मोठी असली पाहिजे. ती जर मध्यम किंवा लहान मूल्याची असेल, तर पायाचा पूर्वकल्प असा केला पाहिजे की, त्याची स्वाभाविक वारंवारता $फ_0$ प्रेरणेच्या $फ_1$ वारंवारतेपेक्षा बऱ्याच प्रमाणात मोठी असेल. हे शक्य नसेल, तर एंजिन आणि पाया यांमध्ये एखादा स्थितिस्थापक थर—उदाहरणार्थ, बुचाचा थर किंवा सर्पिल-आधार प्रविष्ट करणे आवश्यक ठरते. पायाला मिळणारा स्थितिस्थापक आधार हा निव्वळ आधारमृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकतेमुळे असेल, तर स्वाभाविक वारंवारता समीकरण १ वरून मिळते. या समीकरणात एकूण संचाच्या कंपनांमध्ये सहभागी होणाऱ्या मृत्तिकेचे वजन $व$ प्रविष्ट आहे. ज्या पूर्वकल्पात संचाची $फ_0$ ही

स्वाभाविक वारंवारता प्रेरणेच्या $फ_1$ या वारंवारतेपेक्षा अधिक हवी असते तेथे $व_{मृ}$ वगळल्यास, अनुकंपनाच्या बाबतीतील सुरक्षिततांक निष्कारण मोठा ठरविला जातो. म्हणून $फ_0 > फ_1$ असेल, तर $व_{मृ}$ हे वजन विचारात घेतले पाहिजे. $व_{मृ}$ ठरविण्याच्या बाबतीत जी अनिश्चितता असते, तिची भरपाई सुरक्षिततांक वाढवून केली पाहिजे.

एंजिनाच्या पायाच्या पूर्वकल्पाची जीं मूलतत्त्वे आहेत, त्यांचा प्राथमिक परिचय होण्यापुरताच येथवरच्या विवेचनाचा उपयोग झाला. संबंधित सर्व वस्तू एकत्रपणे एक-कोटी स्वाधीनता असलेल्या एकराशी व्यूहाप्रमाणे वर्तन करतात अशा गृहीतावर हे विवेचन आधारित होते. प्रत्यक्षात प्रेरणा आणि आधार यांची परिस्थिती अशी असते की, वस्तुसमूहाचे वर्तन सहा कोटींची स्वाधीनता असलेल्या व्यूहाप्रमाणे व्हावे. अर्थातच तेथे स्वाभाविक वारंवारतेच्या मूल्यांची संख्या सहापर्यंत जाऊ शकते (परिच्छेद १५५ पाहा). ही प्रत्येक वारंवारता प्रेरणेच्या वारंवारतेपेक्षा एकतर कमी तरी किंवा अधिक तरी असली पाहिजे. या वारंवारता ठरविण्याची समीकरणे उपलब्ध आहेत (उदा., राउश १९३६ पाहा). या सर्व समीकरणांत स्थितिस्थापक आधारांचे सर्पिल-स्थिरांक समाविष्ट असतात. सर्पिल-आधारासारख्या कृत्रिम उपायांचा अवलंब न करता, अनुकंपन टाळता येईल काय हे ठरविण्यासाठी, उभ्या आणि आडव्या अशा दोन्ही भारांच्या बाबतीतील निम्नस्तरप्रतिक्रियांचे गुणांक माहीत असणे आवश्यक असते.

परिच्छेद १५८ मध्ये आपण हे पाहिले की, निम्नस्तर-प्रतिक्रियेच्या गुणांकाचे मूल्य, निम्नस्तराच्या स्वरूपाव्यतिरिक्त अन्य कित्येक गोष्टींवर अवलंबून असते. हा गुणांक कंपकाच्या साहाय्याने ठरवावयाचा असेल, तर तळावरील दाबाचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य, तसेच प्रेरणेची तीव्रता अशांसारख्या गोष्टी बदलून प्रयोग करता येतील, अशी व्यवस्था कंपनयंत्रात असावी. प्रत्यक्षातील पायाला अनुषंगिक असणारे मूल्य, या मूल्यांवरून बहिर्वेशन पद्धतीने ठरविता येते (सेस्मॉस, काल अनिश्चित). या पद्धतीत अंतर्भूत असणाऱ्या अनिश्चित गोष्टींमुळे, हीं फलिते निश्चित मूल्यांऐवजी त्यांच्या कक्षांच्या स्वरूपात द्यावीत.

एंजिनाचा पाया वाळूच्या थरावर ठेवलेला असेल आणि त्याच्यामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रेरणेची वारंवारता वाळूच्या बाबतीतील लक्ष्मण-कक्षेत पडणारी असेल, तर सौम्य कंपनाने मुद्धा एंजिनाच्या पायाचेच नव्हे, तर आसपासच्या वास्तूंचेही महत्त्वपूर्ण अवसीदन घडून येण्याचा संभव असतो. इतर सर्व गोष्टी सारख्या असतील, तर वाळूची घनता जशी कमी करावी, तसे अवसीदन त्वरेने वाढत जाते. विस्कळित किंवा मध्यम मानाने दृढ असलेल्या वाळूवर पाया ठेवायचा असेल, तर अतिरिक्त अवसीदन टाळण्यासाठी, अनुकंपनाच्या बाबतीत केवळ पुरेसा मोठा सुरक्षितांक ठेवूनच भागत नाही, तर त्यासाठी स्थूणांच्या द्वारे वाळूची घनता वाढविणेही आवश्यक असते.

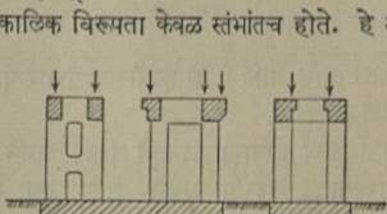
सांप्रत बाष्पप्रेरित टर्बाइन हे एक महत्त्वाचे चलित्र (मोटार) आहे. बाष्पप्रेरित टर्बाइननिर्मितीच्या प्रारंभकालात, भ्रमण पावणाऱ्या भागातील समतोलाच्या अपरिहार्य

अभावाच्या परिणामांकडे फारच थोडे लक्ष दिले गेले. त्यांचा वापर करणारांनी पायातील दोषांविषयी तक्रारी केल्या तेव्हा तिकडे लक्ष गेले. पायाच्या स्वाभाविक वारंवारतेचा विक्षेपकारी बलाच्या प्राकृतिक परिणामांवर पडणारा प्रभाव त्यावेळी लक्षात आलेला नव्हता, त्यामुळे या दोषांचे निवारण करण्यासाठी टर्बाइन-उत्पादकांनी भक्कमपणावर आणि पायाच्या वस्तुमानावर अधिकाधिक भर दिला. त्याची परिणती अतिशय अवजड आणि खर्चिक बांधकामात झाली. पायाच्या स्वाभाविक वारंवारतेकडे द्यावयास हवे होते, तेवढे लक्ष जोपर्यंत दिले गेले नव्हते, तोपर्यंत पूर्वकल्पाच्या तर्कशुद्ध पद्धती सिद्ध होऊ शकल्या नाहीत.

पायांच्या स्वाभाविक वारंवारतेला किती महत्व दिले जाते हे बाष्पप्रेरित टर्बाइनच्या पायाविषयीच्या जर्मनीतील मानकाचा पुढील उतारा बघितला असता ध्यानात येईल. पायाच्या स्वाभाविक वारंवारता ठरविलेल्या नसतील किंवा टर्बाइनची भ्रमणसंख्या फ' आणि पायाची एखादी वारंवारता यांमधील फरक फ' च्या $\pm$ ३०% च्या आत असेल, तर पूर्वकल्पात चक्राकार फिरणाऱ्या भागांच्या वजनाच्या २० पट मूल्याचा *भा*, हा केंद्रोत्सारी भार टर्बाइनच्या आधाराच्या अवयवांवर कारक असतो असे गृहीत स्वीकारले पाहिजे. हा फरक ३० ते ५० टक्के असेल, तर केंद्रोत्सारी भाराचे मूल्य या वजनाच्या १० पट धरावे आणि ५०% पेक्षाही तो फरक अधिक असेल, तर हे मूल्य या वजनाच्या ५ पट धरावे (एहलेर्स १९३४).

आकृती १४७ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, सापेक्षतः लवचिक असलेल्या खांबावर टाकलेल्या अवजड लादीसारख्या लवचिक संरचनेने किंवा ताठ संरचनेने बाष्पप्रेरित टर्बाइनांना आधार दिलेला असतो. ताठ पद्धतीचा पाया असेल, तर त्याचा पूर्वकल्प करताना या परिच्छेदाच्या पहिल्या भागात विशद केलेल्या तत्त्वांवर आधारलेल्या पद्धतीचा अवलंब करावा लागतो.

स्थितिस्थापक पद्धतीचा (आकृती १४७) पाया असेल, तर पूर्वकल्प करताना साधारणतः असे गृहीत धरले जाते की, भूमीचा आधार ताठ आहे आणि विक्षेपकारी बलामुळे निर्माण होणारी नियतकालिक विरूपता केवळ स्तंभांतच होते. हे स्तंभ एकूण संरचनेचे



आकृती १४७ : टर्बो-जनरेटरच्या आधारांना सुबोध स्वरूप देऊन घेतलेले उभे छेद.

वजन तळ-लादीवर संक्रमित करतात. अशा प्रकारचा पाया सर्पिलयुक्त आधारावर ठेवलेल्या पायासारखा असतो आणि मृत्तिकेच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणांचा त्याच्या पूर्वकल्पात काही संबंध येत नाही.

१६१. लहरी आणि लहरींचा संचार : येथवरच्या परिच्छेदांतून चर्चा केलेली कंपने बंदिस्त संरचनेमध्ये घडणारी आहेत. स्थितिस्थापक आधारावर ठेवलेली एखादी संरचना ताठ असेल आणि तिला एककोटी स्वाधीनता असेल, तर त्या संरचनेचे सर्व बिंदू एकाच वेळी त्यांच्या मूळ समतोलावस्थेतील स्थानामधून जातात. तथापि स्वतःतच होणाऱ्या कंपनाव्यतिरिक्त अशी संरचना म्हणजे कंपनात्मक विक्षेपाचे एक अधिष्ठान किंवा केंद्र ठरते आणि हा विक्षेप एखाद्या ध्वनिलहरीप्रमाणे निम्नस्तरातील उपर्युक्त केंद्रापासून त्रिज्यात्मक दिशांनी सगळीकडे पसरत जातो. या घटनेमुळे विक्षेप-केंद्रापासून बऱ्याच अंतरावर बांधलेल्या वास्तूंमध्ये प्रवृत्त कंपने निर्माण करण्याची क्षमता, निम्नस्तरामध्ये निर्माण होते. विक्षेपास प्रारंभ करणारी घटना म्हणजे प्रेरणा होय. प्रेरणेचा कार्यकाल फारच थोडा असण्याचा संभव असतो. उदाहरणार्थ, स्फोट किंवा भूकंप यांमुळे निर्माण होणाऱ्या प्रेरणांचा कार्यकाल थोडाच असतो. या उदाहरणांतील प्रेरणांमुळे निर्माण होणाऱ्या लहरींची तीव्रता स्निग्धताजन्य मंदीकरणामुळे कमी होत जाते. याउलट, चालू असणारी यंत्रे, स्थूणा ठोकण्याचे कार्य, रस्त्यावरील वर्दळ इत्यादींमुळे निर्माण होणारी नियतकालिक प्रेरणा स्थायी स्वरूपाची कंपने निर्माण करते.

लहरींची सर्वसामान्य वैशिष्ट्ये परिच्छेद १५५ मध्ये विशद केली आहेत. एकापाठोपाठ जाणाऱ्या लहरींच्या अग्रसीमांना काटकोनात छेदणाऱ्या रेषेस **लहरींच्या संचाराची रेषा** म्हणतात. या रेषेवर असलेल्या र या कणामधून लहरींची अग्रसीमा जाते, तत्क्षणी तो कंप पावतो (आकृती १४८ अ). ज्या वेळी या कणाने त्याचा पहिला फेरा पुरा केलेला असतो त्यावेळी लहरीच्या अग्रसीमेने आक्रमिलेले अंतर पुढीलप्रमाणे असते.

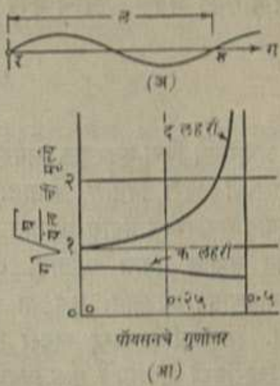
$$ल = ध ग \qquad [१]$$

येथे $ध$ हा नियतकाल आहे आणि $ग$ हा लहरीच्या संचाराचा वेग आहे. $ल$ या अंतरास **लहरीची लांबी** म्हणतात.

एखाद्या प्रेरणेमुळे निर्माण होणाऱ्या कंपनाचा प्रकार आणि लहरींच्या संचाराचा वेग, मूलतः ज्या माध्यमातून लहरींचा प्रवास होतो, त्या माध्यमाचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म आणि प्रेरणा-केंद्राच्या संदर्भात माध्यमातील गुणधर्मभिन्नत्वाचे पृष्ठ कोठे आहे, यांवर अवलंबून असतात. या संबंधाचा ऊहापोह करणारे सिद्धांत स्थितिस्थापकत्वसिद्धांतातील मूलभूत समीकरणांवर आधारलेले आहेत आणि

त्यांत अतिशय उच्च गणिताचा उपयोग करावा लागतो. त्यांपैकी पायांच्या समस्यांशी प्रत्यक्षपणे निगडित असलेल्या फलितांचा संक्षिप्त सारांश पुढील परिच्छेदांतून दिला आहे.

स्थितिस्थापक आणि समांग अशा अपार घनराशीच्या अंतरंगात एखाद्या बिंदुस्थानी प्रेरणा उत्पन्न झाली असता, तिच्याद्वारे केवळ दोन प्रकारांच्या लहरी निर्माण होतात. एक प्रकार म्हणजे **दमनकारी किंवा पुढे ढकलणाऱ्या किंवा द लहरी** आणि दुसरा प्रकार म्हणजे **आडव्या किंवा कार्तनिक किंवा क लहरी.** दमनलहरींत कणांचे कंपन लहरींच्या संचार-दिशेत होते. ध्वनिलहरींच्या मार्गावरील कणांचे कंपन अशाच प्रकारचे असते. अशा लहरींचा वेग पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येतो.



आकृती १४८ : (अ) लहर-संचार दाखविणारी रेखाकृती (आ) कंपन पावणाऱ्या माध्यमाचे पॉयसन गुणोत्तर आणि दमन-लहरींच्या तसेच कार्तनिक-लहरींच्या संचाराचा वेग यांमधील संबंध.

$$ग_द = \sqrt{\frac{यं\, त्व\, (१ - पॉ)}{घ\, (१ - पॉ - २\, पॉ^२)}} \qquad [२]$$

येथे

यं : यंगचा मापांक,
पॉ : पॉयसनचे गुणोत्तर,
घ : घनराशीची घनता आणि
त्व : गुरुत्वाकर्षण प्रवेग

आहेत.

आडव्या लहरींत म्हणजेच क लहरींत कणांचे कंपन, लहरींच्या संचारदिशेला काट-कोनात असलेल्या पातळीत होते. अशा लहरींचा वेग पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो :

$$ग_क = \sqrt{\frac{यं\, त्व}{२ घ (१ + पॉ)}} = \sqrt{\frac{ज्ञ\, त्व}{घ}} \qquad [$$

येथे ज्ञ हा कार्तनिक मापांक आहे. $ग_द$ आणि $ग_क$ या वेगांवरील पॉयसनच्या गुणोत्तराचा प्रभाव आकृती १४८ आ वरून दिसून येईल. क लहरींचा वेग नेहमीच द लहरींच्या वेगापेक्षा कमी असतो. पॉ = ०.५ असेल, तेव्हा $ग_द$ हा वेग अनंत होतो आणि $ग_क$

मात्र परिमित असतो. त्याचे मूल्य पुढील समीकरणाने व्यक्त होते :

$$ग_{क} = \sqrt{\frac{यं त्व}{३ ५}}$$

अपारप्राय किंवा स्तरयुक्त घनराशीत उत्पन्न केलेल्या प्रेरणेमुळे, आणखी इतरही प्रकारांच्या लहरी निर्माण होतात. या लहरी अपारप्राय घनराशीत पृष्ठभागानुसार व त्यास समांतरपणे प्रवास करतात आणि स्तरयुक्त घनराशीत त्या गुणधर्मभिन्नत्वाच्या पृष्ठास समांतर प्रवास करतात. त्यामुळे अशा लहरींना **पृष्ठीय लहरी** म्हणतात. पृष्ठभागापासून दूर जावे, तसे या लहरींमुळे निर्माण होणारे विस्थापन कमी होत जाते. **रॅले लहरी** व **लव्ह लहरी** ही पृष्ठीय लहरींची सुविख्यात उदाहरणे आहेत. रॅले लहरींमध्ये माध्यमाचे कण लंबवर्तुळाकार पथावरून कंप पावतात व या कंपनाची पातळी लहरींच्या संचाराच्या दिशेला समांतर आणि राशीच्या पृष्ठभागाला काटकोनात असते. लव्ह लहरी म्हणजे विशेष प्रकारच्या कार्तनिक लहरी आहेत. अपारप्राय घनराशीच्या पृष्ठभागानुसार जाताना, सगळ्याच पृष्ठीय लहरींचा वेग कार्तनिक लहरींच्या वेगापेक्षा किंचित् कमी असतो (समीकरण ३). काही पृष्ठीय लहरींचा—त्यांत लव्ह लहरीही आल्या—वेग सापेक्षतः कमी जाडीच्या स्थितिस्थापक थरांत, लहरीची लांबी आणि थराची जाडी यांवर अवलंबून असतो.

कंपनाचे माध्यम पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असते, या गृहीताच्या आधारे पृष्ठीय-लहरींच्या सिद्धांतांची वाढ होत गेली आहे. सैद्धांतिक भूकंपशास्त्राच्या कोणत्याही पाठ्यपुस्तकात तद्विषयक माहिती मिळते; उदाहरणार्थ, मॅसेलवेन (१९३६). परिमित जाडीच्या स्थितिस्थापक थरातून जाणाऱ्या रॅले-लहरींचा आयाम आणि थराच्या पृष्ठभागापासून मोजलेले अंतर यांमधील संबंधाचे गणितात्मक अन्वेषण मार्ग्युरेने (१९३३) प्रकाशित केले आहे. पृष्ठीय लहरींचा सिद्धांत, सुकरतादायी गृहीतांवर आधारित आहे, तसेच या लहरींचे स्वरूपही गुंतागुंतीचे आहे. या दोन गोष्टींमुळे, पृष्ठीय लहरींविषयी क्षेत्रात मिळणाऱ्या फलितांचा अन्वयार्थ लावणे, नेहमीच काहीसे अनिश्चित स्वरूपाचे राहते.

ज्यांचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म भिन्न आहेत, अशा दोन माध्यमांना अलग करणाऱ्या सीमेजवळ लहरी एक तर ज्या माध्यमातून आलेल्या असतात त्या माध्यमातच परावर्तित होतात किंवा त्यांचे वक्रीभवन होते; म्हणजेच दुसऱ्या माध्यमात शिरताना त्यांची दिशा बदलते. एखाद्या कणावर दोन प्रेरणा–उदाहरणार्थ, एक प्रेरणा तडक येऊन पोचणाऱ्या लहरीची आणि दुसरी परावर्तित लहरीची–कारक झाल्या, तर प्रत्येक प्रेरणेमुळे स्वतंत्रपणे निर्माण होणाऱ्या हालचालींची भौमितिक बेरीज केली असता, त्या कणाची फलरूप हालचाल आपल्याला प्राप्त होते. या दोन प्रेरणा जर सममूल्य परंतु विरुद्धदिक् असतील, तर कण स्थिरपणे तेथेच राहतो. या घटनांना **समाघात घटना** म्हणतात.

उपर्युक्त घटनांचे नियंत्रण करणारे नियम, प्रकाशविज्ञानातील परिवर्तन, वक्रीभवन

आणि समाघात या घटनांच्या नियमांप्रमाणेच असतात. भूकंपसाधित मृत्तिका-अन्वेषणाच्या समस्यांना हे नियम लावून, त्यासाठी करावे लागणारे गणितात्मक कार्य रॅम्सेकने प्रकाशित केले आहे (डेगेबो १९३६).

१६२. स्थूणांवरील अनुदीर्घ्य आघात : वरून पडणारा घण एखाद्या स्थूणेवर आघात करतो, त्यावेळी लहरींच्या संचाराचा एक अतिशय सोपा प्रकार दृष्टोत्पत्तीस येतो. स्थूणाशीर्षावर घणाचा आघात होताच, स्थूणेमध्ये दमनकारी लहर निर्माण होते. ही लहर स्थूणेमधून विवक्षित बिंदूपर्यंत जाते व तेथून परत स्थूणेमध्ये परावर्तित होते. स्थूणांच्या शीघ्रवेधन विरोधाविषयीच्या जुन्या सिद्धांतांत ह्या गोष्टीचा विचार केलेला नव्हता (परिच्छेद ५२ पाहा). त्यामुळे स्थूणावेधन कार्याच्या परिणामावर पडणाऱ्या स्थूणेच्या वजनाच्या प्रभावाविषयी त्या सिद्धांतांतून चुकीची माहिती मिळत असे.

स्थूणांवरील अनुदीर्घ्य आघाताचे सिद्धांत सळईतील अनुदीर्घ्य कंपनाच्या कलन-समीकरणावर आधारित आहेत आणि हे समीकरण पुढील गृहीतांवर आधारित आहे. स्थूणा पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक आहे; स्थूणेत कोणत्याही ठिकाणी घेतलेला आडवा छेद कंपनकालात समतलच राहतो आणि स्थूणेचे कण अनुदीर्घ्य म्हणजे स्थूणेच्या अक्षाला समांतर दिशेतच कंप पावतात. स्थूणेच्या पार्श्वीय विरूपत्वाकडे येथे दुर्लक्ष केले जाते. दुसऱ्या शब्दांत असे म्हणता येईल की, *पॉ* या पॉयसनच्या गुणोत्तराचे मूल्य शून्य आहे असे गृहीत धरले जाते. समजा,

न : स्थूणेच्या छेदाचे कंपनकालातील अनुदीर्घ्य विस्थापन; छेदाची खोली *ख* आणि मापनसमय *ळ*;

ठ : स्थूणेच्या एकांक लांबीचे दमन किंवा दमनजन्य विकृती; मापनस्थलाची खोली *ख* आणि मापन-समय *ळ*;

आ : स्थूणेच्या छेदाचे क्षेत्रफळ;

ल : स्थूणेची लांबी;

दा : स्थूणेच्या *ख* खोलीवरील छेदावर, *ळ* समयी येणारा एकूण दाब;

७ : *दा*/*आ* : उपर्युक्त छेदावरील दमन प्रतिबल;

यं : स्थूणेच्या पदार्थाचा यंगचा मापांक आणि

घ : पदार्थाची घनता

आहेत.

दमनजन्य विकृती ठ पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

$$\text{ठ} = \frac{\partial \text{न}}{\partial \text{ख}}$$

$$\text{ठ} = \frac{\text{७}}{\text{यं}} = \frac{\text{दा}}{\text{आय}}$$

असल्यामुळे आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$दा = आयं \frac{\partial न}{\partial ख}$$

$ख + \partial ख$ खोलीवरील छेदावर येणारा एकूण दाब पुढील समीकरणाने व्यक्त होतो :

$$दा + d\,दा = आयं \left(\frac{\partial न}{\partial ख} + \frac{\partial^2 न}{\partial ख^2} \cdot dख\right)$$

डी अलेम्बर्टच्या तत्त्वानुसार स्थूणेच्या शकलावर कारक असणाऱ्या स्थैतिक बलांचे फलरूप बल, जडत्व बलाइतके (शकलाचे वस्तुमान $\times$ त्याचा प्रवेग) असले पाहिजे. शकलाचे वस्तुमान

$$\frac{घआ}{त्व} \cdot dख$$

जडत्वबल :

$$\frac{घआ}{त्व} \cdot dख \cdot \frac{\partial^2 न}{\partial ळ^2}$$

आणि स्थैतिक बलांचे फलरूप बल :

$$दा + dदा - दा = आयं \frac{\partial^2 न}{\partial ख^2}\, dख$$

आहे, म्हणून डी अलेम्बर्टच्या तत्त्वानुसार—

$$आयं \frac{\partial^2 न}{\partial ख^2} = \frac{घ\,आ}{त्व} \frac{\partial^2 न}{\partial ळ^2}$$

म्हणजेच

$$\frac{\partial^2 न}{\partial ळ^2} = \frac{यं\,त्व}{घ} \frac{\partial^2 न}{\partial ख^2} \qquad [१]$$

हे स्थूणांमधील अनुदीर्घ्य कंपनांचे कलन-समीकरण आहे. स्थूणेचा अग्राधार ताठ आहे की स्थितिस्थापक आहे, याचा या समीकरणावर परिणाम होत नाही. स्थूणांमधील पार्श्वीय विरूपतेकडे या सिद्धांतात दुर्लक्ष केलेले आहे. त्यामुळे लहरीचा स्थूणेतील संचाराचा वेग मिळविण्यासाठी समीकरण १६१ (२) मध्ये पॉ = ० नियुक्त करता येईल. तदनुसार पुढील समीकरण मिळते :

$$ग = \sqrt{\frac{यं\,त्व}{घ}} \qquad [२]$$

त्यामुळे समीकरण १ पुढील स्वरूपातही मांडता येते :

$$\frac{\partial^2 न}{\partial ळ^2} = ग^2 \frac{\partial^2 न}{\partial ख^2} \qquad [३]$$

येथे $ग$ हा आघातजन्य लहरीचा स्थूणेतील संचाराचा वेग आहे :

जिचे तळाग्र ताठ आधारावर आहे, अशा स्थूणेचा आता विचार करू. तिचे वजन $व_{स्थू}$ आहे आणि लांबी $ल$ आहे. ठोकण्यासाठी वापरलेल्या घणाचे वजन $व_{ह}$ असून स्थूणेच्या माथ्यावर घणाचे ठोके दिले जात आहेत. घणाचा खाली उतरण्याचा वेग $ग_{ह}$ आहे. या आघातामुळे स्थूणेच्या तळावर निर्माण होणारे महत्तम दमन-प्रतिबल ($\sigma_{मह.}$) समीकरण ३ च्या साहाय्याने मिळते; परंतु त्यासाठी $व_{स्थू}/व_{ह}$ या गुणोत्तराचे मूल्य ५ हून कमी असावे (बॉसिनेस्क १८८५) लागते.

$$\sigma_{महत्तम} = २ य \frac{ग_{ह}}{ग} \cdot (१ + \in^{-२व_{स्थू}/व_{ह}}) \qquad [४]$$

येथे $\in$ म्हणजे नैसर्गिक लघुगणकाचा मूलांक आहे.

खरे पाहता, उपर्युक्त समीकरणात गृहीत धरलेल्या परिस्थितीपेक्षा प्रत्यक्षातील परिस्थिती वेगळी असते. उदा., स्थूणेच्या तळाग्राचा आधार कधीही पूर्णत्वाने ताठ नसतो आणि स्थूणेच्या माथ्याचे प्रत्यक्ष आघातापासून संरक्षण व्हावे, म्हणून त्यावर टोपण किंवा स्थूणाल बसविलेले असते. उपर्युक्त सिद्धांत स्थूणा-वेधन समस्येला अनुरूप करून घेता यावा, या उद्देशाने "ब्रिटिश बिल्डिंग रिसर्च बोर्ड" या संस्थेने कार्य केले आहे. स्थूणेचे तळाग्र पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक आधारावर आहे आणि स्थूणाशीर्षाच्या रक्षणासाठी पूर्णत्वाने स्थितिस्थापक असलेले टोपण त्यावर बसविलेले आहे, अशी गृहीते स्वीकारून समीकरण ३ या संस्थेने सोडवून पाहिले (ग्लॅनव्हिल आणि इतर १९३८). त्यातून मिळालेली अंतिम समीकरणे फारच क्लिष्ट आहेत. तथापि त्यांच्याऐवजी पुरेशी समाधान कारक फलिते देणारी सोपी समीकरणे उपलब्ध आहेत. त्यांपैकी एक खाली दिले आहे :

$$\sigma_{महत्तम} = यं \frac{ग_{ह}}{ग} \sqrt{\frac{व_{ह}}{व_{स्थू}(१ + यं/ल \cdot थ_{क})}} \qquad [५]$$

येथे $थ_{क}$ हा स्थिरांक असून त्याची परिमाणे ग्रॅम .सेंमी.$^{-३}$ अशी आहेत. त्याचे मूल्य स्थूणा-टोपणाच्या स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्मांवर अवलंबून असते (कुमिंग्ज १९४०). समीकरण ५ एखाद्या उदाहरणात लागू पडते की नाही, हे ठरविण्यासाठी पुढील गुणोत्तराचे मूल्य प्रथम ठरवितात :

$$र = \frac{व_{स्थू}}{व_{ह}(१ + यं/लथ_{क})} \qquad [६]$$

र चे मूल्य ०·१ किंवा ०·१५ पेक्षा लहान असेल, तर समीकरण ५च्या साहाय्याने मिळणारी फलिते बरीचशी अचूक असतात. एरवी या संक्षिप्त समीकरणाऐवजी मूळ समीकरणांचा अवलंब करणे आवश्यक ठरते.

सारख्या मापाच्या परंतु भिन्न घनतेच्या (घ आणि घ′) आणि यंगचा मापांक भिन्न असलेल्या (यं आणि यं′) दोन स्थूणांच्या शीर्षांवर सारख्याच वजनाचे घण सारख्याच वेगाने आघात करीत असतील, तर त्या आघातांमुळे निर्माण होणाऱ्या महत्तम दमन-प्रतिबलांमधील गुणोत्तराचे मूल्य, दोन गोष्टींवर अवलंबून असते. त्यांपैकी पहिली, तळाग्राच्या आधाराचा ताठपणा आणि दुसरी म्हणजे स्थूणाशीर्षाच्या सुरक्षिततेसाठी वापरलेली पद्धत. तळाग्राचा आधार ताठ असेल आणि शीर्षावर टोपण नसेल, तर समीकरणे २ आणि ४ यांच्या साहाय्याने आपल्याला पुढील समीकरण प्राप्त होते.

$$\frac{\sigma_{\text{महत्तम}}}{\sigma'_{\text{महत्तम}}}=\sqrt{\frac{\text{यंघ}}{\text{यं}'\text{घ}'}}\cdot\frac{१+\epsilon^{-२\text{व}_{\text{स्थू}}/\text{व}_{\text{ह}}}}{१+\epsilon^{-२\text{व}'_{\text{स्थू}}/\text{व}_{\text{ह}}}} \qquad [७]$$

येथे $\text{व}_{\text{स्थू}}$ आणि $\text{व}'_{\text{स्थू}}$ ही या दोन स्थूणांची वजने आहेत. तळाग्राचा आधार स्थितिस्थापक असेल आणि शीर्षावरची टोपणे सारखीच स्थितिस्थापक किंवा कठीण असतील, तर समीकरणे २ व ५ यांचा अवलंब करून पुढील समीकरण मिळते :

$$\frac{\sigma_{\text{महत्तम}}}{\sigma'_{\text{महत्तम}}}=\sqrt{\frac{\text{यंघव}'_{\text{स्थू}}\,(१+\text{यं}'/\text{लथ}_{\text{क}})}{\text{यं}'\text{घ}'\text{व}_{\text{स्थू}}\,(१+\text{यं}/\text{लथ}_{\text{क}})}} \qquad [८]$$

समीकरणे ४ व ५ यांच्या व्यावहारिक उपयोगाविषयी चर्चा करताना कुमिंग्जने (१९४०) पुढील उदाहरण दिले आहे. त्यात एक लाकडी आणि एक प्रबलित काँक्रीटची, अशा दोन स्थूणा विचारार्थ घेतल्या आहेत. दोन्हींची मापे सारखीच आहेत. त्या ठोकण्यासाठी वापरलेल्या घणाचे वजन $\text{व}_{\text{ह}}=५०००$ पौंड आहे. भरण आणि गाळ यांच्या मृद् थरांतून जाऊन त्याखाली असलेल्या, वालुकेच्या कठीण थरावर स्थूणा टेकल्या आहेत. आघाताच्या वेळी घणाचा वेग $\text{ग}_{\text{ह}}=१४$ फूट/सेकंद आहे. दोन्ही स्थूणा-शीर्षांवर संरक्षणासाठी दोन सारखीच टोपणे लावलेली आहेत. त्यांचा काठिण्य–स्थिरांक $\text{थ}_{\text{क}}=१०००$ पौंड/घनइंच आहे. स्थूणांविषयीची इतर माहिती खालीलप्रमाणे आहे :

	काँक्रीटची स्थूणा	लाकडी स्थूणा
लांबी : ल	२५′	२५′
छेदक्षेत्र : आ	१२″×१२″	१२″×१२″
वजन : $\text{व}_{\text{स्थू}}$	३७५० पौंड	१००० पौंड
घनता : घ	१५० पौंड/घ. फू.	४० पौंड/घ. फू.

यंगचा मापांक : यं	३×१०^{६} पौंड/चौ. इं.	$१\cdot२\times१०^{६}$ पौं./चौ.इं.
$ग=\sqrt{\dfrac{यं\,त्व}{घ}}$	९,६१० फू./सेकंद	११,८०० फू./सेकंद.

तळाग्रे कठीण थरावर आणि स्थूणाशीर्षे असंरक्षित असलेल्या परिस्थितीत, वरील स्थूणांवर आघात झाले असता, निर्माण होणारी महत्तम बले ($आ_{\text{मह.}}$) समीकरण ४ चा अवलंब करून पुढीलप्रमाणे मिळतात. कॉंक्रीटची स्थूणा १५,४०,००० पौंड आणि लाकडी स्थूणा ६,८५,००० पौंड. तळाग्रे स्थितिस्थापक थरावर असतील आणि स्थूणाशीर्षांवर संरक्षक टोपणे असतील, तर या गोष्टी विचारात घेऊन सिद्ध केलेल्या समीकरण ५ चा अवलंब करून $आ_{\text{मह.}}$ ची मूल्ये पुढीलप्रमाणे मिळतात : कॉंक्रीटची स्थूणा ५,१४,००० पौंड आणि लाकडी स्थूणा ३,८९,००० पौंड. प्रत्यक्षात येणारी बले यांहून कमी असण्याचाच अधिक संभव आहे. कारण समीकरण ५ ज्या सिद्धांतावर आधारलेले आहे, त्यात स्थूणांवरील त्वचाघर्षण आणि स्थूणांमधील मंदत्वकारी बल यांचा विचार केलेला नाही. तथापि विवक्षित आघातामुळे निर्माण होणारे महत्तम बल, कॉंक्रीटच्या स्थूणेच्या बाबतीत लाकडी स्थूणेच्या बाबतीतील महत्तम बलापेक्षा अधिक असते, हा निष्कर्ष या फलितांवरून योग्यच आहे, हे दिसून येते. हा निष्कर्ष ज्या सिद्धांतावर अवलंबून आहे, त्याची यथार्थता मोठ्या प्रमाणावर प्रयोग करून स्थूलमानाने सिद्ध झालेली आहे (ग्लॅनव्हिल आणि इतर १९३८). वर विचारार्थ घेतलेल्या दोन स्थूणांच्या अग्रांवरील महत्तम दाबामध्ये फरक असतो, त्यामुळे कॉंक्रीटची स्थूणा दृढ स्तरामध्ये लाकडी स्थूणेपेक्षा अधिक खोलवर घुसली पाहिजे आणि खाली जाणे अशक्य झाल्यानंतर मिळणारी तिची स्थैतिक भारधारणक्षमताही अधिक असली पाहिजे. परंतु स्थूणेचे वजनच केवळ विचारात घेऊन सिद्ध केलेल्या पूर्वोक्त स्थूणासूत्रांनुसार (परिच्छेद ५२ पाहा) लाकडी स्थूणेची भारधारणक्षमता कॉंक्रीटच्या स्थूणेपेक्षा अधिक असली पाहिजे असे उत्तर निघते. अर्थात दोन्ही स्थूणा खाली जाणे अशक्य होईपर्यंत ठोकलेल्या असाव्यात. स्थूणासूत्रांमुळे, जे अनेक चुकीचे निष्कर्ष निघण्याचा संभव असतो, त्यांचे हे एक उदाहरण आहे. सूत्रांतील या त्रुटींची कारणे परि० ५२ मध्ये विशद केली आहेत.

१६३. स्फोटक द्रव्ये आणि कंपनयंत्रे यांच्या साहाय्याने केलेले मृत्तिकेचे अन्वेषण : समीकरण १६१ (२) आणि (३) यांवरून असे दिसते की, लहरींच्या संचाराचा वेग यंगचा मापांक आणि पॉयसनचे गुणोत्तर यांवर अवलंबून असतो. साधारणतः ज्यांचे स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म प्रकर्षाने भिन्न आहेत अशा थरांना अलग करणाऱ्या सुस्पष्ट अशा सीमारेषा प्रत्यक्षात अस्तित्वात असतात. या सीमांवरून लहरींचे परावर्तन किंवा वक्रीभवन सुस्पष्टपणे होण्याचा संभव असतो. म्हणून भूपृष्ठावर ठेवलेल्या एखाद्या प्रेरणेद्वारा कंपने निर्माण करून व त्यांची नोंद विक्षेप-केंद्रापासून निरनिराळ्या अंतरावर करून भूपृष्ठाखाली असलेल्या थरांची जाडी व त्यांचे

स्थितिस्थापकत्वविषयक गुणधर्म ठरविणे तात्त्विक-दृष्ट्या शक्य दिसते. गेली कित्येक वर्षे अशा पद्धतींचा उपयोग केला जात आहे. भूगर्भातील परिस्थिती अनुकूल असेल, तर त्यांतून मिळणारी फलिते समाधानकारक असतात. ही प्रेरणा एखादा कृत्रिम स्फोट करून किंवा कंपकाच्याद्वारे निर्माण केली जाते. दोन्ही प्रकारांत पाहिजे तेथे उचलून नेण्याजोग्या भूकंपलेखनयंत्रांच्या साहाय्याने विक्षेपकेंद्रापासून निरनिराळ्या अंतरांवर एकाच वेळी कंपनांची नोंद केली जाते. म्हणून या पद्धतींना **भूकंपसाधित मृत्तिका-अन्वेषणाच्या पद्धती** असेही म्हणतात.

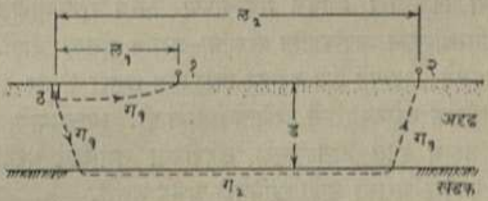
स्फोटपद्धतीत थोडेसे डायनामाइट उडवून प्रेरणा निर्माण केली जाते. या प्रकारची प्रेरणा मुख्यतः दमनलहरी निर्माण करते. दमट अवस्थेपेक्षा संपृक्त अवस्थेत मृत्तिकेतून दमनलहरींचा संचार अधिक वेगाने होतो. त्यामुळे भूमीतील केशाकर्षणजन्य संपृक्तीच्या भागाची वरची सीमा म्हणजे स्फोटजन्य लहरींच्या संचारवेगात बदल घडविणारे एक महत्त्वाचे पृष्ठ ठरते. स्फोटस्थानापासून काढलेल्या सरळ रेषांवर भूकंप-लेखनयंत्रे ठेवलेली असतात. त्यांच्याद्वारे स्फोटाचा क्षण आणि तदनंतरची कंपने यांची नोंद केली जाते. बऱ्याच खोलीपर्यंत अन्वेषण–उदाहरणार्थ, भूमिगत मिठाचे साठे शोधण्यासाठी करावे लागणारे अन्वेषण–करावयाचे असेल, तर भूकंपलेखन-यंत्रांनी केलेल्या नोंदींचा अन्वयार्थ लावण्यासाठी पुढीलपैकी एका घटनेचा आधार घेतला जातो. स्फोटाचा क्षण आणि शक्तिमान प्रेरणा यंत्रापर्यंत आल्याचा पहिला क्षण यांमधील कालावधि ही त्यांपैकी एक घटना आणि दुसरी म्हणजे मंद वेगाच्या लहरी पोंचण्यासाठी लागणारा कालावधि ही घटना. भूकंपलेखात प्रथम नोंदलेली प्रेरणा ज्या लहरींमुळे निर्माण होते, ती स्फोटबिंदू आणि भूकंपयंत्र यांना जोडणाऱ्या सरळ रेषेवर असते. हे ज्या अंतरापर्यंत घडते ते अदृढ थराच्या जाडीवर अवलंबून असते. या अंतरापलीकडे असणाऱ्या यंत्रावर नोंदली जाणारी पहिली शक्तिमान प्रेरणा वक्रीभवन झालेल्या लहरींमुळे निर्माण झालेली असते. या लहरी लघुतम विरोधाच्या भूमिगत मार्गाने प्रवास करणाऱ्या असतात. त्यानंतर नोंदल्या जाणाऱ्या प्रेरणा, या अधिक विरोधाच्या माध्यमातून प्रवास करणाऱ्या प्रत्यक्ष किंवा परावर्तित लहरींमुळे निर्माण झालेल्या असतात. म्हणून या दोन पद्धतींना अनुक्रमे **वक्रीभवन-पद्धत** आणि **परावर्तन-पद्धत** असे म्हणतात (उदाहरणार्थ, लीट १९३८ किंवा हेलंड १९४० पाहा).

स्थापत्यव्यवहारासाठी कराव्या लागणाऱ्या मृत्तिका-अन्वेषणात केवळ वक्रीभवन पद्धतच वापरली जाते. या पद्धतीचा उपयोग भूगर्भातील खडकावर असलेल्या अदृढ थरांची एकूण जाडी ठरविण्यासाठी किंवा दृढ थरावरील विस्कळित थरांची जाडी ठरविण्यासाठी केला जातो. दमनलहरींचा खडकातून जातानाचा वेग अदृढ पदार्थांतील वेगाच्या निदान १० पट तरी असतो. त्यामुळे या दोन थरांना अलग करणारी सीमा सुस्पष्ट अशा वक्रीभवनाच्या प्रक्रियेला कारणीभूत होते (शेपार्ड १९३५). या पद्धतीमागील तत्त्व आकृती १४९ मध्ये स्पष्ट केले आहे. समजा,

$ग_1$ = लहरींच्या संचाराचा अदृढ पदार्थातील वेग,
$ग_2$ = खडकातील संचाराचा वेग,
$ळ_1$ = पहिली शक्तिमान प्रेरणा १ या ठिकाणी ठेवलेल्या नोंद-यंत्राजवळ पोचण्याचा काळ;
$ल_1$ = स्फोट-बिंदू आणि नोंदयंत्र १ यांमधील अंतर,
$ळ_2$ = नोंदयंत्र २ च्या बाबतीतील तसाच काळ,
$ल_2$ = नोंदयंत्र २ चे अंतर आणि
$ड$ = भूपृष्ठापासून खडकाची खोली

आहेत.

$ग_1$ पेक्षा $ग_2$ पुष्कळच अधिक असल्यामुळे स्फोटस्थानापासून $ल_2$ या लांब अंतरावर असलेल्या नोंदयंत्र २ जवळ पोचणाऱ्या पहिल्या लहरी म्हणजे वक्रीभूत लहरी असतील. त्या मुख्यतः आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे पृष्ठभागालगतच्या मार्गाने येतात.



आकृती १४९ : भूकंपनद्वारा मृत्तिका-अन्वेषणाच्या वक्रीभवन पद्धतीचे तत्त्व विशद करणारी रेखाकृती.

याउलट, $ल_1$ या कमी अंतरावर असलेल्या नोंदयंत्राशी पोचणारी पहिली प्रेरणा, ही तडक येणाऱ्या लहरीमुळे निर्माण झालेली असते. भूकंप-लहर भूपृष्ठापासून निघून खडकापर्यंत जाते आणि पुनः तेथून काटकोन करून भूपृष्ठाला परत येते; तसेच भूपृष्ठ आणि खडकाचा पृष्ठभाग समांतर आहेत; अशी सोईस्कर गृहीतें साधारणतः स्वीकारली जातात. या गृहीतांनुसार नोंदयंत्र १ च्या बाबतीत आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$ळ_1 = \frac{ल_1}{ग_1} \text{ म्हणजेच } ग_1 = \frac{ल_1}{ळ_1}$$

आणि नोंदयंत्र २ च्या बाबतीत पुढील समीकरण मिळतेः

$$ळ_2 = \frac{२ड}{ग_1} + \frac{ल_2}{ग_2} \text{ म्हणजेच } ड = \left(ळ_2 - \frac{ल_2}{ग_2}\right)\frac{ग_1}{२}$$

एवंच आपल्याला $ड$, $ग_1$ आणि $ग_2$ हीं अज्ञात पदे प्रविष्ट झालेली २ समीकरणे

मिळाली. तिसरे समीकरण मिळविण्यासाठी आपण स्फोटबिंदूपासून $ल_3$ अंतरावर तिसरे यंत्र बसवू (आकृतीत दाखविलेले नाही) आणि पहिली शक्तिमान प्रेरणा पोचण्याचा $ळ_3$ हा समय नोंदू.

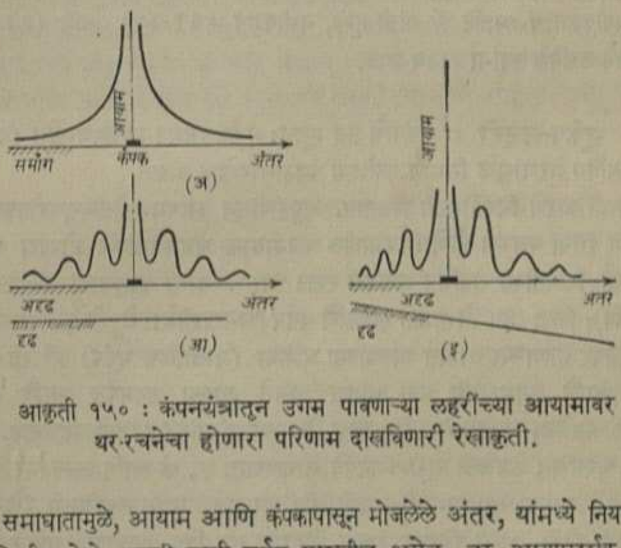
खडकाचा पृष्ठभाग भूपृष्ठाला समांतर नसेल किंवा आपल्याला एखाद्या भूगर्भस्थ खोऱ्याचा तळ शोधावयाचा असेल, तर भूपृष्ठावरील $ठ_1$, $ठ_2$ या निरनिराळ्या ठिकाणी स्फोट करून, तेथून निघणाऱ्या सरळ रेषांवर ठेवलेल्या भूकंपलेखनयंत्रावर नोंदी केल्या पाहिजेत. या पद्धतीत उद्भवणारा मुख्य दोष असा आहे की, आपण भूपृष्ठापासून लगेच खालच्या भागात ठ पासून १ या बिंदूपर्यंत जाण्याचा लहरींचा वेग आणि भूजलपातळी किंवा निरनिराळ्या थरांच्या सीमा यांना पार करून उभ्या दिशेने खाली जाणाऱ्या लहरींचा वेग हे दोन्ही सारखेच असतात, असे गृहीत धरतो. तरीही अनुकूल भूगर्भस्थ परिस्थितीत या पद्धतीने मिळणारी फलिते समाधानकारक असतात (शेपार्ड १९३५).

आकृती १४८ आ मध्ये दाखविलेल्या संबंधाच्या स्वरूपावरून असे दिसून येईल की, $इ$ लहरींच्या $ग$ या वेगावर $पॉ$-मधील बदलांचा पडणारा प्रभाव असा आहे की, त्यामुळे मृत्तिकेच्या कितीतरी अधिक महत्त्वाच्या अन्य गुणधर्मांतील बदलांचा — उदाहरणार्थ, स्थितिस्थापकत्व मापांकातील बदलांचा–प्रभाव पुसला जातो. $पॉ$ चे मूल्य नेहमीच अज्ञात असते. म्हणून ज्या थरातून स्फोटजन्य लहरी संचार करतात, त्याचा स्थितिस्थापकत्व–मापांक स्फोटपद्धतीने ठरविता येत नाही. त्याचप्रमाणे, अशा स्फोटातून एकच प्रेरणा उत्पन्न होत असल्यामुळे, लहरींच्या समाघात घटनांची भूपृष्ठावर नोंद करून प्रत्येक स्वतंत्र थराची जाडी ठरविणेही शक्य नसते.

भूकंपलेखनयंत्राच्या नोंदींतून अधिक माहिती मिळविता यावी म्हणून "डेगेबो बर्लिन" आणि "जिओफिजिकल इन्स्टिट्यूट, गोटिन्जेन विद्यापीठ" या दोन संस्थांनी सहकार्य करून लहरजन्य प्रेरणांचे उगमस्थान म्हणून परिच्छेद १५८ मध्ये वर्णिलेला कंपक वापरला. या कंपकाने निर्माण केलेल्या लहरी मुख्यतः पृष्ठीय प्रकारातील कार्तनिक लहरी असतात. लहरींच्या या गुंतावळ्यातून एकेक सुस्पष्ट प्रकार—उदाहरणार्थ, रॅले-लहरी, लव्ह-लहरी इत्यादी—वेगळा करण्याचे कार्य केवळ स्थूल मानाने साध्य झालेले आहे. कार्तनिक लहरींच्या वेगावर भूजलाचा कोणताच प्रभाव पडत नाही. याउलट, काही पृष्ठीय लहरींचा, सापेक्षतः बारीक असणाऱ्या थरांच्या सीमांवरील वेग, प्रेरणेची वारंवारता आणि थराची जाडी यांवर अवलंबून असतो. परंतु प्रेरणेची वारंवारता एका विशिष्ट मूल्याहून अधिक झाली, तर मात्र या लहरींचा वेग वारंवारतेवर अवलंबून राहत नाही आणि त्याचे मूल्य इतर पृष्ठीय लहरींच्या वेगाइतके होते. हा वेग $ग_क$ (समीकरण १६१ (३)), या कार्तनिक लहरींच्या वेगापेक्षा किंचित् कमी असतो. तेव्हा सर्वच लहरींचा वेग वारंवारतेवर अवलंबून राहणार नाही, अशा प्रकारे जर प्रेरणेची वारंवारता प्रयोगार्थ घेतली, तर लहरसंचाराचे नोंदलेले वेग, हे ज्या माध्यमातून लहरीचा मार्ग जातो त्याच्या स्थितिस्थापकत्वाचे निदर्शक ठरतात.

कंपकामुळे नियतकालिक प्रेरणा उत्पन्न होत असल्यामुळे, लहरींचा वेग ठरविण्याचे कार्य मागे वर्णिलेल्या वक्रीभवन पद्धतीतील कार्याइतके सोपे असत नाही. तथापि हा वेग मोजण्याची समस्या यशस्वीपणे सोडविलेली आहे.

दोन, भिन्न दृढतेच्या थरांमधील सीमा ठरवावयाची असेल, तर कंपकमध्यापासून काढलेल्या सरळ रेषांवर घेतलेल्या, निरनिराळ्या बिंदुस्थानी आयामांचे मापन केले जाते. कंपकापासून दूर जावे, तसा आयाम सातत्याने कमी होत गेलेला असेल—आकृती १५० अ पाहा—तर त्याचा अर्थ असा होतो की, बऱ्याच खोलीपर्यंत समांग मृत्तिकाथर अस्तित्वात आहे. याउलट, खालची भूमी स्तरयुक्त असेल, तर पृष्ठीय लहरी आणि परावर्तित लहरी यांच्या समाघातामुळे, प्रकाशविज्ञानातील न्यूटनप्रणीत कंकणांच्या घटनेशी तुलना करता येईल, अशी घटना दृष्टोत्पत्तीस येते.



आकृती १५० : कंपनयंत्रातून उगम पावणाऱ्या लहरींच्या आयामावर थर-रचनेचा होणारा परिणाम दाखविणारी रेखाकृती.

या समाघातामुळे, आयाम आणि कंपकापासून मोजलेले अंतर, यांमध्ये नियतकालिक संबंध निर्माण होतो. थराची जाडी सर्वत्र सारखीच असेल, तर आयामदर्शक आलेख कंपकाच्या मध्यरेषेच्या दोन्ही बाजूंस सममात्र असतो (आकृती १५० आ पाहा) आणि त्यातील उंचवट्यांमध्ये सारखे अंतर असते. थराची जाडी एका दिशेत वाढत गेलेली असेल, तर त्या दिशेत आलेखाच्या उंचवट्यांमधील अंतर वाढत जाते (आकृती १५० इ पाहा). कसेही असले, तरी या उंचवट्यांतील अंतरांवरून थराची जाडी ठरविता येते. कंपनांच्या नोंदींचा हा अन्वयार्थ ज्या तत्त्वावर आधारित आहे, ते सुयोग्यपणे प्रस्थापित झालेले आहे (डेगेबो १९३६). या सिद्धान्तानुसार कंपनाच्या नोंदींवरून अति जाड थरांमधील लहर-संचाराचा वेगही ठरविता येतो. या पद्धतीमागील तत्त्व आकृती १४९ मध्ये विशद केलेल्या वक्रीभवन पद्धतीसारखेच काहीसे आहे. या पद्धतीतील

आकडेमोडीची फलिते **अंतर-काल आलेख** काढून व्यक्तविली जातात. या आलेखात काळ *क्ष*–अक्षावर, आणि लहरीने आक्रमिलेले अंतर *य*–अक्षावर स्थित केले जाते.

बऱ्याच मोठ्या भूक्षेत्रावर अन्वेषण करावयाचे असेल, तेव्हा उभ्या-आडव्या रेषांचा पट आखून, त्यातील प्रत्येक संपात-बिंदूवर क्रमाक्रमाने कंपक ठेवून प्रयोग केला जातो आणि पटासाठी काढलेल्या रेषांवरील बिंदुस्थानी नोंदी केल्या जातात. वरच्या थरांच्या अन्वेषणासाठी उच्चमूल्य वारंवारतेच्या प्रेरणांचा आणि खालच्या थरांसाठी लघुमूल्य वारंवारतेच्या प्रेरणांचा अवलंब केला जातो.

कंपकामुळे केवळ कार्तनिक लहरीच निर्माण होत असल्यामुळे या प्रयोगात मोजलेल्या वेगांवरून यंगचा मापांक (समीकरण १६१ (३) पाहा) ठरविता येत नाही. तथापि मुद्दाम केलेल्या स्फोटातून निर्माण झालेल्या दमनलहरींच्या वेगाचे मापन आणि कंपकाची पद्धत यांची सांगड घातल्यामुळे संशोधकांना ज्या दोन प्रकारांच्या फलितांचे स्वतंत्र संच मिळाले त्यांवरून *यं* आणि *पॉ* यांची मूल्ये, समीकरणे १६१ (२) आणि (३) यांच्या साहाय्याने ठरविणे त्यांना शक्य झाले.

१६४. **भूकंप-लहरी** : भूकंपाचे तंत्र मूलतः भूकंपसाधित अन्वेषणातील (परिच्छेद १६३) कृत्रिम प्रेरणांमुळे निर्माण झालेल्या कंपनांसारखेच असते.

भूकंपाची कारणे निरनिराळी असतात. भूपृष्ठापासून मध्यम खोलीवर, दोषपृष्ठावरून आकस्मिक रीत्या घसरण होणे (कवचातील रचनात्मक घडामोडीमुळे होणारा भूकंप); ज्वालामुखी–निर्मितीशी संबंधित असलेले स्फोट आणि अन्य हालचाली (ज्वालामुखी-जन्य भूकंप); किंवा ज्या विभागात खडकांचे वर्तन घनराशीसारखे होते, त्याच्याखाली खूप खोलीवर होणाऱ्या अज्ञात स्वरूपाच्या प्रक्रिया (पातालिक भूकंप) ही ती कारणे होत. भूकंपाचे उगमस्थान ज्या भागात असते त्याला उगमकेंद्र आणि त्याच्या सरळ वर असलेला भूपृष्ठावरील बिंदू किंवा रेषा यांना प्रतिकेंद्र असे म्हणतात. प्रति-केंद्राच्या परिसरात ठेवलेली भूकंपलेखनयंत्रे साधारणतः *द*, *क* आणि अन्य निरनिराळ्या पृष्ठीय लहरी यांच्या आगमनाची क्रमाने नोंद करतात. पृष्ठीय लहरींमध्ये रॅले-लहरी, लव्ह-लहरी आणि अन्य कित्येक प्रकार नेहमी समाविष्ट असतात. प्रतिकेंद्रापासून लांब अंतरावर होणारी नोंद अधिकच गुंतागुंतीची असते; कारण तेथे जाईपर्यंत लहरींत अनेक परावर्तने आणि वक्रीभवने झालेली असतात. भूकंपाची प्रत्येक घटना म्हणजे एक नियतकालिक प्रेरणा असते. या प्रेरणेमुळे भूपृष्ठावर असलेल्या प्रत्येक वस्तूमध्ये प्रवृत्त-कंपने निर्माण होतात. कंपित वस्तूची वारंवारता आणि प्रेरणेची वारंवारता यांच्या गुणो-त्तराबरच प्रवृत्त कंपनांची तीव्रता मुख्यतः अवलंबून असल्यामुळे, प्रेरणेची वारंवारता हा अतिशय महत्त्वाचा घटक ठरतो. दुर्दैवाने भूकंपजन्य कंपनांच्या नोंदी इतक्या गुंतागुंतीच्या असतात की, त्यांचा अन्वयार्थ लावताना, पुष्कळच श्लेष निघू शकतात. भूकंपजन्य कंपने प्रत्येक बाबतीत खाणीत केलेल्या स्फोटामुळे निर्माण होणाऱ्या कंपनांसारखीच असतात.

अशा स्फोटाच्या काळात आणि त्यानंतर मिळणारी नोंद आकृती १५१ मध्ये दाखविली आहे (लीट १९३९).

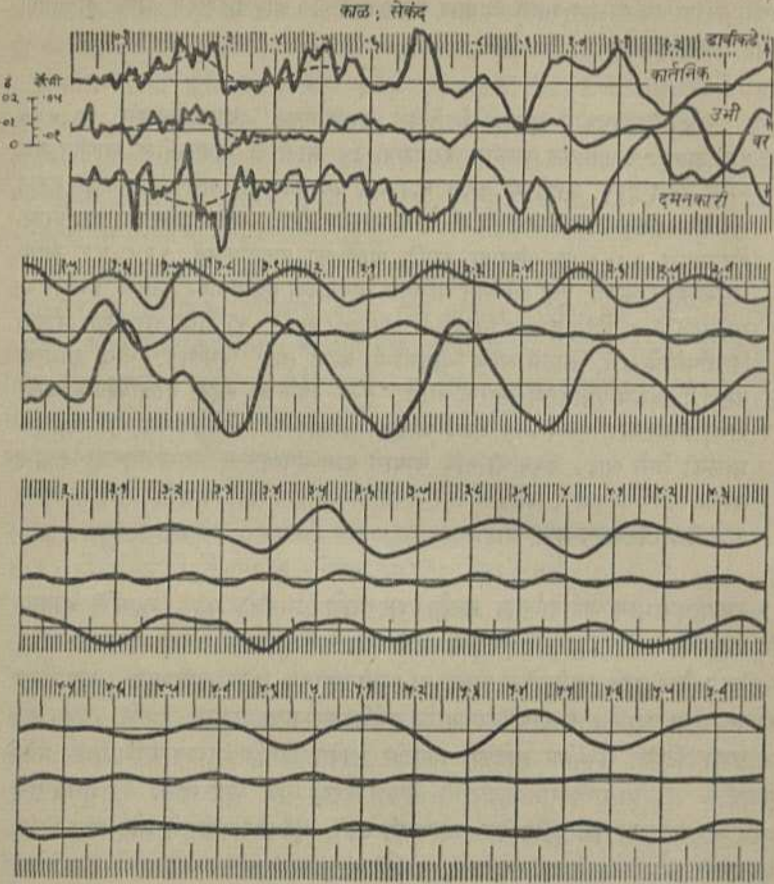
"४०% रेडकॉस एक्स्ट्रा जिलेटिन डायनामाइट" दारू एकदम १९,००० पौंड उडवून कनेक्टिकट खोऱ्यात असलेल्या ट्रॅप जातीच्या खडकातील खाणीत एक स्फोट केला होता. खाणीच्या १९० फुटांच्या घडीच्या मागे असलेल्या एका लहान भुयारात असलेल्या कोनाड्यांतून ही दारू ठासली होती. भूकंपलेखन-यंत्र या प्रेरणा-केंद्रापासून १८०० फूट अंतरावर आणि खाणीच्या पातळीपासून १२५ फूट खाली असलेल्या ठिकाणी, एका खोऱ्यात गाळयुक्त भरणाच्या पृष्ठभागावर ठेवले होते. या स्फोटाचे ५.९ सेकंद काळात मिळालेले आलेख (आ. १५१) येथे दाखविले आहेत. विस्थापनाचे उभे, आडवे आणि अनुदीर्घ घटक त्यात दिसतात. नोंद झालेल्या लहरींचे स्वरूप पृष्ठीय लहरींसारखे आहे. तुटक रेषेने जी लहर दाखविलेली आहे, तिचा नियतकाल सुमारे ०.३ सेकंद आहे. ही लहर कमी नियतकालाच्या लहरींमुळे झाकली गेली आहे. कंपनांची नोंद घेण्याचे काम संपण्याच्या आसपासच्या काळांत उभ्या आणि अनुदीर्घ दिशेतील विस्थापने अस्पष्ट होत गेली आहेत. परंतु आडव्या दिशेतील विस्थापन चालू आहे.

स्थापत्य-समस्यांच्या बाबतीत सर्वांत महत्त्वाचे असलेले घटक म्हणजे आडव्या दिशेतील घटक होत. आकृती १५१ मध्ये ते आडवे व अनुदीर्घ घटक म्हणून दाखविले आहेत. हेच घटक भूमीवरील वास्तूंच्या कलंडण्याला किंवा वाकण्याला कारणीभूत होतात. या कारणास्तव उभ्या घटकाकडे दुर्लक्ष करण्याचा प्रघात आहे. भूकंपामुळे आडव्या दिशेत निर्माण झालेला महत्तम प्रवेग आणि गुरुत्वाकर्षणजन्य प्रवेग यांमधील $\text{थ}_{\text{त्व}}$ या गुणोत्तराने भूकंपाची तीव्रता नेहमी व्यक्त केली जाते. या गुणोत्तराचे मूल्य अनुमानण्यासाठी पुढील पद्धत वापरली जाते. भूकंपलेखनयंत्राने नोंदलेल्या क्षितिजसमांतर कंपनांच्या ठिकाणी तशाच प्रकारची परंतु आकृती १४१ ई मध्ये दाखविलेली सोपी, मुक्त, एकतान कंपने नियुक्त केली जातात. त्यांचा आयाम अ आणि चक्रीय वारंवारता ω_1 अशी धरली जाते. समीकरण १५६ (८)चे कलन करून भूमीतील कणांच्या महत्तम प्रवेगाचे मूल्य पुढीलप्रमाणे मिळते :

$$\text{थ}_{\text{त्व}}\,\text{त्व} = \left(\frac{d^{2}\text{क्ष}}{d\text{ळ}^{2}}\right)_{\text{महत्तम}} = \text{अ}\,\omega_1^{2}$$

म्हणजेच—

$$\text{थ}_{\text{त्व}} = \frac{\text{अ}}{\text{त्व}}\,\omega^{2} = \frac{4\pi^{2}\,\text{अ}}{\text{त्व}\,\text{प}^{2}} \qquad [१]$$



आकृती १५१ : खाणीत उडविलेल्या सुरुंगामुळे गाळयुक्त भरावाच्या पृष्ठभागाशी येणाऱ्या कंपनांचा आलेख (आधार : लीट १९३९)

भूकंपाने निर्माण केलेल्या प्रेरणेच्या वारंवारतेपेक्षा ($फ_{१}$) एखाद्या वास्तूची स्वाभाविक वारंवारता ($फ_{०}$) फारच मोठी असेल, तर $फ_{१}/फ_{०} = \omega_{१}/\omega_{०}$ हे गुणोत्तर शून्याच्या जवळपास असते. परिणामी, कंप पावणाऱ्या वास्तूचा आयाम व्यवहारतः भूकंप-लहरींच्या आयामाइतकाच होतो. आ. १४३ आ आणि १४४ अ पाहा. बहुतांश खुज्या इमारती आणि नेहमीच्या आधारभिंती यांच्या बाबतीत या लक्षणाची पूर्तता होते. उभ्या दिशेतील गुरुत्वाकर्षण त्व आणि आडवे $थ_{त्व}$ त्व यांना अनुषंगिक बलांच्या फलरूप बलाइतके

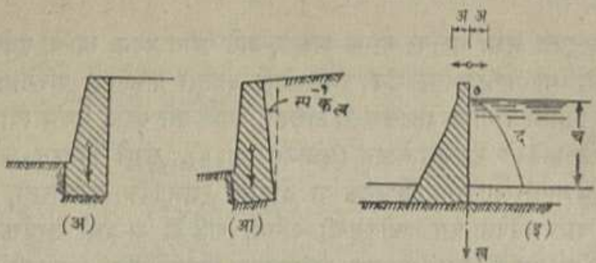
स्थैतिक वास्तुबल अशा वास्तूंवर कारक असते, असे गृहीत धरून, त्यांचा पूर्वकल्प सिद्ध करता येतो. या वास्तुबलांचा उंच इमारतीवर होणारा प्राकृतिक परिणाम काहीसा वाऱ्यामुळे निर्माण होणाऱ्या दाबासारखा असतो, आणि तसे गृहीत धरून त्या वास्तूच्या अवयवांतील प्रतिबले ठरविता येतात (फ्लेमिंग १९३०). संपूर्ण इमारत आणि तिचे भिंती, खांब यांसारखे निरनिराळे घटक या दोहोंची स्वाभाविक वारंवारता भूकंपजन्य लहरींच्या वारंवारतेपेक्षा फार पलीकडची असली पाहिजे. अन्यथा उपर्युक्त आकडे-मोडीची फलिते फार फसवी ठरू शकतात. भूकंपकालात आधारभिंतीवर (आकृती १५२ अ) येणारा मृत्तिकादाब पुढील पद्धतीने काढतात. समजा, भूकंपाची तीव्रता $थ_{त्व}$ आहे. आधारभिंत आणि तिच्यामागील भरण—आकृती १५२ आ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे $स्प^{-1} थ_{त्व}$ एवढ्या कोनातून विचलित करून त्यांच्या वजनास $\sqrt{१ + थ^{२}_{त्व}}$ या पदाने गुणून त्यांचे वाढलेले वजन ठरवितात. उर्वरित कृती प्रकरण ६ मध्ये वर्णिल्यासारखीच असते.

आकृती १५२ इ मध्ये काँक्रीटच्या गुरुत्वाधारी धरणाचा छेद दाखविला आहे. भूकंपामुळे धरण आणि जलाशयाचा तळ हीं दोन्हीही एकदा डावीकडे आणि एकदा उजवीकडे अशा प्रकारे $अ$ इतक्या अंतरापर्यंत पुनः पुनः वेगाने विचलित होत राहतात. जलाशयातील पाणी मात्र होते तेथेच राहू पाहते; कारण जलाशयाच्या तळावरील कार्तनिक प्रतिबले क्षुल्लक असतात. म्हणून धरण-जलाशय या समूहावर होणारा भूकंपाचा बलात्मक परिणाम, धरण जणु वेगाने स्थिर अशा जलाशयाकडे $अ$ अंतरापर्यंत ढकलले आहे, अशासारखा असतो. वेस्टरगार्डने (१९३३), असे दाखवून दिले आहे की त्वरित विस्थापनास जलपातळी पासून $ख$ खोलीवर होणारा पाण्याचा विरोध, धरणाच्या उभ्या पृष्ठावर मोजला आणि त्याचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य $द$ गृहीत धरले, तर $द$ चे मूल्य स्थूलमानाने खोलीच्या वर्गमुळाच्या सरळ प्रमाणात वाढत जाते. हे मूल्य पुढील समीकरणाने स्थूलमानाने मिळते.

$$द = थ थ_{त्व} \sqrt{चख} \qquad [२]$$

येथे $थ$ चे मूल्य, $च$ ही जलाशयाची खोली आणि भूकंपाच्या धक्क्याचा $ध$ हा नियत-काल यांच्या गुणोत्तरावर अवलंबून असते. $ध$ चे मूल्य दिलेले असेल, तर $थ_{त्व}$ चे मूल्य आयामावर ($अ$) अवलंबून असते (समीकरण १ पाहा). आकृती १४४ इ मध्ये $द$ या परिवलयाने समीकरण २ व्यक्त केले आहे. नियतकाल $ध = ४/३$ सेकंद गृहीत धरून आणि $च$ ची निरनिराळी मूल्ये घेऊन वेस्टरगार्डने $थ$ ची मूल्ये ठरविली तीं अशी :

$च$:	०–३१० फूट	३१० ते ५४० फूट	५४० ते ६८० फूट
$थ$:	०·०२६	०·०२७	०·०२८ टन/घ. फू.



आकृती १५२ : (अ) आधारभिंतीचा छेद (आ) $थ_{त्व}$ त्व या तीव्रतेच्या भूकंपाचा भिंतीच्या स्थैर्यावर जो परिणाम होईल, जवळजवळ तितकाच परिणाम होण्यासाठी आवश्यक असलेले भिंतीचे व भरणाचे काल्पनिक विस्थापन (आकृतीत $क_{त्व}$ ऐवजी $थ_{त्व}$ वाचावे) (इ) भूकंपामुळे गुरुत्वाधारी काँक्रीटच्या धरणाच्या पृष्ठावर येणारा पाण्याचा गतिमान दाब.

ץ (समीकरण २) या बलामुळे निर्माण होणारी प्रतिबले भूकंपजन्य प्रवेगामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रतिबलात मिळविली पाहिजेत. हा प्रवेग प्रत्यक्ष धरणावरच कारक असतो. वेस्टरगार्डने या समस्येचे काटेकोर, शास्त्रपूत उत्तरही प्रसिद्ध केले आहे.

एखाद्या वास्तूची स्वाभाविक वारंवारता जर भूकंपजन्य कंपनांच्या वारंवारतेच्या कक्षेबाहेर बऱ्याच प्रमाणात असेल, तर आकृती १५२ आ च्या साहाय्याने विशद केलेल्या गणिती कृतीत ज्या चुका प्रविष्ट होतात, त्या सुरक्षिततेत भर टाकणाऱ्या असतात. कारण या पद्धतीत आपण असे गृहीत धरलेले असते की, त्या वास्तूवर $थ_{त्व}त्व$ ला अनुषंगिक आडव्या बलाचा कायम प्रभाव आहे. या बलाच्या कोणत्याही धोकादायक परिणामात स्थैर्यकारी बलांच्या विरुद्ध होणारे विस्थापन अभिप्रेत असते. हे विस्थापन व्हायचे तर तदनुषंगिक कार्य झाले पाहिजे आणि त्यास निश्चित असा कालावधि लागणार, परंतु प्रत्यक्षात हे बल फारच थोडा वेळ कारक असते. या वस्तुस्थितीच्या अगदी उलट असणारे गृहीत स्वीकारून आपण हे बल चिरकाल कार्य करीत राहते, असे म्हटले होते. म्हणून भूकंपजन्य लहरींच्या वारंवारतेपेक्षा वास्तूची स्वाभाविक वारंवारता अगदी भिन्न असेल, तर $थ_{त्व}$ या विवक्षित तीव्रतेच्या भूकंपामुळे महत्तम असा किती विध्वंस होऊ शकेल, एवढेच या आकडेमोडीच्या फलितावरून आपल्याला कळते असे म्हटले पाहिजे. याउलट, वास्तूची किंवा तिच्या घटकांची स्वाभाविक वारंवारता भूकंपजन्य कंपनांच्या वारंवारतेइतकी असते तेव्हा अनुकंपनांचा प्रादुर्भाव होऊन, नियतकालिक प्रेरणेचा प्रभाव इतका तीव्रतर होतो की, आकृती १५२ आ मध्ये विशद केलेल्या पद्धतीच्या अवलंबामुळे होणारी चूक उलटी होते. अशी परिस्थिती उंच इमारती किंवा अति उंच धुराडी यांच्या बाबतीत अपेक्षिता येते. म्हणून उपरोक्त पद्धतीऐवजी दुसऱ्या पद्धतीचा, जीत वास्तूची स्वाभाविक वारंवारता विचारात घेतली जाते तिचा, अवलंब करणे आवश्यक ठरते. अशा प्रकारची एक सोपी पद्धत वेस्टरगार्डने

चौकटीयुक्त वास्तूंच्या बाबतीत (१९३३ क) आणि ब्रिस्केने (१९२७) उंच धुराड्यांसाठी सुचविली आहे. या क्षेत्रातील सैद्धांतिक अभ्यासाला प्रायोगिक संशोधनाची जोडही देण्यात आली आहे. अशा संशोधनात कंप पावणाऱ्या मेजावर लहान प्रमाणात तयार केलेले प्रारूप ठेवून त्यातील प्रतिबले मोजण्यात येतात (उदाहरणार्थ, विल्यम्स १९३७, रूज १९३८ पाहा).

भूकंपामुळे निर्माण होणाऱ्या अनुकंपनाचा जेथे संबंध येतो, अशा कोणत्याही घटनेचा अभ्यास करताना एक अवघड प्रश्न नेहमी पुढे उभा राहतो, तो म्हणजे भूकंपजन्य कंपनांच्या बारंबारतेचे योग्य असे कोणते मूल्य निवडावे हा. खाणीत उडवलेल्या सुरुंगाप्रमाणे भूकंपाच्या धक्क्यामुळेही एकाच वेळी अति भिन्नभिन्न अशा बारंबारतांची कंपने निर्माण होतात (आकृती १५१ पाहा). त्यामुळे एकाच भूकंपाच्या धक्क्यामुळे दोन निरनिराळ्या वास्तूंना पोहोचणारा धोका, एकाच कंपनाच्या दोन अगदी भिन्न घटकांमुळे निर्माण झालेला असण्याचा संभव असतो. या दोन उदाहरणांतील विध्वंसक प्रेरणांच्या बाबतीत एक गोष्ट मात्र सारखी असते. ती म्हणजे भूकंपामुळे दर एकांक काळात आणि निम्नस्तराच्या दर एकांक अवकाशागणिक वास्तूच्या पायापर्यंत पोचलेली गतिजन्य ऊर्जा ही होय. म्हणून अनुकंपनाच्या घटनेचा विचार करणे आवश्यक असेल, तेथे भूकंपाची तीव्रता महत्तम प्रवेगाच्या स्वरूपात न मांडता ऊर्जा-प्रवाहाच्या तीव्रतेच्या स्वरूपात मांडणे सयुक्तिक ठरते (मेंडेनहाल १८८८). वेस्टरगार्डने (१९३३ ब) नुकतीच आणखी एक पद्धत सुचविली आहे. प्रत्यक्षातील भूकंपजन्य कंपनांऐवजी एक साधे एकतान कंपन (आयाम अ आणि चक्रीय बारंबारता ॡ) नियुक्त करून आपल्याला एखाद्या कणाचे मूळ समतोल अवस्थेतील स्थानापासून ळ समयी होणारे विस्थापन समीकरण १५६ (८) च्या साहाय्याने पुढीलप्रमाणे मांडता येते :

$$क्ष = अ \text{ ज्या } ॡ ळ$$

आणि वेग पुढील समीकरणाने व्यक्त करता येतो :

$$ग = \frac{d\,क्ष}{d\,ळ} = अ\, ॡ \text{ कोज्या } ॡ ळ$$

प्रवेगाचे समीकरण असे :

$$\frac{d^2 क्ष}{d\,ळ^2} = -\, ॡ^2 \text{ ज्या } ॡ ळ$$

त्यांची महत्तम मूल्ये अशी :

$$ग_{महत्तम} = अ\, ॡ \text{ आणि } \left(\frac{d^2 क्ष}{d\,ळ^2}\right)_{महत्तम} = य_{त्वरण} = अ\, ॡ^2$$

या दोन समीकरणांवरून आपल्याला पुढील समीकरण मिळते :

$$ग_{\text{महत्तम}} = \frac{थ_{त्व}त्व}{\omega} = \frac{थ_{त्व}त्व}{२\pi}ध$$

येथे ध हा कंपनाचा नियतकाल आहे. वेग महत्तम असताना, दर एकांक काळात, दर एकांक अवकाशागणिक वास्तूच्या निम्नस्तराला पोचलेली गतिजन्य ऊर्जा $ऊ_{ग}$ पुढीलप्रमाणे असते :

$$ऊ_{ग}\,(\text{ग्रॅम सेमी}^{-२}) = \frac{१}{२}\cdot\frac{ध}{त्व}\cdot ग^{२}_{\text{महत्तम}} = थ_{त्व}^{२}ध^{२}\frac{घत्व}{८\pi^{२}} \qquad [३]$$

$ऊ_{ग}$ या पदाची परिमाणे एकांक क्षेत्रस्थ बलाची आहेत आणि $थ_{त्व}$ या पदाऐवजी ते वापरण्याचा प्रस्ताव या पद्धतीत केलेला आहे.

भूकंपाच्या नियतकालाचे अनुमान करताना, आणखी एक गुंतागुंत निर्माण होते. भूकंपाची तीव्रता व्यक्त करणाऱ्या $थ_{त्व}$ या पदावर पडणारा भूपृष्ठाजवळील थरांच्या गुणधर्मांचा सुस्पष्ट असा प्रभाव हे तिचे कारण होय. विस्कळित, गाळयुक्त भरणांच्या पृष्ठभागातील मूल्यापेक्षा खडकांमध्ये $थ_{त्व}$ चे मूल्य नेहमीच अगदी लहान असते. खडकाच्या पृष्ठभागावरील खड्डयामध्ये असलेला गाळ हा एक, सुस्पष्ट सीमा असलेला व स्वतःची स्वाभाविक वारंवारता असलेला, स्थितिस्थापक राशी मानता येईल. त्यामुळे भूपृष्ठाजवळ असलेल्या अदृढ निक्षेपांमध्ये दिसणारी $थ_{त्व}$ ची मोठी मूल्ये म्हणजे, भूकंपलहरी वास्तूच्या पायापर्यंत पोचण्यापूर्वी, त्या निक्षेपात घडून येणाऱ्या अनुकंपनाचा परिणाम असण्याचा संभव आहे. या प्रक्रियेची कल्पना पुढील पद्धतीने करता येईल. पृथ्वीच्या पृष्ठापर्यंत खडक पसरलेला असेल, तर भूपृष्ठाकडे येणाऱ्या ऊर्जेचा अधिकतम भाग, परावर्तित होऊन खडकामध्ये परत जाईल. याउलट, खडकावर निक्षेपाच्या थराचे आच्छादन असेल, तर ही ऊर्जा निक्षेपाकडून शोषली जाईल. एखाद्या लंबकावर त्याच्या स्वाभाविक वारंवारतेइतकीच वारंवारता असलेली नियतकालिक प्रेरणा कारक झाली असता, त्यात होणाऱ्या गतिमान ऊर्जेच्या संचयासारखी ही प्रक्रिया आहे. या प्रक्रियेमुळे मृत्तिकानिक्षेपावर ज्यांचा पाया ठेवलेला आहे अशा वास्तूंवर होणारा भूकंपाचा परिणाम अधिक तीव्र असतो. समीकरण ३ सिद्ध करताना, ही शक्यता विचारात घेतलेली नव्हती.

सांप्रत या विषयाचे आपले ज्ञान असे आहे की, एखाद्या भूकंपामुळे निर्माण होणाऱ्या प्रेरणेच्या स्वरूपावर आणि तीव्रतेवर, भूगर्भस्थ रचनेचा जो प्रभाव पडतो, त्याचा अभ्यास प्रत्यक्ष क्षेत्रात निरीक्षण करूनच करता येतो. भूकंपामुळे एखाद्या इमारतीत निर्माण होणारी प्रतिबले ठरविण्याच्या अगदी प्रगत अशा सैद्धांतिक पद्धती (उदाहरणार्थ, बियो १९४२) वापरावयाच्या म्हटले, तर त्या इमारतीवर कारक होणारी प्रेरणा अगोदरच माहीत असेल, तरच केवळ ते शक्य होते.

परिशिष्ट

अपारप्राय, स्थितिस्थापक घनराशीच्या पृष्ठावर भार ठेवला असता त्यात निर्माण होणाऱ्या उभ्या प्रतिबलांची प्रभाव-मूल्ये

बिंदुभार : *भा* या बिंदुभाराच्या कारकबिंदूपासून आडव्या दिशेत *त्र* या अंतरावर घनराशीच्या पृष्ठापासून *ख* खोलीवर असलेल्या ठिकाणचे उभे लंबरूप प्रतिबल $\sigma_{\text{ख}}$ (आकृती ११८ अ) पुढील समीकरणावरून मिळते :

$$\sigma_{\text{ख}} = \frac{\text{भा}}{\text{ख}^{२}} \text{ऋ}\sigma$$

येथे

$$\text{ऋ}\sigma = \frac{३}{२\pi}\left[\frac{१}{१+(\text{त्र}/\text{ख})^{२}}\right]^{५/२} \qquad १३६\ (५)$$

आहे. पुढील कोष्टकात *त्र*/*ख* ची निरनिराळी मूल्ये घेतली असता मिळणारी $\text{ऋ}\sigma$ ची मूल्ये दिली आहेत.

कोष्टक १[1]

त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०
०.००	०.४७७५	०.४०	०.३२९४	०.८०	०.१३८६	१.२०	०.०५१३
१	०.४७७३	१	०.३२३८	१	०.१३५३	१	०.०५०१
२	०.४७७०	२	०.३१८१	२	०.१३२०	२	०.०४८९
३	०.४७६४	३	०.३१२४	३	०.१२८८	३	०.०४७७
४	०.४७५६	४	०.३०६८	४	०.१२५७	४	०.०४६६
५	०.४७४५	५	०.३०११	५	०.१२२६	५	०.०४५४
६	०.४७३२	६	०.२९५५	६	०.११९६	६	०.०४४३
७	०.४७१७	७	०.२८९९	७	०.११६६	७	०.०४३३
८	०.४६९९	८	०.२८४३	८	०.११३८	८	०.०४२२
९	०.४६७९	९	०.२७८८	९	०.१११०	९	०.०४१२
०.१०	०.४६५७	०.५०	०.२७३३	०.९०	०.१०८३	१.३०	०.०४०२
१	०.४६३३	१	०.२६७९	१	०.१०५७	१	०.०३९३
२	०.४६०७	२	०.२६२५	२	०.१०३१	२	०.०३८४
३	०.४५७९	३	०.२५७१	३	०.१००५	३	०.०३७४
४	०.४५४८	४	०.२५१८	४	०.०९८१	४	०.०३६५
५	०.४५१६	५	०.२४६६	५	०.०९५६	५	०.०३५७
६	०.४४८२	६	०.२४१४	६	०.०९३३	६	०.०३४८
७	०.४४४६	७	०.२३६३	७	०.०९१०	७	०.०३४०
८	०.४४०९	८	०.२३१३	८	०.०८८७	८	०.०३३२
९	०.४३७०	९	०.२२६३	९	०.०८६५	९	०.०३२४
०.२०	०.४३२९	०.६०	०.२२१४	१.००	०.०८४४	१.४०	०.०३१७
१	०.४२८६	१	०.२१६५	१	०.०८२३	१	०.०३०९
२	०.४२४२	२	०.२११७	२	०.०८०३	२	०.०३०२
३	०.४१९७	३	०.२०७०	३	०.०७८३	३	०.०२९५
४	०.४१५१	४	०.२०२४	४	०.०७६४	४	०.०२८८
५	०.४१०३	५	०.१९७८	५	०.०७४४	५	०.०२८२
६	०.४०५४	६	०.१९३४	६	०.०७२७	६	०.०२७५
७	०.४००४	७	०.१८८९	७	०.०७०९	७	०.०२६९
८	०.३९५४	८	०.१८४६	८	०.०६९१	८	०.०२६३
९	०.३९०२	९	०.१८०४	९	०.०६७४	९	०.०२५७
०.३०	०.३८४९	०.७०	०.१७६२	१.१०	०.०६५८	१.५०	०.०२५१
१	०.३७९६	१	०.१७२१	१	०.०६४१	१	०.०२४५
२	०.३७४२	२	०.१६८१	२	०.०६२६	२	०.०२४०
३	०.३६८७	३	०.१६४१	३	०.०६१०	३	०.०२३४
४	०.३६३२	४	०.१६०३	४	०.०५९५	४	०.०२२९
५	०.३५७७	५	०.१५६५	५	०.०५८१	५	०.०२२४
६	०.३५२१	६	०.१५२७	६	०.०५६७	६	०.०२१९
७	०.३४६५	७	०.१४९१	७	०.०५५३	७	०.०२१४
८	०.३४०८	८	०.१४५५	८	०.०५३९	८	०.०२०९
९	०.३३५१	९	०.१४२०	९	०.०५२६	९	०.०२०४

१ जी. गिल्बॉय (१९३३) बॉसिनेस्कप्रणीत समीकरण सोडविण्यासाठी प्रभावांकाची कोष्टके "Earth and Foundation," Progress Report of Special Committee, Proc. Am. Soc. C.E. Vol. 59, p 781. वरून

कोष्टक १ (पुढे चालू)

अ/ख	अ०	अ/ख	अ०	अ/ख	अ०	अ/ख	अ०
१.६०	०.०२००	२.००	०.००८५	२.४०	०.००४०	२.८०	०.००२१
१	०.०१९५	१	०.००८४	१	०.००४०	१	०.००२०
२	०.०१९१	२	०.००८२	२	०.००३९	२	०.००२०
३	०.०१८७	३	०.००८१	३	०.००३८	३	०.००२०
४	०.०१८३	४	०.००७९	४	०.००३८	४	०.००१९
५	०.०१७९	५	०.००७८	५	०.००३७	५	०.००१९
६	०.०१७५	६	०.००७६	६	०.००३६	६	०.००१९
७	०.०१७१	७	०.००७५	७	०.००३६	७	०.००१९
८	०.०१६७	८	०.००७३	८	०.००३५	८	०.००१८
९	०.०१६३	९	०.००७२	९	०.००३४	९	०.००१८
१.७०	०.०१६०	२.१०	०.००७०	२.५०	०.००३४	२.९०	०.००१८
१	०.०१५७	१	०.००६९	१	०.००३३	१	०.००१७
२	०.०१५३	२	०.००६८	२	०.००३३	२	०.००१७
३	०.०१५०	३	०.००६६	३	०.००३२	३	०.००१७
४	०.०१४७	४	०.००६५	४	०.००३२	४	०.००१७
५	०.०१४४	५	०.००६४	५	०.००३१	५	०.००१६
६	०.०१४१	६	०.००६३	६	०.००३१	६	०.००१६
७	०.०१३८	७	०.००६२	७	०.००३०	७	०.००१६
८	०.०१३५	८	०.००६०	८	०.००३०	८	०.००१६
९	०.०१३२	९	०.००५९	९	०.००२९	९	०.००१५
१.८०	०.०१२९	२.२०	०.००५८	२.६०	०.००२९	३.००	०.००१५
१	०.०१२६	१	०.००५७	१	०.००२८	१	०.००१५
२	०.०१२४	२	०.००५६	२	०.००२८	२	०.००१५
३	०.०१२१	३	०.००५५	३	०.००२७	३	०.००१४
४	०.०११९	४	०.००५४	४	०.००२७	४	०.००१४
५	०.०११६	५	०.००५३	५	०.००२६	५	०.००१४
६	०.०११४	६	०.००५२	६	०.००२६	६	०.००१४
७	०.०११२	७	०.००५१	७	०.००२५	७	०.००१४
८	०.०१०९	८	०.००५०	८	०.००२५	८	०.००१३
९	०.०१०७	९	०.००४९	९	०.००२५	९	०.००१३
१.९०	०.०१०५	२.३०	०.००४८	२.७०	०.००२४	३.१०	०.००१३
१	०.०१०३	१	०.००४७	१	०.००२४	१	०.००१३
२	०.०१०१	२	०.००४७	२	०.००२३	२	०.००१३
३	०.००९९	३	०.००४६	३	०.००२३	३	०.००१२
४	०.००९७	४	०.००४५	४	०.००२३	४	०.००१२
५	०.००९५	५	०.००४४	५	०.००२२	५	०.००१२
६	०.००९३	६	०.००४३	६	०.००२२	६	०.००१२
७	०.००९१	७	०.००४३	७	०.००२२	७	०.००१२
८	०.००८९	८	०.००४२	८	०.००२१	८	०.००१२
९	०.००८७	९	०.००४१	९	०.००२१	९	०.००११

कोष्टक १ (पुढे चालू)

त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०	त्र/ख	ऋ०
३.२०	०.००११	३.४०	०.०००९	३.७५			
१	०.००११	१	०.०००८	ते	०.०००५		
२	०.००११	२	०.०००८	३.९०			
३	०.००११	३	०.०००८				
४	०.००११	४	०.०००८	३.९१			
५	०.००११	५	०.०००८	ते	०.०००४		
६	०.००१०	६	०.०००८	४.१२			
७	०.००१०	७	०.०००८				
८	०.००१०	८	०.०००८	४.१३			
९	०.००१०	९	०.०००८	ते	०.०००३		
				४.४३			
३.३०	०.००१०	३.५०		४.४४			
१	०.०००९	ते	०.०००७	ते	०.०००२		
२	०.०००९	३.६१		४.९०			
३	०.०००९						
४	०.०००९	३.६२ ते	०.०००६	४.९१			
५	०.०००९	३.७४		ते	०.०००१		
६	०.०००९			६.१५			
७	०.०००९						
८	०.०००९						
९	०.०००९						

२. **आयताकार क्षेत्रावरील समप्रमाण वितरित भार :** आयताकार क्षेत्राची रुंदी र आणि लांबी ल आहे. त्यावरील भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य भ आहे. या भारयुक्त क्षेत्राच्या एका कोपऱ्याच्या खाली ख खोलीवर असलेल्या ठ (आकृती १२० अ) या ठिकाणचे उभे लंबरूप प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$\Delta \text{ए}_{\text{ख}} = \text{भ} \, \text{ऋ}_{०}$$

ऋ० या प्रभावांकाचे मूल्य पुढील समीकरणावरून ठरविता येते :

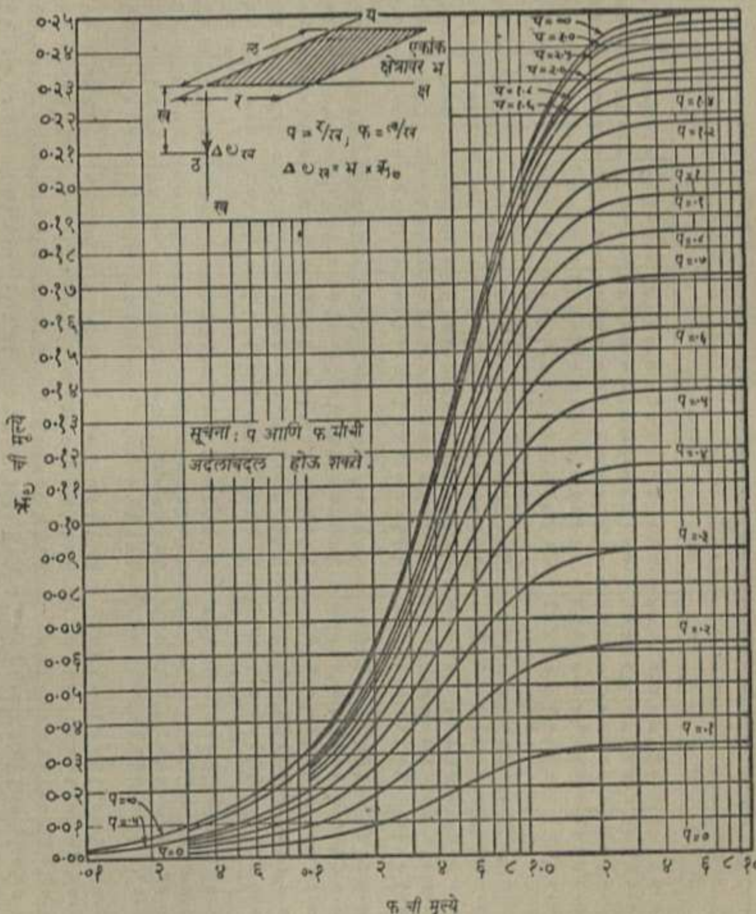
$$\text{ऋ}_{०} = \frac{१}{४\pi}\left[\frac{२\text{पफ}\sqrt{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+१}}{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+\text{प}^{२}\text{फ}^{२}+१}\cdot\frac{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+२}{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+१}\right.$$

$$\left.+\text{स्प}^{-१}\cdot\frac{२\text{पफ}\sqrt{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+१}}{\text{प}^{२}+\text{फ}^{२}+१-\text{प}^{२}\text{फ}^{२}}\right] \qquad १३६ [८]$$

येथे

$$\text{प} = \frac{\text{र}}{\text{ख}} \text{ आणि } \text{फ} = \frac{\text{ल}}{\text{ख}}$$

आहेत. प आणि फ हीं मूल्ये दिलेली असताना ऋ₀ ची मूल्ये आकृती १ मधील आलेखांवरून मिळतात. हे आलेख आर. ई. फॅदम यांनी सिद्ध केले आहेत. हीं मूल्ये पुढील कोष्टकांवरूनही मिळतात.



आकृती १ : समप्रमाण वितरित भार असलेल्या आयताकार क्षेत्राच्या एका कोपऱ्या· खाली असलेल्या ठ या ठिकाणच्या उभ्या लंबरूप प्रतिबलाच्या ($\Delta \sigma_{ख}$) बाबतीतील प्रभावांक ठरविण्यासाठी उपयुक्त असलेले आलेख.

कोष्ठक २

प	फ											
	०·१	०·२	०·३	०·४	०·५	०·६	०·७	०·८	०·९	१·०	०·२	०·४
०·१	०·००४७०	०·००९१७	०·०१३२३	०·०१६७८	०·०१९७८	०·०२२२३	०·०२४२०	०·०२५७६	०·०२६९८	०·०२७९४	०·०२९२६	०·०३००७
०·२	०·००९१७	०·०१७९०	०·०२५८५	०·०३२८०	०·०३८६६	०·०४३४८	०·०४७३५	०·०५०४२	०·०५२८३	०·०५४७१	०·०५७३३	०·०५८९४
०·३	०·०१३२३	०·०२५८५	०·०३७३५	०·०४७४२	०·०५५९३	०·०६२९४	०·०६८५८	०·०७३०८	०·०७६६१	०·०७९३८	०·०८३२३	०·०८५६१
०·४	०·०१६७८	०·०३२८०	०·०४७४२	०·०६०२४	०·०७१११	०·०८००९	०·०८७३४	०·०९३१४	०·०९७७०	०·१०१२९	०·१०६३१	०·१०९४१
०·५	०·०१९७८	०·०३८६६	०·०५५९३	०·०७१११	०·०८४०३	०·०९४७३	०·१०३४०	०·११०३५	०·११५८४	०·१२०१८	०·१२६२६	०·१३००३
०·६	०·०२२२३	०·०४३४८	०·०६२९४	०·०८००९	०·०९४७३	०·१०६८८	०·११६७९	०·१२४७४	०·१३१०५	०·१३६०५	०·१४३०९	०·१४७४९
०·७	०·०२४२०	०·०४७३५	०·०६८५८	०·०८७३४	०·१०३४०	०·११६७९	०·१२७७२	०·१३६५३	०·१४३५६	०·१४९१४	०·१५७०३	०·१६१९९
०·८	०·०२५७६	०·०५०४२	०·०७३०८	०·०९३१४	०·११०३५	०·१२४७४	०·१३६५३	०·१४६०७	०·१५३७१	०·१५९७८	०·१६८४३	०·१७३८९
०·९	०·०२६९८	०·०५२८३	०·०७६६१	०·०९७७०	०·११५८४	०·१३१०५	०·१४३५६	०·१५३७१	०·१६१८५	०·१६८३५	०·१७७६६	०·१८३५७
१·०	०·०२७९४	०·०५४७१	०·०७९३८	०·१०१२९	०·१२०१८	०·१३६०५	०·१४९१४	०·१५९७८	०·१६८३५	०·१७५२२	०·१८५०८	०·१९१३९
१·२	०·०२९२६	०·०५७३३	०·०८३२३	०·१०६३१	०·१२६२६	०·१४३०९	०·१५७०३	०·१६८४३	०·१७७६६	०·१८५०८	०·१९५८४	०·२०२७८
१·४	०·०३००७	०·०५८९४	०·०८५६१	०·१०९४१	०·१३००३	०·१४७४९	०·१६१९९	०·१७३८९	०·१८३५७	०·१९१३९	०·२०२७८	०·२१०२०
१·६	०·०३०५८	०·०५९९४	०·०८७०९	०·१११३५	०·१३२४१	०·१५०२८	०·१६५१५	०·१७७३९	०·१८७३७	०·१९५४६	०·२०७३१	०·२१५१०
१·८	०·०३०९०	०·०६०५८	०·०८८०४	०·११२६०	०·१३३९५	०·१५२०७	०·१६७२०	०·१७९६७	०·१८९८६	०·१९८१४	०·२१०३२	०·२१८३६
२·०	०·०३१११	०·०६१००	०·०८८६७	०·११३४२	०·१३४९६	०·१५३२६	०·१६८५६	०·१८११९	०·१९१५२	०·१९९९४	०·२१२३५	०·२२०५८
२·५	०·०३१३८	०·०६१५५	०·०८९४८	०·११४५०	०·१३६२८	०·१५४८३	०·१७०३६	०·१८३२१	०·१९३७५	०·२०२३६	०·२१५१२	०·२२३६४
३·०	०·०३१५०	०·०६१७८	०·०८९८२	०·११४९५	०·१३६८४	०·१५५५०	०·१७११३	०·१८४०७	०·१९४७०	०·२०३४१	०·२१६३३	०·२२४९९
४·०	०·०३१५८	०·०६१९४	०·०९००७	०·११५२७	०·१३७२४	०·१५५९८	०·१७१६८	०·१८४६९	०·१९५४०	०·२०४१७	०·२१७२२	०·२२६००
५·०	०·०३१६०	०·०६१९९	०·०९०१४	०·११५३७	०·१३७३७	०·१५६१२	०·१७१८५	०·१८४८८	०·१९५६१	०·२०४४०	०·२१७४९	०·२२६३२
६·०	०·०३१६१	०·०६२०१	०·०९०१७	०·११५४१	०·१३७४१	०·१५६१७	०·१७१९१	०·१८४९६	०·१९५६९	०·२०४४९	०·२१७६०	०·२२६४४
८·०	०·०३१६२	०·०६२०२	०·०९०१८	०·११५४३	०·१३७४४	०·१५६२१	०·१७१९५	०·१८५००	०·१९५७४	०·२०४५५	०·२१७६७	०·२२६५२
१०·०	०·०३१६२	०·०६२०२	०·०९०१९	०·११५४४	०·१३७४५	०·१५६२२	०·१७१९६	०·१८५०२	०·१९५७६	०·२०४५७	०·२१७६९	०·२२६५४
	०·०३१६२	०·०६२०२	०·०९०१९	०·११५४४	०·१३७४५	०·१५६२३	०·१७१९७	०·१८५०२	०·१९५७७	०·२०४५८	०·२१७७०	०·२६६५६

कोष्टक क्र. २ (पुढे चालू)

प	फ										
	१·६	१·८	२·०	२·५	३·०	४·०	५·०	६·०	८·०	१०·०	∞
०·१	०·०३०५८	०·०३०९०	०·०३१११	०·०३१३८	०·०३१५०	०·०३१५८	०·०३१६०	०·०३१६१	०·०३१६२	०·०३१६२	०·०३१६२
०·२	०·०५९९४	०·०६०५८	०·०६१००	०·०६१५५	०·०६१७८	०·०६१९४	०·०६१९९	०·०६२०१	०·०६२०२	०·०६२०२	०·०६२०२
०·३	०·०८७०९	०·०८८०४	०·०८८६७	०·०८९४८	०·०८९८२	०·०९००७	०·०९०१४	०·०९०१७	०·०९०१८	०·०९०१९	०·०९०१९
०·४	०·१११३५	०·११२६०	०·११३४२	०·११४५०	०·११४९५	०·११५२७	०·११५३७	०·११५४१	०·११५४३	०·११५४४	०·११५४४
०·५	०·१३२४१	०·१३३९५	०·१३४९६	०·१३६२८	०·१३६८४	०·१३७२४	०·१३७३७	०·१३७४१	०·१३७४४	०·१३७४५	०·१३७४५
०·६	०·१५०२८	०·१५२०७	०·१५३२६	०·१५४८३	०·१५५५०	०·१५५९८	०·१५६१२	०·१५६१७	०·१५६२१	०·१५६२२	०·१५६२३
०·७	०·१६५१५	०·१६७२०	०·१६८५६	०·१७०३६	०·१७११३	०·१७१६८	०·१७१८५	०·१७१९१	०·१७१९५	०·१७१९६	०·१७१९७
०·८	०·१७७३९	०·१७९६७	०·१८११९	०·१८३२१	०·१८४०७	०·१८४६९	०·१८४८८	०·१८४९६	०·१८५००	०·१८५०२	०·१८५०२
०·९	०·१८७३७	०·१८९८६	०·१९१५२	०·१९३७५	०·१९४७०	०·१९५४०	०·१९५६१	०·१९५६९	०·१९५७४	०·१९५७६	०·१९५७७
१·०	०·१९५४६	०·१९८१४	०·१९९९४	०·२०२३६	०·२०३४१	०·२०४१७	०·२०४४०	०·२०४४९	०·२०४५५	०·२०४५७	०·२०४५८
१·२	०·२०७३१	०·२१०३२	०·२१२३५	०·२१५१२	०·२१६३३	०·२१७२२	०·२१७४९	०·२१७६०	०·२१७६७	०·२१७६९	०·२१७७०
१·४	०·२१५१०	०·२१८३६	०·२२०५८	०·२२३६४	०·२२४९९	०·२२६००	०·२२६३२	०·२२६४४	०·२२६५२	०·२२६५४	०·२२६५६
१·६	०·२२०२५	०·२२३७२	०·२२६१०	०·२२९४०	०·२३०८८	०·२३२००	०·२३२३६	०·२३२४९	०·२३२५८	०·२३२६१	०·२३२६३
१·८	०·२२३७२	०·२२७३६	०·२२९८६	०·२३३३४	०·२३४९५	०·२३६१७	०·२३६५६	०·२३६७१	०·२३६८१	०·२३६८४	०·२३६८६
२·०	०·२२६१०	०·२२९८६	०·२३२४७	०·२३६१४	०·२३७८२	०·२३९१२	०·२३९५४	०·२३९७०	०·२३९८१	०·२३९८५	०·२३९८७
२·५	०·२२९४०	०·२३३३४	०·२३६१४	०·२४०१०	०·२४१९६	०·२४३४४	०·२४३९२	०·२४४१२	०·२४४२५	०·२४४२९	०·२४४३२
३·०	०·२३०८८	०·२३४९५	०·२३७८२	०·२४१९६	०·२४३९४	०·२४५५४	०·२४६०८	०·२४६३०	०·२४६४६	०·२४६५०	०·२४६५४
४·०	०·२३२००	०·२३६१७	०·२३९१२	०·२४३४४	०·२४५५४	०·२४७२९	०·२४७९१	०·२४८१७	०·२४८३६	०·२४८४२	०·२४८४६
५·०	०·२३२३६	०·२३६५६	०·२३९५४	०·२४३९२	०·२४६०८	०·२४७९१	०·२४८५७	०·२४८८५	०·२४९०७	०·२४९१४	०·२४९१९
६·०	०·२३२४९	०·२३६७१	०·२३९७०	०·२४४१२	०·२४६३०	०·२४८१७	०·२४८८५	०·२४९१६	०·२४९३९	०·२४९४६	०·२४९५२
८·०	०·२३२५८	०·२३६८१	०·२३९८१	०·२४४२५	०·२४६४६	०·२४८३६	०·२४९०७	०·२४९३९	०·२४९६४	०·२४९७३	०·२४९८०
१०·०	०·२३२६१	०·२३६८४	०·२३९८५	०·२४४२९	०·२४६५०	०·२४८४२	०·२४९१४	०·२४९४६	०·२४९७३	०·२४९८१	०·२४९८९
	०·२३२६३	०·२३६८६	०·२३९८७	०·२४४३२	०·२४६५४	०·२४८४६	०·२४९१९	०·२४९५२	०·२४९८०	०·२४९८९	०·२५०००

एन्. एम्. न्यूमार्क (१९३५) Simplified Computation of Vertical Pressures in Elastic Foundations : Circ. 24. Eng. Exper. Sta., University of Illinois.

३. **समप्रमाण-भारित, वर्तुळाकार क्षेत्राच्या मध्यबिंदूखाली येणारे उभे लंबरूप प्रतिबल :** वर्तुळाकार क्षेत्राची त्रिज्या *त्र* आहे. भाराचे एकांक क्षेत्रस्थ मूल्य *भ* आहे. या क्षेत्राच्या मध्यबिंदूच्या खाली *ख* खोलीवर असणाऱ्या ठिकाणी उभे लंबरूप प्रतिबल पुढीलप्रमाणे असते :

$$\text{७}_{\text{ख}} = \text{भ}\,\text{ऋ}_{\text{७}}$$

येथे

$$\text{ऋ}_{\text{७}} = \text{१} - \left[\frac{\text{१}}{\text{१} + (\text{त्रि}/\text{ख})^{\text{२}}} \right]^{\text{३}/\text{२}} \qquad \text{१३६ [४]}$$

आहे. पुढील कोष्टकात $\text{त्रि}/\text{ख}$ ची निरनिराळी मूल्ये घेऊन मिळणारी $\text{ऋ}_{\text{७}}$ ची मूल्ये दिलेली आहेत.

कोष्टक ३*

त्रि/ख	क्रω	त्रि/ख	क्रω	त्रि/ख	क्रω	त्रि/ख	क्रω
०.००	०.०००००	०.४०	०.१९९५९	०.८०	०.५२३८६	१.२०	०.७३७६३
१	०.०००१५	१	०.२०७९०	१	०.५३०७९	१	०.७४१४७
२	०.०००६०	२	०.२१६२७	२	०.५३७६३	२	०.७४५२५
३	०.००१३५	३	०.२२४६९	३	०.५४४३९	३	०.७४८९६
४	०.००२४०	४	०.२३३१५	४	०.५५१०६	४	०.७५२६२
५	०.००३७४	५	०.२४१६५	५	०.५५७६६	५	०.७५६२२
६	०.००५३८	६	०.२५०१७	६	०.५६४१६	६	०.७५९७६
७	०.००७३१	७	०.२५८७२	७	०.५७०५८	७	०.७६३२४
८	०.००९५२	८	०.२६७२९	८	०.५७६९२	८	०.७६६६६
९	०.०१२०३	९	०.२७५८७	९	०.५८३१७	९	०.७७००३
०.१०	०.०१४८१	०.५०	०.२८४४६	०.९९	०.५८९३४	१.३०	०.७७३३४
१	०.०१७८८	१	०.२९३०४	१	०.५९५४२	१	०.७७६६०
२	०.०२१२२	२	०.३०१६२	२	०.६०१४२	२	०.७७९८१
३	०.०२४८३	३	०.३१०१९	३	०.६०७३४	३	०.७८२९६
४	०.०२८७०	४	०.३१८७५	४	०.६१३१७	४	०.७८६०६
५	०.०३२८३	५	०.३२७२८	५	०.६१८९२	५	०.७८९११
६	०.०३७२१	६	०.३३५७९	६	०.६२४५९	६	०.७९२११
७	०.०४१८४	७	०.३४४२७	७	०.६३०१८	७	०.७९५०७
८	०.०४६७०	८	०.३५२७२	८	०.६३५६८	८	०.७९७९७
९	०.०५१८१	९	०.३६११२	९	०.६४११०	९	०.८००८३
०.२०	०.०५७१३	०.६०	०.३६९४९	१.००	०.६४६४५	१.४०	०.८०३६४
१	०.०६२६८	१	०.३७७८१	१	०.६५१७१	१	०.८०६४०
२	०.०६८४४	२	०.३८६०९	२	०.६५६९०	२	०.८०९१२
३	०.०७४४१	३	०.३९४३१		०.६६२००	३	०.८११७९
४	०.०८०५७	४	०.४०२४७	४	०.६६७०३	४	०.८१४४२
५	०.०८६९२	५	०.४१०५८	५	०.६७१९८	५	०.८१७०१
६	०.०९३४६	६	०.४१८६३	६	०.६७६८६	६	०.८१९५५
७	०.१००१७	७	०.४२६६२	७	०.६८१६६	७	०.८२२०६
८	०.१०७०४	८	०.४३४५४	८	०.६८६३९	८	०.८२४५२
९	०.११४०८	९	०.४४२४०	९	०.६९१०४	९	०.८२६९४
०.३०	०.१२१२६	०.७०	०.४५०१८	१.१०	०.६९५६२	१.५०	०.८२९३२
१	०.१२८५९	१	०.४५७८९	१	०.७००१३	१	०.८३१६७
२	०.१३६०५	२	०.४६५५३	२	०.७०४५७	२	०.८३३९७
३	०.१४३६३	३	०.४७३१०	३	०.७०८९४	३	०.८३६२४
४	०.१५१३३	४	०.४८०५९	४	०.७१३२४	४	०.८३८४७
५	०.१५९१५	५	०.४८८००	५	०.७१७४७	५	०.८४०६७
६	०.१६७०६	६	०.४९५३३	६	०.७२१६३	६	०.८४२८३
७	०.१७५०७	७	०.५०२५९	७	०.७२५७३	७	०.८४४९५
८	०.१८३१७	८	०.५०९७६	८	०.७२९७६	८	०.८४७०४
९	०.१९१३४	९	०.५१६८५	९	०.७३३७३	९	०.८४९१०

* आर.ई. फॅदम यांनी तयार केले व जे लेव्हिग्ज यांनी तपासले.

कोष्टक ३ (पुढे चालू)

त्रि/ख	ऋ$_0$	त्रि/ख	ऋ$_0$	त्रि/ख	ऋ$_0$	त्रि/ख	ऋ$_0$
१.६०	०.८५११२	१.९०	०.८९८९७	२.९०	०.९६५३६	८.००	०.९९८०९
१	०.८५३१२	१	०.९००२१	.९५	०.९६६९१		
२	०.८५५०७	२	०.९०१४३			९.००	०.९९८६५
३	०.८५७००	३	०.९०२६३	३.००	०.९६८३८		
४	०.८५८९०	४	०.९०३८२	.१०	०.९७१०६	१०.००	०.९९९०१
५	०.८६०७७	५	०.९०४९८	.२०	०.९७३४६		
६	०.८६२६०	६	०.९०६१३	.३०	०.९७५६१	१२.००	०.९९९४३
७	०.८६४४१	७	०.९०७२६	.४०	०.९७७५३		
८	०.८६६१९	८	०.९०८३८	.५०	०.९७९२७	१४.००	०.९९९६४
९	०.८६७९४	९	०.९०९४८	.६०	०.९८०८३		
				.७०	०.९८२२४	१६.००	०.९९९७६
१.७०	०.८६९६६	२.००	०.९१०५६	.८०	०.९८३५२		
१	०.८७१३६	.०२	०.९१२६७	.९०	०.९८४६८	१८.००	०.९९९८३
२	०.८७३०२	.०४	०.९१४७२				
३	०.८७४६७	.०६	०.९१६७२	४.००	०.९८५७३	२०.००	०.९९९८८
४	०.८७६२८	.०८	०.९१८६५	.२०	०.९८७५७		
५	०.८७७८७	.१०	०.९२०५३	.४०	०.९८९११	२५.००	०.९९९९४
६	०.८७९४४	.१५	०.९२४९९	.६०	०.९९०४१		
७	०.८८०९८	.२०	०.९२९१४	.८०	०.९९१५२	३०.००	०.९९९९६
८	०.८८२५०	.२५	०.९३३०१				
९	०.८८३९९	.३०	०.९३६६१			४०.००	०.९९९९८
		.३५	०.९३९९७	५.००	०.९९२४६		
१.८०	०.८८५४६	.४०	०.९४३१०	.२०	०.९९३२७	५०.००	०.९९९९९
१	०.८८६९१	.४५	०.९४६०३	.४०	०.९९३९६		
२	०.८८८३३	.५०	०.९४८७७	.६०	०.९९४५७	१००.०	१.०००००
३	०.८८९७४	.५५	०.९५१३४	.८०	०.९९५१०		
४	०.८९११२	.६०	०.९५३७४			∞	१.०००००
५	०.८९२४८	.६५	०.९५५९९	६.००	०.९९५५६		
६	०.८९३८२	.७०	०.९५८१०	.५०	०.९९६४८		
७	०.८९५१४	.७५	०.९६००९				
८	०.८९६४३	.८०	०.९६१९५	७.००	०.९९७१७		
९	०.८९७७१	.८५	०.९६३७१	.५०	०.९९७६९		

संदर्भ

आईकहॉर्न, डब्ल्यू.
—— (1931), *Uber die Zusammendruckung des Bodens infolge örtlicher Belastung*, Diss. Bergak. Freiberg; see also *Geologie u. Bauwesen*, Vol. 4 (1932), pp. 2-46.

एंगेस्सेर, एफ.
—— (1880), Geometrische Erddrucktheorie, *Z. Bauwesen*, Vol. 30, p. 189.
—— (1882), Uber den Erddruck gegen innere Stützwände, *Deut. Bauzeitg*, Vol. 16, pp. 91-93.

एरी, जी. बी.
—— (1862), On the Strains in the Interior of Beams, *Brit. Assoc. Advancement Sci. Rept. Meeting* 1862 (no volume number), pp. 82-86.

एहलेर्स, जी.
—— (1934), Dampfturbinenfundamente und damit zusammenhängende Fragen des Eisenbetonbaues, *Der Bauingenieur*, Vol. 15, pp. 295-298, 312-314.

ओह्दे, जे.
—— (1938), Zur Theorie des Erddruckes unter besonderer Berücksichtigung der Erddruck Verteilung, *Die Bautechnik*, Vol. 16, pp. 150-159, 176-180, 241-245, 331-335, 480-487, 570-571, 753-761.

काको, ए.
—— (1934), *Equilibre des Massifs à Frottement Interne*, Paris, Gauthier-Villard.
—— (1938), The Stability of Foundation Piles against Buckling under Axial Load, *Proc. Highway Res. Board*, 18th Ann. Meeting, Part II, Dec. 1938, pp. 112-119.
—— (1940), Dynamic Pile Driving Formulas, *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 27, pp. 6-27.
—— (1941), Foundation Stresses in an Elastic Solid with a Rigid Underlying Boundary, *Civil Eng.*, Vol. 11, pp. 666-667.

कारमान, टीएच्. व्ही.

—— (1926), Uber elastische Grenzzustände, *Proc. Second Congr. Applied Mechanics*, Zurich.

कासाग्रांद, ए.

—— (1936), Characteristics of Cohesionless Soils Affecting the Stability of Slopes and Earth Fills, *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 23, pp. 13-32.

—— (1937), Seepage Through Dams, *J. New England Water Works Assoc.*, Vol. 51, pp. 131-172.

कॅरिलो, एन्.

—— (1942*a*), Differential Equation of a Sliding Surface in an Ideal Saturated Plastic Soil, *J. Math. Physics*, Vol. 21, pp. 6-9.

—— (1942*b*), Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of Soils, *J. Math. Physics*, Vol. 21, pp. 1-5.

—— (1942*c*), *Investigations on Stability of Slopes and Foundations*, Doctor's thesis, Graduate School of Engineering, Harvard University.

कुमिंग्ज, ए. ई.

—— (1937), Discussion, *Trans. Am. Sci. Civil Engrs.*, Vol. 102, pp. 225-264.

कुल्मान, सी.

—— (1866), *Graphische Statik*, Zurich.

कूलोम सी. ए.

—— (1776), Essai sur une Application des Règles des Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique Relatifs à l'architecture, *Mém. acad. roy. prés. divers savants*, Vol. 7, Paris.

केन्. डब्ल्यू.

—— (1916), *Earth Pressure, Retaining Walls and Bins*, New York, John Wiley & Sons, Inc.

कोएनन्, एम्.

—— (1896), Berechnung des Seiten- und Bodendrucks in Silozellen, *Centrbl. Bauverwaltung*, Vol. 16, pp. 446-447.

कोकर, ई. जी. आणि फिलॉन् एल्. एन्. जी.

—— (1931), *Photo-Elasticity*, Cambridge (England), University Press.

कोझेनी, जे.
—— (1933), Theorie and Berechnung der Brunnen, *Wasserkr. u. Wasserwirtsch,* Vol. 28.

कोटर, एफ्.
—— (1888), Uber das Problem der Erddruckbestimmung, *Verhandl. Physik. Ges. Berlin,* Vol. 7, pp. 1-8.
—— (1892), Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, *Jahresber. deut. Math. Ver.,* Vol. 2 (1891-1892), pp. 75-150.
—— (1899), Der Bodendruck von Sand in vertikalen zylindrischen Gefässen, *J. Math.,* Vol. 120, pp. 189-241.

क्योगलेर, एफ्. आणि शायडिग्, ए.
—— (1927), Druckverteilung in Baugrunde, *Die Bautechnik,* Vol. 5 (1927), 6 (1928), 7 (1929).

क्रे, एच.
—— (1936), *Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes,* 5th ed., Berlin, W. Ernst u. Sohn, (1st ed., 1912).

क्रॉस, हार्डी
—— (1932), Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.,* Vol, 96, pp. 1-10.

क्लोव्हर, आर. ई. आणि कॉर्नवेल्, एफ्. ई.
—— (1941), Stability of Granular Materials, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.,* Vol. 67, pp. 1639-1656.

गार्डनर, डब्ल्यू.
—— (1936), The Role of the Capillary Potential in the Dynamics of Soil Moisture, *J. Agri. Research,* Vol. 53, pp. 57-60.

गिल्बॉय, जी.
—— (1934), Mechanics of Hydraulic Fill Dams, *J. Boston Soc. Civil Engrs.,* Vol. 21, pp. 185-205.

गोल्डर, एच्. क्यू.
—— (1942), The Ultimate Bearing Pressure of Rectangular Footings, *J. Inst. Civil Engrs.,* Vol. 18, Paper 5274, pp. 161-174.

ग्रिफिथ, जे. एच्.
—— (1929), The Pressures under Substructures, *Eng. Contr.,* Vol. 1, pp. 113-119.

ग्रे, एच्.
—— (1936), Stress Distribution in Elastic Solids, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Vol. 2, Cambridge, Mass., pp. 157-168.

ग्रॅनहोल्म्, एच्.
—— (1929), On the Elastic Stability of Piles Surrounded by a Supporting Medium, *Ingeniörs Vetenskaps Akad. Hand.* 89, Svenska Bokhandelscentralen, Stockholm.

ग्लॅनव्हिल, डब्ल्यू. एच., ग्राइम, जी. फॉक्स, ई. एन्. आणि डेव्हिस, डब्ल्यू. डब्ल्यू.
—— (1938), An Investigation of the Stresses in Reinforced Concrete Piles During Driving, *Dept. Sci. Ind. Research, Building Research Station (Great Britain)*, *Tech. Paper* 20.

झिमरमान, एच्.
—— (1888), *Die Berechnung des Eisenbahn Oberbaues,* Berlin, W. Ernst u. Sohn.

टाल्बोट, ए. एन्.
—— (1918), Progress Report of the Special Committee to Report on Stresses in Railroad Track, *Trans. Am. Soc. Civil Engs.*, Vol. 82, pp. 1191-1383.

टिट्झ, ई.
—— (1932), *Widerstand des Pfahles gegen wagrechte Kräfte,* Dissertation. (Tech. Hochschule Wien 1932.)

टिमोशेंको, एस्. पी.
—— (1934), *Theory of Elasticity,* New York, McGraw-Hill.
—— (1937), *Vibration Problems in Engineering,* D. Van Nostrand. 2nd ed., New York.
—— (1940), *Strength of Materials,* Part 1, 2d ed., New York, D. Van Nostrand.
—— (1941), *Strength of Materials,* Part 2, 2d ed., New York, D. Van Nostrand.

टेरझागी, के.
—— (1919), Die Erddruckerscheinungen, *Osterr. Wochenschr. öffentl. Baudienst,* Jg. 1919, Heft 17-19.
—— (1922), Der Grundbruch an Stauwerken und seine Verhütung, Forshheimer-Nummer der *Wasserkraft,* p. 445.
—— ((923), Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen, *Sitzber, Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa,* Vol. 132.

—— (1925), *Erdbaumechanik*, Vienna, F. Deuticke.

—— (1932), Bodenpressung und Bettungsziffer, *Osterr. Bauzeitung*, Heft 25, June 18, 1932.

—— (1934), Large Retaining-Wall Tests. I. Pressure of Dry Sand, *Eng. News-Record*, Vol. 112, pp. 136-140.

—— (1935), The Actual Factor of Safety in Foundations, *Structural Eng.* (London), Vol. 13, pp. 126-160.

—— (1936*a*), Critical Height and Factor of Safety of Slopes against Sliding, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., Vol. 1, pp. 156-161.

—— (1936*b*), A Fundamental Fallacy in Earth Pressure Computations, *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 23, pp. 71-88.

—— (1936*c*), Distribution of the Lateral Pressure of Sand on the Timbering of Cuts, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., Vol. 1, pp. 211-215.

—— (1936*a*), Effect of the Type of Drainage of Retaining Walls on the Earth Pressure, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., Vol. 1, pp. 215-218.

—— (1936*e*), Stress Distribution in Dry and in Saturated Sand above a Yielding Trap-Door, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., Vol. 1, pp. 307-311.

—— (1941), General Wedge Theory of Earth Pressure, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 106, pp. 68-97.

—— (1942*a*), Linerplate tunnels on the Chicago [Ill.] Subway, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.*, June 1942, pp. 862-899.

—— (1942*b*), Soil Moisture and capillary phenomena in soils, Ch. IXA in Vol. IX of *Physics of the Earth*, New York, McGraw-Hill.

टेरझागी, के. आणि फ्रोह्लिश्, ओ. के.

—— (1936), *Theorie der Setzung von Tonschichten*, Vienna, F. Deuticke. (French transl. by M. Adler, Théorie des Tassements des Couches Argileuses, Paris (1939), Dunod.)

टेलर, डी. डब्ल्यू.

—— (1937), Stability of Earth Slopes, *Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 24, pp. 197-246.

डार्सी, एच्.

—— (1856), Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Dijon.

डेगेबो

—— (1933), (Deutsche Forschungsgesellschaft fur Bodenmechanik) (1933), *Veröffentl.*, Heft 1, Berlin.

—— (Deutsche Forschungsgesellschaft fur Bodenmechanik) (1936), *Veröffentl.* Heft 4, Berlin.

थाईस, सी. व्ही.

—— (1940), The Source of Water Derived from Wells, *Civil Eng.*, Vol. 10, pp. 277-280.

द. सेंट व्हॅनॉ, एम्.

—— (1871), Formules des Augmentations, *J. Math.*, Vol. 16, pp. 275-307.

दॉर, एच्.

—— (1922), *Die Trafähigkeit der Pfähle*, Berlin, W. Ernst und Sohn.

नादई, ए.

—— (1931), *Plasticity*, New York, McGraw-Hill.

नोकेंटव्हेड, सी.

—— (1928), *Berechnung von Pfahlrésten*, Berlin, W. Ernst u. Sohn.

न्यूटन, जे.

—— (1726), *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 3d ed., Scholium to Corollary VI.

न्यूमार्क, एन्. एम्.

—— (1935), Simplified Computation of Vertical Pressures in Elastic Foundations, *Univ. Illinois Eng. Exper. Sta. Circular* 24.

पास्सर, डब्ल्यू.

—— (1935), Druckverteilung durch eine elastische Schichte, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa*, Vol. 144, pp. 267-275.

पोंसले, व्ही.

—— (1840), Mém. sur la Stabilité des Revêtements et de leur Fondations, *Mém. de L'Officier du génie*, Vol. 13.

प्रांड्ट्ल, एल्.

—— (1920), Uber die Härte plastischer Körper, *Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse.*

फादम, आर. ई.
—— (1941), *Influence Values for Vertical Stresses in a Semi-Infinite Solid Due to Surface Loads.* (Mimeographed copies at Graduate School of Engineering, Harvard University.)

फिलुंगेर, पी.
—— (1912), Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers, *Z. Math. Physik,* Vol. 60, pp. 275-285.

फेलेनिअस्, डब्ल्यू.
—— (1927), *Erdstatische Berechnungen,* Berlin, W. Ernst u. Sohn. (Revised edition 1939.)

फोर्शहायमर, फिलिप
—— (1917), Zur Grundwasserbewegung nach isothermischen Kurvenscharen, *Sitzber, kais. Akad Wiss. Wien, Abt. IIa, Vol.* 126, pp. 409-440.

फॉर्सेल, सी.
—— (1926), Knäcksäkerhet hos Palar och Palgrupper, Uppsats No.° 10, Festskrift, *Kungl. Väg-och Vattenbyggnadskaren (Stockholm)*, 1851-1926.

फ्रॉंटार्ड, एम्.
—— (1922), Cycloides de Glissement des Terres, *Compt. rend. hebdom. Acad. sci., Paris,* Vol. 174, pp. 526-528.

फ्रॉयंड, ए.
—— (1917), Theorie der gleichmässig elastisch gestützten Körper, *Beton u. Eisen,* Vol. 16, pp. 144-147, 165-167.
—— (1924), Beitrag zur Berechnung der biegsamen Gründungssohlen, *Z. Bauwesen,* Vol. 74 (Ingenieurbauteil), pp. 109-115.
—— (1927), Erweiterte Theorie für die Berechnung von Schleusenböden und ähnlichen Gründungskörpern, *Z. Bauwesen,* Vol. 77 (Ingenieurbauteil), pp. 73-88, 108-120.

फ्रोह्लिश्च, ओ. के.
—— (1934*a*), *Druckverteilung im Baugrunde,* Berlin, J. Springer.
—— (1934*b*), Elementare Druckverteilung und Verschiebungen im Elastisch-Isotropen Vollraum, *Der Bauingenieur,* Vol. 15, pp. 298-301; correction on p. 414.

फ्लेमिंग, आर.
— (1930), *Wind Stresses in Buildings,* New York, John Wiley & Sons, Inc.

बिओ, एम्. ए.
— (1935*a*), Effect of Certain Discontinuities on the Pressure Distribution in a Loaded Soil, *Physics,* Vol. 6, pp. 367-375.
— (1935*b*), Le Problème de la Consolidation des Matières Argilleuses sous une Charge, *Ann. soc. sci. Bruxelles,* Sér. B, Vol. 55, pp. 110-113.
— (1935*c*), Distributed Gravity and Temperature Loading in Two-Dimensional Elasticity Replaced by Boundary Pressures and Dislocations, *J. Applied Mechanics,* Vol. 57 of *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.,* pp. A41-A42.
— (1937), Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, *J. Applied Mechanics,* Vol. 59 of *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.,* pp. A1-A7.
— (1941*a*), General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *J. Applied Physics,* Vol. 12, pp. 155-164.
— (1941*b*), Consolidation under a Rectangular Load Distribution, *J. Applied Physics,* Vol. 12, pp. 426-430.
— (1942), Analytical and Experimental Methods in Engineering Seismology, *Proc. Am. Soc. Civil Engrs.,* January 1942, pp. 49-69.

बिओ, एम्. ए. आणि क्लिगन, एफ्. एम्.
— (1941), Consolidation Settlement of a Soil with an Impervious Top Surface, *J. Applied Physics,* Vol. 12, pp. 578-581.
— (1942), Bending Settlement of a Slab Resting on a Consolidating Foundation, *J. Applied Physics,* Vol. 13, pp. 35-40.

बीरबॉमर, ए.
— (1913), *Die Dimensionierung des Tunnelmauerwerkes,* Leipzig, W. Engelmann.

बुकी, पी. बी.
— (1931), Use of Models for the Study of Mining Problems, *Am. Inst. Mining Met. Engr. Tech. Pub.* 425, *Class A, Mining Methods,* No. 44.
— (1934), Application of Principles of Similitude to Design of Mine Workings, *Trans. Am. Inst. Mining Met. Engrs.,* Vol. 109, pp. 25-42.

बर्मिस्टर, डी. एम्.
—— (1938), Graphical Distribution of Vertical Pressure Beneath Foundations, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 103, p. 303-313.

बॉसिनेस्क, जे.
—— (1885), *Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques,* Paris, Gauthier-Villard.

बेव्हर, एल्. डी.
—— (1940), *Soil Physics,* New York, John Wiley & Sons, Inc.

बोरोविका, एच्.
—— (1936), Influence of Rigidity of a Circular Foundation Slab on the Distribution of Pressures over the Contact Surface, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics,* Cambridge, Mass., Vol. 2, pp. 144-149.
—— (1938), The Distribution of Pressure under a Uniformly Loaded Elastic Strip Resting on Elastic-Isotropic Ground, *Second Cong. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng.*, Final Report, VIII 3, Berlin.

ब्राह्ट्झ, जे. एच. ए.
—— (1933), Stress Distribution in Wedges with Arbitrary Boundary Forces, *Physics,* Vol. 4, pp. 56-65.
—— (1936), Rational Design of Earth Dams (*Pt. II of* Proposed Methods of Calculating the Stability of Earth Dams, by D. R. May and J. H. A. Brahtz), *Proc. Second Cong. Large Dams,* Washington, D.C., Vol. 4, pp. 543-577.
—— (1939), *Notes on Analytic Soil Mechanics,* U. S. Bureau of Reclamation, Denver, Colo.

ब्राह्ट्झ, जे. एच. ए. आणि सोरेन्स जे.
—— (1939), Direct Optical Measurement of Individual Principal Stresses, *J. Applied Physics,* Vol. 10, pp. 242-247.

ब्रिस्के, आर्.
—— (1927), Die Erdbebensicherheit von Bauwerken, *Die Bautechnik,* Vol. 5, pp. 425-430, 453-457, 547-555.

ब्रेनेक, एल्. आणि लोहमेयेर ई.
—— (1930), *Der Grundbau,* Vol. 2, 4th ed., p. 549, Berlin, 1930, W. Ernst und Sohn.

ब्लूम, एच्.

—— (1930), *Einspannungsverhältnisse bei Bohlwerken,* Diss. tech. Hochschule Braunschweig, 1930.

मस्कट, एम्.

——(1937), *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media,* New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.

मार्ग्युरे, के.

—— (1931), Druckverteilung durch eine elastische Schichte auf starrer, rauher Unterliage, *Ing. Archiv.* Vol. 2, pp. 108-117.

—— (1933), Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der dicken Platte, *Ing. Archiv,* Vol. 4.

माल्कन, सी. एम्.

—— (1909), *A Textbook on Graphic Statics,* New York, Myron C. Clark Publishing Co.

मिंड्लिन, आर्. डी.

—— (1936), Forces at a Point in the Interior Semi-Infinite Solid, *Physics,* Vol. 7, pp. 195-202.

—— (1939), Stress Distribution Around a Tunnel, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.,* Vol. 104, pp. 1714-1718.

मिश्, आर्.

—— (1930), Investigation of Piles Subject to Horizontal Forces, Application to Quay Walls, *J. School of Engin., Giza,* No. 4.

मेंडेनहॉल, टी. ई.

——(1888), On the Intensity of Earthquakes with Approximate Calculations of the Energy Involved, *Proc. Am. Assoc. Adv. Sci.,* Vol. 37, pp. 190-195.

मेलान, ई.

—— (1919), Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht, *Beton u. Eisen,* Vol. 18, pp. 83-85.

मोह्र, ओ.

—— (1871), *Beiträge zur Theorie des Erddruckes, Z. Arch. u. Ing. Ver. Hannover,* Vol. 17 (1871), p. 344, and Vol. 18 (1872), pp. 67, 245.

—— (1928), *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik,* 3d ed., revised by K. Bayer and H. Spangenberg, Berlin, W. Ernst u. Sohn.

मॅसेलवेन, जे. बी.
—— (1936), Introduction to Theoretical Seismology, Part 1, *Geodynamics*, New York, John Wiley & Sons, Inc.

याकी, जे.
—— (1936), Stability of Earth Slopes, *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., Vol. 2, pp. 125-129.
—— (1938), Die klassische Erddrucktheorie mit besonderer Rücksicht auf die Stützwandbewegung, *Abhandl. Intern. Verein. Brückenbau u. Hochbau* (*Trans. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng.*), Vol. 5, pp. 187-220.

यानसेन, एच्. ए.
—— (1895), Versuche über Getreidedruck in Silozellen, *Z. Ver. deut. Ing.*, Vol. 39, p. 1045.

युरगेनसन, एल्.
—— (1934), The application of Theories of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems, *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 21, pp. 206-241.

राऊश, ई.
—— (1936), Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben, Berlin, *Z. Ver. deut. Ing.* Verlag, 1 vol. (Vols. 2 and 3 not yet published in fall 1939).

रिफाट टी.
—— (1935), Die Spundwand als Erddruckproblem, *Mitt. Inst. Baustatik, Zürich.*

रिमस्टाड, आय्. ए.
—— (1937), Unpublished report.

रॅम्स्पेक, ए.
—— (1938), Die Anwendung dynamischer Baugrunduntersuchungen, *Die Bautechnik*, Vol. 16, pp. 85-86.

रूज्, ए. सी.
—— (1938), Earthquake Resistance of Elevated Water-Tanks, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 103, pp. 889-938.

रेसाल, जीन
—— (1910), *La Poussée des Terres, Deuxième Partie : Théorie des Terres Cohérantes*, Paris, Béranger.

रेडटेनबाखेर, एफ़.
—— (1859), *Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues.*

रेंडुलिक, एल्
—— (1935*a*), Der hydrodynamische Spannungsausgleich in zentral entwässerten Tonzylindern, *Wasserwirtsch, u. Technik,* Vol. 2, pp. 250-253, 269-273.
—— (1935*b*), Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit, *Der Bauingenieur,* Vol. 16, pp, 230-233.
—— (1936), Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen, *Der Bauingenieur,* Vol. 17, pp. 559-564.
—— (1937), Ein Grundgesetz der Tonmechanik und sein experimenteller Beweis, *Der Bauingenieur,* Vol. 18, pp. 459-467, see also *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics,* Cambridge, Mass., 1936, Vol. 3, pp. 48-51.
—— (1938), Der Erddruck im Strassenbau und Brückenbau, *Forschungsarb. Strassenwesen,* Bd. 10, Volk u. Reich Verlag, Berlin.

रेह्बान, जी.
—— (1871), *Theorie des Erddruckes und der Futtermauern*; Wien.

रैसनेर, ई.
—— (1936), Stationäre, axialsymmetrische durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, *Ing. Archiv,* Vol. 7, pp. 381-396.

रैसनेर एच.
—— (1909), Theorie des Erddrucks, *Encyklopädie math. Wiss.,* Vol. 4 (2, II, Heft 3), Leipzig, G. B. Teubner.
—— (1924), Zum Erddruckproblem, *Proc. 1st Intern. Congr. Applied Mechanics,* Delft (Holland).

रॅनकिन्, डब्ल्यू. जे. एम्.
—— (1857), On the Stability of Loose Earth, *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* Vol. 147.

लव्ह, ए. ई. एच्.
—— (1928), The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary, *Phil. Trans. Roy. Soc., London,* Series A., Vol. 228, pp. 377-420.
—— (1934), *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,* 4th ed., Cambridge (England), Univ. Press.

लाबुटिन, ए.
—— (1933), *Die graphische Berechnung von Pfahlrosten für Quaimauern*, Riga, Abh. d. lettländ. Univ.. Ingenieurabt, Reihe 1, 7.

लीट एल्. डॉन.
—— (1938), *Practical Seismology and Seismic Prospecting*, New York, D. Appleton-Century Co., Inc.
—— (1939), Ground Vibrations near Dynamite Blasts, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 29, pp. 487-496.

लेवी, एम्.
—— (1898), Sur la Légitimité de la Règle Dite du Trapèze dans l'étude de la Résistance des Barrages en Maçonnerie, *Compt. rend. hebdom. Acad. sci. Paris*, Vol. 126, pp. 1235-1240.

लोरेन्झ, एच्.
—— (1934), Neue Ergebnisse der dynamischen Baugrundforschung, *Z. Ver. deut. Ing.*, Vol. 78, pp. 379-385.

लोहमेयेर, ई.
—— (1930), Die Berechnung verankerter Bohlwerke, *Bautechnik*, Vol. 8, pp. 60-65.

विल्यम्स, एच्. ए.
—— (1937), Dynamic Distortions in Structures Subjected to Sudden Earth Shock, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 102, pp. 838-850.

विल्सन, बी. डी. आणि रिचर्ड्स, एस्. जे.
—— (1938), Capillary Conductivity of Peat Soils at Different Capillary Tensions, *J. Am. Soc. Agronomy*, Vol. 30, pp. 583-588.

वीगहार्ट, के.
—— (1922), Uber den Balken auf nachgiebiger Unterlage, *Z. angew. Math. u. Mach.*, Vol. 2, p. 165.

वूल्फ, के.
—— (1914), Zur Integration der Gleichung $\triangle\triangle F$ durch Polynome im Falle des Staumauerproblems, *Sitzber. kais. Akad. Wiss., Wien, Abt. IIa*, Vol. 123, pp. 281-311.
—— (1935), Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material, *Z. angew. Math. u. Mech.*, Vol. 15, pp. 249-254.

वेबर, हरमान

—— (1928), *Die Reichweite von Grundwasserabsenkungen mittels Rohrbrunnen*, Berlin, J. Springer.

वेस्टरगार्ड, एच्. एम्.

—— (1917), The Resistance of a Group of Piles, *J. Western Soc. Engrs.*, Vol. 22, pp. 704-713.

—— (1926), Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis, *Public Roads*, Vol. 7, pp. 25-35.

—— (1933*a*), Water Pressures on Dams During Earthquakes, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 98, pp. 418-433.

—— (1933*b*), Measuring Earthquake Intensity in Pounds per Square Foot, *Eng. Nefs-Record*, Vol. 110, p. 504.

—— (1933*c*), Earthquake-Shock Transmission in Tall Buildings, *Eng. News-Record*, Vol. III, pp. 654-656.

—— (1933*d*), Stresses at a Crack, Size of the Crack, and the Bending of Reinforced Concrete, *J. Am. Concrete Inst., Proc.*, Vol. 30, pp. 93-102.

—— (1938), A Problem of Elasticity Suggested by a Problem in Soil Mechanics: Soft Material Reinforced by Numerous Strong Horizontal Sheets, *Contrib. Mechanics of Solids*, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, New York, The Macmillan Co.

—— (1939), Bearing Pressures and Cracks, *J. Applied Mechanics*, Vol. 61 of *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, pp. A49-A53.

—— (1940), Plastic State of Stress around a Deep Well, *J. Boston Soc. Civil Engrs.*, Vol. 27, pp. 1-5.

व्हेटर, सी. पी.

—— (1939), Design of Pile Foundations, *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, Vol. 104, pp. 758-778.

व्होग्ट एफ्.

—— (1925), Uber die Berechnung der Fundamentdeformation, *Avhandl. kgl. Norske Videnskaps-Akad. Oslo, I., Mat.-Naturv. Klasse*, No. 2, Oslo.

व्हॉल्मी, ए.

—— (1937), Eingebettete Rohre, *Mitt. Inst. Baustatik, Eidgen. Tech. Hochschule, Zürich, Mitt.* No. 9.

शेपार्ड, ई. आर्.

—— (1935), Subsurface Exploration by Earth Resistivity and Seismic Methods, *Public Roads*, Vol. 16, pp. 57-67, 74.

शोएनवेलर, जी.

—— (1929), Calcul des Murs de Quai, *Proc. World Eng. Cong. Tokio*, Paper 416, Vol. 11, pp. 309-318.

श्मिड्, एच्.

—— (1926), *Statische Probleme des Tunnel- and Druckstollenbaues*, Berlin, J. Springer. (English transl. by C. Voetsch, U. S. Bur. Reclamation, Tech. Memo. 262, 1931.)

श्लायचर, एफ्.

—— (1926), Zur Theorie des Baugrundes, *Der Bauingenieur*, Vol. 7, pp. 931-935, 949-952.

साउथवेल, आर्. वी.

—— (1936), *An Introduction to the Theory of Elasticity*, London, Oxford University Press.

—— (1940), *Relaxation Methods in Engineering Science*, Oxford (England), Clarendon Press.

सामसियो, ए. एफ्.

—— (1931), Einfluss con Rohrbrunnen euf die Bewegung des Grundwassers, *Z. angnew. Math. u. Mech.*, Vol. 11, pp. 124-135.

सिफर्ट, ओ.

—— (1929), *Erddrucktafeln*, Berlin, J. Springer.

सिस्मॉस, हॅनोव्हर

—— *Dynamische Baugrund-Untersuchungen für den Industriebau* (Prospectus).

सुल्झबर्गर, जी.

—— (1927), Die Fundamente der Freileitungstragwerke und ihre Berechnung, *Bull. Schweiz. Electrotech. Verein.*

स्केम्पटन, ए. डब्ल्यू.

—— (1942), An Investigation of the Bearing Capacity of a Soft Clay Soil, *J. Inst. Civil Engrs.*, Vol. 18, Paper No. 1305, pp. 307-321.

स्टर्न, ओ.

—— (1908), *Das Problem der Pfahlbelastung*, Berlin, W. Ernst u. Sohn.

स्टाईनब्रेनर, डब्ल्यू.

—— (1934), Tafeln zur Setzungsberechnung, *Die Stresse*, Vol. 1, pp. 121-124; see also *Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics*, Cambridge, Mass., 1936, Vol. 2, pp. 142-143.

—— (1937), Der zeitliche Verlauf einer Grundwasserabsenkung, *Wasserwirtsch. u. Technik*, Vol. 4, pp. 27-33.

स्ट्रोहश्नायडर, ओ.

—— (1912), Elastische Druckverteilung und Drucküberschreitung in Schüttungen, *Sitzber. kais. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa*, Vol. 121, pp. 299-336.

हयाशी, के.

—— (1921), *Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage*, Berlin, J. Springer.

हाबेल, ए.

—— (1937), Die auf dem elastisch-isotropen Halbraum aufruhende zental-symmetrisch belastete elasticide Kreisplate, *Der Bauingenieur*, Vol. 18, pp. 188-193.

—— (1938), Näherungsberechnung des auf dem elastisch-isotropen Halbraum aufliegenden elastischen Balkens, *Der Bauingenieur*, Vol. 19, pp. 76-80.

हैनरिक, जी.

—— (1938), Wissenchaftliche Grundlagen der Theorie der Setzung von Tonschichten, *Wasserkraft u. Wasserwirtsch.*, Vol. 33, pp. 5-11.

हीले, ए.

—— (1930), Pile Driving Calculations, *Structural Eng.*, London, Vol. 8, pp. 246-259, 278-288.

हेलँड्, सी. ए.

—— (1940), *Geophysical Exploration*, Nw York, Prentice Hall Inc.

हिल्टशेर, आर्.

—— (1938), Polarisations Untersuchung des räumlichen Spannungszustandes in Konvergenten Licht, *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, Vol. 9, pp. 91-103.

हौसेल, डब्ल्यू. एस्.
—— (1929), A Practical Method for the Selection of Foundations Based on Fundamental Research in Soil Mechanics, *Univ. Michigan, Ann Arbor, Dept. Eng. Research Bull.* 13.

हेद्दे, पी.
—— (1929), Einflusslinien zur statistician Untersuchung der Grundbauwerke, *Der Bauingenieur*, Vol. 70, pp. 1-6.

होल, डी. एल्.
—— (1941), Plane-Strain Distribution of Stress in Elastic Media, *Iowa Eng. Exp. Sta., Iowa State College, Bull.* 148.

लेखकसूची

विषयसूची

न

प

ह

क्ष

शुद्धिपत्रक

पृष्ठ	स्थान	मुद्रित	शुद्ध मुद्रित
४	वरून ६ वी ओळ	वास्तुरचना पूर्वकल्पात	वास्तुरचना-पूर्वकल्पात
६	वरून २ री ओळ	टाकांस	टोकांस
९	खालून ११ वी ओळ	प्रातबलपरिस्थिती	प्रतिबलपरिस्थिती
११	खालून ३ री ओळ	स्थयी	स्थायी
२२	खालून ७ वी ओळ	आ. ५ मधील	आ. ५ (अ) मधील
२४	आकृती ६ (आ)	◎	◎ ध्रु
२५	खालून १० वी ओळ	ज्याचे	ज्याच्या
२८	वरून ४ थी ओळ	पदार्थांचे	पदार्थांच्या
२८	खालून १४ वी ओळ	ω ची	ω यांची
३२	खालून ३ री ओळ	समपार्श्वखंड	समपार्श्व खंड
३७	खालून ११ वी ओळ	समापार्श्वखंडाच्या	समपार्श्व खंडाच्या
३९	वरून १ ली ओळ	लंबदिक	लंबदिक्
३९	खालून ११ वी ओळ	पृष्ठभागाचे	पृष्ठभागाच्या
४३	वरून ६ वी ओळ	उगमबिंदतून	उगमबिंदूतून
४६	आकृती १२ (ई)	४५° + ω / २	४५° − ω / २
४६	खालून २ री ओळ	खालीखाली	खाली
५०	वरून २ री ओळ	स्थापत्य व्यवहारात	स्थापत्य–व्यवहारात
५१	आकृती १४ (उ)	डाव्या बाजूस खाली ⅔	—
५३	समी. १० (१)	७ आ$^{\circ}$	७ आ$_{0}$
५७	खालून १५ वी ओळ	ग्रंथित	ग्रथित
६३	आकृती १५ वर्णन		
	१ ली ओळ	घनपदाथात	घनपदार्थात
	२ री ओळ	अधा	अर्धा
८१	आकृती १७ (आ)	४५° − ω २	४५° − ω/२
		४५° + ω २	४५° + ω/२
	वर्णन १ ली ओळ	वालुकाथसंपैकी	वालुकाथरांपैकी
८९	खालून १३ वी ओळ	छेदन	छेदून
९१	वरून १ ली ओळ	पार्श्वीय	पार्श्वीय
९२	पृष्ठशीर्षक	आवारभिंतविषयक	आधारभिंतविषयक
९२	खालून ३ री ओळ	असणारेविचलन	असणारे विचलन
९३	खालून १४ वी ओळ	वक्रपृष्ठ	वक्र पृष्ठ
९४	खालून ४ थी ,, ५ वी ,, ६ वी ,, ७ वी ,, १० वी ,,	ರ$_1$ (कानडी र)	ಶ$_1$ (कानडी श)
९७	वरून २ री ,,	क	कु

पृष्ठ	स्थान	मुद्रित	शुद्ध मुद्रित
११२	पृष्ठशीर्षक	आधारभितविषयक	आधारभिंतविषयक
११५	पृष्ठशीर्षक	समीकर्षणगुणी	समाकर्षणगुणी
१२२	खालून ४ थी ओळ	कारकविंदूचे	कारकबिंदूचे
१२६	आकृती ३३ (अ)	ल/२	$\text{ल}_{\text{२}}$
१३०	खालून ३ री ओळ	$\text{च}_{\text{१}}$	अ
१३४	खालून ५ वी ,,	$\text{साम}_{\text{१}}$	$\text{सामृ}_{\text{१}}$
१४९	समी ९ (इ)	स्प_{ω}	$\text{स्प}\ \omega$
१६०	आकृती ४० वर्णन		आधार कुमिंग्ज (१९४०)
१६४	खालून १२ वी ओळ	(१९३०)	(१९४०)
१६८	खालून ४ थी ,,	ग्लोव्हर	क्लोव्हर
१७६	वरून ७ वी ,,	(टेरझागी १९३६ अ)	(टेरझागी १९३६ अ) मध्ये
	वरून १४ वी ,,	कारणास्तव	कारणांस्तव
२२९	समी. क्र.	[२]	[१]
२२९	समी. २ वरची १ ली ओळ	पूर्वता	पूर्तता
२५४	आकृती ६६	वर्णन मुद्रित केले गेलेले नाही	आकृती ६६ : मृत्तिकाधारी फलकभिंतीच्या दोन्ही बाजूंवर येणाऱ्या आडव्या दाबाचे वितरण (अ) खरे (आ) गृहीत धरलेले
२७८	वरून १ ली ओळ	समसंचितरेषा	समदाबसंचितरेषा
२८६	खालून ३ री ,, (समीकरण)	$\text{उ}_{\text{अ}} = \text{घज}_{\text{चज}}$	$\text{उ}_{\text{ज}} = \text{घ}_{\text{ज}}\,\text{च}_{\text{ज}}$
३१२	समी.४ वरची ३ री ,,	चेठ	ठचे
३२०	समी. ८ खालची ४ थी ओळ	१९६६	१९३६
३२६	वरून ३ री ओळ	अंतिमभार	अंतिम भार
३२८	समी. १	$\frac{\partial \text{उ}^{२}}{\partial \text{ख}^{२}}$	$\frac{\partial^{२} \text{उ}}{\partial \text{ख}^{२}}$
३४८	वरून ६ वी ओळ	येते	येते.
३५२	समी. क्र. १	[१	[१]
३६१	समी. क्र. ३ [आ]	$\frac{\partial \text{उ}}{} = \circ$	$\frac{\partial \text{उ}}{\partial \text{ख}} = \circ$
३६८	वरून ५ वी ओळ	मृकण	मृत्कण
	,, १४ वी ,,	आ	$\text{आ}_{\text{ख}}$
	,, २५ वी ,,	$\text{आ}_{\text{अ}}$	$\text{आ}_{\text{अं}}$
३७२	परिछेद १२१ २ री ओळ	अंर्तभागाकडे	अंतर्भागाकडे
	९ वी ,,	अंर्तभागातून	अंतर्भागातून

पृष्ठ	स्थान	मुद्रित	शुद्ध मुद्रित
३७३	आकृती १०१ वर्णन २ री ओळ	केशाकर्षण	केशाकर्षण-
३७५	बारीक मजकूर ३ री ओळ	होतात,	होतात
३७९	शेवटचे समीकरण	$\text{ग}_{\text{व}}$	$\text{ग}_{\text{बा}}$
३८०	बारीक मजकूर खालून २ री ओळ	अधस	अधस्
३९१	परिच्छेद १२३ शीर्षक	निम्नस्तर प्र–तिक्रियेची	निम्नस्तर–प्रतिक्रियेची
३९५	समीकरण [५]	(ग्रॅम सेंमी.$^{-3}$	(ग्रॅम सेंमी.$^{-3}$)
४२१	खालून ३ री ओळ	कॅसाग्रांड	कॅसाग्रांद
४४२	समीकरण [१]	$\dfrac{\text{१}-\text{पॉ}^{\text{२}}_{\text{नि}}}{-\text{पॉ}^{\text{२}}}$	$\dfrac{\text{१}-\text{पॉ}^{\text{२}}_{\text{नि}}}{\text{१}-\text{पॉ}^{\text{२}}_{\text{पा}}}$
४४९	खालून ५ वी ओळ	वालुका थराच्या	वालुकाथराच्या
	,, २ री ,,	मागाचा	मार्गांचा
४५४	समीकरण [६]	$\int^{\infty}$	$\int_{0}^{\infty}$
४५५	आकृती १२९ (आ)	$\text{थ}\begin{pmatrix}\text{न}\\ \text{त्र}\end{pmatrix}$	$\text{थ}\left(\dfrac{\text{न}}{\text{त्र}}\right)$
		$\text{थ}_{\text{२}}\begin{pmatrix}\text{न}\\ \text{त्र}\end{pmatrix}$	$\text{थ}_{\text{२}}\left(\dfrac{\text{न}}{\text{त्र}}\right)$
४६०	खालून १ ली ओळ	$\text{त्व}^{\text{क}}$–घर्षण	त्वक्–घर्षण
४६१	खालून १४ वी ओळ	स्थिति थापक	स्थितिस्थापक
४६४	वरून ४ थी ओळ	ह्याच्या	त्याच्या
४७१	आकृती १३३ वर्णन ५ वी ओळ	वालुका	वालुका
४८१	वरून ६ वी ओळ	जवळवजळ	जवळजवळ
४८४	समी. ७	$\text{४}\dfrac{\text{भ}}{\text{यं}}.\dfrac{}{\text{ड}_{\text{१}}}.\text{ड}_{\text{१}}.\,\text{ऋ}_{\text{न}}$	$\text{४}\dfrac{\text{भ}}{\text{यं}}.\dfrac{\text{र}}{\text{ड}_{\text{१}}}.\,\text{ड}_{\text{१}}\,\text{ऋ}_{\text{न}}$
४८९	खालून १ ली ओळ	धरणांन	धरणांना
४९०	वरून १५ वी ,,	पद्धनतीन	पद्धतीने
	खालून ६ वी ,,	प्रारूपासठी	प्रारूपासाठी
४९२	वरून १ ली ,,	प्रधान-प्रतिबलाल	प्रधान प्रतिबलाला
५०४	वरून १२ वी ओळ	वृहदीकरणाच्या	बृहदीकरणाच्या
५२१	वरून १ ओळ	$\text{म}_{\text{त्व}}^{\text{ड}}$	$\text{म}_{\text{त्व}}^{\text{ड}}$
५२९	खालून ४ थी ,,	[	[३]
५४४	परि. क्रमांक ,, (वरचा)	परि. १३४	परि. १६४

१६. आयुर्वेदीय शब्दकोश : भाग १ व २ (संस्कृत-संस्कृत-मराठी) संपादक-पं. वेणीमाधवशास्त्री जोशी आणि कै. पं. ना. ह. जोशी, पृष्ठे २८+१७२१, किंमत रु. ७५.००

१७. वैज्ञानिक पारिभाषिक संज्ञाकोश : (पदार्थविज्ञान, रसायनशास्त्र, आणि गणितशास्त्र यांतील पारिभाषिक शब्दांची सूची) संपादक-प्रा. गो. रा. परांजपे, पृष्ठे ९+३५७, किंमत रु. १०.००

१८. ग्रह-गणित मालिका : लेखक-कै. द. वे. केतकर, पृष्ठे १८+१०३०, किंमत रु. २३.००

१९. मधुमेह : लेखक-डॉ. म. ग. गोगटे, पृष्ठे १११; किंमत रु. २-२५.

२०. कातनयंत्राचे अंतरंग : लेखक-श्री. शं. गो. भिडे, पृष्ठे १२६, किंमत रु. १.९५ (सचित्र).

२१. मानवी देह : भाग १ (खंड १ व २) लेखक-डॉ. म. वि. आपटे, पृष्ठे ८७६, किंमत रु. १८.०० (सचित्र).

२२. मानवी देह : भाग २ : लेखक-डॉ. म. वि. आपटे, पृष्ठे ५७६, किंमत ११.०० (सचित्र).

२३. वनश्रीसृष्टी : भाग २ : लेखक-डॉ. म. वि. आपटे, पृष्ठे ५८४, किंमत रु. १०-०० (सचित्र).

२५. सृष्टिज्ञान आकाशदर्शन ॲटलास : संपादक-डॉ. गो. रा. परांजपे, पृष्ठे २६९, किंमत रु. १२.५० (सचित्र)

२६. रेकॉर्ड प्लेअर : श्री. श्री. वि. सोहोनी, पृष्ठे ८+१५५, किंमत ३.८५ (सचित्र).

२७. अंतरिक्ष दर्शन : लेखक-श्री. व्यं. ग. गोखले, पृष्ठे १२+२४० किंमत रु. २२.५० (सचित्र)

२८. मानवी शरीर विज्ञान : लेखक-कै. डॉ. व्यं. र. साने, पृष्ठे १६+७१७, किंमत रु. २४.०० (सचित्र)

२९. "पाश्चात्य रोग चिकित्सा" : खंड १ व २ (बोमाँ लिखित "Medicine : Essentials for Practitioners & Students") अनुवादक : डॉ. मधुकर रानडे, पृष्ठे ६०० (प्रत्येकी) किंमत रु. २४ (प्रत्येकी) (सचित्र)

महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळाची विज्ञानमालेतील आगामी प्रकाशने :

१. धरणांचे स्थापत्यशास्त्र : खंड १, २, व ३ (क्रीगर, जस्टिन, व हाईण्डस लिखित "Engineering for Dams" Vols. I, II & III) अनुवादक : श्री. वि. ह. केळकर

२. स्त्री-रोगचिकित्सा : (डॉ. के. एम. मसानी लिखित "A Text Book of Gynaecology") अनुवादक : डॉ. मधुकर रानडे.

३. कॉंक्रिट मॅन्युअल : ("Concrete Manual" by U. S. Department of the Interior Bureau of Reclamation) अनुवादक : श्री. वि. ह. केळकर,

४. उष्णताविज्ञान : ("Warmelehre"—by Robert W. Pohl) अनुवादक : प्रा. रा. द. गोडबोले.

५. गणिती तत्त्वज्ञानाचा परिचय : ("Introduction to Mathematical Philosophy" by Bertrand Russell) अनुवादक : प्रा. म. रा. राईलकर.

६. प्रसूतिविद्या ("A Text-Book of Obstetrics" by Dr. K. M. Masani) अनुवादक : डॉ. मधुकर रानडे.

७. **"Operation and Contract of Water Treatment Processes" by C. R. Cox** : अनुवादक : प्रा. सुरेश वि. रानडे.

८. **"Theories and Practices of Industrial Waste Treatment"** by Nelson Leonard Nelmerow —अनुवादक : प्रा. अशोक पां. हसबनीस.

९. पशोद्भव विकार : लेखक : म. रा. देव

१०. वस्त्रोद्योग : लेखक-श्री. न. गो. देवधर

११. बुद्धिबळे : लेखक-श्री. ना. रा. वडनप

१२. प्रकाशचित्रणकला : लेखक-श्री. के. बा. गोडबोले

१३. यंत्रकाम १ : लेखक-श्री. शं. गो. सिंदे