बर्ट्रान्ड रसेल

गणिती तत्त्वज्ञानाचा परिचय

अनुवादक

प्रा. म. रा. राईलकर

साहित्य आणि संस्कृति मंडळ
महाराष्ट्र राज्य

भाषांतरमाला क्र. ६१

गणिती तत्त्वज्ञानाचा परिचय

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHILOSOPHY

by

Bertrand Russell

या ग्रंथाचा मराठी अनुवाद

अनुवादक :
प्रा. म. रा. राईलकर
(स. प. महाविद्यालय, पुणे)

साहित्य आणि संस्कृति मंडळ
महाराष्ट्र राज्य

महाराष्ट्र राज्य साहित्य–संस्कृति मंडळ, मुंबई

प्रथमावृत्ती : जानेवारी १९७५ (शके १८९६)

प्रकाशक :
सचिव,
महाराष्ट्र राज्य साहित्य-संस्कृति मंडळ,
सचिवालय, मुंबई-४०० ०३२

मूळ प्रकाशक :

Ruskin House, 40 Museum street,
LONDON WCIA ILU.

मुद्रक :
नाना डेंगळे,
व्यवस्थापक,
साधना प्रेस,
४३०-३१ शनिवार पेठ,
पुणे-४११ ०३०

किंमत : रु. ९-५०

निवेदन

आधुनिक शास्त्रे, ज्ञानविज्ञाने, तंत्र आणि अभियांत्रिकी इत्यादी क्षेत्रांत त्याचप्रमाणे भारतीय प्राचीन संस्कृती, इतिहास, कला इत्यादी विषयांत मराठी भाषेला विद्यापीठाच्या स्तरावर ज्ञानदान करण्याचे सामर्थ्य यावे हा उद्देश लक्षात घेऊन साहित्य-संस्कृति मंडळाने वाङ्मय निर्मितीचा विविध कार्यक्रम हाती घेतला आहे. मराठी विश्वकोश, मराठी भाषेचा महाकोश, वाङ्मयकोश, विज्ञानमाला, भाषांतरमाला, आंतरभारती–विश्वभारती, महाराष्ट्रेतिहास इत्यादी योजना या कार्यक्रमात अंतर्भूत केल्या आहेत.

२. मराठी भाषेला विद्यापीठीय भाषेचे प्रगल्भ स्वरूप व दर्जा येण्याकरिता मराठीत विज्ञान, तत्त्वज्ञान, सामाजिक शास्त्रे आणि तंत्रविज्ञान या विषयांवरील संशोधनात्मक व अद्ययावत माहितीने युक्त अशा ग्रंथांची रचना मोठ्या प्रमाणावर होण्याची आवश्यकता आहे. शिक्षणाच्या प्रसाराने मराठी भाषेचा विकास होईल, ही गोष्ट तर निर्विवादच आहे. पण मराठी भाषेचा विकास होण्यास आणखीही एक साधन आहे आणि ते साधन म्हणजे मराठी भाषेत निर्माण होणारे उत्कृष्ट वाङ्मय हे होय. जीवनाच्या भाषेतच ज्ञान व संस्कृती यांचे अधिष्ठान तयार व्हावे लागेल. जोपर्यंत माणसे परकीय भाषेच्याच आश्रयाने शिक्षण घेतात, कामे करतात व विचार व्यक्त करतात, तोपर्यंत शिक्षण सकस बनत नाही. संशोधनाला परावलंबित्व राहते व विचाराला अस्सलपणा येत नाही; एवढेच नव्हे तर वेगाने वाढणाऱ्या ज्ञानविज्ञानापासून सर्वसामान्य माणसे वंचित राहतात.

३. संस्कृत व अन्य भारतीय भाषांतील आणि त्याचप्रमाणे इंग्रजी, फ्रेंच, जर्मन, इटालियन, रशियन, ग्रीक, लॅटिन इत्यादी पश्चिमी भाषांतील अभिजात ग्रंथांचे व उच्च साहित्यामधील विशेष निवडक पुस्तकांचे भाषांतर किंवा सारांश–अनुवाद अथवा विशिष्ट विस्तृत ग्रंथांचा आवश्यक तेवढा परिचय करून देणे हा भाषांतरमालेचा उद्देश आहे.

४. भाषांतर योजनेतील पहिला कार्यक्रम मंडळाने आखून, ज्यांना अग्रक्रम दिला पाहिजे अशी पाश्चात्य व भारतीय भाषांतील सुमारे ३०० पुस्तके निवडली आहेत. होमर, व्हर्जिल, इस्किलस्, ॲरिस्टोफेनिस, युरिपिडिस्, प्लेटो, ॲरिस्टॉटल, थॉमस् ॲक्वाइनस्, न्यूटन, डार्विन, रूसो, कान्ट, हेगल, जॉन स्टुअर्ट मिल, गटे, शेक्सपीअर, टॉलस्टॉय्, दोस्तएव्स्की, कॅसिरेर, गॉर्डन् व्ही. चाइल्ड इत्यादिकांचा या भाषांतरमालेत समावेश केला आहे. संस्कृतमधील वेद, उपनिषदे, महाभारत, रामायण, भरताचे नाट्यशास्त्र, संगीत-रत्नाकर, ध्वन्यालोक, प्राकृतातील गाथासप्तशती, त्रिपिटकातील निवडक भाग इत्यादिकांचाही या भाषांतरमालेत समावेश केला आहे.

५. मंडळाच्या भाषांतर योजनेखाली मंडळाने आतापर्यंत अनेक अभिजात ग्रंथांची भाषांतरे प्रकाशित केली आहेत. जॉन स्टुअर्ट मिलचे " On Liberty ", रूसोचे

" Social Contract ", एम्. एन्. रॉयचे " Reason, Romanticism & Revolution " व " Letters from Jail ", स्तानिस्लावस्कीचे " An Actor Prepares ", तुर्गेनेवचे " Fathers & Sons ", रायशेनबाखचे " Rise of Scientific Philosophy ", गन्नर मिरदालचे " Economic Theory and Underdeveloped Regions ", कै. पां. वा. काणे यांचे " History of Dharmashastra ", कोपलँडचे " Music & Imagination ", बर्ट्रान्ड रसेलचे " Religion & Science ", तेरझागोचे " Theoretical Soil Mechanics ", विशाखदत्तचे " मुद्राराक्षसम् ", भरतमुनींचे " भरतनाट्यशास्त्र " (अध्याय ६ व ७ आणि अध्याय १८ व १९), निकोलाय मनुचीचे " Storia Do Mogor ", ए. सी. पिगूलिखित " Socialism Vs. Capitalism " इत्यादी पुस्तकांची भाषांतरे व सारानुवाद प्रकाशित झाले आहेत.

६. बर्ट्रान्ड रसेललिखित " Introduction to Mathematical Philosophy " या पुस्तकाचा मराठी अनुवाद प्रा. म. रा. राईलकर, स. प. महाविद्यालय, पुणे यांनी केला असून तो मंडळाच्या भाषांतरमालेखाली " गणिती तत्त्वज्ञानाचा परिचय " या शीर्षकाने प्रकाशित करण्यास मंडळास आनंद होत आहे.

७. या पुस्तकाचा मराठी अनुवाद प्रकाशित करण्यास मंडळास परवानगी दिल्याबद्दल जॉर्ज ॲलन ॲण्ड अनविन लि., लंडन या प्रकाशन संस्थेचे मी मनःपूर्वक आभार मानतो.

लक्ष्मणशास्त्री जोशी,
अध्यक्ष
महाराष्ट्र राज्य
साहित्य संस्कृति मंडळ,
सचिवालय, मुंबई– ३२.

वाई :
११ पौष, १८९६
१ जानेवारी, १९७५.

प्रस्तावना

ह्या पुस्तकाचा हेतू केवळ "परिचय" करून देणे इतकाच आहे, आणि ज्या प्रश्नांचा ऊहापोह त्यात केलेला आहे त्यांचे सविस्तर विवेचन देण्याचा नाही. तार्किक प्रतीक–पद्धतीवर प्रभुत्व असणाऱ्यांनाच आजवर जे समजणे शक्य होते त्यांपैकी काहींची माहिती नवशिक्यांनाही समजेल अशा रूपात पुढे मांडणे आवश्यक वाटले. ज्यांच्याबद्दल अद्यापिही गंभीर स्वरूपाच्या शंका आहेत अशा प्रश्नांसंबंधीचा हटवादीपणा टाळण्याचा आटोकाट प्रयत्न केला आहे, आणि ह्या प्रयत्नाचाच काहीसा प्रभाव यात घेतलेल्या विषयांच्या निवडीवर झाला आहे. गणिती तत्त्वज्ञानाचा आरंभीचा भाग त्याच्यानंतरच्या भागाइतका खात्रीलायकरीत्या माहिती नसतो, पण तत्त्वज्ञानाच्या दृष्टीने तो निदान तितका-तरी महत्त्वाचा असतोच. पुढील प्रकरणामधून जे काय मांडले आहे त्यांतील पुष्कळशा भागाला "तत्त्वज्ञान" म्हणणे योग्य होणार नाही, पण त्यांच्याविषयीचे शास्त्र समाधान-कारकपणे जोवर निर्माण झालेले नव्हते तोवर संबंधित विषयांचा अंतर्भाव तत्त्वज्ञानातच केला जात असे. उदाहरणार्थ, अनंत आणि सांतत्य यांचा अंतर्भाव पूर्वी तत्त्वज्ञानात करीत; पण सध्या तो गणितात होतो. ज्या शास्त्रीय विषयांची निर्मिती या क्षेत्रात झाली आहे त्यांचा अंतर्भाव काटेकोर अर्थाने गणिती तत्त्वज्ञानात बहुधा करता येणार नाही; ज्ञानाच्या क्षितिजावरील ज्या प्रश्नांची निश्चित माहिती अजून प्राप्त झालेली नाही त्यांच्या-विषयी गणिताच्या तत्त्वज्ञानाने ऊहापोह करावा ही अपेक्षा स्वाभाविक आहे. पण गणिती तत्त्वांच्या अधिक शास्त्रीय भागांची माहिती होईपर्यंत अशा प्रश्नांविषयी तर्ककुतर्क करीत बसणे, फलदायी होणे शक्य वाटत नाही, म्हणून ह्या भागांचा ऊहापोह करणाऱ्या पुस्तकाला, ते गणिती तत्त्वज्ञानाचा *परिचय* करून देत आहे इतकाच दावा करता येईल, मात्र त्याने जेथे स्वतःच्या क्षेत्राच्या बाहेर पाऊल टाकले आहे तेवढा भाग सोडल्यास, त्यात तत्त्वज्ञानाच्या एखाद्या भागाचा ऊहापोह झाला आहे असा दावा क्वचितच करता येईल. तरीसुद्धा पारंपरिक तत्त्वज्ञानातील बराचसा भाग, इतकेच नव्हे तर सध्याच्या काळातील भागसुद्धा निरुपयोगी ठरवणाऱ्या ज्ञानशाखेचा यात ऊहापोह (ज्यांना हे मान्य आहे त्यांच्या दृष्टीने) केला आहे. ह्या पद्धतीने, तसेच अद्यापिही अनिर्णित असणाऱ्या प्रश्नांच्या दृष्टीने गणिती तर्कशास्त्र, तत्त्वज्ञानाकरता आवश्यक आहे या कारणाकरता, तसेच विषयाच्या अंगभूत महत्त्वाच्या दृष्टीने, गणिताचे ज्ञान किंवा गणिती प्रतीक पद्धतीची आवड यांची गरज लागणार नाही अशा स्वरूपात गणिती तर्कशास्त्राच्या मुख्य मुख्य

अंगांचा संक्षिप्त आढावा घेण्याचा हेतू साधू शकेल. तरीसुद्धा येथे आणि अन्यत्रही, पुढील संशोधनाच्या दृष्टीने प्रत्यक्ष प्रमेयांच्यापेक्षा, पद्धती अधिक महत्त्वाची आहे; आणि ह्यासारख्या पुस्तकाच्या मर्यादेत, पद्धतींचे स्पष्टीकरण नीटसे देता येणार नाही. तत्त्वज्ञानाच्या पारंपरिक प्रश्नांचा शोध घेण्याकरता गणिती तत्त्वज्ञान ज्या पद्धतीने उपयुक्त ठरेल तिच्याच पुढे जाण्याची पुरेशी इच्छा काही वाचकांना तरी होईल अशी आशा आहे. पण पुढील पानांमधून ह्या विषयाचा ऊहापोह करण्याचा प्रयत्न केलेला नाही.

बर्ट्रान्ड रसेल

अनुवादकाची टीप

बर्ट्रांड रसेल यांच्यासारख्या मोठ्या तत्त्वज्ञ व गणितज्ञ यांच्या Introduction to Mathematical Philosophy ह्या ग्रंथांचे भाषांतर करणे हे एक धारिष्ट्यच होते. साहित्य आणि संस्कृति मंडळाने माझ्याकडे जेव्हा हे काम सोपवले तेव्हा, माझ्या हातून हे काम कसे पूर्ण व्हायचे असे राहून राहून वाटत होते. मुख्य म्हणजे माझा विषय गणित हाच आहे. तत्त्वज्ञानाशी माझा जवळजवळ मुळीच परिचय नाही असे म्हणणे योग्य. मात्र पुस्तक गणिती तत्त्वज्ञानाचा परिचय करून देणारे असल्याने मी हे काम अंगावर घेतले. पण मुळातील आशय अनुवादात कितपत उतरला आहे हे जाणते वाचकच ठरवू शकतील. माझ्याकडून मी कसोशीने प्रयत्न केला आहे. तरीही अनुवादात आढळणाऱ्या दोषांची जबाबदारी माझी आहे.

चिन्हे आणि प्रतीके आंतरराष्ट्रीय मान्यतेची असावीत असे महाराष्ट्र राज्य शासनाचे धोरण आहे. त्यामुळे मी त्यांचाच अवलंब केला आहे. तसे करणे सोईचे झाले हेही खरेच. मराठी वाचकांना प्रारंभी हे काहीसे खटकेल, पण सरावाने ते अंगवळणी पडेल.

मूळ ग्रंथाच्या शेवटी असलेली सूची, मूळ पृष्ठांकांच्या संदर्भासह दिली आहे. शक्य तेवढे मराठी प्रतिशब्द तेथेच दिले आहेत. राहिलेले प्रतिशब्द 'इंग्रजी-मराठी परिभाषा' ह्या नावाने नंतर दिले आहेत. मराठी-इंग्रजी परिभाषा सुद्धा त्यानंतर घातलेली आहे.

समासामध्ये मूळ ग्रंथाचे पृष्ठांक मुद्दाम छापले आहेत. मूळ ग्रंथाचा संदर्भ पाहणे त्यामुळे सोईचे होईल.

मूळ ग्रंथामध्ये लेखकाने दिलेल्या तळटीपांचाही अनुवाद करून दिला आहे. मूळ पुस्तक वा लेख इत्यादी फ्रेन्च किंवा जर्मन भाषेतील असतील तेथे त्यांचे उच्चार व अर्थ दिले आहेत.

अनुवाद करताना जेथे शंका आली किंवा प्रचलित गणितामधील पद्धतीनुसार काही फरक आढळला तेथे अनुवादाची टीप दिलेली आहे.

तत्त्वज्ञानाचे गाढे अभ्यासक प्राचार्य मे. पु. रेगे ह्यांनी भाषांतराचे हस्तलिखित वाचून कित्येक मोलाच्या सूचना केल्या, त्याबद्दल मी त्यांचा ऋणी आहे.

सदर ग्रंथाच्या भाषांतराची मूळ प्रेरणा प्रा. अ. भि. शहा यांची आहे. त्यांनी सुचवल्यावरूनच मी हे काम करण्याचे ठरवले. अशा महत्त्वाच्या पुस्तकाच्या भाषांतराची संधी ' साहित्य आणि संस्कृति मंडळाने ' मला उपलब्ध करून दिली. भाषांतर विभागाचे संपादक श्री. बा. रं. सुंठणकर ह्यांनी वेळोवेळी मला उत्तेजन दिले. ह्या सर्व व्यक्तींना मनःपूर्वक धन्यवाद !

म. रा. राईलकर

संपादकाची टिप्पणी

गणिती तत्त्वज्ञान आणि गणिताचे तत्त्वज्ञान ह्यांच्यातील भेदांवर ते अवलंबून असल्यामुळे ज्यांना ह्या पुस्तकाला आजच्या ग्रंथालयात स्थान नाही असे वाटते, त्यांचे लक्ष, आम्ही, लेखक स्वतः प्रस्तावनेत काय म्हणतो त्याकडे वेधू इच्छितो. "पारंपरिक तत्त्वज्ञानाच्या" कार्यातील विवेचन आणि व्याख्या यांचा सूर समजून घेण्याकरता, तत्त्वज्ञानाच्या क्षेत्राचे रूपांतर, वर्ग, सांतत्य, अनंत, अशांसारख्या प्रश्नांच्या गणिती रूपात करून ते मिळवून घेतले पाहिजे, ह्या त्याच्या सूचनेशी सहमत होण्याची आवश्यकता नाही. ह्या विषयांचे विवेचन विशेष शास्त्रशाखांकडे पाठवणे तत्त्वज्ञान्यांना मान्य नसेल, तर मग काही झाले तरी निदान, ज्या गणितात ह्या संकल्पनांचा वाटा फार मोठा असतो, त्या गणितातील त्यांच्या अचूक अर्थाचे ज्ञान त्यांनी करून घेणे अत्यावश्यक आहे. उलटपक्षी यातील व्याख्या आणि चर्चा प्रदीर्घ आणि सरळ गोष्टींना क्लिष्ट करणाऱ्या आहेत असे काही गणितज्ञ म्हणत असतील, त्यांना जाणीव देणे आवश्यक आहे की इतर ठिकाणांप्रमाणेच इथेही वरवरच्या साधेपणाखाली, संकीर्णता झाकून गेलेली असेल; आणि तीच उघड करून सांगणे कोणाचे तरी काम आहे; मग तो गणितज्ञ असेल किंवा तत्त्वज्ञ किंवा प्रस्तुत पुस्तकाच्या लेखकाप्रमाणे दोन्ही एकत्र असेल.

अनुक्रमणिका

प्रकरण १

स्वाभाविक संख्यांची मालिका[1]

गणित ही एक विशेष प्रकारची ज्ञानशाखा आहे. अगदी परिचित भागापासून आरंभ केला असता, परस्परविरुद्ध अशा दोन दिशांपैकी कोणत्याही एका दिशेने तिचा पाठपुरावा करता यावा, असे गणिताचे स्वरूप आहे. यांपैकी अधिक परिचित असलेली दिशा, ही रचनात्मक (Constructive) असून ती अधिकाधिक गुंतागुंतीची होत जाते. पूर्णांकाकडून अपूर्णांकाकडे, वास्तव (Real) संख्यांकडे (Numbers) आणि संमिश्र (Complex) संख्यांकडे; बेरीज आणि गुणाकार यांच्यापासून अवकलन (Differentiation) आणि संकलन (Integration) आणि तेथून अधिक उच्च गणिताकडे. कमी परिचित अशी दुसरी दिशा विश्लेषणात्मक (Analytic) असून ती अधिकाधिक अमूर्त (Abstraction) आणि तर्कदृष्ट्या (Logically) साधी होत जाते; ह्या पद्धतीत. आरंभीच्या गृहीतांपासून कशाकशाची व्याख्या करता येईल, आणि काय काय निगमित (Deduce) करता येईल असे विचारण्यापेक्षा, अधिक सामान्य अशा कोणत्या कल्पना आणि तत्त्वे शोधता येतील ते पाहतात. ह्या कल्पनांच्या आणि तत्त्वांच्या रूपात आरंभीच्या कल्पनांची व्याख्या देतात किंवा तत्त्वे निगमित करतात. दुसऱ्या दिशेने असा पाठपुरावा करणे हेच प्रचलित गणितापेक्षा वेगळ्या अशा गणिती तत्त्वज्ञानाचे व्यवच्छेदक लक्षण होय. पण एक मुद्दा समजावून घेतला पाहिजे की हा फरक, विषयवस्तूंमधील नसून शोधकाच्या मनाच्या अवस्थांमधील आहे. इजिप्शियनांच्या जमीन पाहणीच्या आनुभविक नियमांपासून आरंभ करून ह्या नियमांचे समर्थन करू शकणाऱ्या सामान्य प्रविधानांप्रत (Propositions) जाणारे आणि तेथून युक्लिडच्या सिद्धांताकडे (Axiom) पृ. २ किंवा गृहीतकांकडे (Postulate) जाणारे, पूर्वीचे ग्रीक भूमितिज्ञ, वरील व्याख्येनुसार गणिती तत्त्वज्ञानच अवलंबीत होते; पण एकदा सिद्धांतांपर्यंत आणि गृहीतकांपर्यंत पोचल्यावर, युक्लिडप्रमाणे त्यांचा निगामी (Deductive) वापर करणे, म्हणजे आपल्याला परिचित असलेले गणितच होय. गणित आणि

[1] अ. टी. : मूळ पुस्तकात Series असा शब्द वापरलेला आहे. परंतु येथे तो अनेक पदांच्या बेरजेच्या अर्थाने अपेक्षित नाही. त्यामुळे ‘ श्रेणी ’ ह्या तांत्रिक शब्दाऐवजी ‘ मालिका ’ हाच शब्द वापरणे योग्य वाटते.

गणिती तत्त्वज्ञान यांच्यांतील फरक हा, कोणत्या प्रकारचा शोध घेण्यासाठी संशोधन प्रवृत्त झाले आहे आणि संशोधनाने कोणती मजल गाठली आहे ह्यावर अवलंबून असतो; संशोधनाशी संबंध असणाऱ्या प्रविधानांवर तो अवलंबून नसतो.

हाच फरक निराळ्या तऱ्हेनेही मांडता येईल. गणितामधील अगदी उघड आणि सोप्या गोष्टी, तर्कदृष्ट्या आरंभी न येता मध्येच कोठे तरी येतात. ज्याप्रमाणे सहज दिसू शकणाऱ्या वस्तू फार दूरही नसतात आणि फार जवळही नसतात, त्याचप्रमाणे सहज समजू शकणाऱ्या संकल्पना (Conceptions) सुद्धा फार क्लिष्टही नसतात आणि फार साध्याही ("साध्या" हा शब्द तार्किकदृष्ट्या वापरला आहे.) नसतात. आणि जशी आपल्या दृष्टीची शक्ती वाढवण्याकरता आपल्याला दूरदर्शक (Telescope) आणि सूक्ष्मदर्शक (Microscope) अशी दोन प्रकारची उपकरणे लागतात, तशीच आपली तर्क-शक्ती वाढवण्याकरताही आपल्याला दोन प्रकारची उपकरणे लागतात. एक पुढे उच्च गणिताकडे जाण्याकरता, तर दुसरे, गणितात जी तत्त्वे गृहीत धरण्याकडे आपला कल असतो त्यांच्या तार्किक पायांकडे (Foundations), म्हणजे मागे जाण्याकरता. आपल्या प्रचलित गणितामधील कल्पनांचे विश्लेषण केल्यास आपल्याला असे आढळून येईल की, आपल्याला एक अभिनव दृष्टी, नवीन शक्ती प्राप्त झाली असून, आपल्या उलट प्रवासानंतर, प्रगतीच्या नवीन मार्गांचा अवलंब केल्यामुळे, संपूर्ण नवीन गणित-विषयांकडे पोचण्याची नवीन साधने प्राप्त झाली आहेत. गणिती तत्त्वज्ञान, साधेपणाने आणि तांत्रिकतेचा अवलंब न करता समजावून देणे हा ह्या पुस्तकाचा उद्देश आहे. ज्यांचे प्राथमिक विवेचन अगदी अशक्य होईल अशा शंकास्पद आणि अवघड भागांचा विस्तार टाळला आहे. संपूर्ण चिकित्सा Principia Mathematica[१] ह्या ग्रंथात सापडेल; प्रस्तुत पुस्तकातील विवेचन केवळ परिचयाकरता म्हणून योजले आहे.

आजच्या सर्वसामान्य शिक्षित व्यक्तीच्या दृष्टीने गणिताचा स्वाभाविक आरंभ-बिंदू म्हणजे,

1, 2, 3, 4......इत्यादी,

ही पूर्णांकांची मालिका (Series) होय. ज्यांना गणिताचे थोडेफार ज्ञान आहे,

पृ. ३

अशा व्यक्तीच, बहुधा, 1 ऐवजी 0 (शून्य) पासून आरंभ करण्याचा विचार करतील; पण आपणही सर्वांना इतपत ज्ञान असल्याचे धरून चालू; आणि आपला आरंभ-बिंदू म्हणून,

0, 1, 2, 3,.........n, n + 1, ...

ही मालिका घेऊ. "स्वाभाविक संख्यांची मालिका" असे ज्या वेळी आपण म्हणू, त्या वेळी आपल्याला हीच मालिका अभिप्रेत असेल.

[१] ले. टी. : Cambridge University Press, vol. i, 1910; vol. ii, 1911; vol. iii, 1913. By Whitehead and Russell.

मानवी संस्कृतीच्या, (सध्याच्या) इतक्या उच्च अवस्थेतच ही मालिका, आपला आरंभ-बिंदू म्हणून घेणे आपल्याला शक्य झाले आहे.

तित्तिरयुगुल आणि दिनद्वय ही दोन्ही 2 ह्या संख्येची उदाहरणे आहेत हे ध्यानात यावयास वर्षानुवर्षे लागली असली पाहिजेत. ह्यांत अनुस्यूत असलेली अमूर्ततेची पातळी काही सोपी नाही. आणि 1 ही संख्या आहे हा शोधही कठीण असला पाहिजे. 0 च्या बाबतीत बोलायचे, तर संख्यांच्या मालिकेत त्याची भर अलीकडेच घालण्यात आली आहे. ग्रीक आणि रोमन लोकांकडे असा अंक नव्हता. गणिती तत्त्वज्ञानाचा उपक्रम आपण मागच्या काळात केला असता, तर आपल्याला स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेहून कमी अमूर्त अशा कल्पनेपासून आरंभ करावा लागला असता; आणि आपल्या ह्या उलट प्रवासात (केव्हा तरी) आपण त्या पायरीशी जाऊन पोचलो असतो. गणिताचे तार्किक अधिष्ठान जसजसे अधिक परिचित होईल, तसतसे आपण, आपल्या ह्या विश्लेषणात बऱ्याच नंतर येणाऱ्या अशा, (पण) अधिक मागच्या बिंदूपासून आरंभ करू शकू. आतापुरते पाहावयाचे तर स्वाभाविक संख्यांची मालिका हीच गणितातील अधिक सोपी आणि अधिक परिचित अशी गोष्ट आहे.

पण ह्या संख्या जरी परिचित असल्या तरी नीट समजलेल्या नसतात. " संख्या " किंवा " 0 ", किंवा " 1 " म्हणजे काय याची व्याख्या देण्याची तयारी फार थोड्यांची असते. 0 पासून सुरुवात करून 1 मिळवण्याच्याच क्रियेची पुनरावृत्ती करून दुसरी कोणतीही स्वाभाविक संख्या मिळवता येते, हे लक्षात येणे कठीण नाही. पण " 1 मिळवणे " म्हणजे काय आणि " पुनरावृत्ती " करणे म्हणजे काय, याची व्याख्या आपण केली पाहिजे. आणि हे प्रश्न तर मुळीच सोपे नाहीत. अगदी अलीकडच्या काळापर्यंत अशी समजूत होती की, अंकगणितातील प्रारंभीच्या ह्या कल्पनांपैकी निदान काही कल्पना त्यांच्या व्याख्या करता येणार नाहीत इतक्या त्या प्राथमिक आणि सोप्या आहेत असे मानून स्वीकारल्या पाहिजेत. व्याख्या करावयाच्या सर्वच संज्ञांच्या व्याख्या कोणत्या तरी संज्ञांच्या रूपात करव्या लागत असल्यामुळे मानवी ज्ञानाला काही संज्ञा व्याख्या

पृ. ४

न करताच स्वीकारून, नंतर ह्या संज्ञा इतर संज्ञांच्या व्याख्या करण्याकरता आरंभ-बिंदू म्हणून घेण्यात समाधान मानावे लागते. ज्यांच्या व्याख्या *करता येत नाहीत* अशा संज्ञा असल्याच पाहिजेत किंवा नाही हे स्पष्ट नाही. व्याख्या करीत आपण कितीही मागे गेलो तरी आणखी मागे जाणेसुद्धा शक्य असते. उलटपक्षी, विश्लेषण पुरेसे पुढे गेल्यावर (कदाचित) अशा काही संज्ञा सापडतील की त्या खरोखरच अत्यंत सोप्या असून विश्लेषणातील (Analysis) पद्धती-प्रमाणे त्यांच्या तार्किक व्याख्या करता न येणेसुद्धा शक्य आहे; आपल्या दृष्टीने, ज्या अर्थी मानवी शक्तींना मर्यादा आहे त्या अर्थी आपल्या व्याख्यांना कोठे तरी आरंभ केला पाहिजे, एवढे पाहणे पुरेसे आहे. आणि आरंभीच्या संज्ञा जरी सर्वच काळ नसल्या, तरी तात्पुरत्या तरी अव्याख्यात राहिल्या पाहिजेत.

विश्लेषणात्मक भूमिती (Analytical Geometry) धरून, सर्व पारंपरिक शुद्ध गणित स्वाभाविक संख्याविषयक प्रविधानांचे बनलेले आहे, असे मानता येईल. म्हणजे शुद्ध तर्कशास्त्रातील कल्पना व विधाने ह्यांचे, त्यातील संज्ञांच्या व्याख्या, स्वाभाविक संख्यांच्या साह्याने देता येतील आणि त्यातील प्रविधाने स्वाभाविक संख्यांच्या गुणधर्मांपासून निगमन करता येईल.

संपूर्ण पारंपरिक शुद्ध गणित स्वाभाविक संख्यांपासून निगमित करता येत असावे, असे जरी फार पूर्वीपासून वाटत होते तरी हा शोध बराचसा अलीकडचा आहे. केवळ गणितच नव्हे, तर सर्वच गोष्टी संख्यांपासून निगमित करता येतील अशी पायथागोरसची धारणा होती. ज्याला अंकगणितीकरण करणे म्हणतात ते साधण्याच्या मार्गातील सर्वांत गंभीर अडचणीचा शोध पायथॅगोरसनेच लावला.

अपरिमेयांचा (Incommensurables) आणि विशेषतः चौरसाची बाजू व त्याचा कर्ण यांचे गुणोत्तर अपरिमेय (Irrational) असते याचा शोध लावणाराही पायथागोरसच होय. जर बाजूची लांबी 1 असेल तर कर्णाची लांबी 2 च्या वर्गमुळाइतकी भरते. 2 चे वर्गमूळ ही चीज तर संख्या असल्यासारखी वाटतच नसे. अशा रीतीने उद्भवलेला प्रश्न हा आपल्या काळातच सोडवला गेला आहे. आणि तोही अंकगणिताचे तर्कशास्त्रात क्षपण (Reduction) करूनच पूर्णपणे सोडवला गेला आहे. त्याचे स्पष्टीकरण पुढच्या प्रकरणात येईल. गणिताचे अंकगणितीकरण ही एक अत्यंत महत्त्वाची कामगिरी होती. तूर्त, गणिताचे अंकगणितीकरण करता येते हे आपण गृहीत धरून चालू.

सर्व पारंपरिक शुद्ध गणिताचे रूपांतर स्वाभाविक संख्यांच्या मीमांसेत (Theory) केल्यानंतर, तार्किक विश्लेषणातील पुढची पायरी
पृ. ५ म्हणजे ह्या विवेचनातील कमीतकमी पक्षविधाने (Premisses) आणि अव्याख्यात (Undefined) संज्ञा मांडून, त्यांपासून मीमांसेचे निगमन करणे. हे कार्य पेआनो (Peano) ह्याने केले. त्याने असे सिद्ध केले की, (शुद्ध तर्कशास्त्रातील गृहीतकांबरोबरच) तीन आदिकल्पना आणि पाच गृहीतके ह्यांच्यापासून स्वाभाविक संख्यांची संपूर्ण मीमांसा निगमित करता येईल. ह्या तीन कल्पना आणि पाच प्रविधाने ह्यांना संपूर्ण पारंपरिक शुद्ध गणिताकरता जणू ओलीसच धरून ठेवले होते. जर त्यांच्याच व्याख्या आणि सिद्धता इतर कशाच्या साह्याने प्रस्थापित करता आल्या असत्या तर सगळे शुद्ध गणितही त्यांच्या साह्याने प्रस्थापित करता आले असते. त्यांचे संपूर्ण तार्किक "वजन"– जर असा वाक्यप्रयोग कोणी मान्य केला तर– स्वाभाविक संख्यांच्या मीमांसेपासून निगमित करता येणाऱ्या शास्त्रांच्या संपूर्ण मालिकेइतके भरेल. जर ह्या पाच प्रविधानांच्या सत्यतेची ग्वाही देता येत असेल तर ह्या संपूर्ण मालिकेच्या सत्यतेचीही ग्वाही देता येईल. अर्थात, त्यासाठी वापरावयाच्या तार्किक उपकरणांमध्ये कोठेही दोष नाही हे पाहणे आवश्यक आहेच. पेआनोच्या ह्या कामामुळे गणिताच्या विश्लेषणाचे कार्य कमालीचे सुकर झाले आहे.

पेआनोच्या अंकगणितातील तीन आदिकल्पना म्हणजे

0, संख्या आणि अनुचर (Successor)

" अनुचर " ह्या शब्दाने तो, संख्यांच्या स्वाभाविक रचनेमधील नंतरची संख्या सूचित करतो. म्हणजे. 0, चा अनुचर 1, 1 चा अनुचर 2, इत्यादी. " संख्या " हा शब्द तो ह्या संदर्भात स्वाभाविक संख्यांचा[1] वर्ग : ह्या वर्गाचे सर्वच सदस्य आपल्याला माहिती आहेत असे तो गृहीत धरीत नाही. तर " अमुक गोष्ट संख्या आहे " असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा त्या म्हणण्याचा अर्थ काय आहे हे आपल्याला माहिती आहे, एवढेच तो गृहीत धरतो. उदा.– आपल्याला जरी सर्व माणसे व्यक्तिशः माहिती नसली तरी, " जोन्स हा माणूस आहे " असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा त्या म्हणण्याचा अर्थ काय आहे हे आपल्याला माहीत असते.

पेआनोने गृहीत धरलेली ५ गृहीतके अशी :

(१) 0 ही संख्या आहे.

(२) प्रत्येक संख्येचा अनुचरसुद्धा संख्याच असते.

पृ. ६ (३) कोणत्याही दोन (भिन्न) संख्यांची अनुचर एकच नसते.

(४) 0 ही संख्या कोणत्याही संख्येची अनुचर नसते.

(५) जर एखादा गुणधर्म 0 जवळ असेल, तसेच जर तो कोणा एका संख्येजवळ असता तिच्या अनुचराजवळही असतो, असे असेल तर, तो गुणधर्म प्रत्येक संख्येजवळ असतो.

यांतील शेवटचे गृहीत तत्त्व म्हणजेच गणिती विगमनाचे तत्त्व (Principle of mathematical Induction) होय. गणिती विगमनाविषयी आपल्याला नंतर पुष्कळच सांगावयाचे आहे. तूर्त, पेआनोने केलेल्या अंकगणिताच्या विश्लेषणात त्याचे स्वरूप काय आहे, याच्याशीच आपल्याला कर्तव्य आहे.

ह्या तीन संज्ञा आणि ही पाच प्रविधाने ह्यांच्यांपासून स्वाभाविक संख्यांचे विज्ञान कसकसे निघते याची मीमांसा कशी निष्पन्न होते याचा थोडक्यात विचार करू या. आरंभी, 1 ची व्याख्या " 0 चा अनुचर " अशी करू; 2 ची व्याख्या " 1 चा अनुचर " अशी करू, इत्यादी. याप्रमाणे व्याख्या करीत आपण पाहिजे तितक्या लांबवर जाऊ शकू हे सरळ आहे. कारण (२)मुळे, आपण ज्या संख्येपर्यंत पोहोचू तिलाही अनुचर असणार, (३)मुळे, ही संख्या पूर्वी कोठेही आलेली नसणार, नाही तर दोन भिन्न संख्यांना एकच अनुचर आहे असे होईल. आणि (४)मुळे 0 ही, वरील मालिकेतील कोणत्याही संख्येची अनुचर नसणार. ह्याप्रमाणे अनुचरांची मालिका ही आपल्याला सातत्याने

[1] ले. टी. : ह्या पाठात आपण संख्या हा शब्द ह्या अर्थाने वापरू. नंतर हा शब्द अधिक व्यापक अर्थाने वापरणार आहोत.

नवनवीन संख्यांची अन्तहीन (Endless) मालिका देते. (५)मुळे, 0 ने सुरुवात होणाऱ्या आणि एकामागून एक येणाऱ्या अनुचरांमधून प्रवास करणाऱ्या ह्या मालिकेत सर्व संख्या समाविष्ट असतात; कारण (अ) ह्या मालिकेत 0 आहे, आणि (आ) जर n ही संख्या मालिकेत असेल तर तिची अनुचरही तिच्यात असते; तेव्हा गणिती विगमनावरून प्रत्येक संख्या ह्या मालिकेत आहे, असे ठरते.

आपल्याला दोन संख्यांच्या बेरजेची व्याख्या करावयाची आहे, असे समजा. m ही कोणतीही एक संख्या घेऊ. m + 0 म्हणजे m, आणि m + (n + 1) म्हणजे (m + n) चा अनुचर अशा व्याख्या करू. (५)च्या बळावर ह्यामुळे n ही कोणतीही संख्या असली तरी m आणि n ह्यांच्या बेरजेची व्याख्या मिळते. याचप्रमाणे, आपण कोणत्याही दोन संख्यांच्या गुणाकाराची व्याख्या करू शकतो. आपल्या ह्या पाच आधारविधानांपासून अंकगणितातील कोणतेही प्राथमिक प्रविधान प्रस्थापित करता येते, अशी वाचकाला स्वतःची खात्री करून घेता येईल. जर काही अडचण आली तर सिद्धतेकरता पेआनोचे ग्रंथ पाहावेत.

गणिताचे " अंकगणितीकरण " परिपूर्णतेला नेणाऱ्या पेआनोच्या भूमिकेपलीकडे म्हणजे फ्रेगेच्या (Frege) भूमिकेकडे जाण्याकरता आवश्यक तो

पृ. ७

विचार करण्याची वेळ आता आली आहे. फ्रेगेच्या पूर्वसूरींनी गणिताकरता अंकगणिती कल्पना पुरेशा आहेत असे दाखवले होते. गणिताचे " तार्किकीकरण (Logicise)" करणारा, म्हणजेच अंकगणितीय कल्पनांचे रूपांतर तर्कशास्त्रात यशस्वीपणे करणारा, तो पहिलाच (गणितज्ञ) होय. ह्या प्रकरणात, आपण फ्रेगेने दिलेली संख्येची किंवा विशिष्ट संख्यांची प्रत्यक्ष व्याख्या देणार नाही. पण पेआनोची चिकित्सा एखाद्याला वाटते तेवढी अंतिम स्वरूपाची कशी नाही याची काही कारणे देणार आहोत.

प्रथमतः, पेआनोच्या तीन आदिकल्पनांचे – म्हणजे " 0 ", " संख्या, " आणि " अनुचर " ह्यांची, अनंत भिन्नभिन्न विवरणे (Interpretations) होऊ शकतात, आणि ही सर्व विवरणे पाचही आदिविधानांचे समाधान करतात हे पाहू. काही उदाहरणे पाहा :

(१) " 0 " चा अर्थ 100 असा घेऊ आणि " संख्या "चा अर्थ स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेतील 100 पासूनच्या पुढील संख्या, असा मानू. मग आपल्या सर्व आदिविधानांचे समाधान होते. चौथ्याचेही होते. कारण 100 ही 99 ची अनुचर असली तरी, " संख्या " ह्या शब्दाला आपण जो अर्थ आता देत आहोत, त्या अर्थाने 99 ही " संख्या " नव्हे. ह्या उदाहरणात 100 ऐवजी कोणतीही संख्या घेता येईल, हे उघड आहे.

(२) " 0 " चा प्रचलित अर्थच घेऊ. पण " संख्या " म्हणजे एरवी आपण ज्यांना " सम संख्या " म्हणतो त्या घेऊ, आणि 2 ही संख्या मिळविल्यानंतर मिळणारी

संख्या म्हणजे "अनुचर" मानू. मग "1" म्हणजे दोन ही संख्या होईल, "2" म्हणजे चार ही संख्या होईल...... इत्यादी; संख्यांची मालिका आता, 0, दोन, चार, सहा, आठ......... अशी होईल. पेआनोच्या सर्व आदिविधानांचे या वेळीही समाधान होईल.

(३) "0" म्हणजे 'एक' ही संख्या माना, "संख्या" म्हणजे,

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots\ldots$$

हा संच घ्या आणि "अनुचर" म्हणजे "अर्धी" असा अर्थ घ्या. मग ,पेआनोचे पाच सिद्धान्त ह्या संचाच्या बाबतीत सत्य ठरतील.

ही उदाहरणे अनंतगुणित करता येतील हे उघड आहे. खरे म्हणजे, जिला अंत नाही, जिच्यात पुनरावृत्ती नाही, जिला आरंभ आहे आणि सान्त

पृ. ८ (Finite) पायऱ्यांच्या साह्याने न मिळू शकणारे असे एकही पद जिच्यात नाही अशी,

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n, \ldots.$$

ही कोणतीही मालिका दिली असता, आपल्याला पेआनोचे सिद्धान्त पाळणारा संच मिळेल. याची तात्त्विक सिद्धता काहीशी दीर्घ असली तरी हे पाहणे सोपे आहे. "0" म्हणजे x_0 घ्या, "संख्या" म्हणजे हा संपूर्ण संच घ्या, आणि "x_n"ची अनुचर "x_{n+1}" घ्या. मग,

(१) "0 ही संख्या आहे" म्हणजे x_0 ही ह्या संचाची सदस्य आहे.

(२) "प्रत्येक संख्येचा अनुचर म्हणजे संख्याच असते" म्हणजे x_n हे त्या संचातील कोणतेही पद घेतले तर x_{n+1} हे पदही त्या संचाचे सदस्य असते.

(३) "कोणत्याही दोन संख्यांना तोच एक अनुचर नाही" म्हणजे x_m आणि x_n हे दोन भिन्न सदस्य असले तर x_{m+1} आणि x_{n+1} सुद्धा भिन्नच असतील; ह्या संचात पुनरावृत्ती होत नाही, ह्या वस्तुस्थितीवरून (गृहीतान्वये) हे मिळते.

(४) "0 ही कोणत्याही संख्येची अनुचर नाही" म्हणजे ह्या संचातील कोणतेही पद x_0 च्या आधी येत नाही.

(५) चे स्वरूप असे राहील : जर एखादा गुणधर्म x_0 कडे असेल आणि x_n कडे असता x_{n+1} कडेही असेल तर तो सर्व x जवळ असतो.

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n, \ldots\ldots\ldots$$

अशा प्रकारच्या एखाद्या मालिकेत जर पहिले पद असेल, प्रत्येक पदाला अनुचर असेल (त्यामुळे जिच्यात शेवटचे असे पद नसेल), पदांची पुनरावृत्ती होत नसेल

आणि कोणतेही पद सान्त पायऱ्यांनंतर मिळवता येत असेल, तर त्या मालिकेला श्रेढी (Progression) म्हणतात. गणिताच्या मूलतत्त्वांच्या दृष्टीने श्रेढींचे महत्त्व फार आहे. आताच आपण पाहिले की प्रत्येक श्रेढी पेआनोच्या पाचही सिद्धान्तांची पूर्तता करते. तसेच याचा व्यत्यासही, म्हणजे पेआनोच्या पाच सिद्धान्तांची पूर्तता करणारी प्रत्येक मालिका ही श्रेढी असते, हेही सिद्ध करता येईल. म्हणून या पाच आदितत्त्वांचा उपयोग, श्रेढींची व्याख्या करण्याकरता करता येईल. " हे पाच सिद्धान्त पाळणारी मालिका " म्हणजे " श्रेढी " होय. शुद्ध गणिताचा आरंभ म्हणून कोणतीही श्रेढी घेता येईल: तिच्या पहिल्या पदाला आपण " 0 " असे नाव देऊ, तिच्यामधील सर्व पदांच्या संचाला " संख्या " असे नाव देऊ, आणि श्रेढीतील " नंतर "च्या पदाला " अनुचर " असे नाव देऊ. श्रेढी ही संख्यांचीच बनवलेली असली पाहिजे असे

पृ. ९

नाही. ती अवकाशातील बिंदूंची बनवता येईल. कालपटावरील क्षणांची किंवा अनंत सामग्री असलेल्या अशा कशांमधूनही बनवता येईल. प्रत्येक भिन्न श्रेढी पारंपरिक शुद्ध गणितातील प्रविधानांच्या एका विवरणाला जन्म देईल आणि ही सर्व विवरणे सारखीच सत्य असतील.

पेआनोच्या आदिकल्पनांच्या या विविध विवरणांमधील भिन्नत्व कळू शकेल असे खुद्द पेआनोच्या पद्धतीमध्ये काहीही नाही. " 0 " म्हणजे काय ते आपल्याला माहिती आहे असे तिच्यात गृहीत धरण्यात आले आहे. ह्या प्रतीकाचा अर्थ 100 असा होतो किंवा क्लिओपात्राची सुई असा होतो किंवा दुसरा कोणता तरी होतो असे काहीही आपण समजणार नाही.

" 0 " आणि " संख्या " आणि " अनुचर " ह्यांच्या व्याख्या पेआनोच्या पाच सिद्धान्तांच्या साहाय्याने करता येत नाहीत; तर त्या स्वतंत्रपणानेच समजावून घ्याव्या लागतात, हा मुद्दा महत्त्वाचा आहे. आपल्या संख्यांनी फक्त गणितातील सूत्रांचाच पडताळा घ्यावा एवढेच आपल्याला अपेक्षित नसून त्यांचा उपयोग सर्वसामान्य वस्तूंच्या बाबतीतही योग्य तऱ्हेने व्हावा अशी अपेक्षा आहे. ज्या व्यवस्थेत " 1 " म्हणजे 100 आणि " 2 " म्हणजे 101 इत्यादी,—असे अर्थ असतील ती पद्धत शुद्ध गणिताच्या दृष्टीने ठीक असेल. पण दैनंदिन जीवनात ती लागू पडणार नाही. आपल्याला " 0 " आणि " संख्या " आणि " अनुचर " ह्यांचे असे अर्थ हवे आहेत की ज्यामुळे आपली बोटे, डोळे, आणि नाक यांची संख्या योग्य तीच राहील. " 1 " आणि " 2 " इत्यादींचे काय अर्थ आहेत याचे काहीसे ज्ञान (जरी ते पुरेसे सुस्पष्ट आणि विश्लेषणात्मक नसले तरी) आपल्याला आहे. आणि अंकगणितातील संख्यांचा आपला वापर आपल्या ह्या ज्ञानाला अनुरूपच असला पाहिजे. असे सर्व होईलच याची ग्वाही पेआनोच्या व्यवस्थेने दिलेली नाही; जर आपण ही पद्धत अवलंबली तर, " आपल्याला ' 0 ' आणि ' संख्या ' आणि ' अनुचर ' म्हणजे काय हे माहिती आहे, कदाचित दुसऱ्या अधिक साध्यासोप्या कल्पनांच्याद्वारे त्यांचे स्पष्टीकरण आपल्याला देता येत नसेल " एवढेच

म्हणावे लागेल. ज्या वेळी असे म्हणणे आवश्यक असेल त्या वेळी तसे म्हणणे योग्य होईलही. आणि केव्हा *तरी* आपणा सर्वांना तसे म्हणावे लागेलही. पण गणिती तत्त्वज्ञानाचा हेतू, असे म्हणण्याची वेळ जेवढी लांबणीवर टाकता येईल तेवढी टाकण्याचा असतो. अंकगणिताची तार्किक मीमांसा करून हे म्हणण्याची पाळी आपण प्रदीर्घ काळ लांबणीवर टाकू शकतो.

"0" आणि "संख्या" आणि "अनुचर" यांच्या व्याख्या जरी आपल्याला करता येत नसल्या तरी त्यांचे अर्थ आपल्याला माहीत आहेत
पृ. १० असे मानण्याऐवजी, पेआनोच्या पाच आदिविधानांचे समाधान करू शकणाऱ्या अशा *कोणत्याही* तीन संज्ञा त्यांनी दर्शवल्या जाव्यात असे ठरवावे, असेही सुचवता येईल. मग अव्याख्यात पण काही निश्चित असा अर्थ असलेल्या, अशा ह्या संज्ञा आहेत असे त्यांचे स्वरूप राहणार नाही. ज्यांच्या स्वरूपाविषयी आपण काही गोष्टी गृहीत धरल्या आहेत, म्हणजे पेआनोच्या पाच आदिविधानांमध्ये उल्लेखिलेली गृहीते मांडलेली आहेत, पण अन्यथा ज्या अव्याख्यात आहेत, अशा त्या "चल (Variable)" संज्ञा राहतील. जर आपण हा मार्ग अवलंबला तर आपण सिद्ध करू ती प्रमेये "स्वाभाविक संख्या" ह्या एका विवक्षित संचाबद्दलचीच असतील असे नाही; विशिष्ट गुणधर्म असलेल्या पदांच्या कोणत्याही संचाबद्दलची असतील. ही पद्धत तर्कदुष्ट (Fallacious) नाही, उलट काही दृष्टींनी महत्त्वाचे असे सामान्यीकरणही (Generalisation) त्यामुळे साधता येईल. पण अंकगणिताला समर्थ असा आधार देण्यास दोन दृष्टींनी त्या अपुऱ्या ठरतात. एक म्हणजे पेआनोच्या आदिविधानांचे समाधान करू शकतील अशा पदांचे संच अस्तित्वात आहेत किंवा कसे हे त्यांच्यामुळे समजत नाही; त्याकरता अंधुक असासुद्धा मार्ग सापडत नाही. दुसरे म्हणजे, आपण अगोदरच पाहिल्याप्रमाणे आपल्याला आपल्या संख्यांचा उपयोग सामान्य वस्तू मोजण्यासाठी व्हावा असेही वाटते. यासाठी, आपल्या संख्यांना *निश्चित* अर्थ असणे आवश्यक ठरते. त्यांच्या अंगी काही आकारिक (Formal) गुणधर्म असणे पुरेसे नाही. संख्यांना हा निश्चित अर्थ अंकगणिताच्या तात्त्विक मीमांसेमुळे प्राप्त होतो.

¤ ¤

प्रकरण २

संख्येची व्याख्या

" संख्या म्हणजे काय " हा प्रश्न वारंवार विचारला गेला आहे, पण त्याचे अचूक उत्तर मात्र जे आपल्याच काळात दिले आहे ते फ्रेगेने १८८४ मध्ये

पृ. ११ आपल्या Grundlagen der Arithmetik[1] (ग्रुंदलागेन देर आरिथमेतिक– अंकगणिताचा पाया) ह्या पुस्तकात दिले आहे. त्याचे पुस्तक जरी त्रोटक आहे, तरी कठीण नाही, आणि अत्यंत महत्त्वाचे आहे. तरीही त्याच्याकडे जवळ जवळ पूर्ण दुर्लक्ष झाले आहे. आणि त्यात दिलेली संख्येची व्याख्या, प्रस्तुत लेखकाने १९०१ मध्ये पुन्हा शोधून काढीपर्यंत जवळ जवळ अज्ञातच राहिली.

संख्येच्या व्याख्येचा शोध घेत असता स्पष्ट करावयाची पहिली गोष्ट म्हणजे, आपल्या शोधाचे व्याकरण. संख्येची व्याख्या करण्याचा प्रयत्न करणारे बरेच तत्त्वज्ञ, खरे म्हणजे अनेकत्वाचीच (Plurality) व्याख्या करण्याचा प्रयत्न करत असतात. आणि ती (अनेकत्व) तर अगदीच भिन्न वस्तू आहे. जसे पुरुष असणे हे सर्व पुरुषांचे व्यवच्छेदक लक्षण आहे, तसेच संख्यांचे व्यवच्छेदक लक्षण म्हणजे संख्या असणे हे होय. अनेक वस्तूंचा एखादा समूह (A plurality) हे 'संख्या' ह्या संबोधाचे उदाहरण नसते, ते एखाद्या विशिष्ट संख्येचे उदाहरण असते. उदा.— माणसांचे त्रिकूट हे 3 ह्या संख्येचे उदाहरण आहे. आणि 3 ही संख्या, संख्येचे उदाहरण आहे. पण त्रिकूट हे संख्येचे उदाहरण होणार नाही. हा मुद्दा अगदी प्राथमिक आणि अनुल्लेखनीय वाटेल. पण काही थोडे अपवाद वगळता बहुतेक तत्त्वज्ञान्यांच्या ध्यानात न येण्याइतका तो सूक्ष्म ठरला आहे.

एखादी विशिष्ट संख्या म्हणजे तेवढी पदे असलेला एखादा संग्रह नव्हे. 3 ही संख्या म्हणजे ब्राउन, जोन्स आणि रॉबिन्सन हे त्रिकूट नव्हे.

पृ. १२ 3 ही संख्या म्हणजे सर्व त्रिकुटांना समाईक असलेली आणि ज्यामुळे इतर संग्रहांपेक्षा त्यांचे वेगळेपण कळते अशी गोष्ट होय.

---

[1] ले. टी. : तेच उत्तर अधिक विस्तृत आणि अधिक विकसित रूपात, त्याच्या Grundgesetze (ग्रुंडगेझेत्स्ऽ) der Arithmetik– अंकगणिताचे आधार पुस्तक– vol. i, 1893, ह्या पुस्तकात आहे.

सर्वसामान्य नियम म्हणून आपण " संग्रह (Collection) " ह्या शब्दाऐवजी " वर्ग (Class) " किंवा " संच (Set) " हे शब्द वापरू. याच गोष्टीकरता गणितात वापरले जाणारे इतर शब्द म्हणजे " समुदाय (Aggregate) " आणि समुच्चय (Manifold)[1] पुढे आपल्याला वर्गाविषयी बरेच विवेचन करायचे आहे. सध्या आपण जेवढ्या थोड्या विवेचनावर भागेल तेवढेच करू. तरी पण काही महत्त्वाच्या गोष्टी लगेच सांगून टाकल्या पाहिजेत.

वर्ग किंवा संग्रह याच्या व्याख्या दोन प्रकारांनी करता येतात. प्रथमदर्शनी त्या भिन्न आहेत असे भासेल. एक, त्याच्या सदस्यांची यादी करून. उदाहरणार्थ " मी म्हणतो तो संग्रह म्हणजे ब्राउन, जोन्स आणि रॉबिन्सन ", किंवा दुसरा म्हणजे " मनुष्यमात्र ", किंवा " लंडनमधील रहिवासी " अशा प्रकारे आपण त्याचा व्याख्याधर्म किंवा लक्षणधर्म (Defining property) देऊ. ज्या व्याख्येत प्रत्यक्ष घटक सांगितले जातात तिला " व्याप्तीने (Extension) " केलेली व्याख्या म्हणतात. आणि जिच्यात व्याख्याधर्म सांगितला असेल तिला " आशयाने (Intension) " केलेली व्याख्या म्हणतात. व्याख्यांच्या या दोन प्रकारांपैकी आशय-व्याख्या ही तर्कदृष्ट्या अधिक मूलभूत आहे हे पुढील दोन कारणांवरून कळून येईल :

(१) व्याप्ती–व्याख्येचे रूपांतर नेहमी आशय-व्याख्येत करता येते; (२) आशय व्याख्येचे रूपांतर अनेकदा तत्त्वतः व्याप्ती-व्याख्येत करता येत नाही. यांतील प्रत्येक मुद्द्याचे स्पष्टीकरण करणे आवश्यक आहे.

(१) ब्राउन, जोन्स आणि रॉबिन्सन या सर्वांजवळ असा काही एक गुण समाईक आहे की जो संपूर्ण जगातील इतर कोणत्याच वस्तूजवळ नाही; तो गुण म्हणजे ब्राउन असणे किंवा जोन्स असणे किंवा रॉबिन्सन असणे. ह्या गुणधर्माचा उपयोग करून ब्राउन, जोन्स आणि रॉबिन्सन ह्यांच्या समूहाची आशय-व्याख्या करता येते. " x हा ब्राउन आहे किंवा x हा जोन्स आहे किंवा x हा रॉबिन्सन आहे ", हे सूत्र पाहा. हे सूत्र नेमक्या तीन x च्या बाबतीतच सत्य असणार. आणि हे तीन म्हणजे ब्राउन, जोन्स आणि रॉबिन्सन. ह्या संदर्भात ह्या सूत्राचे, तीन मुळे (Root) असणाऱ्या त्रिघात (Cubic) समीकरणाशी साम्य आहे. ह्या तीन व्यक्तींच्या वर्गातील सदस्यांकडे आणि याच तीन व्यक्तींकडे असलेला गुणधर्म मांडणे, असा ह्या सूत्राचा अर्थ आहे. ज्याची व्याप्ती-व्याख्या दिलेली आहे. अशा दुसऱ्या कोणत्याही वर्गाविषयी असेच विवेचन करणे सहज शक्य आहे.

पृ. १३

(२) एखाद्या वर्गातील सर्व सदस्यांची मोजदाद न करता त्याविषयी बरेच काही

[1] अ. टी. : Manifold हा शब्द आजच्या गणितात वापरत नाही.

कळणे व्यवहारतः शक्य आहे, हे उघड आहे. सर्व माणसांची मोजदाद कोणाही एकाला करता येणार नाही. इतकेच काय पण त्याला लंडनमधील सर्व रहिवाश्यांचीही मोजदाद करता येणे शक्य नाही, तरीही ह्या दोन्ही वर्गांविषयी आपल्याला पुष्कळच माहिती आहे. वर्गाविषयीचे ज्ञान होण्याकरता व्याप्ती-व्याख्या *आवश्यक* नाही हे दाखवण्यास ही उदाहरणे पुरेशी आहेत. पण ज्या वेळी आपण अनंत वर्गांचा विचार करू त्या वेळी, आपले आयुष्य *सान्त* असल्याने त्याची मोजदाद, तत्त्वतःसुद्धा करता येणार नाही असे दिसेल. सर्व स्वाभाविक संख्यांची (Natural numbers) मोजदाद आपल्याला करता येणार नाही. : 0, 1, 2, 3,... *इत्यादी*. कोणत्या तरी ठिकाणी "इत्यादी" असे म्हणून आपल्याला समाधान मानणे भाग आहे. सर्व अपूर्णांकांची किंवा सर्व अपरिमेय (Irrational) संख्यांची किंवा कोणत्याही अनंत संग्रहाची, मोजदाद करणे आपल्याला शक्य नाही. तेव्हा अशा संग्रहांसंबंधीचे आपले ज्ञान केवळ आशयात्मक व्याख्येतूनच मिळवणे शक्य आहे.

संख्येची व्याख्या तीन भिन्न प्रकारे करण्याचा आपण प्रयत्न करीत असल्याने, ह्या टीपा प्रसंगोचित आहेत. प्रथमतः, सर्व संख्यांचा संग्रह अनंत आहे, त्यामुळे त्याची व्याख्या, मोजदाद करून करणे शक्य नाही. दुसरे असे की, ज्या संग्रहाकडे दिलेल्या संख्येइतकी पदे आहेत त्यांचाच संग्रह अनंत आहे असा समज आहे : उदाहरणार्थ, एक समज असा आहे की, जगामधील त्रिकुटांचा संग्रह अनंत आहे. कारण तसे नसेल तर जगातील सर्व वस्तूंचा संग्रह सान्त होईल. असे असणे कदाचित शक्यही असेल, पण ते असंभाव्य वाटते. तिसरी गोष्ट अशी की आपल्याला "संख्ये"ची अशी व्याख्या द्यावयाची आहे की अनंत संख्यासुद्धा अस्तित्वात असणे शक्य व्हावे; म्हणजे मग आपण अनंत संचातील पदांच्या संख्येविषयी बोलू शकू. अशा संग्रहाची व्याख्या आशय पद्धतीनेच, म्हणजे त्याच्या सर्व पदांजवळ असणारा आणि केवळ त्याच पदांजवळ असणारा गुणधर्म देऊनच, द्यावी लागेल.

पुष्कळ कारणांकरता, वर्ग आणि त्याच्या व्याख्येचा लक्षणधर्म, हे व्यवहारतः परस्पर परिवर्तनीय (Interchangeable) असतात. ह्या दोहोंमधील महत्त्वाचा फरक इतकाच की, दिलेले सदस्य असणारा वर्ग एकच एक असतो; तर ज्याच्या साह्याने दिलेल्या वर्गाची व्याख्या करता येईल असे अनेक लक्षणधर्म नेहमी

पृ. १४

मिळू शकतात. माणूस म्हणजे पिसे नसलेला द्विपाद प्राणी असे म्हणता येईल; किंवा बुद्धिशाली प्राणी असेही म्हणता येईल किंवा (अधिक यथार्थपणे) स्विफ्टने (गलिवरच्या सफरीत) याहूंचे जे विशेष दाखवले त्यांच्या साह्याने त्याची व्याख्या करता येईल. ज्याच्या साह्याने व्याख्या करावयाची तो लक्षणधर्म एकमेव नसण्यामुळेच वर्ग (अधिक) उपयुक्त झाले आहेत; नाही तर त्याच्या सदस्यांमध्ये समाईक असणाऱ्या आणि त्या विशिष्ट सदस्यांकडेच असणाऱ्या गुणधर्मावर

आपण संतुष्ट राहिलो असतो.[1] ज्यावेळी (व्याख्यापक गुणधर्मांचे) एकमेवत्व (Uniqueness) हे महत्त्वाचे नसेल त्या वेळी वर्गाऐवजी त्यांच्यापैकी कोणताही गुणधर्म घेतला तरी चालेल.

आता संख्येच्या व्याख्येकडे वळू. हे स्पष्ट आहे की, संख्या म्हणजे विशिष्ट संग्रहांना, म्हणजे ज्यांच्याजवळ दिलेल्या संख्येइतकी पदे असतील त्यांना एकत्र आणण्याचा एक मार्ग होय. सर्व जोड्या (Couples) एका गठ्ठ्यात, सर्व त्रिकुटे दुसऱ्या गठ्ठ्यात, इत्यादी... आहेत; असे आपण समजू. ह्याप्रमाणे आपल्याला संग्रहांचे गठ्ठे मिळतील. प्रत्येक गठ्ठ्यातील सर्व संग्रहांमधील पदांची संख्या विशिष्ट असेल. प्रत्येक गठ्ठा म्हणजे एक वर्गच असून, त्याचे सदस्य हे स्वतः संग्रह, म्हणजे वर्ग असतील; म्हणजेच प्रत्येक गठ्ठा हा वर्गांचा वर्ग असेल. उदाहरणार्थ, सर्व जोड्या असणारा गठ्ठा हा वर्गांचा वर्ग आहे. प्रत्येक जोडी म्हणजे दोन सदस्य असणारा वर्गच होय, आणि जोड्यांचा संपूर्ण गठ्ठा हा, ज्याचा प्रत्येक सदस्य हा दोन सदस्यांचा वर्ग आहे, अशा अनंत सदस्यांचा वर्ग आहे.

दोन संग्रह एकाच गठ्ठ्यात असावेत किंवा कसे, हे आपण कसे ठरविणार ? सहज सुचणारे उत्तर असे : "प्रत्येकात किती सदस्य आहेत ते ठरवा. आणि त्यांच्यांत सारखेच सदस्य असतील तर त्यांना एकाच गठ्ठ्यात घाला ". पण यात संख्येची व्याख्या माहिती आहे असे आधीच गृहीत धरले जाते; तसेच प्रत्येक संग्रहात किती पदे आहेत हे शोधून काढता येईल असेही गृहीत धरले जाते. गणनक्रियेची आपल्याला इतकी सवय झालेली असते की, अशा पूर्वग्रहाकडे आपले सहजच दुर्लक्ष होऊ शकेल. खरे म्हणजे, गणनक्रिया कितीही परिचयाची असली तरी तर्कदृष्ट्या ती फार गुंतागुंतीची क्रिया आहे; शिवाय, ज्या वेळी संग्रह सान्त असेल त्या वेळी त्यात किती घटक आहेत हे ठरवण्याचे साधन म्हणून तिचा उपयोग करता येईल. संख्येच्या आपल्या व्याख्येमध्ये, सर्वच संख्या सान्त आहेत हे आधीच गृहीत धरले जाता कामा नये; आणि

पृ. १५

दुष्ट-चक्रात सापडल्याशिवाय, संख्येची व्याख्या देण्याकरता 'गणना'चा उपयोग केव्हाही करता येणार नाही; कारण गणनामध्ये संख्यांचाच वापर होतो. म्हणून, दोन संग्रहांत तेवढीच पदे केव्हा असतील हे ठरवण्याकरता आपल्याला दुसरी कोणती तरी पद्धत लागेल.

वस्तुतः, एखाद्या संग्रहात किती पदे आहेत हे ठरवण्यापेक्षा दोन संग्रहांतील पदांची संख्या सारखीच आहे की नाही हे ठरवणे तर्कदृष्ट्या अधिक सोपे आहे. दृष्टांताने

---

[1] ले. टी. : वर्ग म्हणजे व्याख्यापनीय लक्षणांपासून निर्माण होणाऱ्या तार्किक कल्पनाच होत; हे आपण नंतर स्पष्ट करणार आहोत. पण आताचे आपले विवरण सुकर होण्याकरता वर्गांना खरोखरीचे अस्तित्व असते असे समजणे योग्य होईल.

हे स्पष्ट होईल. जर जगात कोठेही बहुपत्नीत्व किंवा बहुपतित्व नसेल, तर कोणत्याही क्षणी, जिवन्त असणाऱ्या पतींची संख्या ही नेमकी पत्नींच्या संख्येइतकी असेल. ह्या करता आपल्याला जनगणना करण्याची आवश्यकता नाही. दोन्ही संग्रहांत सारखेच सदस्य असले पाहिजेत हे आपल्याला माहिती आहे; कारण प्रत्येक नवऱ्याला एकच बायको आणि प्रत्येक बायकोला एकच नवरा असणार. नवरा आणि बायको ह्यांमधील संबंधाला (Relation) " एक-एक (One–one) " असे म्हणतात.

एखाद्या विवेचनातील संबंधामध्ये जर x चा संबंध y शी असता दुसऱ्या कोणत्याही x′ चा तोच संबंध y शी नसेल, तसेच x चा दुसऱ्या कोणत्याहीं y′ शी हाच संबंध नसेल तर संबंधाला " एक-एक " म्हणतात. ज्या वेळी वरीलपैकी फक्त पहिली अट पुरी झाली असेल त्या वेळी त्या संबंधाला " एक-अनेक " म्हणतात; ज्या वेळी फक्त दुसरी अट पूर्ण झाली असेल त्या वेळी त्याला " अनेक-एक " म्हणतात. ह्या व्याख्यांमध्ये 1 ही संख्या वापरलेली नाही हे लक्षात घेतले पाहिजे.

ख्रिस्ती देशांमध्ये पति-पत्नी—संबंध हा एक-एक असतो; मुसलमान देशांत तो एक-अनेक (One-many) असतो; तिबेटात तो अनेक-एक (Many-one) असतो. बापाचा मुलांशी असलेला संबंध एक-अनेक असतो; तर मुलांचा बापाशी असलेला संबंध अनेक-एक असतो; पण ज्येष्ठ पुत्राचा बापाशी असलेला संबंध एक-एक असतो. जर n ही कोणतीही संख्या असेल तर n चा $n+1$ शी एक-एक संबंध असतो; तद्वतच n चा 2n किंवा 3n शी एक-एक संबंध असतो. ज्या वेळी आपण फक्त धन संख्याच घेऊ, त्या वेळी n चा n^2 शी एक-एक सबंध असतो; पण ज्या वेळी ऋण संख्यांचाही अंतर्भाव केलेला असेल त्या वेळी तो दोन-एक होईल, कारण n आणि $-n$ ह्यांचा वर्ग (Square) तोच असतो. एक-एक, एक-अनेक आणि अनेक-एक ह्या संबंधांची कल्पना समजण्यास इतकी उदाहरणे पुरावीत. ह्या संबंधांचे कार्य गणिती तत्त्वांमध्ये केवळ संख्यांच्या व्याख्येच्याच बाबतीत नव्हे तर इतरही अनेक बाबतींत फार मोठे आहे.

जर दोन वर्गामध्ये एक-एक संबंध असेल तर ते दोन वर्ग " सदृश (Similar) " आहेत असे म्हणतात. ज्या प्रकारे विवाहसंबंधाने पतिपत्नींमध्ये अन्योन्य संबंध जोडला जातो. त्याचप्रकारे एक-एक संबंध असणाऱ्या दोन

पृ. १६

वर्गांतील, एका वर्गाच्या पदांचा दुसऱ्या वर्गातील पदांशी अन्योन्य-संबंध जोडला जातो. ही व्याख्या अधिक यथार्थपणे मांडण्याकरता काही प्राथमिक व्याख्यांचा आपल्याला उपयोग होऊ शकेल. ज्या पदांचा कोणाशी तरी दिलेला संबंध असेल अशा पदांच्या वर्गाला त्या संबंधाचा प्रदेश (Domain) म्हणतात; तेव्हा बापाचा मुलाशी असलेल्या संबंधाचा प्रदेश म्हणजे सर्व बाप, पतींचा पत्नींशी असलेल्या संबंधाचा प्रदेश म्हणजे सर्व पती, पत्नींचा पतींशी असलेल्या संबंधांचा प्रदेश म्हणजे सर्व पत्नी; पती आणि पत्नी मिळून विवाह या संबंधाचा प्रदेश तयार होतो. पत्नींचा पतींशी असलेल्या संबंधाला, पतींच्या पत्नींशी असलेल्या संबंधांचा व्यत्यास

(Converse) म्हणतात. तसेच *लहान* हा संबंध *मोठा* ह्या संबंधाचा व्यत्यास होय. *नंतर* हा *आधी* याचा व्यत्यास होय, इत्यादी. सर्वसामान्यतः x चा y शी दिलेला संबंध असताना, y चा x शी जो संबंध असेल त्याला दिलेल्या संबंधाचा व्यत्यास म्हणतात. दिलेल्या संबंधाच्या व्यत्यासाचा प्रदेश म्हणजे त्या संबंधाचा *व्यस्त प्रदेश* (Converse domain) : याप्रमाणे पतींच्या पत्नींशी असलेल्या संबंधाचा व्यस्त प्रदेश म्हणजे पत्नींचा वर्ग. आता आपण सदृशतेची (Similarity) व्याख्या देऊ :

जर दोन वर्गांमध्ये असा एक-एक संबंध असेल की, एक वर्ग त्याचा प्रदेश आणि दुसरा व्यस्त प्रदेश, तर पहिला वर्ग दुसऱ्याशी "सदृश (Similar)" आहे असे म्हणतात.

पुढील विधाने सिद्ध करणे सोपे आहे : (१) प्रत्येक वर्ग स्वतःशी सदृश असतो, (२) जर α हा वर्ग β या वर्गाशी सदृश असेल, तर β हा α शी सदृश असतो, (३) जर α हा β शी सदृश असेल आणि β हा γ शी सदृश असेल तर α हा γ शी सदृश असतो. जर एखाद्या संबंधाकडे पहिला गुणधर्म असेल तर त्याला *आत्मक्षेपी* (Reflexive) म्हणतात; दुसरा संबंध असेल त्या वेळी *संमित* (Symmetrical) आणि तिसरा असेल त्या वेळी *संक्रमणीय* (Transitive) म्हणतात. एखादा संबंध संमित आणि संक्रमणीय असेल तर तो आपल्या प्रदेशात सर्वत्र आत्मक्षेपी असला पाहिजे हे उघड आहे. हे गुणधर्म असणाऱ्या संबंधाचा प्रकार महत्त्वाचा आहे. आणि सादृश्य हा याच प्रकारचा एक संबंध आहे, हे लक्षात घेणे उपयुक्त ठरेल.

दोन सान्त वर्गांत सारखीच पदे असतील तरच ते सदृश असतील अन्यथा नाही हे सामान्य बुद्धीला पटण्यासारखे आहे. ज्याचे गगन करावयाचे आहे असा एक वस्तुसंच आणि क्रियेत लागणाऱ्या स्वाभाविक संख्या (0 वगळून),
पृ. १७ ह्यांच्यामध्ये एक-एक प्रकारचा अन्योन्य संबंध प्रस्थापित करणे म्हणजे गगनक्रिया होय. ह्या अनुरोधाने पाहता, सामान्य-बुद्धीचा निर्णय असा पडतो की, गगनक्रियेमध्ये जेवढ्या स्वाभाविक संख्या लागल्या असतील तेवढ्या वस्तू त्या संचात आहेत. जोवर आपली चर्चा सान्त संख्यांपुरतीच सीमित राहते तोवर एकूण 1 ते n ह्या n संख्या लागतात हेही आपल्याला माहिती असते. त्यामुळे, जर संग्रह सान्त असेल तर गणनक्रियेतील शेवटच्या संख्येइतक्याच वस्तू त्या संग्रहात आहेत हे सरळ येते. हा निष्कर्ष सान्त संग्रहापुरताच लागू आहे. तसेच परस्परसदृश अशा दोन वर्गांतील घटकांची संख्या एकच असते असेही मानावे लागते. कारण ज्या वेळी आपण (उदाहरणादाखल समजा) 10 वस्तू मोजतो त्या वेळी आपण असे दाखवतो की ह्या वस्तूंचा संच हा 1 ते 10 ह्या संख्यांच्या संचाशी सदृश आहे. गणनक्रियेमध्ये सादृश्याची कल्पना तर्कदृष्ट्या गृहीत असते. आणि ती जरी कमी परिचित असली तरी तर्कतः अधिक सोपी आहे. गणनक्रियेमध्ये मोजावयाच्या वस्तू, पहिली, दुसरी, तिसरी अशा विशिष्ट क्रमाने घ्याव्या लागतात, पण क्रम हा संख्यांचा

सारभूत गुण नव्हे. तर्कदृष्ट्या ती अप्रस्तुत असून अनावश्यक क्लिष्टता निर्माण करते. उदाहरणार्थ— प्राधान्याचा (Precedence) काही क्रम प्रस्थापित केल्याशिवायच पतींची संख्या पत्नींच्या संख्येइतकीच असल्याचे सांगता येते हे आपण पाहिले आहे. सादृश्याच्या संबोधासाठी, सदृश असलेले वर्ग सान्तच असले पाहिजेत असेही नाही. उदाहरणार्थ— एकीकडे स्वाभाविक संख्या (0 वगळून) घ्या आणि दुसरीकडे, ज्यांच्या अंशात 1 आहे असे अपूर्णांक घ्या. हे उघड आहे की आपण 2 चा $\frac{1}{2}$ शी, 3 चा $\frac{1}{3}$ शी इत्यादी, अन्योन्य संबंध लावून हे दोन वर्ग सदृश असल्याचे सिद्ध करू शकतो.

याप्रमाणे, ह्या प्रकरणात यापूर्वी आपण विचारीत असलेल्या प्रश्नाच्या अर्थाने, दोन संग्रह एकाच गठ्ठ्यात केव्हा घालावयाचे हे ठरवण्याकरता आपण "सादृश्या"च्या कल्पनेचा उपयोग करू शकतो. ज्या वर्गात एकही सदस्य नाही अशा वर्गाचा आपल्याला एक गठ्ठा हवा आहे : हा गठ्ठा 0 ह्या संख्येसाठी राहील. नंतर, ज्या वर्गात एकच सदस्य असेल अशा वर्गांचा एक गठ्ठा आपल्याला हवा आहे. हा
पृ. १८ 1 ह्या संख्येसाठी राहील. नंतर 2 ह्या संख्येसाठी आपल्याला सर्व जोड्यांचा गठ्ठा हवा आहे; नंतर सर्व त्रिकुटांचा एक. याप्रमाणे कोणताही संग्रह दिला असता, तो ज्या गठ्ठ्यात घालावयाचा त्या गठ्ठ्याची व्याख्या, ह्या संग्रहाच्या "सदृश" असणाऱ्या सर्व संग्रहांचा वर्ग अशी करू. जर (उदाहरणार्थ) एखाद्या संग्रहात तीन सदस्य असतील तर त्याच्याशी सदृश असणाऱ्या सर्व संग्रहांचा वर्ग म्हणजेच सर्व त्रिकुटांचा वर्ग असतो हे पाहणे अगदी सोपे आहे. आणि एखाद्या संग्रहातील पदांची संख्या किती का असेना, त्या संग्रहाच्या "सदृश" असणाऱ्या सगळ्या संग्रहांतील पदांची संख्या तितकीच असेल. "पदांची संख्या सारखी असणे" याची आपण हीच *व्याख्या* घेऊ. जोवर आपण आपले विचार सान्त संग्रहांपुरतेच मर्यादित ठेवू, तोवर यापासून निघणारे निष्कर्ष प्रचलिताशी सुसंगत असतील हे उघड आहे.

आतापर्यंत आपण विरोधाभासात्मक (Paradoxical) असे काही अल्पांशानेसुद्धा सुचवलेले नाही. पण ज्या वेळी आपण प्रत्यक्ष "संख्या" ह्या संबंधाच्या व्याख्येकडे येऊ तेव्हा प्रथमदर्शनी वाटणारा विरोधाभास टाळता येणार नाही. पण हा परिणाम लवकरच विरघळून जाईल. (उदाहरणार्थ) सर्व जोडयांचा वर्ग हा 2 ह्या संख्येपासून काही तरी निराळा आहे, असे आपल्याला स्वाभाविकपणेच वाटते. परंतु सर्व जोडयांच्या वर्गाविषयी काही शंका वाटण्याचे कारण नाही. त्याची निःसंदिग्ध व्याख्या करणे अवघड नाही. याउलट कोणत्याही अर्थाने पाहता 2 ही संख्या, सत्ताशास्त्रीय (Metaphysical) बाब असून तिच्या अस्तित्वाबद्दल किंवा शोध लागल्याबद्दल आपणाला कधीही निश्चितता वाटणे शक्य नाही, त्यामुळे फसव्या आणि कूटरूप अशा 2 ह्या संख्येच्या पाठीमागे लागण्यापेक्षा जोडयांच्या वर्गावरच समाधान मानून राहणे दूरदर्शीपणाचे ठरेल. अशा ह्या अनुरोधाने आपण खालील व्याख्या बनवू.

एखाद्या वर्गाची संख्या म्हणजे त्या वर्गाशी सदृश असणाऱ्या सर्व वर्गांचा वर्ग होय.

तेव्हा, जोडीची (गणन-) संख्या म्हणजे सर्व जोड्यांचा वर्ग होईल. खरे म्हणजे सर्व जोड्यांचा वर्ग म्हणजेच आपल्या व्याख्येप्रमाणे 2 ही संख्या होईल. ही व्याख्या काहीशी विचित्र वाटली तरी तिच्यामुळे निश्चितपणा व निःशंकपणा प्राप्त करून घेता येतात आणि संख्यांच्या ठिकाणी जे धर्म असावेत अशी आपली अपेक्षा असते ते सर्व, अशा रीतीने व्याख्या केलेल्या संख्यांच्या ठिकाणी असतात, हे सिद्ध करणे अवघड ठरत नाही.

आता सादृश्याच्या साह्याने मिळणारा, वर्गांचा कोणताही गठ्ठा म्हणजे संख्या, अशी सर्वसाधारण व्याख्या आपण करू. ज्या संचातील कोणतेही दोन वर्ग परस्परांशी सदृश असतात, पण त्या संचाच्या बाहेरील कोणताही वर्ग त्यातल्या

पृ. १९

कोणत्याही वर्गाशी सदृश नसतो, असा वर्गांचा संच म्हणजे संख्या होय. निराळ्या शब्दांत, (सर्वसामान्यतः) एखादी संख्या म्हणजे ज्या वर्गातील कोणत्याही सदस्याची तेवढी संख्या असेल असा वर्ग होय; किंवा अधिक सोप्या शब्दांत

संख्या म्हणजे कोणत्या तरी वर्गाची संख्या होय.

अशा व्याख्येची शब्दयोजना काहीशी वर्तुळाकार असल्याचा भास होतो, पण प्रत्यक्षात तसे काहीही नाही. संख्याकल्पनेचा सामान्यतः वापर केल्याशिवायच आपण " दिलेल्या वर्गाची संख्या " ह्या संबंधीची व्याख्या करीत आहोत. म्हणून कोणत्याही प्रकारचा तर्कदोष न घडताच आपण सर्वसाधारणपणे संख्येची व्याख्या " दिलेल्या वर्गाची संख्या " अशी करू शकतो.

खरे म्हणजे अशा पद्धतीच्या व्याख्या पुष्कळच प्रचारात आहेत. उदाहरणार्थ, वडिलांचा वर्ग याची व्याख्या करण्याकरता प्रथम एखाद्याचे वडील असणे म्हणजे काय, याची व्याख्या द्यावी लागेल; मग जे कुणाचे तरी वडील आहेत असे सर्व, म्हणजे वडिलांचा वर्ग होईल. तसेच जर आपल्याला (समजा) वर्गसंख्यांची (Square numbers) व्याख्या करावयाची असेल, तर प्रथम एखादी संख्या दुसरीचा वर्ग आहे म्हणजे काय, याची व्याख्या दिली पाहिजे, आणि मग वर्गसंख्या म्हणजे, ज्या कोणाच्या तरी वर्ग आहेत, अशा संख्या, अशी व्याख्या केली पाहिजे. अशा प्रकारच्या पद्धती पुष्कळच प्रचारात आहेत. आणि त्या वैध असून अनेकदा आवश्यकही असतात, हे जाणून घेणे महत्त्वाचे आहे.

आपण संख्यांची जी व्याख्या आता दिली आहे, तिचा उपयोग सान्त संग्रहांकरता होईल. तिचा उपयोग अनंत संग्रहांकरता कसा करता येईल इतकेच अजून पाहावयाचे आहे. मात्र तत्पूर्वी, " सान्त (Finite) " आणि " अनंत (Infinite) " म्हणजे काय हे आपण ठरवले पाहिजे; पण ते प्रस्तुत प्रकरणाच्या मर्यादेत बसत नाही.

□ □

प्रकरण ३

सांतत्व आणि गणिती विगमन

जर "0", "संख्या" आणि "अनुचर" म्हणताना आपल्याला काय म्हणायचे आहे हे माहिती असेल, तर पहिल्या प्रकरणात सांगितल्याप्रमाणे सर्व स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेची व्याख्या करता येईल. पण आपण
पृ. २० आणखी एक पाऊल पुढे जाऊ : जर "0" आणि "अनुचर" म्हणजे काय अभिप्रेत आहे हे आपल्याला माहिती असेल, तर आपल्याला सर्व स्वाभाविक संख्यांच्या व्याख्या करता येतील. हे कसे करता येईल ते पाहात असता, त्याचा उपयोग सान्त आणि अनंत ह्यांमधील फरक समजून घेण्याकरता, आणि ज्या पद्धतीने हे आपण करणार आहोत ती सान्ताच्या पलीकडे का लागू पडत नाही हे जाणण्याकरता होईल. "0" आणि "अनुचर" यांच्या व्याख्या कशा करावयाच्या ह्याचा विचार आपण अजूनही करणार नाही. ह्या संज्ञांचा अर्थ आपल्याला माहिती आहे, असे आपण क्षणभर मानणार आहोत, आणि त्यावरून इतर सर्व स्वाभाविक संख्या कशा मिळवता येतील ते दाखवणार आहोत.

दिलेल्या कोणत्याही– समजा 30,000 संख्येपर्यंत जाता येते हे पाहणे सोपे आहे. प्रथम आपण "1" ची व्याख्या "0 चा अनुचर" अशी करू. मग "2" ची व्याख्या "1 चा अनुचर" अशी करू. पायरीपायरीने ह्या पद्धतीने गेल्यास, 30,000 सारख्या एखाद्या दिलेल्या संख्येपर्यंत जाता येईल. जर आपल्याकडे चिकाटी असेल तर हे प्रत्यक्ष कृती करून सिद्धही करता येईल; त्याकरता प्रत्यक्ष 30,000 शी पोचेपर्यंत आपल्याला काम करावे लागेल. परंतु ही पद्धत जरी प्रत्येक विशिष्ट संख्येकरता उपलब्ध असली तरी, ह्या पद्धतीने, म्हणजे "0" पासून आरंभ करून पायरीपायरीने प्रत्येक संख्येचा अनुचर घेत सर्व संख्या मिळवता येतात, हा सार्वत्रिक सिद्धान्त सिद्ध करण्याकरता ती उपयोगी पडत नाही. हे सिद्ध करता येईल असा दुसरा मार्ग आहे काय ?

ह्या प्रश्नाचा दुसऱ्या एका बाजूने विचार करू : "0" आणि "अनुचर" या

सज्ञा दिल्या असता ज्या संख्यांपर्यंत पोचता येईल अशा संख्या कोणत्या ? ज्याच्यामुळे अशा सर्व संख्यांच्या वर्गाची व्याख्या करता येईल, असा एखादा मार्ग
पृ. २१
आहे काय ? आपण 0 चा अनुचर म्हणून 1 पर्यंत जातो; 1 चा चा अनुचर म्हणून 2 पर्यंत जातो; 2 चा अनुचर म्हणून 3 पर्यंत जातो;...इत्यादी. ह्या "इत्यादी" ऐवजी कमी संदिग्ध आणि कमी अनिश्चित अशी काही एक संकल्पना आपल्याला मिळवायची आहे. अनुचराच्या ह्या पद्धतीने ह्या प्रक्रियेची सान्त अशा कितीही वेळा पुनरावृत्ती करणे म्हणजे "इत्यादी" असे म्हणण्याचा मोह आपल्याला होईल; पण 'सान्त संख्ये'ची व्याख्या कशी करायची ह्याच समस्येत तर आपण गुंतलेले आहोत. त्यामुळे आपल्या व्याख्येत ह्या संकल्पनेचा वापर आपल्याला करता येणार नाही. सान्त संख्या म्हणजे काय ते आपल्याला माहिती आहे असे आपल्या व्याख्येत गृहीत धरता येणार नाही.

आपल्या प्रश्नाची गुरुकिल्ली *गणिती विगमनामध्ये* आहे. वाचकांना हे आठवत असेल की प्रकरण १ मध्ये स्वाभाविक संख्यांसंबंधी आपण जी ५ मूळ प्रविधाने मांडली होती त्यांतले हे पाचवे प्रविधान आहे. त्यात असे म्हटले होते की, जो धर्म 0 जवळ असतो आणि एखाद्या संख्येजवळ असला तर तिच्या अनुचराजवळही असतो, तो सर्व स्वाभाविक संख्यांजवळ असतो. त्यावेळी हे तत्त्व म्हणून मांडले होते. पण आता ही व्याख्या म्हणून आपण स्वीकारणार आहोत. हे तत्त्व पाळणारी पदे, 0 पासून पायरीपायरीने मिळणाऱ्या संख्यांप्रमाणेच आहेत हे पाहणे अवघड नाही; पण हा मुद्दा महत्त्वाचा असल्याने आपण त्याचा सविस्तर ऊहापोह करू.

आपण जर बऱ्याच व्याख्या मांडून सुरुवात केली तर ते फायद्याचे ठरेल; ह्या व्याख्या अन्य संदर्भातही उपयुक्त ठरतील. म्हणून अन्यत्रही उपयोगी ठरतील अशा काही व्याख्यांपासून आपण आरंभ करणे चांगले.

एखादा गुणधर्म n ह्या संख्येकडे असता तो n + 1 कडे म्हणजे n च्या अनुचराकडेही असेल तर तो गुणधर्म स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेत "आनुवंशिक" (Hereditary) आहे असे म्हणतात. तसेच n जर एखाद्या वर्गाचा घटक असेल तर n + 1 सुद्धा त्या वर्गाचा घटक असतो असे असेल तर तो वर्गही "आनुवंशिक" आहे असे म्हणतात. एखादा गुणधर्म आनुवंशिक असणे म्हणजे तो एखाद्या स्वाभाविक संख्येपासून पुढील सर्व स्वाभाविक संख्यांकडे असल्याप्रमाणेच आहे. उदाहरणार्थ,— तो आनुवंशिक असणे म्हणजे 100 पासून पुढील सर्व संख्याकडे असला पाहिजे, किंवा 1,000 पासून पुढील सर्व संख्यांकडे असला पाहिजे, किंवा 0 पासून सर्व, म्हणजे निरपवादपणे सर्वच संख्यांकडे असला पाहिजे; पण हे *पाहणे* सोपे असले तरी ह्या गोष्टीचे ज्ञान आपल्याला झाले आहे असे अजून मानता येणार नाही.

एखादा गुणधर्म आनुवंशिक असून तो शून्याच्या अंगीही असेल तर त्याला

पृ. २२ "बिगामी (Inductive)" म्हणतात. तसेच एखादा वर्ग आनुवंशिक असून 0 हा त्याचा सदस्य असेल तर तो वर्ग "बिगामी" आहे असे म्हणतात.

0 ज्याचा घटक आहे असा आनुवंशिक वर्ग दिला असता त्यात 1 सुद्धा सदस्य म्हणून असला पाहिजे; कारण आनुवंशिक वर्गामध्ये त्याच्या सदस्यांचे अनुचरही असतात आणि 1 तर शून्याचा अनुचरच आहे. तसेच 1 ही संख्या ज्याची सदस्य आहे असा वर्ग दिला असेल तर 2 सुद्धा त्याची सदस्य असते, हेही सरळ आहे. याप्रमाणे क्रमाक्रमाने प्रक्रिया करीत, दिलेली कोणतीही संख्या– समजा 30,000 ही प्रत्येक बिगामी वर्गाची सदस्य असल्याचे सिद्ध करता येईल.

"लगतची पूर्वचर" (Immediate predecessor, "अनुचर" ह्या कल्पनेच्या विरुद्ध) ह्या संबंधाच्या संदर्भात, दिलेली संख्या ज्या ज्या आनुवंशिक वर्गात असेल त्या प्रत्येक वर्गातील सर्व पदांना आपण दिलेल्या स्वाभाविक संख्येचा "वंश (Posterity)" असे म्हणू. एखादी स्वाभाविक संख्या आणि तिच्याहून मोठ्या असणाऱ्या सर्व संख्या म्हणजेच त्या स्वाभाविक संख्येचा वंश होय हे पाहणे सोपे आहे; पण हेसुद्धा आपल्याला अजून अधिकृतपणे माहिती नाही.

वरील व्याख्यांनुसार 0 च्या वंशामध्ये, प्रत्येक बिगामी वर्गात मोडणारी पदे असतील.

0 पासून सुरुवात करून एका पदापासून पुढचे पद, त्याच्यापासून पुढचे पद अशा पायऱ्यापायऱ्यांनी, ज्या पदापर्यंत आपण पोहोचू शकू ती पदे, आणि 0 चा वंश, हा एकच संच आहे हे स्पष्ट करणे आता अवघड नाही. कारण, प्रथमतः 0 ही संख्या दोन्ही संचांत (आपण आपल्या पदांच्या ज्या व्याख्या केल्या आहेत त्या अर्थाने) आहे, दुसरे म्हणजे, जर n दोन्ही संचांत असेल, तर n + 1 सुद्धा दोन्हींमध्ये असते. येथे एक गोष्ट लक्षात घेतली पाहिजे की, आपण तुलनेने संदिग्ध असलेल्या एका कल्पनेची तुलनेने काटेकोर असलेल्या कल्पनेशी तुलना करीत आहोत. आणि अशा प्रकारच्या तुलनेचे प्रामाण्य काटेकोरपणे सिद्ध करता येत नाही. "0 पासून क्रमाने पुढचे, त्याच्या पुढचे, ह्या पद्धतीने मिळणाऱ्या पदांच्या" कल्पनेला निश्चित अर्थ आहे असे भासले तरीही संदिग्ध आहे; दुसऱ्या बाजूला, "0 चा वंश" ही कल्पना, पहिली कल्पना नेमकी जेथे अंधुक भासते तेथेच, काटेकोर आणि सुस्पष्ट आहे. 0 पासून क्रमाक्रमाने मिळणाऱ्या पदांविषयी आपण जे म्हणतो त्याचा *अर्थ* स्पष्ट करून सांगणारी म्हणून ही कल्पना स्वीकारता येईल.

आता आपण पुढील व्याख्या मांडू :

पृ. २३ *"लगतची पूर्वचर" ("अनुचर"च्या उलट) ह्या संबंधाच्या संदर्भात 0 चा वंश म्हणजेच "स्वाभाविक संख्या" होत.*

याप्रमाणे आपण पेआनोच्या तीन आदिकल्पनांपैकी एकाची व्याख्या इतर दोहोंच्या रूपात करण्यापर्यंत येऊन ठेपलो. ह्याचा परिणाम म्हणून, ज्याच्यात 0 ही एक संख्या असल्याचे प्रतिपादले आहे ते एक, आणि ज्याच्यात गणिती विगमन प्रतिपादले आहे ते दुसरे, अशा त्याच्या दोन आदिविधानांची आवश्यकता उरली नाही; कारण व्याख्येवरूनच ती निष्पन्न होतात. प्रत्येक स्वाभाविक संख्येचा अनुचर स्वाभाविक संख्या आहे असे मांडणारे विधान केवळ, "प्रत्येक स्वाभाविक संख्येला अनुचर असते" ह्या दुर्बळ स्वरूपात असून आता पुरेल.

अर्थात प्रकरण २ मध्ये सर्वसाधारणतः संख्येची जी व्याख्या आपण बनवली होती तिच्या साह्याने, "0" आणि "अनुचर" ह्यांच्या व्याख्या आपण सहज करू शकू. ज्या वर्गात एकही सदस्य नाही म्हणजेच जो "रिक्त वर्ग" आहे, त्यातील पदांची संख्या म्हणजे 0. ही संख्या सामान्य व्याख्येनुसार रिक्त वर्गाशी सदृश असलेल्या सर्व वर्गांचा संच, म्हणजेच रिक्त वर्ग हा एकच घटक ज्यात आहे असा वर्ग होय (हे सहज सिद्ध करता येईल). (हा वर्ग रिक्त नव्हे. कारण त्यात रिक्तवर्ग हा एक सदस्य असतो; तर स्वतः रिक्त वर्गात एकही घटक नसतो. ज्या वर्गात एकच सदस्य आहे तो वर्ग त्या सदस्याशी कधीही समान असत नाही. हे आपण जेव्हा वर्गमीमांसेचा विचार करू तेव्हा स्पष्ट करू.) ह्याप्रमाणे आपल्याला खालील शुद्ध तार्किक व्याख्या मिळते :

0 म्हणजे *रिक्तवर्ग हाच केवळ ज्याचा सदस्य आहे असा वर्ग.*

आता "अनुचर"ची व्याख्या तेवढी राहिली. n ही कोणतीही संख्या दिली असता ज्यात n सदस्य आहेत असा ∝ हा एकवर्ग घ्या. आणि ∝ चे सदस्य नसलेले x हे कोणतेही पद घ्या. मग ∝ मध्ये x ची भर घालून मिळालेल्या वर्गात n + 1 सदस्य असतील. याप्रमाणे आपल्याला खालील व्याख्या मिळते :

∝ ह्या वर्गातील पदांच्या संख्येची अनुचर म्हणजे त्या वर्गातील पदे आणि त्या वर्गात नसलेले x हे कोणतेही एक पद मिळून होणाऱ्या वर्गातील पदांची संख्या होय.

ही व्याख्या परिपूर्ण करण्याकरता काही बारकावे स्पष्ट करावे लागतील. त्यांचा येथे विचार करण्याचे कारण नाही.[1] एखाद्या वर्गातील पदांच्या
पृ. २४ संख्येची तार्किक व्याख्या आपण आधीच (प्रकरण २ मध्ये)
दिली आहे हे आठवत असेल. ती संख्या म्हणजे त्या वर्गाशी सदृश असणाऱ्या सर्व वर्गांचा संच होय.

याप्रमाणे पेआनोच्या तीन आदिकल्पनांचे तर्कशास्त्रातील कल्पनांत आपण क्षपण केले आहे. त्यांचा आशय निश्चित होईल अशा त्यांच्या व्याख्या आपण दिल्या आहेत. पेआनोच्या पाच आदिविधानांचे पालन करण्यापुरतीच निश्चितता जेव्हा त्यांच्या ठिकाणी

[1] ले. टी. : Principia Mathamatica, vol. ii, * ११० पाहा.

होती तेव्हा त्यांची जशी अनंत विवरणे होऊ शकत, तशी यापुढे होऊ शकणार नाहीत. ज्या संज्ञा नुसत्याच स्वीकाराव्या लागतात त्यांच्या मूलभूत सामग्रीपासून आपण ती काढून घेतली आहेत. आणि परिणामी, गणिताचे निगामी (Deductive) रूप वाढवले आहे.

वरील पाच आदिविधानांविषयी म्हणावयाचे तर "स्वाभाविक संख्ये"च्या व्याख्येपासून, त्यांपैकी दोहोंची सिद्धता देण्यात, आपण पूर्वीच यश मिळविले आहे. उरलेल्या तिघांच्या संबंधात त्या व्याख्येचे काय स्थान आहे ? शून्य ही कोणत्याही संख्येची अनुचर नाही हे, आणि कोणत्याही संख्येची अनुचर संख्याच असते, हे सिद्ध करणे सोपे आहे. पण उरलेल्या आदिविधानाविषयी म्हणजे "कोणत्याही दोन संख्यांना एकच अनुचर नसतो" याविषयी एक अडचण उद्भवते. विश्वातील सर्व वस्तूंची संख्या सान्त नसेल, तर ही अडचण उद्भवणार नाही. कारण विश्वातील सर्व वस्तूंच्या संख्येइतक्या नसलेल्या अशा m आणि n या दोन संख्या दिल्या असता, जर $m = n$ नसेल तर $m + 1 = n + 1$ असू शकणार नाही हे सिद्ध करणे सोपे आहे. पण असे समजू या की, विश्वातील सर्व वस्तूंची संख्या (समजा) 10 आहे; मग 11 वस्तू असलेला कोणताही वर्ग असू शकणार नाही; आणि 11 ही संख्या म्हणजे रिक्तवर्गच ठरेल. तेच 12 या संख्येविषयी म्हणता येईल. तेव्हा आपल्याला $11 = 12$ मिळेल. म्हणून जरी 10 आणि 11 समान नसल्या तरी 10 ची आणि 11 ची अनुचर सारख्याच येतील. तेव्हा, आपल्याला ज्यांना एकच अनुचर आहे अशा दोन भिन्न संख्या मिळतील. तथापि जगातील वस्तूंची संख्या सान्त नसेल, तर तिसऱ्या आदिविधानात हा दोष निर्माण होणार नाही. या विषयाकडे आपण नंतर वळणार आहोत.[१]

विश्वातील वस्तूंची संख्या सान्त नाही हे गृहीत धरून, आपण केवळ पेआनोच्या तीन आदिकल्पनांची व्याख्या करण्यातच यशस्वी झालो आहोत

पृ. २५ असे नव्हे, तर या आदिकल्पनांपासून आणि तर्कशास्त्राच्या प्रविधानांपासून ही पाच आदिविधाने कशी सिद्ध करता येतील हे पाहण्यातही यशस्वी झालो आहोत. ज्या मर्यादेपर्यंत सर्व शुद्ध गणित केवळ स्वाभाविक संख्यांच्या मीमांसेपासून निगमित करता येते, त्या मर्यादेपर्यंत ते तर्कशास्त्राचाच विस्तार ठरेल. ह्या निष्कर्षाच्या विस्तारात गणिताच्या ज्या आधुनिक शाखा स्वाभाविक संख्यांच्या मीमांसेपासून निगमित करता येत नाहीत, त्या समाविष्ट करण्यात कोणतीही तात्त्विक अडचण येत नाही, हे आपण इतरत्र दाखवले आहे.[२]

स्वाभाविक संख्यांची व्याख्या देण्याकरिता वापरलेल्या साधनांचे, म्हणजे गणिती

---

[१] ले. टी. : प्रकरण १३ पाहा.

[२] ले. टी. : भूमितीतील शुद्ध विश्लेषणात्मक प्रकार वगळता इतर भागाकरता *Principles of Mathematics*, part *vi* आणि Rational Dynamics करता याचाच part *vii* पाहा.

विगमनाच्या प्रक्रियेचे, सामान्यीकरण करता येते. संख्यांमधील लगतची अनुचर, ह्या संबंधाच्या दृष्टीने शून्याचा " वंश " म्हणजे स्वाभाविक संख्या, अशी व्याख्या आपण केली होती. जर आपण या संबंधाला N म्हटले, तर m या कोणत्याही संख्येचा m + 1 शी हा संबंध असेल. जर एखादा धर्म m जवळ असता तो m + 1 जवळही म्हणजेच m चा ज्याच्याशी N संबंध आहे त्याच्याजवळही असेल तर त्या धर्माला, " N ला अनुलक्षून आनुवंशिक " किंवा केवळ " N– आनुवंशिक " असे म्हणतात आणि m जवळ असलेला प्रत्येक N– आनुवंशिक धर्म जर n जवळही असेल तर n हा N– संबंधाच्या संदर्भात m च्या वंशात आहे असे म्हणतात. याच व्याख्या N प्रमाणेच इतर कोणत्याही संबंधाला लागू करता येतील. तेव्हा जर R हा कोणताही संबंध असेल तर आपण खालील व्याख्या मांडू शकतो[1] :

x चा y शी R संबंध असून एखादा धर्म x जवळ असता तो y जवळही असेल तर त्या धर्माला " R– आनुवंशिक " म्हणतात.

एखाद्या वर्गाचा व्याख्याधर्म R– आनुवंशिक असेल तर त्या वर्गाला R– आनुवंशिक वर्ग म्हणतात. x जवळ असलेला प्रत्येक R– आनुवंशिक धर्म y ह्या पदाजवळही असेल तर x ला y चा R–पूर्वज (Ancestor) म्हणतात. मात्र x ह्या पदाचा कशाशी तरी R हा संबंध असला पाहिजे किंवा कशाचा तरी x शी R हा संबंध असला पाहिजे. (किरकोळ अडचणी टाळण्यासाठी ही अट जोडली आहे.)

पृ. २६ ज्या ज्या पदांचा R– पूर्वज x असेल त्या सर्व पदांना (पदांच्या वर्गाला) x चा " R– वंश " म्हणतात.

आपण वरील व्याख्या अशा तऱ्हेने रचल्या आहेत की एखादे पद कशाचा तरी पूर्वज असेल तर ते स्वतःचाही पूर्वज असते, आणि स्वतःच्या वंशात असते. ही केवळ एक सोय आहे.

R हा संबंध " जन्मदाता (Parent) " असा घेतला तर " पूर्वज ", " वंश " ह्यांना प्रचलित अर्थ राहतील; अपवाद म्हणजे प्रत्येक व्यक्ती स्वतःची पूर्वज होईल आणि स्वतःच्याच वंशात राहील. अर्थात " पूर्वज "ची व्याख्या " जन्मदाता "च्या रूपात देता येते हे लगेच दिसून येईल. पण फ्रेगेने आपली, विगमनाची सामान्यीकृत मीमांसा मांडली नव्हती तोपर्यंत, कोणालाही " पूर्वज "ची यथार्थ व्याख्या " जन्मदाता "च्या रूपात देता आली नव्हती. ह्या मुद्द्याचा थोडासा विचार केला तर

---

[1] ले. टी. : या व्याख्या आणि विगमन–विज्ञानाचे सामान्यीकरण ह्या कल्पना, फ्रेगेच्या असून, फार पूर्वी म्हणजे १८७९ मध्ये त्याने आपल्या बेग्रिफश्रिफ्ट (Begriffsschrift कल्पनांचे लेखन) मध्ये प्रसिद्ध केले होते. त्याच्या कार्याचे महत्त्व फार असूनही, माझ्या मते, ते– त्याच्या प्रसिद्धीनंतर २० वर्षांनी– वाचणारा मीच पहिला होतो.

ह्या मीमांसेचे महत्त्व पटण्यास मदत होईल. “जन्मदाता”च्या रूपात “पूर्वज”ची व्याख्या करण्याच्या प्रश्नाकडे प्रथमच वळणारी व्यक्ती स्वाभाविकतःच असे म्हणेल : जर A आणि Z ह्यांच्यामध्ये B, C... इत्यादी काही व्यक्ती अशा असतील की B हे A चे अपत्य आहे, आणि शेवटच्या व्यक्तीपर्यंत प्रत्येक जण पुढच्या व्यक्तीचा जन्मदाता आहे, आणि शेवटची व्यक्ती Z चा जन्मदाता आहे; तर A हा Z चा पूर्वज असतो. पण जोवर मधल्या पदांची संख्या सान्त आहे अशी पुस्ती आपण जोडत नाही तोवर ही व्याख्या पुरेशी ठरत नाही. उदाहरणार्थ, पुढील प्रकारची मालिका घ्या—

$$-1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{8}, \ldots \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1$$

येथे प्रथमतः आपण ऋण अपूर्णांकांची मालिका घेतली असून तिला अन्त नाही आणि नंतर धन अपूर्णांकांची मालिका घेतली असून तिला आदी नाही.

मग या मालिकेमध्ये $-\frac{1}{8}$ हा $\frac{1}{8}$ चा पूर्वज आहे असे म्हणता येईल काय? ह्या क्षेत्रात नवीन असलेल्या माणसाने वर सुचविलेल्या व्याख्येप्रमाणे तसे ठरेल, परंतु ज्या प्रकारच्या कल्पनेची व्याख्या आपल्याला करावयाची आहे ती प्राप्त करून देणाऱ्या व्याख्येप्रमाणे ती व्याख्या असणार नाही. यासाठी मधल्या पदांची संख्या सान्त असणे आवश्यक आहे. पण आपण पाहिल्याप्रमाणे “सान्त”ची व्याख्या तर गणिती विगमनाच्या साहाय्यानेच केली पाहिजे. तरीही प्रथम n च्या n + 1 शी असलेल्या संबंधाची व्याख्या करून, नंतर ती इतरांना लागू करण्यापेक्षा, सर्वसाधारण पूर्वज-संबंधाची (Ancestral Relation) व्याख्या एकदमच करणे अधिक सोपे असते. येथे, तसेच इतरत्रही, सुरुवातीलाच जरी अधिक चिंतनाची आवश्यकता पडत असली, तरी आरंभीच सामान्यीकरण करणे हे सरतेशेवटी, वैचारिक दृष्ट्या कमी कष्टाचे होईल आणि ते तर्कशक्तीमध्येही वाढ करील.

पृ. २७

सिद्धांतांमध्ये केलेला गणिती विगमनाचा वापर पूर्वी रहस्यमयच वाटत असे. सिद्धतेची ती एक सप्रमाण (Valid) पद्धती होती याबद्दल कोणतीही साधार शंका नसल्याचे दिसते. पण ती सप्रमाण का होती हे कुणालाही नेमके माहिती नव्हते. तर्कशास्त्रातील विगमनाच्या अर्थाने हाही एक विगमनाचाच प्रकार आहे असा काहींचा विश्वास होता. प्वांकारेच्या[1] (Poincare) मते ते एक सर्वात महत्त्वाचे तत्त्व असून, त्याच्यामुळे अनंत संविधानांचा (Syllogism) संक्षेप एकाच युक्तिवादामध्ये करता येई. हे सर्व दृष्टिकोण चुकीचे आहेत, आणि गणिती विगमन ही एक व्याख्या आहे, तत्त्व नव्हे, हे आता आपल्याला माहीत झाले आहे; काही संख्यांना ते लागू पडते तर काहींना लागू पडत नाही. (हे आपण प्रकरण ७ मध्ये

[1] ले. टी. : Science and Method chap. iv.

पाहू.) ज्यांना गणिती विगमनाची सिद्धता लागू पडते, म्हणजेच ज्यांच्याजवळ सर्व विगामी धर्म आहेत, त्या "स्वाभाविक संख्या" अशी *व्याख्या* आपण करतो. असल्या सिद्धता स्वाभाविक संख्यांना लागू पडतात त्या त्यांच्या रहस्यमय आंतरिक ज्ञानामुळे किंवा तत्त्वांमुळे नसून, त्या शुद्ध व शाद्विक प्रविधानांमुळे लागू पडतात, असे निष्पन्न होते. "चतुष्पाद" म्हणजे चार पायांचे प्राणी असे म्हटल्यास, हे सरळ आहे की, ज्यांना चार पाय आहेत तेच चतुष्पाद होतील; गणिती विगमन पाळणाऱ्या संख्यांचा प्रकार नेमका असाच आहे.

ज्यांना आपण आतापर्यंत "स्वाभाविक संख्या" म्हणत होतो, त्यांचाच निर्देश करण्यासाठी आपण "विगामी संख्या" असा शब्दप्रयोग करू. संख्यांच्या ह्या संचाची व्याख्या गणिती विगमनावरून मिळवल्याचे स्मरण राहण्याच्या दृष्टीने "विगामी संख्या" हा वाक्प्रयोग अधिक स्वीकारणीय आहे. अनन्ताहून सान्ताचे वेगळेपण दर्शविणारे आवश्यक लक्षण इतर कोणापेक्षाही गणिती विगमनापासून मिळते. गणिती विगमनाचे तत्त्व म्हणजे "एकावरून दुसरे, दुसऱ्यावरून तिसरे याप्रमाणे क्रमाक्रमाने जे अनुमान काढता येते ते अनुमान पहिल्यावरून शेवटपर्यंतही काढता येते" या, किंवा अशाच काही लोकप्रिय पद्धतीने मांडता येईल. ज्या वेळी पहिल्या आणि शेवटच्या पदांमधील पायऱ्यांची संख्या सान्त असेल, तेव्हाच ते सत्य असते

पृ. २८

अन्यथा नव्हे. (इंजिनाचा) ताण एका डब्याचा दुसऱ्या डब्याला या पद्धतीने अगदी शेवटच्या डब्यापर्यंत कसा पोहोचतो हे, ज्यांनी कधीकाळी मालगाडी सुरू होताना पाहिली असेल, त्यांच्या लक्षात आलेच असेल. मालगाडी खूप लांब असेल त्या वेळी शेवटचा डबा हालण्याला खूपच वेळ लागतो. जर गाडीची लांबी अनंत असेल तर या पद्धतीने धक्क्यांची अनंत मालिका लागेल, आणि संपूर्ण गाडीने गती घेतली आहे असे कधीही होणार नाही.

तथापि डब्यांची मालिका विगामी संख्यांच्या मालिकेहून (हे लघुतम अनंताचे उदाहरण कसे आहे ते आपण नंतर पाहणार आहोत) लांब नसल्याचे मानू. मग ज्यांना अजूनही गती मिळाली नाही असे डबे जरी शिल्लक राहात असले तरी, इंजिनात पुरेशी शक्ती असल्यास प्रत्येक डबा केव्हा ना केव्हा तरी हालण्यास सुरुवात होईलच.

ज्या वेळी आपण अनंत संख्यांकडे म्हणजे ज्यांना गणिती विगमनाचा युक्तिवाद लागू पडत नाही अशा संख्यांकडे वळू, त्या वेळी सान्त संख्यांमध्ये आपण गणिती विगमन किती नकळत वापरत असतो, हे या दोन प्रकारच्या संख्यांच्या परस्परविरोधी धर्मावरून स्पष्ट होईल.

¤ ¤

प्रकरण ४

क्रमाची व्याख्या

स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेचे विश्लेषण आपण आता इतक्या मर्यादेपर्यंत पोचवले आहे की, त्यामुळे आपल्याला ह्या मालिकेतील सदस्यांची, ह्या सर्व सदस्यांच्या वर्गाची, आणि कोणत्याही संख्येच्या लगतच्या अनुचराची, अशा
पृ. २९ व्याख्या मिळाल्या आहेत. आता आपण 0, 1, 2, 3...... ह्यांच्यांत असणाऱ्या, स्वाभाविक संख्यांच्या क्रमिक (Serial) गुणधर्माचा विचार केला पाहिजे. सर्वसाधारणतः आपण संख्यांचा विचार ह्याच *क्रमाने* (Order) करतो. आणि (त्यामुळे) "क्रम" व "मालिका (Series)" ह्या तार्किक संज्ञांच्या व्याख्या शोधणे हा, आपल्या सामग्रीच्या विश्लेषण कार्यातील एक अत्यावश्यक भाग ठरतो. क्रम ह्या संबोधाचे महत्त्व गणितात असाधारण आहे. केवळ पूर्णांकच नव्हे तर परिमेय अपूर्णांक आणि वास्तव संख्या ह्यांच्यातसुद्धा त्यांच्या आकारानुसार (Magnitude) (किंवा महत्तेनुसार) क्रम असतो, आणि बहुतेक गणिती गुणधर्मांकरता तो अत्यावश्यक असतो. रेषेवरील बिंदूंतील क्रम भूमितीला आवश्यक असतो, तसाच, प्रतलातील (Plane) एकाच बिंदूतून जाणाऱ्या रेषांमधील काहीसा क्लिष्ट असा क्रम, किंवा एकाच रेषेतून जाणाऱ्या प्रतलांतील क्रमही आवश्यक असतो; भूमितीमधील मिती (Dimension) ही क्रमाचीच विकसित अवस्था आहे. सर्व उच्च गणिताच्या मुळाशी असलेली *मर्यादेची* (Limit) संकल्पना, ही क्रमविषयक संकल्पनाच आहे. क्रमकल्पनेवर अवलंबून नसणारे असे गणिताचे काही भाग आहेत, पण तसे भाग ज्यात ही कल्पना अनुस्यूत आहे अशा भागांपेक्षा तुलनेने फारच थोडे आहेत. क्रमाच्या व्याख्येचा शोध करीत असता एक गोष्ट स्पष्टपणे जाणून घेतली पाहिजे की, कोणत्याही संचाला अगदी एकच क्रम असेल असे नाही. त्या संचाच्या बाबतीत वाटेल तेवढे क्रम असू शकतात. कधी कधी एखादा क्रम
पृ. ३० आपल्याला इतका परिचित असतो आणि आपल्या बुद्धीला इतका स्वाभाविक वाटतो, की त्या संचाला *तोच* एक क्रम आहे असे मानण्याकडे आपला कल झुकतो, पण हे चूक आहे. स्वाभाविक संख्या–आपण त्यांना 'विगामी" संख्या असेही म्हणणार आहोत— ह्या साहजिकपणे आपल्याला

त्यांच्या महत्त्वाच्या क्रमानेच माहिती होतात; पण त्यांच्या आणखी अनंत प्रकारे रचना करता येतात. उदाहरणार्थ, आपण प्रथम सर्व विषम संख्या आणि नंतर सर्व सम संख्या घेऊ शकतो; किंवा प्रथम 1, नंतर सर्व सम संख्या, नंतर 3 च्या सर्व विषम पटी, नंतर 5 च्या, दुप्पट आणि तिप्पट वगळता इतर सर्व पटी, नंतर 7 च्या, दुप्पट, तिप्पट, आणि पाचपट वगळता इतर सर्व पटी, ह्याप्रमाणे सर्व अविभाज्य संख्यांच्या मालिकेनुसार करू शकतो. ज्या वेळी आपण असे म्हणतो की, आपण संख्यांच्या अशा भिन्नभिन्न " रचना " करू शकतो, त्या वेळी आपले म्हणणे अचूकपणे मांडलेले नसते. खरे म्हणजे त्या वेळी आपण ' अशा–अशा ' प्रकारच्या रचना देतील अशा, स्वाभाविक संख्यांमधील विशिष्ट संबंधांकडे आपली दृष्टी वळवतो. आकाशातील ताऱ्यांची जशी आपल्याला " रचना " करता येत नाही तद्वतच स्वाभाविक संख्यांचीही रचना करता येत नाही; पण जसे स्थिर ताऱ्यांच्या तेजांनुसार असलेला क्रम आपण जाणू शकतो किंवा आकाशातील त्यांची मांडणी पाहू शकतो, तसेच संख्यांमध्ये असे अनेक संबंध आहेत की आपण त्यांचे निरीक्षण करू शकतो. आणि ते सर्व सारखेच तर्कशुद्ध असे अनेक विविध क्रम संख्यांमध्ये उत्पन्न करतात. आणि जे संख्यांबद्दल तेच रेषेवरील बिंदूंविषयी आणि तेच (कालपटा-वरील) क्षणासंबंधी. एक क्रम अधिक परिचित असेल पण बाकीचे तेवढेच सयुक्तिक आहेत. उदाहरणार्थ, आपण प्रथमतः रेषेवर, ज्यांचे सहनिर्देशक पूर्णांक आहेत असे बिंदू घेऊ, मग ज्यांचे सहनिर्देशक अपरिमेय बैजिक (Algebraic) आहेत असे बिंदू घेऊ. ह्याप्रमाणे आपल्या इच्छेनुसार पाहिजे तेवढ्या उलटसुलट पद्धतीने जाऊ शकतो. मिळणारा क्रम हा रेषेवरील बिंदूंमध्ये निश्चितपणे असेल, मग तुम्ही त्याच्याकडे लक्ष द्या अगर देऊ नका. आपण कोणत्या क्रमाकडे लक्ष द्यावे हे आपल्या इच्छेवर आहे. पदांविषयी म्हणावयाचे तर त्यांच्यात संभाव्य असे सर्व क्रम सदैवच अंतर्भूत असतात.

ह्या विचाराचा एक महत्त्वाचा परिणाम म्हणजे, ज्या पदांमध्ये क्रम लावावयाचा असेल त्यांच्या संचाच्या स्वाभाविक क्रमाच्या व्याख्येचा शोध घेण्याचा प्रयत्न आपण करता कामा नये; कारण एकाच संचामध्ये पुष्कळ क्रम असू
पृ. ३१ शकतात. क्रम, हा त्या पदांच्या *वर्गा*मध्ये नसतो; तर काही पदे आधी काही नंतर ज्यामुळे येतात अशा, त्या वर्गातील सदस्यां-मधील एखाद्या संबंधामध्ये असतो. एखाद्या वर्गामध्ये अनेक क्रम असण्याचे कारण म्हणजे एकाच वर्गातील सदस्यांमध्ये अनेक प्रकारचे संबंध असू शकतात. एखाद्या संबंधाजवळ, क्रम उत्पन्न करण्याच्या दृष्टीने कोणते धर्म असले पाहिजेत ?

क्रम उत्पन्न करू शकणाऱ्या संबंधाजवळ कोणते लक्षण असणे आवश्यक आहे याचा शोध घेताना, आपण पुढील विचार करावा : त्या संबंधाच्या दृष्टीने कोणतीही दोन पदे दिली असता कोणते " आधी " आहे आणि कोणते " नंतर " आहे ते आपल्याला ठरवता आले पाहिजे. तेव्हा, हे शब्द आपण त्यांचे जसे नैसर्गिक अर्थ करतो त्याप्रमाणे

आपल्याला वापरता यावेत यासाठी, आपल्याला क्रम संबंधाजवळ पुढील तीन गुणधर्म हवे आहेतः—

(१) जर x हा y च्या आधी असेल तर y हा x च्या आधी येऊ नये. ज्या प्रकारचे संबंध मालिका उत्पन्न करतात, त्यांचे हे लक्षण उघड आहे. जर x, y पेक्षा लहान असेल तर y, x पेक्षा लहान नसणारच. जर x, y च्या पूर्वी (वेळेप्रमाणे) असेल तर y, x च्या पूर्वी येणार नाही. जर x, y च्या डावीकडे असेल तर y, x च्या डावीकडे नसणार. उलटपक्षी ज्या संबंधामुळे मालिका उत्पन्न होत नाहीत, त्यांच्याकडे हा धर्म नसतो. जर x, y चा भाऊ किंवा बहीण असेल तर y सुद्धा x चा भाऊ किंवा बहीण असणार. जर x, y इतकाच उंच असेल तर y सुद्धा x इतकाच उंच असतो. जर x ची उंची y पेक्षा निराळी असेल तर y ची उंची सुद्धा x पेक्षा निराळी असते. ह्या सर्व प्रकारांमध्ये ज्या वेळी एखादा संबंध x आणि y मध्ये असेल त्या वेळी तो y आणि x मध्येही असतो. पण मालिकारूप संबंधात अशी गोष्ट होऊ शकणार नाही. हा पहिला धर्म असणाऱ्या संबंधाला *असंमित* (Asymmetrical) म्हणतात.

(२) जर x, y च्या आधी आणि y, z च्या आधी असेल तर x, z च्या आधी असला पाहिजे. याचा खुलासा, *लहान, पूर्वी, डावीकडे*, ह्या पूर्वीच्याच उदाहरणांनी करता येईल. पण ज्यांच्याकडे हा धर्म *नाही* अशा पूर्वीच्या तिनांतील दोनच उदाहरणे चालतील. जर x, y चा भाऊ किंवा बहीण असेल आणि y, z चा भाऊ किंवा बहीण असेल तर x, z चा भाऊ किंवा बहीण असेलच असे नाही. कारण x आणि z ह्या एकच व्यक्ती असू शकतील. हेच
पृ. ३२ उंचीमधील फरकाला लागू पडेल. पण उंचीच्या समानतेला लागू पडणार नाही; कारण तिच्याजवळ (समानतेजवळ) दुसरा धर्म आहे पण पहिला नाही. याउलट "पिता" ह्या संबंधाजवळ पहिला गुण आहे पण दुसरा नाही. ज्या संबंधाजवळ आपला हा दुसरा गुण असतो त्याला संक्रमणीय (Transitive) म्हणतात.

(३) ज्या वर्गात क्रम प्रस्थापित करावयाचा आहे, त्याच्यातील कोणतीही दोन पदे दिली असता त्यांपैकी एक दुसऱ्याच्या आधी आणि दुसरे पहिल्याच्या नंतर, असे असले(च) पाहिजे. उदाहरणार्थ, कोणत्याही दोन पूर्णांकांपैकी, किंवा अपूर्णांकांपैकी, किंवा वास्तव संख्यांपैकी एक लहान आणि दुसरा मोठा असतो; पण दोन संमिश्र संख्यांबद्दल हे सत्य नसते. काळामधील कोणतेही दोन क्षण दिले असता एक दुसऱ्याच्या आधी असलाच पाहिजे; पण दोन घटना एकाच वेळी घडू शकतात; त्यामुळे त्यांच्याबद्दल असे काही म्हणता येत नाही. रेषेवरील दोन बिंदूंपैकी एक दुसऱ्याच्या डावीकडे असलाच पाहिजे. ज्या संबंधाकडे हा तिसरा गुण असतो त्याला *संलग्न* (Connected) म्हणतात.

ज्या वेळी एखाद्या संबंधाकडे हे तीन गुण असतात त्या वेळी ज्या पदांमध्ये तसा संबंध असेल त्या पदांमध्ये तो संबंध क्रम उत्पन्न करतो; आणि ज्या ज्या ठिकाणी क्रम

अस्तित्वात असतो त्या ठिकाणी तसा क्रम उत्पन्न करणारा आणि हे तीन गुणधर्म असणारा, संबंध शोधून काढता येतो.

ह्या विचारप्रणालीचे उदाहरण देण्यापूर्वी आपण काही व्याख्यांचा परिचय करून घेऊ :

(१) जर दिलेला संबंध असा असेल की, कोणत्याही पदाचा स्वतःशी संबंध नाही, तर त्या संबंधाला अनात्मक्षेपी[1] (Aliorelative) किंवा भिन्नत्वसूचक (Imply diversity) आहे असे म्हणतात. उदा. – " मोठा ", " आकाराने भिन्न ", "भाऊ", " पती ", " पिता " हे सर्व संबंध अनात्मक्षेपी आहेत; पण " समान ", " सहोदर ", " प्रियमित्र ", हे तसे नाहीत.

(२) जर एखादा संबंध x चा y शी आणि y चा z शी असेल तर त्यामुळे उत्पन्न होणाऱ्या x च्या z शी असलेल्या संबंधाला दिलेल्या संबंधाचा वर्ग (Square) म्हणतात. " पितामह " हा " पिता " या संबंधाचा वर्ग होय, " 2 ने जास्त " हा " 1 ने जास्त " या संबंधाचा वर्ग इत्यादी.

(३) ज्या ज्या पदांचा दुसऱ्या कोणाशी तरी एखादा संबंध असेल त्या सर्व पदांच्या वर्गाला त्या संबंधाचा प्रदेश (Domain) म्हणतात. आणि ज्या ज्या पदांशी दुसऱ्या कोणाचा तरी तो संबंध असेल त्यांच्या वर्गाला त्या संबंधाचा व्यस्त प्रदेश (Converse domain) म्हणतात. या शब्दांच्या व्याख्या पूर्वीच दिल्या होत्या, परंतु पुढील व्याख्या करण्यासाठी त्यांची आठवण दिली आहे :—

(४) एखाद्या संबंधाचा प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश मिळून त्याचे क्षेत्र (Field) बनते.

(५) जर एक संबंध सत्य असताना दुसरा संबंधही सत्य असेल
पृ. ३३ तर पहिल्या संबंधात दुसरा *अभिप्रेत* (Implies) असतो, किंवा
पहिला दुसऱ्यात अंतर्भूत असतो, असे म्हणतात.

ज्या संबंधाचा वर्ग (Square) अनात्मक्षेपी असेल तोच संबंध असंमित असतो हे दिसून येईल. अनेकदा असे घडते की, संबंध अनात्मक्षेपी असूनही असंमित नसतो. तरी सुद्धा असंमित संबंध सदैव अनात्मक्षेपी असतो. उदा.– " जीवनसाथी (Spouse) " हा अनात्मक्षेपी असूनही संमित आहे. कारण जर x, y चा जीवनसाथी असेल तर y, x चा जीवनसाथी असतो. पण *संक्रमणीय* संबंधात, सर्व अनात्मक्षेपी संबंध असंमित, आणि उलट, असंमित संबंध अनात्मक्षेपी असतात.

व्याख्यांवरून हे दिसून येईल की, *संक्रमणीय* संबंध त्याच्या वर्गामध्ये (Square) अभिप्रेत असतो; किंवा त्याच्यामध्ये वर्ग " अंतर्भूत आहे " असेही म्हणता येईल. म्हणून

---

[1] ले. टी. : ही संज्ञा C. S. Peirce ह्यांची आहे.

" पूर्वज " संबंध संक्रमणीय असतो; कारण पूर्वजाचा पूर्वजही पूर्वजच असतो, पण " पिता " संक्रमणीय नाही कारण पित्याचा पिता हा पिता नसतो. ज्या संबंधात त्याचा वर्ग (Square) अंतर्भूत असतो आणि जो भिन्नत्वात (Diversity) अंतर्भूत असतो त्याला संक्रमणीय अनात्मक्षेपी म्हणतात. किंवा याचाच दुसरा अर्थ म्हणजे, ज्या संबंधाच्या वर्गामुळे तो (संबंध) आणि त्याचे भिन्नत्व असे दोन्ही सूचित होतात तो संक्रमणीय अनात्मक्षेपी असतो. कारण, ज्या वेळी संबंध संक्रमणीय असतो त्या वेळी असंमितता, ही अनात्मक्षेपित्वासमानच असते.

जर एखाद्या संबंधाच्या क्षेत्रातील कोणतीही दोन पदे दिली असता, एक तर पहिल्याचा दुसऱ्याशी, नाही तर दुसऱ्याचा तरी पहिल्याशी तो संबंध असतो, असे असेल तर त्याला *संलग्न* (Connected) म्हणतात. (येथे दोन्ही असण्याची शक्यता वगळलेली नाही. अर्थात जर संबंध असंमित असेल तर ते शक्यही नाही.)

उदाहरणार्थ, " पूर्वज " हा संबंध अनात्मक्षेपी आणि संक्रमणीय असूनही संलग्न नाही असे दिसून येते; कारण मानव वंशाची मालिका तयार करण्याच्या दृष्टीने तो पुरेसा नाही.

संख्यांमधील " लहान किंवा समान " हा संबंध संक्रमणीय आणि संलग्न आहे पण असंमित किंवा अनात्मक्षेपी नाही.

संख्यांमधील " मोठा किंवा लहान " हा संबंध अनात्मक्षेपी आणि संलग्न आहे पण संक्रमणीय नाही; कारण जर x, y पेक्षा मोठा किंवा लहान असेल आणि y, z पेक्षा मोठा किंवा लहान असेल तर x आणि z समान संख्याही असू शकतील.

पृ. ३४ तेव्हा, (१) अनात्मक्षेपी असणे, (२) संक्रमणीय असणे, आणि (३) संलग्न असणे हे तीन धर्म परस्पर स्वतंत्र आहेत. कारण एखाद्या संबंधाजवळ त्यापैकी कोणतेही एक वगळून बाकीचे दोन राहू शकतात.

आता आपण खालील व्याख्या मांडू :

जर एखादा संबंध अनात्मक्षेपी, संक्रमणीय आणि संलग्न असेल तर त्याला मालिका संबंध (Serial relation) म्हणतात. मालिका म्हणजे मालिका संबंधच होय.

मालिका म्हणजे स्वतः मालिका संबंध नसून मालिका संबंधाचे क्षेत्र असले पाहिजे असे वाटते. पण ते चूक आहे. उदाहरणार्थ,

1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 3, 1; 2, 1, 3; 3, 1, 2; 3, 2, 1;

ह्या सहा भिन्न मालिकांचे क्षेत्र तेच आहे. जर क्षेत्र म्हणजे मालिकाच असेल तर दिलेल्या क्षेत्रापासून एकच मालिका मिळाली पाहिजे. वरील सहा मालिकांमध्ये वेगळेपण काही असेल तर ते म्हणजे सहा प्रकारांतील भिन्न क्रम होत. क्रम संबंध दिला असता

(त्याचे) क्षेत्र आणि क्रम दोन्ही ठरतात. तेव्हा क्रम संबंध म्हणजे मालिका घेता येईल. पण क्षेत्र तसे घेता येणार नाही.

जर कोणताही एक क्रमसंबंध, समजा P दिला असेल, तर जेव्हा x चा y शी P संबंध असेल तेव्हा x, y च्या "आधी" येतो असे ह्या संबंधाच्या संदर्भात आपण म्हणू, हे आपण xPy असे थोडक्यात लिहू. P हा क्रमसंबंध असण्याकरता त्याच्याकडे पुढील लक्षणे असली पाहिजेत :

(१) xPx असे कधीही असता कामा नये, म्हणजे कोणतेही पद स्वतःच्या आधी येता कामा नये.

(२) P^2 मध्ये P अभिप्रेत असला पाहिजे, म्हणजे x, y च्या आधी आणि y, z च्या आधी असेल तर x, z च्या आधी यावयास पाहिजे.

(३) जर x आणि y ही P च्या क्षेत्रातील भिन्न पदे असतील तर xPy किंवा yPx ह्यांपैकी एक असले पाहिजे, म्हणजे दोहोंपैकी एक दुसऱ्याच्या आधी असलेच पाहिजे.

ज्या क्रमसंबंधाकडे हे तिन्ही धर्म सापडतील तेथे मालिकेची अपेक्षित लक्षणे सापडतील आणि उलटही होऊ शकेल, हे वाचकांना स्वतःचे स्वतःच पटू शकेल. त्यामुळे क्रमांची किंवा मालिकेची व्याख्या वरीलप्रमाणे घेणे
पृ. ३५ हे समर्थनीय आहे. ही व्याख्या शुद्ध तर्कशास्त्रीय संज्ञांच्या रूपात केलेली आहे हे दिसून येईल.

जेथे जेथे मालिका असेल तेथे तेथे, संक्रमणीय, असंमित, संलग्न संबंध जरी असणारच, तरी मालिका निर्माण करणारा सर्वात स्वाभाविक असा हाच संबंध नेहमी असेल असे मात्र नाही. स्वाभाविक संख्यांच्या मालिकेचे उदाहरण घ्या. स्वाभाविक संख्यांचा विचार करताना जो संबंध आपण गृहीत धरला होता तो लगतच्या अनुचरत्वाचा म्हणजेच लगतच्या दोन पूर्णांकांमधला होता. हा संबंध असंमित आहे; पण संक्रमणीय आणि संलग्न नाही. तथापि त्यावरून गणिती विगमनाच्या साहाय्याने आपण मागच्या पाठात पाहिलेला, "पूर्वजत्व" हा, संबंध मिळवू शकतो. हा संबंध विगामी संख्यांतील "लहान अथवा समान" ह्याप्रमाणेच आहे. स्वाभाविक संख्यांची मालिका निर्माण करण्याकरता, आपल्याला "समान" हा भाग वगळून फक्त "लहान" हा संबंध हवा आहे. m हा n चा पूर्वज असेल पण n शी समान नसेल, असा हा संबंध आहे. म्हणजे तो, (निराळ्या शब्दांत) ज्या अर्थाने संख्या स्वतःची पूर्वज असते त्या अर्थाने जेव्हा m चा एखादा अनुचर n चा पूर्वज असेल त्या वेळचा आहे. हे सर्व आपण खालील व्याख्येत मांडू :

विगामी असलेल्या एखाद्या m ह्या संख्येच्या अनुचराजवळ असलेला प्रत्येक आनुवंशिक गुणधर्म ज्या वेळी n ह्या दुसऱ्या एखाद्या संख्येजवळ असतो त्या वेळी m हा n पेक्षा लहान आहे असे म्हणतात.

ह्याप्रमाणे व्याख्या केलेला " लहान " हा संबंध असंमित, संक्रमणीय आणि संलग्न आहे, आणि त्याचे क्षेत्र विगामी संख्या आहेत, हे पाहणे सोपे आहे, आणि सिद्ध करणेही कठीण नाही. याप्रमाणे आपण ज्या अर्थाने " क्रम " ह्या संज्ञेची व्याख्या केली आहे त्या अर्थाने विगामी संख्यांना ह्या संबंधाच्या साहाय्याने क्रम मिळाला. ह्याच क्रमाला " स्वाभाविक " क्रम किंवा महत्तेचा (Magnitude) क्रम म्हणतात.

n चा n + 1 शी जसा संबंध असतो, काहीशा तशाच प्रकारच्या संबंधामुळे होणारी मालिकांची निर्मिती पुष्कळशी प्रचलित आहे. उदाहरणार्थ, इंग्लंडच्या राजांची मालिका प्रत्येकाच्या वारसाच्या संबंधातून निर्माण झाली आहे. मालिका निर्मितीच्या विचाराच्या दृष्टीने, जेथे लागू पडण्यासारखी परिस्थिती असेल तेथे, ही बहुधा सर्वात सोपी पद्धत असते. ह्या पद्धतीमध्ये आपण प्रत्येक पदाकडून नंतरच्या पदापर्यंत, जोवर नंतरचे पद आहे तोवर, जात राहतो; किंवा प्रत्येक पदाकडून उलट

पृ. ३६

क्रमाने त्याच्या आधीच्या पदापर्यंत, जोवर आधीचे पद आहे तोवर, जात राहतो. निर्माण केलेल्या मालिकेतील " आधी " आणि " नंतर " यांच्या व्याख्या करता याव्यात, यासाठी या पद्धतीत नेहमी गणिती विगमन अधिक व्यापक रूपात लागते. प्रत्येक पद स्वतःच्या वंशात असावे असा अर्थ आपण पूर्वी " वंश " या संज्ञेला दिला होता. त्याच अर्थाने x चा ज्या पदाशी R– संबंध असेल अशा एखाद्या पदाच्या R– वंशात असणाऱ्या सर्व पदांच्या वर्गाला आपण " R ला अनुलक्षून x चा युक्त वंश " — " युक्त अपूर्णांकाप्रमाणेच " — असे नाव देऊ. मूलभूत व्याख्येकडे वळल्यास " युक्त वंशा "ची व्याख्या पुढीलप्रमाणे देता येईल असे दिसते :—

R ला अनुलक्षून x चा " युक्त वंश " हा, x चा ज्याच्याशी R– संबंध आहे अशा प्रत्येक पदाचा प्रत्येक R– आनुवंशिक धर्म असेल, अशा सर्व पदांचा बनलेला असतो. ज्या वेळी x चा R– संबंध असलेले एकच पद असेल अशा वेळी लागू पडावी याच दृष्टीने केवळ नव्हे, तर x चा अनेक पदांशी R– संबंध (उदा. पित्याचा अपत्यांशी असलेला संबंध) असतानाही लागू पडावी, अशा दृष्टीने ही व्याख्या करावी लागली आहे, हे लक्षात घ्यावे. पुढची व्याख्या अशी :

जर y हा R– संबंधाला अनुलक्षून x च्या युक्त वंशात असेल तर x हे पद R– संबंधाला अनुलक्षून y चा " युक्त पूर्वज " असते.

सोईस्कर असेल तर आपण " R– वंश " आणि " R– पूर्वज " अशा छोट्या संज्ञा वापरू.

आता, लगतच्या पदांमधील R– संबंधामुळे निर्माण होणाऱ्या मालिकेकडे वळू. ही पद्धत उपयुक्त ठरावयाची असेल तर " युक्त R– पूर्वज " हा संबंध अनात्मक्षेपी, संक्रमणीय आणि संलग्न असला पाहिजे असे आपल्याला दिसून येईल. हे कोणत्या

परिस्थितीत बद्ध शकेल ! तो संबंध संक्रमणीय नेहमीच असतो. R हा कोणत्याही प्रकारचा संबंध असला तरी " R– पूर्वज " आणि " युक्त R– पूर्वज " हे सदैव संक्रमणीय असतात. पण काही विशिष्ट परिस्थितीतच ते अनात्मक्षेपी आणि संलग्न असतील. उदाहरणार्थ, जेवणाच्या गोल टेबलाभोवतीच्या १२ माणसांतील डाव्या हाताकडील व्यक्तीचा संबंध घ्या. जर आपण ह्या संबंधाला R म्हटले तर एखाद्या व्यक्तीच्या युक्त R–वंशामध्ये डावीकडे जाऊन मिळू शकतील, अशा

पृ. ३७

सर्व व्यक्ती येतील. म्हणजे ती व्यक्ती स्वतः धरून टेबलाजवळील सर्व व्यक्ती येतील. कारण १२ आवृत्तींनंतर आपण पुन्हा आरंभ-बिंदूपाशी येऊन पोहोचू. त्यामुळे ह्या प्रकारात " युक्त R– पूर्वज " हा संबंध जरी संलग्न असला आणि R जरी अनात्मक्षेपी असला तरीही आपल्याला मालिका मिळत नाही, कारण " युक्त R–संबंध " हा अनात्मक्षेपी नाही. ह्याच कारणामुळे, " च्या उजवीकडे " ह्या संबंधाच्या, म्हणजेच पूर्वजत्वाच्या दृष्टीने आपल्याला (दिलेल्या दोन व्यक्तींमधील) एक व्यक्ती दुसरीच्या आधी येतेच असे काही म्हणता येत नाही.

वरच्या उदाहरणातील पूर्वजत्व हा संबंध संलग्न होता; पण भिन्नत्वात अंतर्भूत नव्हता. भिन्नत्वात अंतर्भूत असून संलग्न नसणारा संबंध " पूर्वज " ह्या शब्दाचा प्रचलित अर्थ घेतल्यास मिळेल. जर x हा y चा युक्त पूर्वज असेल तर x आणि y एकच व्यक्ती असणार नाहीत; तसेच कोणत्याही दोन व्यक्ती दिल्या असता एक दुसऱ्याची पूर्वज असेल असेही नाही.

क्रमवारपणा किंवा लागोपाठपणा (Consecutiveness) ह्या संबंधांतून मिळणाऱ्या पूर्वज संबंधांतून कोणत्या परिस्थितीत मालिका निर्माण होतात हा प्रश्न अनेकदा महत्त्वाचा ठरतो. अत्यंत महत्त्वाचे काही प्रकार असे : R हा अनेक– एक संबंध घेऊ; आणि x ह्या एखाद्या पदाच्या वंशाकडे आपले लक्ष द्यावयाचे ठरवू. हे ठरवल्यामुळे " युक्त R– पूर्वज " संलग्न असणारच; आता तो मालिकारूप होण्याबद्दलची खात्री होण्याकरता तो भिन्नत्वात अंतर्भूत आहे इतकेच पाहावयाचे राहिले. हे जेवणाच्या टेबलाच्या उदाहरणाचे सामान्यीकरण आहे. R एक–एक घेऊन x च्या वंशाबरोबरच त्याच्या पूर्वजांचाही अंतर्भाव करून आणखी एक सामान्यीकरण मिळेल. पुन्हा येथेसुद्धा, मालिका निर्माण होईल अशी खात्री होण्याकरता " युक्त R -- पूर्वज " :हा संबंध भिन्नत्वात अंतर्भूत असेल अशी अट हवी.

क्रमवारपणाच्या संबंधामुळे होणारी क्रमाची निर्मिती स्वतःच्या क्षेत्रात महत्त्वाची असेल. पण ज्या पद्धतीत क्रमाची व्याख्या करण्याकरता संक्रमणीय संबंध वापरतात त्या पद्धतीपेक्षा ती कमी सामान्य आहे. अनेकदा असे होते की, परस्परांच्या कितीही जवळ असलेली कोणतीही दोन पदे घेतली तरी त्यांच्यामध्ये अनंत पदे असतात. उदाहरणार्थ, महत्तेच्या क्रमाने अपूर्णांक घ्या. कोणत्याही दोन अपूर्णांकांच्यामध्ये आणखी अपूर्णांक

असतातच,—उदाहरणार्थ, त्यांचे समांतर माध्य (सरासरी Arithmetic mean). परिणामतः, लागोपाठचे (किंवा क्रमवार Consecutive)
पृ. ३८ दोन अपूर्णांक अशी गोष्टच संभवत नाही. क्रमाची व्याख्या करण्याकरता आपण लागोपाठपणाच्या कल्पनेवर अवलंबून राहिलो तर आपल्याला अपूर्णांकांमध्ये महत्त्वाच्या क्रमाची व्याख्या करताच येणार नाही. पण खरे म्हणजे, अपूर्णांकातील 'मोठा' आणि 'लहान' हे संबंध, लागोपाठपणाच्या संबंधातून होणारी निर्मिती अपेक्षित नाहीत. आणि क्रम-संबंधांकडे असावयाची तीन लक्षणे अपूर्णांकातील मोठा आणि लहान ह्या संबंधांकडे आहेतच. अशा सर्व प्रकारांत क्रम, *संक्रमणीय* संबंधाच्याच साह्याने व्याख्यात केला पाहिजे, कारण मधल्या अनंत पदांवरून पलीकडे झेप घेणे फक्त असल्या संबंधांनाच शक्य असते. गगन, किंवा संग्रहातील वस्तूंची मोजणी, अशासारख्या, लागोपाठपणा वापरणाऱ्या पद्धती सान्ताकरताच पुरेश्या आहेत; ती पद्धती काही विशिष्ट मालिकांच्या विशेषतः, ज्यांच्यात एकूण पदे अनंत असली तरी, ज्यांत कोणत्याही दोन पदांमधील पदांची संख्या सान्तच असते— त्यांच्या बाबतीतही लागू करता येते. पण ती सर्वव्यापी मानता कामा नये, इतकेच नव्हे तर, विचार करण्याच्या ज्या सवयींचा परिणाम तिला सर्वव्यापी मानण्यात होईल अशा, सर्व सवयींचे मनामधून निर्मूलन करून टाकण्याची काळजी घेतली पाहिजे. हे केले नाही तर ज्या मालिकांत लागोपाठची पदे नसतात अशा मालिका कठीण आणि कूटमय वाटतील. आणि सांतत्य, अवकाश, काळ आणि गती समजून घेण्याकरता तर असल्या मालिका नितान्त महत्त्वाच्या आहेत.

मालिका निर्माण करण्याचे अनेक मार्ग आहेत. पण ते सर्व, असंमित, संक्रमणीय, संलग्न संबंध शोधण्यावर किंवा रचण्यावर अवलंबून आहेत. यांतील काही मार्ग अतिशय महत्त्वाचे आहेत. ज्याला "दरम्यान (Between)" असे म्हणता येईल अशा त्रिपद संबंधांमुळे (Three-term) निर्माण होणारी मालिका आपण उदाहरण म्हणून घेऊ. ही पद्धत भूमितीमध्ये फार उपयुक्त आहे, आणि दोनपेक्षा अधिक पदे असणाऱ्या संबंधांचा परिचय होण्यास साह्यकारी आहे; प्राथमिक भूमितीच्या संबंधात त्यांचा परिचय सर्वोत्कृष्ट ठरेल.

सर्वसामान्य अवकाशातील सरळ रेषेवरील कोणत्याही तीन बिंदूंपैकी एक, इतर दोहोंच्या मध्ये असलाच पाहिजे. हा प्रकार वर्तुळावरील किंवा दुसऱ्या कोणत्याही बंद वक्रावरील (Closed Curve) बिंदूंच्या बाबतीत शक्य नाही. कारण वर्तुळावरील कोणतेही तीन बिंदू दिले असता, तिसऱ्या बिंदूला टाळून एकाकडून दुसऱ्याकडे, जाणे शक्य असते. खरे म्हणजे "दरम्यान" ही कल्पना म्हणजे विवृत (Open) मालिकांचे– काटेकोर अर्थाने मालिका— लक्षण आहे.

याविरुद्ध म्हणजे, भोजनाच्या टेबलाभोवती बसलेल्या लोकांच्या मालिकांसारखा मालिकांना "चक्रीय (Cyclic)" म्हणता येईल. यांत पुरेशा प्रवासानंतर आपण

आरंभबिंदूशी येतो. ही "दरम्यान"ची कल्पना प्रचलित भूमितीची मूलभूत कल्पना म्हणून घेता येईल; पण तूर्त आपण ही कल्पना एका रेषेला आणि
पृ. ३९ त्या रेषेवरील बिंदूंच्या क्रमाला लागू करू[1]. a आणि b हे कोणतेही दोन बिंदू घेतले असता (ab) ही रेषा तीन भागांची (a आणि b यांच्या व्यतिरिक्त) बनलेली असते :

(१) a आणि b यांच्या दरम्यानचे बिंदू.

(२) x आणि b यांच्या दरम्यान a येईल असे सर्व बिंदू x.

(३) y आणि a यांच्या दरम्यान b येईल असे सर्व बिंदू y.

याप्रमाणे (ab) रेषेची व्याख्या "दरम्यान" ह्या संबंधाच्या रूपात करता येईल.

"दरम्यान" संबंधाने रेषेवरील बिंदू डावीकडून उजवीकडे याप्रमाणे रचावेत. यासाठी आपल्याला काही गोष्टी म्हणजे खालील गोष्टी गृहीत धराव्या लागतील.—

(१) जर a आणि b ह्यांच्या दरम्यान काही असेल तर a आणि b हे बिंदू एकच नव्हेत.

(२) जर एखादा बिंदू a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असेल तर तो b आणि a ह्यांच्याही दरम्यान असतो.

(३) जर एखादा बिंदू a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असेल तर तो a नसेल (आणि (२) चा परिणाम म्हणून b ही नसेल).

(४) जर x, a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असेल, तर a आणि x ह्यांच्या दरम्यान असलेला कोणताही बिंदू a आणि b ह्यांच्याही दरम्यान असेल.

(५) जर x, a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असेल, आणि b, x आणि y ह्यांच्या दरम्यान असेल, तर b, a आणि y ह्यांच्या दरम्यान असेल.

(६) जर x आणि y, a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असतील तर, x आणि y एकच असतील किंवा x, a आणि y ह्यांच्या दरम्यान असेल किंवा x, y आणि b ह्यांच्या दरम्यान असेल.

(७) जर b, a आणि x यांच्या, तसेच a आणि y ह्यांच्या दरम्यान असेल तर, x आणि y एकच असतील, किंवा x, b आणि y ह्यांच्या दरम्यान असेल किंवा y, b आणि x यांच्या दरम्यान असेल.

प्रचलित अवकाशातील कोणत्याही सरळ रेषेवरील बिंदूंच्या संबंधात हे सातही धर्म सहज ताडून पाहता येतील. हे धर्म असणाऱ्या अशा, कोणत्याही त्रिपद संबंधामुळे मालिका मिळते हे खालील व्याख्यांवरून दिसून येईल. निश्चितपणा येण्याकरता a हा b च्या डावीकडे आहे असे आपण मानू.

---

[1] ले. टी. : Rivista di Mathematica खंड iv, पृ. ५५, Principles of Mathematics, पृष्ठ ३९४ (§ ३७५) पाहा.

मग (ab) ह्या रेषेवर पुढील बिंदू राहतील : (१) जे बिंदू आणि b ह्यांच्या दरम्यान a असेल ते,– हे a च्या डावीकडे आहेत असे आपण म्हणू, (२) a स्वतः, (३) जे, a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असतील ते, (४) b स्वतः, (५) जे बिंदू आणि a ह्यांच्या दरम्यान b असेल ते– हे b च्या उजवीकडे आहेत असे आपण म्हणू. आता आपण अशी सामान्य व्याख्या करू : पुढीलपैकी कोणतीही एक अवस्था असेल तर (ab) ह्या रेषेवरील x आणि y ह्या बिंदूंपैकी x हा y च्या " डावीकडे " असेल :—

पृ. ४०

(१) x आणि y हे दोन्ने a च्या डावीकडे असून y, x आणि a ह्यांच्या दरम्यान आहे.

(२) x, a च्या डावीकडे असून y हा a किंवा b आहे, किंवा a आणि b ह्यांच्या दरम्यान आहे. किंवा b च्या उजवीकडे आहे.

(३) x म्हणजे a असून y हा a आणि b ह्यांच्या दरम्यान आहे, किंवा y म्हणजे b आहे किंवा y, b च्या उजवीकडे आहे.

(४) x आणि y हे दोन्ने a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असून y, x आणि b ह्यांच्या दरम्यान आहे.

(५) x, a आणि b ह्यांच्या दरम्यान असून y म्हणजे b आहे, किंवा y हा b च्या उजव्या बाजूस आहे.

(६) x म्हणजे a असून y हा b च्या उजवीकडे आहे.

(७) x आणि y हे दोन्हेही b च्या उजवीकडे असून x, b आणि y ह्यांच्या दरम्यान आहे.

ह्यावरून, दरम्यान संबंधाच्या, आपण मांडलेल्या ७ धर्मांवरून, वर व्याख्या केल्यानुसार " च्या डावीकडे " हा संबंध *मालिका* संबंधच असल्याचे निगमित करता येते असे लक्षात येईल. " दरम्यान " च्या व्यावहारिक अर्थावर अवलंबून असेल असे ह्या व्याख्येत किंवा विधानात काहीही नाही हे पाहणे महत्त्वाचे आहे. पूर्णतः तात्त्विक असे वरील सात धर्म असणारा कोणताही त्रिपद संबंध आपल्या युक्तिवादास उपयोगी पडू शकेल.

चक्रीय क्रम, उदा.—वर्तुळावरील बिंदूंमधील क्रम, हा " दरम्यान " ह्या त्रिपद संबंधापासून निर्माण करता येणार नाही. आपल्याला त्याकरता चतुष्पद संबंध लागेल, त्याला " जोड्यांचे विभाजन (Separation of Couples) " असे म्हणता येईल. जगप्रवासाच्या उदाहरणाने हा मुद्दा स्पष्ट करता येईल. कोणी इंग्लंडहून निघून सुवेझमार्गे किंवा सॅन्फ्रान्सिस्को मार्गे न्यूझीलंडला जाऊ शकेल; पण यांपैकी कोणतेही ठिकाण इंग्लंड व न्यूझीलंड यांच्यामध्ये आहे असे काही आपण म्हणू शकणार नाही. मात्र एखाद्याने ह्या मार्गानेच जगप्रवास करण्याचे ठरवले तर तो कशाही रीतीने गेला तरी त्याचे इंग्लंड व न्यूझीलंड-

पृ. ४१

मध्ये राहणे हे सुवेझ व सन्‌फ्रान्सिस्कोमधील राहण्यांनी विभाजित केले जाईल (आणि उलटही); व्यापकतेने बोलावयाचे झाल्यास, जर आपण वर्तुळांवरील कोणतेही चार बिंदू घेतले तर आपण त्यांच्या दोन विभक्त अशा जोड्या करू शकतो— समजा a, b आणि x, y. a पासून b पर्यंत जावयाचे झाल्यास x किंवा y ह्यांपैकी एकावरून तरी गेलेच पाहिजे, तसेच x पासून y पर्यंत जावयाचे झाल्यास a किंवा b मधून गेलेच पाहिजे. ह्या परिस्थितीत आपण असे म्हणू की (a, b) ही जोडी (x, y) ह्या जोडीने विभक्त केली आहे. "दरम्यानते" वरून ज्याप्रमाणे आपण मुक्तक्रम (Open Order) निगमित केला त्याचप्रमाणे पण काहीशा क्लिष्ट[1] रीतीने ह्या संबंधातून आपल्याला चक्रीय क्रमही निगमित करता येईल.

ज्याला "मालिका क्रमाचे जनन (Generation of serial relations)" म्हणतात असा विषय सुचवणे हा ह्या प्रकरणाच्या उत्तरार्धाचा उद्देश आहे. ज्या वेळी अशा संबंधांची व्याख्या केली असेल त्या वेळी अशा मालिकांना आवश्यक असलेल्या धर्मांपैकी थोडेच ज्यांच्याकडे आहेत अशा संबंधातून ह्या संबंधाची निर्मिती करणे हे फार महत्त्वाचे ठरते. अशी परिस्थिती, विशेषेकरून भूमितीच्या व वास्तवशास्त्राच्या तत्त्वज्ञानामध्ये उद्भवते. परंतु, अशी परिस्थिती उद्भवू शकते असे दाखवून देण्याव्यतिरिक्त अधिक काही करणे हे प्रस्तुत ग्रंथाच्या मर्यादेत आम्हाला शक्य नाही.

□ □

---

[1] ले. टी. : (Principles of Mathematics, पृ. २०५ (§१९४) आणि तेथेच दिलेले इतर संदर्भ पाहावेत.

प्रकरण ५

संबंधांचे प्रकार

गणिती तत्त्वज्ञानाचा बराच मोठा भाग *संबंधांना* वाहिलेला आहे, आणि विविध संबंधांचे विविध प्रकारचे उपयोग आहेत. अनेकदा असे होते की, *सगळ्या* संबंधांकडे असणारा धर्म काही विशिष्ट प्रकारच्या संबंधांच्या बाब-
पृ. ४२ तीतच महत्त्वाचा ठरतो; अशा बाबतीत,एखादा धर्म ज्या प्रकारच्या संबंधांकरता उपयुक्त आहे, ते वाचकांच्या ध्यानात नसतील तर, तो धर्म प्रतिपादणाऱ्या प्रविधानाचे (Proposition) इंगित त्यांच्या लक्षात येणार नाही. ह्या कारणाकरता आणि विषयाच्या अंगभूत ज्ञानाकरताही, विशेषतः गणिताच्या दृष्टीने, उपयोगी पडणाऱ्या अनेकविध संबंधांची एखादी जुजबी यादी आपल्या मनात असणे चांगले.

मागील प्रकरणात आपण एका अतिमहत्त्वाच्या वर्गाचा, म्हणजे *मालिका* संबंधाचा समाचार घेतला. मालिकेची व्याख्या करण्याकरता आपण गोळा केलेल्या तीन धर्मांपैकी— *असंमिती* (Asymmetry), *संक्रमणीयता* (Transitiveness), *संलग्नता* (Connexity)— ह्या प्रत्येकाचे आपापल्या परीने महत्त्व आहे. प्रत्येका-विषयी थोडे थोडे सांगतच आपण आरंभ करू या.

असंमिती म्हणजे व्यत्यासाशी अननुरूप असणे. हा धर्म अत्यंत आवश्यक आणि महत्त्वाचा आहे. त्याच्या कार्याचा विचार करण्याकरता आपण विविध उदाहरणांचा विचार करू. *पतित्व* (Husbandness) हा संबंध असंमित आहे, तद्वतच *पत्नीत्व* (Wife) सुद्धा असंमितच आहे म्हणजे a, b चा पती असेल तर b, a चा पती असणार नाही. तेच *पत्नीत्वाच्या* बाबतीतही सत्य आहे. उलटपक्षी, " सहचर (चारी) " किंवा " जीवनसाथी (Spouse) " हा संबंध संमित आहे. समजा, आता आपल्याला *जीवनसाथी* हा संबंध दिला आहे, आणि त्यावरून पति हा
पृ. ४३ संबंध निगमित करावयाचा आहे. *पति* म्हणजे *पुरुष जीवन-साथी* किंवा *स्त्रीचा जीवनसाथी* होय; म्हणजे संबंधाचा प्रदेश पुरुषांपुरता मर्यादित करून किंवा व्यस्त संबंधाचा प्रदेश स्त्रियां-पुरता मर्यादित करून आपल्याला *जीवनसाथी* ह्या संबंधापासून *पति-*

संबंध निगमित करता येतो. ह्या उदाहरणावरून असे दिसते की, जेव्हा एखादा संमित संबंध दिलेला असेल तेव्हा त्यापासून कधी कधी, दुसऱ्या कोणत्याही संबंधाच्या साहाय्याशिवायच दोन असंमित संबंध मिळतात. पण ज्या प्रकारात हे जमू शकते असे प्रकार विरळा आणि अपवादभूतच :— परस्पर वियुक्त (Mutually exclusive) असे दोन वर्ग असतानाच हे शक्य होईल. समजा α, β हे दोन वर्ग पुढीलप्रमाणे आहेत; दोन पदांमध्ये जेव्हा दिलेला संबंध असेल, त्या वेळी त्यातील एक α चा आणि दुसरा β चा सदस्य असेल— जसे *जीवनसाथी* ह्या संबंधात, एक पद पुरुष वर्गात तर दुसरे स्त्री वर्गात मोडते. अशा वेळी संबंधाचा प्रदेश α पुरताच किंवा β पुरताच मर्यादित ठेवला तर तो संबंध असंमित होईल. पण जेव्हा आपण दोनपेक्षा अधिक पदांमधील संबंधांचा विचार करू, तेव्हा असे प्रकार उद्भवणारच नाहीत; कारण मालिकेमधील पहिले आणि शेवटचे, (असल्यास) पद सोडल्यास बाकी सर्व पदे, मालिका निर्मिणाऱ्या संबंधांच्या प्रदेशातही मोडतात आणि व्यस्त प्रदेशातही मोडतात. त्यामुळे प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश, ज्यांत मिसळलेले नसतात असे संबंध वगळले जातात.

प्राथमिक स्वरूपाचे धर्म असलेल्या संबंधांवर काही क्रिया करून त्यांपासून उपयुक्त धर्म असलेले संबंध कसे घडवावेत हा एक महत्त्वाचा प्रश्न आहे. दिलेल्या संबंधाजवळ मुळात नसतानासुद्धा, संक्रमणीयता आणि संलग्नता हे धर्म निर्माण करणे कित्येक प्रकारात सोपे असते : उदाहरणार्थ R हा कोणताही एक संबंध असेल तर R पासून, सामान्यीकृत विगमनाच्या साह्याने घडवलेला अनुवंश संबंध संक्रमणीय असतो; आणि R अनेक–एक असेल तर अनुवंश संबंध दिलेल्या पदाच्या वंशापुरता मर्यादित ठेवल्यास संलग्न असतो. मात्र असंमिती हा धर्म घडवणे ह्याच्यापेक्षा पुष्कळच अवघड आहे. *जीवनसाथी* पासून *पति* हा संबंध ज्या पद्धतीने आपण घडवला ती पद्धत कित्येक महत्वाच्या प्रकारांत उपयोगी ठरत नाही; जसे *मोठा, (च्या) पूर्वी, (च्या) उजवीकडे;* येथे प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश परस्परांत मिसळतात. अर्थात, ह्या सर्व प्रकारांत दिलेला संबंध आणि त्याचा व्यस्त एकत्रित करून आपल्याला संमित संबंध मिळेल, पण एखाद्या असंमित संबंधाच्या मदतीशिवाय संमित

पृ. ४४

संबंधापासून उलट जाता येणार नाही. उदाहरणार्थ *मोठा* हा संबंध घ्या. *मोठा किंवा लहान* — म्हणजे असमान — हा संबंध संमित आहे, पण तो दोन असंमित संबंधांच्या संयोगापासून[1] मिळालेला आहे हे दाखवण्याचे कोणतेही प्रमाण त्याच्याजवळ नाही. " भिन्न आकाराचे " हा संबंध, कोणताही एक संबंध आणि त्याचा व्यस्त यांचा संयोग नाही; कारण आकारांपासून मालिका मिळू शकत नाही; पण आकारांमध्ये मोठा किंवा लहान हे संबंध असल्याचे आपल्याला जर आधीच

---

[1] अ. टी. : लेखकाने बेरीज (Sum) शब्द वापरला आहे, पण अलीकडे त्याला संयोग (Union) म्हणतात.

माहिती नसेल तर हा संबंध, " भिन्न आकारमानांचे (Magnitudes) " ह्या संबंधापेक्षा कसा वेगळा आहे हे दाखवण्याचे कोणतेही साधन आपल्याकडे नाही. यावरून, संबंधांच्या धर्मातील मूलभूत लक्षण म्हणून असलेले असंमितीचे महत्त्व स्पष्ट होते.

संबंधांच्या वर्गीकरणाच्या दृष्टीने भिन्नत्व सूचनापेक्षा (Implying diversity) असंमिती हे अधिक महत्त्वाचे लक्षण आहे. असंमित संबंधामध्ये भिन्नत्व (Diversity) अभिप्रेत असते, पण त्याच्या उलट प्रकार संभवत नाही. उदाहरणार्थ, " असमान "मध्ये भिन्नत्व अभिप्रेत आहे पण हा संबंध संमित आहे. स्थूलमानाने आपल्याला असे म्हणता येईल की, सबंधप्रधान प्रविधाने शक्यतो टाळावयाची आपली इच्छा असून, त्यांच्याऐवजी, कर्त्याला ज्यात विधेय (Predicate) लावतात अशी प्रविधाने घ्यावयाची आहेत; तर मग आपण जोवर संमित संबंधांपुरताच विचार करीत असू तोवरच आपल्याला त्यात यश मिळेल; भिन्नत्व सूचित न करणारे संबंध जर संक्रमणीय असतील तर ते समाईक विधेय प्रतिपादतात असे म्हणता येईल, तर भिन्नत्व सूचित करणारे संबंध अननुरूप विधेये प्रतिपादतात असे म्हणता येईल. उदाहरणार्थ, संख्यांची व्याख्या करण्याकरता आपण वापरलेला वर्गांमधील सादृश्य हा संबंध घ्या. तो संमित आणि संक्रमणीय असून त्यात भिन्नत्व सूचित केलेले नाही. आपण अंगिकारलेल्या पद्धतीइतके सुकरपणे नसले तरी, एखाद्या संग्रहाची संख्या म्हणजे त्या संग्रहाचे विधेय आहे असे समजून चालणे शक्य आहे : मग दोन सदृश वर्गांची संख्यात्मक विधेये सारखीच राहतील, तर असदृश वर्गांची संख्यात्मक विधेये वेगळी राहतील. जोवर प्रस्तुत संबंध संमित असतात तोवरच संबंधांऐवजी विधेये वापरण्याची पद्धत आकारतः (Formally) शक्य असते, (बहुधा ती फार गैरसोईची
पृ. ४५ असते); पण संबंध असंमित असता मात्र ते आकारतः शक्य आहे. कारण विधेयांचा सारखेपणा आणि वेगळेपणा दोन्ही संमित असतात. असंमित संबंध हे संबंधांमधील विशेष प्रकारचे संबंध असून, ज्या तत्त्वज्ञान्यांना संबंधांच्या अत्यंत तार्किक रूपाचा अभ्यास करावयाचा असेल त्यांच्या दृष्टीने अतिशय महत्त्वाचे आहेत.

संबंधांचा अतिशय उपयुक्त असा आणखी एक वर्ग म्हणजे एक-अनेक संबंध. त्यात दिलेल्या पदाचा जास्तीत जास्त एका पदाशी संबंध असतो. असे संबंध म्हणजे, पिता, माता, पति (तिबेट सोडून), वर्ग (Square of) ज्या (Sine of) इत्यादी. काही एका रीतीने सगळेच संबंध एक-अनेक संबंधाच्या साह्याने आकारतः व्यक्त करता येतील. उदाहरणार्थ, विगामी संख्यांमधील *लहान* हा संबंध घ्या. 1 हून मोठी अशी n ही संख्या दिली असता तिच्याशी, *लहान* हा संबंध असणारी एकच संख्या नसेल, पण n पेक्षा लहान असणाऱ्या सर्व संख्यांचा आपण एकच वर्ग करू शकतो. ह्या वर्गाचा n शी जो संबंध आहे, तसा दुसऱ्या कोणत्याही वर्गाचा नसणार. n पेक्षा लहान असणाऱ्या सर्व संख्यांच्या वर्गाला आपण n चा " उचित (Proper) पूर्ववंश " असे

म्हणतो. गणिती विगमनाच्या संदर्भात आपण पूर्ववंश (Ancestry) आणि वंश हे शब्द ज्या अर्थाने आपण वापरले होते तोच अर्थ इथे घ्यावयाचा आहे. मग " उचित पूर्ववंश " हा एक- अनेक संबंध होईल (*एक-अनेक* मध्ये एक-एक चा अंतर्भाव नेहमीच केला जाईल), कारण प्रत्येक संख्येमुळे तिचा उचित पूर्ववंश म्हणून संख्यांचा एक वर्ग मिळतो. तेव्हा, *लहान* ऐवजी आपल्याला *उचित पूर्व वंशाचा सदस्य असणे* असा संबंध घेता येईल. याप्रमाणे एक-अनेक नसलेल्या संबंधाऐवजी, एक वर्ग, आणि त्याचे सदस्य असणे अशा प्रकारचा एक-अनेक संबंध योजता येईल. एक-अनेक संबंधाचा विचार करताना पेआनो, काही कारणाने, पण स्वाभाविकपणेच, जे संबंध असे नाहीत त्यांचा विचार असाच करतो. ह्या पद्धतीने दिलेल्या संबंधांचे रूपांतर, एक-अनेक संबंधांत करणे आकारतः जरी शक्य असले तरी तांत्रिक दृष्ट्या सोपे नाही. आणि वर्ग म्हणजे केवळ "तार्किक कल्पिते (Logical fictions)" मानले तरी तेवढ्या कारणा-करतासुद्धा त्यांच्यामुळे तत्त्वज्ञानात्मक विश्लेषण प्रतीत होत नाही असे समजण्यास सबळ कारण आहे. म्हणूनच एक-अनेक संबंध हे विशेष प्रकारचे आहेत असे आपण समजून चालू.

"अशा-अशांचा निश्चित[1] (The) अमुक अमुक " अशा प्रकारच्या सर्व वाक्प्रयोगांमध्ये एक-अनेक संबंध नेहमी येत असतात. "इंग्लंडचा राजा ", " सॉक्रेटिसची पत्नी ", " जॉन स्टुअर्ट मिलचा बाप ", वगैरे सर्व वाक्प्रयोग दिलेल्या पदांशी असलेल्या एक-अनेक संबंधाच्या साह्याने एखाद्या व्यक्तीचे वर्णन करतात. कोणालाही एकाहून अधिक बाप असत नाहीत, त्यामुळे " जॉन स्टुअर्ट मिलचा बाप " म्हणजे कोण ते आपल्याला कळले नाही तरी ह्यामुळे निश्चित एका व्यक्तीचे वर्णन केले आहे इतके आपल्याला कळतेच. वर्णनां-संबंधी सांगण्यासारखे बरेच आहे. पण सध्या आपल्याला फक्त संबंधांचाच विचार करावयाचा आहे, आणि वर्णनांचे कार्य, एक-अनेक संबंधांच्या उपयुक्ततेचे स्पष्टीकरण करणे इतकेच आहे. गणितामधील सर्व फले (Function) एक–अनेक[2] संबंधांतूनच उद्भवतात हे लक्षात घेतले पाहिजे : x चा लाग्रतम (Logarithm), x ची कोज्या (Cosine), इत्यादी संबंध ' चा बाप ' प्रमाणे दिलेल्या x पदाशी असलेला एक-अनेक संबंध (लाग्रतम, कोज्या, इ.) दर्शवतात. मात्र *फलांचा* संबोध (Notion), संख्यांपुरताच किंवा गणितात प्रचारात असलेल्या बाबींपुरताच मर्यादित करण्याचे कारण नाही. एक-

पृ. ४६

---

[1] अ. टी. : The आणि a ह्यांच्यातील फरक दर्शवण्याकरता मराठीत काही साधन नाही. त्यामुळे the ऐवजी ' निश्चित ' किंवा ' एकमेव ' असे शब्द योजले आहेत.

[2] अ. टी. : लेखक ज्याला एक-अनेक म्हणत आहे त्यालाच प्रचलित गणितात अनेक-एक म्हणतात.

अनेक संबंधांच्या सर्व प्रकारांना तो लागू करता येईल आणि "x चा लाग्रतम" हे फल [x ला फलाचा पक्ष (Argument) म्हणतात] जितके वैध आहे तितकेच "x चा बाप" हेही वैध मानता येईल. ह्या प्रकारची फले *वर्णनात्मक* फले आहेत, आणि यापेक्षाही अधिक व्यापक आणि मूलग्राही अशा जातीची फले, उदा. प्रविधान- (Proporsitional) फले असतात, हे आपण नंतर पाहणारच आहोत. पण तूर्त, आपण आपले लक्ष, वर्णनात्मक संबंधांपुरतेच, म्हणजे ज्यांत "x चा R-संबंध असणारे (एकमेव) पद" येते, किंवा थोडक्यात "x चा (एकमेव) R" असे येते, अशा संबंधापुरतेच केंद्रित करू.

जर "x चा (एकमेव) R" ह्या वाक्प्रयोगाने निश्चित स्वरूपाचे पद दर्शवले जावे असे वाटत असेल तर, x हे पद असे असले पाहिजे की त्याच्याशी त्या पदाचा R- संबंध असेल पण दुसऱ्या कोणत्याही पदाचा त्याच्याशी (x शी) R- संबंध नसेल. कारण यातून एकमेवत्व सूचित झाले पाहिजे. तेव्हा x म्हणजे आदम किंवा ईव्ह वगळता इतर कोणीही मनुष्यमात्र असेल तर "x चा बाप" असे आपण म्हणू शकतो; पण x म्हणजे टेबल, खुर्ची किंवा जिला बाप नसतो अशी कोणतीही वस्तू असेल तर "x चा बाप" हा शब्द-प्रयोग आपल्याला करता येणार नाही. जर x शी R- संबंध असणारे एक आणि एकच पद असेल तर x चा निश्चित R अस्तित्वात आहे असे आपण म्हणू. तेव्हा जर R हा एक-अनेक संबंध असेल तर, x, R च्या व्यस्त प्रदेशात असतानाच

पृ. ४७ x च्या R ला अस्तित्व असते, एरवी नसते. जर "x चा R" हे गणिती पद्धतीचे फल असेल तर x ला आपण फलाचा "पक्ष" म्हणू. x शी R- संबंध असणारे पद y असेल तर y ला, x ह्या पक्षाकरता असलेले R चे "मूल्य (Value)" म्हणू. R हा एक-अनेक संबंध असेल तर, फलाच्या संभाव्य अशा सर्व पक्षांची व्याप्ती (Range) म्हणजे R चा व्यस्त प्रदेश होईल आणि मूल्यांची व्याप्ती म्हणजे प्रदेश होईल. तेव्हा, "x चा बाप" ह्या फलाच्या संभाव्य पक्षांची व्याप्ती म्हणजे ज्यांना बाप आहे (किंवा असू शकतो) ते सर्व म्हणजेच *बाप* ह्या संबंधाचा व्यस्त प्रदेश होय; तर सर्व संभाव्य मूल्यांची व्याप्ती म्हणजे सर्व बाप, म्हणजेच त्या संबंधाचा प्रदेश होय.

संबंधांच्या तर्कशास्त्रातील महत्त्वाचे बरेचसे संबोध म्हणजे वर्णनात्मक फलेच असतात. उदाहरणार्थ : *व्यस्त, प्रदेश, व्यस्त प्रदेश, क्षेत्र*. जसजसे आपण आणखी पुढे जाऊ तसतशी आणखी उदाहरणे मिळतील.

एक-अनेक संबंधांमध्ये एक-एक संबंधांचा वर्ग, विशेष महत्त्वाचा आहे. संख्येची व्याख्या करीत असताना एक-एक संबंधांविषयी बोलण्याचा प्रसंग पूर्वीच येऊन गेला आहे, पण त्यांची केवळ आकारिक व्याख्या माहिती असण्यापेक्षा त्यांच्याशी अधिक परिचय होणे आवश्यक आहे. त्यांची आकारिक व्याख्या एक-अनेक संबंधांवरून देता येईल. ज्यांचे व्यस्त संबंधसुद्धा, एक-अनेकच असतील, म्हणजे जे संबंध एक-अनेक

आणि अनेक-एक असे दोन्ही आहेत ते एक-एक संबंध, अशी व्याख्या करता येईल. एक-अनेक संबंधांची व्याख्या पुढीलप्रमाणेही करता येईल : जर x चा y शी प्रस्तुत संबंध असेल तर y शी तोच संबंध असणारे x′ हे दुसरे कोणतेही पद असू शकणार नाही. किंवा पुन्हा त्यांची अशीही व्याख्या करता येईल : x आणि x′ ही दोन (भिन्न) पदे दिली असता, x चा ज्यांच्याशी तो संबंध असेल, ती पदे आणि x′ चा ज्यांच्याशी तो संबंध असेल, ती पदे , यांत समाईक सदस्य असणार नाहीत. किंवा अशीही देता येईल : त्या संबंधाचा आणि त्याच्या व्यस्ताचा सापेक्ष गुणाकार म्हणजे अविकारी (Identity) संबंध येईल असा संबंध[1]. " सापेक्ष गुणाकार (Relative product) " याचा अर्थ असा : R आणि S हे दोन संबंध दिले असता, x चा y शी R– संबंध असून y चा z शी S संबंध असेल तर x चा z शी जो संबंध असतो त्याला R आणि S यांचा साक्षेप गुणाकार म्हणतात. उदाहरणार्थ, R म्हणजे बापाचा मुलाशी असलेला संबंध घेतल्यास, R आणि त्याचा व्यस्त ह्यांचा सापेक्ष गुणाकार, x आणि z ह्यांच्यातील पुढील प्रकारचा संबंध होईल : x हा y चा बाप असून y हा z चा मुलगा असेल अर्थात x आणि z ह्या एकच व्यक्ती होत हे उघड आहे. याउलट
पृ. ४८ जर आपण जन्मदाता (Parent) आणि अपत्य ह्यांच्यातील संबंध घेतला तर, x हा y चा जन्मदाता आणि y हे z चे अपत्य असता, x आणि z ह्या एकच व्यक्ती असतील असे आपल्याला म्हणता येणार नाही, कारण त्यांपैकी एकजण y चा बाप तर दुसरी आई असू शकेल. ह्यावरून, संबंध आणि व्यस्त ह्यांच्या सापेक्ष गुणाकारामुळे अविकारी संबंध मिळणे हे एक-अनेक संबंधांचे व्यवच्छेदक लक्षण आहे हे स्पष्ट होईल. एक-एक संबंधात तर हे घडतेच, शिवाय त्याचा व्यस्त आणि तो यांच्या सापेक्ष गुणाकारामुळेसुद्धा अविकारी संबंध मिळतो. R हा संबंध दिला असता x चा y शी जर R– संबंध असेल तर, x पासून " R– पायरीने (R–step) " किंवा " R– सदिशाने (R– vector) " y प्राप्त झाला असे म्हणणे सोईचे होते. त्याच वेळी " उलट R– पायरीने (Backward) " y पासून x मिळू शकतो. मग एक-अनेक संबंधाचे लक्षण आपण पुढीलप्रमाणे मांडू शकू : प्रथम एकेक R–पायरी व नंतर एकेक उलट– R–पायरी, ह्या पद्धतीने गेल्यास आपण पुन्हा आरंभ-बिंदूपाशीच येतो. इतर संबंधांत हे मुळीच शक्य नाही. उदाहरणार्थ, R हा अपत्याचा जन्मदात्याशी संबंध घेतला तर R आणि त्याचा व्यस्त गुणाकार यांच्या सापेक्ष गुणाकारामुळे " स्वतः, किंवा भाऊ किंवा बहीण " मिळेल. आणि R हा जर नातू (किंवा नात) आणि आजी-आजोबा (Grandchild to Grandparent) असा संबंध असेल, तर सापेक्ष गुणाकार " स्वतः, किंवा भाऊ, किंवा बहीण, किंवा चुलत, मावस, आते, मामे भाऊ

---

[1] अ. टी. : x चा x शीच संबंध असणे हे गणिताच्या दृष्टीने एक महत्त्वाचे फल आहे. त्याला अविकारी फल (किंवा संबंध Identity function) म्हणतात.

किंवा बहीण" होईल. दोन संबंधांचा सापेक्ष गुणाकार सामान्यतः क्रमनिरपेक्ष (Commutative) नसतो हे लक्षात घ्यावे. म्हणजे R व S ह्यांचा सापेक्ष गुणाकार सामान्यतः S व R ह्यांच्या सापेक्ष गुणाकाराइतका असेलच असे नाही. उदा.– वडील आणि भाऊ ह्यांचा सापेक्ष गुणाकार म्हणजे काका होय, तर भाऊ आणि वडील यांचा सापेक्ष गुणाकार वडीलच होत.

एक-एक संबंधामुळे, पदाला पद ह्या पद्धतीने, दोन वर्गांतील एक सहसंबंध (Correlation) मिळतो. त्यामुळे कोणत्याही एका वर्गातील प्रत्येक पदाचा दुसऱ्या वर्गात एक सहसंबंधी (Correlate) असतो. दोन वर्गांत ज्या वेळी एकही समाईक सदस्य नसतो त्या वेळी असले सहसंबंध समजण्यास सर्वांत सोपे असतात. उदाहरणार्थ, सर्व पतींचा आणि सर्व पत्नींचा संबंध घेतल्यास, त्या वेळी, एखादे पद, *त्याच्यापासून* R– संबंध निघतो, अशा प्रकारचे समजावयाचे की *त्याच्यापर्यंत* R संबंध जातो, अशा प्रकारचे मानावयाचे, हे आपल्याला ताबडतोब कळते. ज्या *पदापासून* संबंध निघतो त्याच्यासाठी संदर्भपद (Referent) हा शब्द आणि *ज्याच्यापर्यंत* संबंध जातो त्याच्याकरता संबंधपद (Relatum) हा शब्द योजणे सोईचे ठरते. मग जर x आणि y हे पति–पत्नी असतील तर "पति" संबंधाच्या दृष्टीने x संदर्भपद आणि y संबंधपद होत, तर "पत्नी" संबंधाच्या दृष्टीने y संदर्भपद आणि x संबंधपद होत. संबंध आणि त्याचा व्यस्त यांच्या "दिशा (Senses)" विरुद्ध आहेत
पृ. ४९ असे म्हणू. मग x पासून y पर्यंत जाणाऱ्या संबंधाची "दिशा", y पासून x पर्यंत जाणाऱ्या संबंधाच्या विरुद्ध राहते. संबंधाला दिशा असणे ही बाब मूलभूत असून, सोईस्कर संबंधांच्या साह्याने क्रम (Order) निर्माण करण्याच्या युक्तिवादामागचा तो एक भाग आहे. संबंधाच्या सर्व संभाव्य संदर्भपदांचा वर्ग म्हणजे त्या संबंधाचा प्रदेश असून, सर्व संभाव्य संबंधपदांचा वर्ग हा व्यस्त प्रदेश आहे, हे लक्षात घ्यावे.

पण अनेकदा असे होते की, एखाद्या एक-एक संबंधाचे प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश हे एकमेकांत मिसळलेले असतात. उदाहरणार्थ पहिल्या दहा संख्या (0 वगळून) घ्या. आणि प्रत्येकीत 1 मिळवा; मग पहिल्या दहा संख्यांच्या जागी आपल्याला पुढील संख्या मिळतील,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

यांत आरंभीचा 1 कमी असून, शेवटी 11 ची भर पडली आहे, इतके सोडल्यास, त्या पूर्वीप्रमाणेच आहेत. अद्यापिही यात दहाच संख्या आहेत : n शी n + 1 चा ह्या पद्धतीने त्यांचा पूर्वीच्या संख्यांशी सहसंबंध जोडलेला आहे; तो एक-एक आहे. आता, आपल्या मूळच्या संख्यांत 1 मिळवण्याऐवजी आपण त्यांची दुप्पट केल्यास आपल्याला,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,

ह्या संख्या मिळतात. येथे अद्यापिही पूर्वीच्या संचातल्या, 2, 4, 6, 8, 10 ह्या पाच संख्या आहेतच. ह्या प्रकारातील सहसंबंध म्हणजे संख्येचा तिच्या दुपटीशी असलेला संबंध होय; तोही पुनः एक-एकच आहे. किंवा आपण प्रत्येक संख्येचा वर्गही करू शकतो. मग आपल्याला,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

ह्या संख्या मिळतात. मात्र ह्या वेळी मूळच्या संचातल्या 1, 4, 9 ह्या तीनच संख्या राहिल्या आहेत. सहसंबंधांचे असे अनेक प्रकार मिळतील.

वरील जातीचा सर्वांत मनोरंजक प्रकार म्हणजे ज्याचा व्यस्त प्रदेश हा प्रदेशाचा केवळ अंशच असेल असा एक-एक संबंध. प्रदेश पहिल्या दहाच संख्यांपुरता मर्यादित न ठेवता जर आपण सर्व विगामी संख्या घेतल्या तर वरील पद्धतीने
पृ. ५० ह्या प्रकारची उदाहरणे मिळतील. मूळच्या संख्या आणि त्यांच्या सहसंबंधित संख्या, एकाखाली एक येतील अशा प्रकारे आपण त्या दोन रांगांत लिहू. उदाहरणार्थ, हा सहसंबंध, n चा n + 1 शी असलेला संबंध असेल तर

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 3,\ldots & n\ldots \\ 2, & 3, & 4,\ldots & n+1\ldots \end{array}$$

अशा दोन रांगा आपल्याला मिळतील. जर सहसंबंध म्हणजे संख्येचा तिच्या दुपटीशी असणारा संबंध असेल तर

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3,\ldots, n,\ldots \\ 2, & 4, & 6,\ldots, 2n,\ldots \end{array}$$

ह्या दोन रांगा मिळतील. जर सहसंबंध, संख्येचा तिच्या वर्गाशी असणारा संबंध असेल तर आपल्याला

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3,\ldots, n,\ldots \\ 1, & 4, & 9,\ldots, n^2,\ldots \end{array}$$

अशा दोन रांगा मिळतील. ह्या सर्व प्रकारांत वरच्या रांगेत सर्व विगामी संख्या येतात, पण खालच्या रांगेत मात्र त्यातल्या काही संख्याच येतात.

ह्या प्रकारांत व्यस्त प्रदेश हे प्रदेशाचे "उचित भाग (Proper part)" आहेत. वरील जातीचे प्रकार, ज्या वेळी आपण अनंताचा (Infinity) विचार करू, त्या वेळी पुन्हा पाहावे लागतील. तूर्त, असले प्रकार अस्तित्वात असून, त्यांच्याकडे आपण लक्ष दिले पाहिजे, इतके ध्यानात ठेवू.

सहसंबंधांचा आणखी एक फार महत्त्वाचा वर्ग म्हणजे ज्यांना "क्रमवेश" (Permutation) म्हणतात, त्यांचा वर्ग होय. त्यात प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश हे एकरूपच असतात. उदाहरणार्थ, तीन वस्तूंच्या सहाही संभाव्य रचना घ्या :

a, b, c
a, c, b
b, c, a
b, a, c
c, a, b
c, b, a

यांतील प्रत्येक रचना दुसऱ्या कोणत्याही रचनेपासून सहसंबंधाच्या पद्धतीने मिळवता येईल. उदाहणार्थ, पहिली (a, b, c) आणि शेवटची (c, b, a) घ्या. येथे a चा c शी, b चा स्वतःशीच आणि c चा a शी सह-
पृ. ५१ संबंध आहे. दोन क्रमवेशांचा संयोग (Combination) म्हणजे पुन्हा एक क्रमवेशच आहे. म्हणजे सर्व क्रमवेश मिळून "गट (Group)" बनवतात.

विविध प्रकारच्या सहसंबंधांचे विविध प्रकारचे उपयोग आहेत. काहींचे कुठे तर काहींचे कुठे. गणिताच्या तत्त्वचर्चेच्या दृष्टीने मात्र एक-एक संबंधाचा सामान्य संबोध अत्यंत महत्त्वाचा आहे, हे आपण पूर्वीच काहीसे पाहिलेच आहे. पण जसजसे आपण पुढे जाऊ तसतसे ते अधिक सखोलपणे पाहू. त्यांच्या एका उपयोगाचा विचार पुढच्याच प्रकरणात केला आहे.

□ □

प्रकरण ६

संबंधांतील साधर्म्य

आपण दुसऱ्या प्रकरणात हे पाहिले की, ज्या वेळी दोन वर्ग सदृश असतात म्हणजेच त्यांच्यात एक-एक संबंध असतो, (एक वर्ग त्या संबंधाचा प्रदेश तर दुसरा व्यस्त प्रदेश) त्या वेळी त्या वर्गातील पदांची संख्या समान असते. अशा वेळी त्या दोन वर्गांत एक-एक सहसंबंध (Correlation) आहे असे आपण म्हणतो.[1]

पृ. ५२

ह्या प्रकरणात आपल्याला दोन संबंधांतील संबंधांची व्याख्या करावयाची आहे. वर्गातील सादृश्याचे जे कार्य वर्गांच्या बाबतीत असते तेच कार्य यांचे आहे. ह्या संबंधाला आपण "संबंधांमधील सादृश्य (Similarity of relations)" म्हणू; किंवा ज्या वेळी वर्गांकरता जो शब्द वापरतो त्या शब्दापेक्षा निराळा शब्द वापरावयाचा असेल त्या वेळी त्याला "साधर्म्य (Likeness)" असे म्हणू. साधर्म्याची व्याख्या कशी करावयाची ?

अजूनही आपण सहसंबंधाच्या संबोधाचाच अवलंब करणार आहोत : त्यांच्यातील एका संबंधाचा प्रदेश दुसऱ्या संबंधाच्या प्रदेशाशी सहसंबंधित असून त्यांचे व्यस्त-प्रदेशही सहसंबंधित आहेत, असे आपण मानणार आहोत; परंतु दोन संबंधांतील जो सारखेपणा आपल्याला अभिप्रेत आहे, त्याकरता हे पुरेसे नाही. आपली अशी इच्छा आहे की, ज्यावेळी दोन पदांमध्ये त्यांपैकी एक संबंध घडून येत असेल त्या वेळी त्यांच्या सह-संबंधितांमध्ये दुसरा संबंध घडून यावा. आपल्याला हव्या असलेल्या गोष्टीचे सर्वांत सोपे असे उदाहरण म्हणजे नकाशा. ज्या वेळी एक ठिकाण दुसऱ्याच्या उत्तरेला असते

---

[1] अ. टी. : एकदा 'एक-एक संबंध' ही संज्ञा एका कल्पनेकरता योजल्यानंतर तिच्याचकरता पुन्हा 'एक-एक सहसंबंध' ही संज्ञा आणण्याचे कारण नाही. कारण नवीन काहीच सांगून झालेले नाही.

अलीकडे याला एक-एक संगती (One-one Correspondance) असे म्हणतात.

त्या वेळी त्याच्याशी सहसंबंधित असलेले नकाशावरील ठिकाण
पृ. ५३ दुसऱ्या ठिकाणाशी सहसंबंधित असलेल्या ठिकाणाच्या वर असते; ज्या वेळी एक ठिकाण दुसऱ्याच्या पश्चिमेला असते त्या वेळी त्या ठिकाणाशी सहसंबंधित असलेले नकाशावरील ठिकाण दुसऱ्या ठिकाणाशी सहसंबंधित असलेल्या नकाशावरील दुसऱ्या ठिकाणाच्या डावीकडे असते; इत्यादी. नकाशाची रचना (Structure) ज्या प्रदेशाचा तो नकाशा असतो त्याच्या रचनेशी सुसंवादी असते.

नकाशावरील अवकाशीय संबंधाचे देशातील अवकाशीय संबंधाशी "साधर्म्य" आहे. संबंधांतील या जातीच्या संबंधांची व्याख्या आपल्याला करावयाची आहे.

पहिली गोष्ट म्हणजे, आपण आपल्याला लाभदायक असे एक बंधन घालून घेऊ. साधर्म्याची व्याख्या करताना ज्या संबंधांना "क्षेत्र (Field)" असते; म्हणजे ज्यांचा प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश बनवता येतो, अशा संबंधांचाच आपण विचार करू.

हे नेहमीच असेल असे नाही. उदाहरणार्थ, "प्रदेश" हाच संबंध, म्हणजे प्रदेशाचा संबंधाशी जो संबंध असेल, तो घ्या. ह्या संबंधाचा प्रदेश म्हणजे सर्व वर्ग असतील. कारण प्रत्येक वर्ग हा कोणत्या तरी संबंधाचा प्रदेश असतोच, आणि त्याचा व्यस्त प्रदेश म्हणजे सर्व संबंध होत. कारण प्रत्येक संबंधाला प्रदेश असतो. पण वर्ग आणि संबंध एकत्रित करून नवीन असा एकच वर्ग बनवता येणार नाही. कारण ते भिन्न तार्किक "जातींचे (Type)" असतात. "जातीं"च्या अवघड सिद्धान्तात आपल्याला शिरण्याचे कारण नाही, पण त्याच्यात शिरावयाचे नाही असे ठरवत असताना आपण असे ठरवले आहे याची निदान जाणीव असणे चांगले. ह्या प्रतिपादनाची कारणे देण्याच्या फंदात न पडता आपण इतकेच म्हणू की, ज्या वेळी संबंध "एकजिनसी (Homogeneous)" असतो, म्हणजे त्याचा प्रदेश आणि व्यस्त प्रदेश हे एकाच तार्किक जातीचे असतात त्या वेळेसच फक्त त्याला "क्षेत्र (Field)" असते असे म्हणू. "जात" म्हणजे काय याचा स्थूलमानाने उल्लेख करावयाचा तर आपण इतकेच म्हणू की, व्यक्ती (Individuals), व्यक्तींचे वर्ग, व्यक्तींमधील संबंध, वर्गांतील संबंध, वर्गांचे व्यक्तींशी संबंध, इत्यादी सर्वांच्या जाती भिन्न आहेत. एकजिनसी नसणाऱ्या संबंधांना साधर्म्याचा संबोध लागू करण्याने फार उपयोग होत नाही; म्हणून साधर्म्याची व्याख्या करताना दिलेल्या संबंधांतील एकाच्या केवळ "क्षेत्रा"चा उल्लेख करून आपण आपला प्रश्न सोपा करू. ह्यामुळे व्याख्येच्या व्यापकतेवर काहीसे बंधन पडते, पण त्या बंधनाला व्यावहारिक महत्त्व विशेष नाही, आणि एकदा मांडल्यानंतर ते ध्यानात ठेवण्याची जरुरीही नाही. P आणि Q हे दोन संबंध दिले असता जर S हा एक-एक संबंध असा असेल की, त्याचा प्रदेश म्हणजे P चे क्षेत्र आणि व्यस्त प्रदेश म्हणजे Q चे
पृ. ५४ क्षेत्र असेल, आणि त्यातील एका पदाचा दुसऱ्याशी P–संबंध असता त्याच्या सहसंबंधिताचा दुसऱ्याच्या सहसंबंधिताशी

Q – संबंध असेल (व उलट = Vice versa)[१] तर P आणि Q हे " सदृश " आहेत किंवा त्यांच्यामध्ये " साधर्म्य " आहे असे म्हणू. आकृतीवरून हे स्पष्ट होईल.

ज्यांमध्ये P– संबंध आहे अशी x आणि y ही पदे घ्या. मग x चा आणि y चा ज्यांच्याशी S हा संबंध असेल अशी z आणि w (अनुक्रमे) ही पदे घ्या; मात्र z आणि w यांच्यात Q हा संबंध असावा. जर x आणि y अशा प्रत्येक जोडीकरता असे घडत असेल, तसेच z आणि w ह्या जोडीकरता उलट (S च्या दृष्टीने) घडत असेल तर हे उघड आहे की, ज्या क्षणी P हा संबंध वसत असेल त्याच्या संगत (Corresponding) अशा क्षणी Q हाही संबंध राहील व उलट (Vice versa);

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & y \arrow[d, "S"] \\ z \arrow[r, "Q"'] & w \end{tikzcd}$$

आपल्या व्याख्येमुळे ह्याच गोष्टीची शाश्वती मिळावी अशी आपली इच्छा आहे. पुढील विवेचनामुळे व्याख्येच्या वरील स्थूल आराखड्यातील पुनरुक्ती टाळता येईल. वरील अटी प्रत्यक्षात आल्यास P हा संबंध म्हणजे, S, Q आणि (पुनः) S चा व्यस्त, ह्यांचा संबंधात्मक गुणाकार होय.[२] x पासून y पर्यंत P – पायरी घेण्याऐवजी आपण क्रमशः x पासून z पर्यंत S पायरी, z पासून w पर्यंत Q पायरी आणि w पासून y पर्यंत उलट–S पायरी घेऊ शकतो. तेव्हा आपण खालील व्याख्या मांडू : वर, P आणि Q हे दोन संबंध असून S ह्या एक-एक संबंधाचा प्रदेश P, आणि व्यस्त प्रदेश Q असेल आणि जर P हा, S, Q आणि S चा व्यस्त, ह्यांचा संबंधात्मक गुणाकार असेल तर S ला P आणि Q ह्यांचा " सहसंबंधक (Correlatar) " किंवा " क्रमिक (Ordinal) सहसंबंधक " म्हणतात.

P व Q ह्या दोन संबंधांचा निदान एक तरी सहसंबंधक असेल तर P आणि Q " सदृश " आहेत किंवा त्यांच्यात " साधर्म्य (Likeness) " आहे असे म्हणतात.

---

[१] अ. टी. : Vice versa ला मराठीत पर्याय नाही म्हणून 'व उलट' हा शब्दप्रयोग अमलात आणीत आहोत. Vice versa हा शब्दप्रयोग अनेकदा येणे संभवते.

[२] अ. टी. : प्रथम P आणि नंतर Q असे संबंध असता प्रचलित गणितात त्यांचा संबंधात्मक गुणाकार $Q \cdot P$ असा दाखवतात. P चा व्यस्त संबंध P^{-1} ने (वाचन P व्यस्त – P inverse) दाखवतात. येथे लेखकाला $P = S^{-1} \cdot Q \cdot S$ असे म्हणावयाचे आहे. परंतु $S^{-1} \cdot (Q \cdot S) = (S^{-1} \cdot Q) \cdot S$ हा (साहचर्य नियम) प्रस्थापित केलेला नाही. त्यापेक्षा " $Q \cdot S = S \cdot P$ असावे " असे मांडणे योग्य. (अशा वेळी प्रस्तुत आकृती क्रमनिरपेक्ष (Commutative) आहे असे म्हणतात.)

ह्या व्याख्यांत आपल्याला आवश्यक असलेले सर्व काही आले असल्याचे आढळून येईल.

ह्यावरून असे दिसून येईल की, ज्या वेळी दोन संबंध सदृश असतात त्या वेळी त्या दोघांतील धर्म समान असून ते, त्यांच्या क्षेत्रांतील पदांवर प्रत्यक्षपणे अवलंबून नसतात. उदाहरणार्थ, एकात भिन्नत्व (Diversity) अभिप्रेत असेल तर तसे ते दुसऱ्यातही असतेच; जर एक संक्रमणीय असेल तर दुसराही संक्रमणीयच असतो. जर एक संलग्न (Connected) असेल तर दुसराही संलग्नच असतो. म्हणून, त्यांतील एक जर मालिका-संबंध असेल तर दुसराही तसाच असणार. तसेच जर एक, एक-अनेक किंवा एक-एक असेल तर दुसराही (अनुक्रमे) एक-अनेक किंवा

पृ. ५५ एक-एक असेल. याप्रमाणे संबंधांच्या सर्व, सर्वसामान्य धर्मांच्या बाबतीत म्हणता येईल. इतकेच काय, पण एका संबंधाच्या क्षेत्रातील प्रत्यक्ष पदांसंबंधींच्या विधानांचेसुद्धा दुसऱ्या संबंधाविषयीच्या तशाच प्रकारच्या विधानांत भाषांतर करता येईल; कदाचित दुसऱ्या सदृश संबंधांविषयीच्या त्या विधानांना अर्थ नसेल. हे विचार आपणाला गणिती तत्त्वज्ञानातील एका महत्त्वाच्या प्रश्नाकडे नेतात. मात्र आजवर त्याचे महत्त्व पुरेसे ओळखले गेले नव्हते. आपला हा प्रश्न पुढीलप्रमाणे मांडता येईल.

जिचे व्याकरण आणि वाक्यरचनेचे नियम माहिती आहेत पण शब्दसंग्रह माहिती नाही अशा भाषेतील एखादे विधान दिले असता, अशा विधानाचे संभाव्य अर्थ कोणते व ते विधान सत्य होईल असे त्या शब्दांचे संभाव्य अर्थ कोणते ?

हा प्रश्न महत्त्वाचा आहे याचे कारण असे : त्याच्यामुळे निसर्गाविषयीचे आपले ज्ञान, आपण समजतो त्यापेक्षा पुष्कळच अचूकपणे व्यक्तवले जाते. आपल्याला हे माहिती आहे की, विशिष्ट शास्त्रीय प्रविधाने– बहुतेक प्रगत शास्त्रांत ती गणिती प्रतीकांच्या साह्याने व्यक्तविली जातात– थोड्याफार अंशाने जगाला लागू पडणारी असतात. पण ह्या प्रविधानांतील पदांच्या अर्थाच्या विवरणामुळे (Interpretation) आपला गोंधळच होण्याची शक्यता जास्त. आपल्याला (क्षणभर जुन्या पद्धतीचे शब्द वापरावयाचे तर) प्रत्यक्ष वस्तूंपेक्षा (Matter) त्याच्या आकारा (Form) विषयीचेच ज्ञान अधिक असते. परिणामतः ज्या वेळी आपण एखादा निसर्ग नियम प्रतिपादतो त्या वेळी आपल्याला जर काही माहिती होत असेल तर ते खरोखर इतकेच की तो नियम बहुंशी सत्य होऊ शकेल असा एखादा अर्थ त्यातील संज्ञांचा असणे संभवनीय आहे. त्यामुळे पुढील प्रश्नाला खूप महत्त्व येते : ज्या पदांचे केवळ व्याकरण आणि वाक्यरचनेचे नियम माहिती आहेत पण ज्यांचा स्पष्ट असा अर्थ माहिती नाही अशा पदांच्या रूपात व्यक्त केलेल्या नियमाचे कोण-कोणते अर्थ संभवतात ? वर सुचवलेला प्रश्न हाच आहे.

सध्या आपण ह्या व्यापक प्रश्नाकडे दुर्लक्ष करू. त्याचा विचार आपल्याला नंतर करावा लागणारच आहे; साधर्म्याच्या प्रश्नाचाच आणखी परामर्श प्रथम घेतला पाहिजे.

दोन सदृश संबंध, त्यांची क्षेत्रे ज्या पदांपासून घडलेली आहेत त्याच पदांपासून घडलेली असल्याने इतर दृष्टीने त्यांचे धर्म समानच असतात; हे लक्षात घेता दिलेल्या संबंधांशी सदृश असलेल्या सर्व संबंधांना एकत्रित करणारी
पृ. ५६ एखादी परिभाषा असणे इष्ट ठरते. दिलेल्या वर्गाशी सदृश असणाऱ्या वर्गांच्या संचाला जसे आपण त्या वर्गाची "संख्या" म्हटले, तसेच दिलेल्या संबंधांशी सदृश असणाऱ्या संबंधांच्या वर्गाला त्या संबंधाची "संख्या" असे आपण म्हणू शकतो. पण वर्गाच्या संख्येशी होणारा घोटाळा टाळण्याकरता आपण सदृश संबंधांविषयी बोलतान "संबंध–संख्या किंवा संबंधांक (Relation–number)" असे म्हणू. मग आपल्याला पुढील व्याख्या मिळते :

दिलेल्या संबंधाशी सदृश असणाऱ्या सर्व संबंधांचा वग म्हणजे त्या संबंधाची "संबंध–संख्या" किंवा "संबंधांक" होय.

"संबंध–संख्या" (अनेकवचन) म्हणजे जे विविध संबंधांचे संबंधांक आहेत, अशा, संबंधांच्या सर्व वर्गांचा संच होय : म्हणजेच निराळ्या शब्दांत संबंध–संख्या म्हणजे एखाद्या संबंधाशी सदृश अशा सर्व संबंधांचा वर्ग होय.

संबंध–संख्यांशी कोणताही घोटाळा होणार नाही अशाप्रकारे ज्या वेळी आपणांला वर्गाच्या संख्यांच्या बाबतीत बोलावयाचे असेल त्या वेळी त्यांना आपण प्रधानांक (Cardinal number) किंवा गणनांक म्हणू. तेव्हा, प्रधानांक म्हणजे वर्गाच्या संख्या होत. ह्यांमध्ये दैनंदिन जीवनातल्या पूर्णांकांचाही अंतर्भाव होतो आणि काही अनंत संख्यांचाही (ह्याबद्दल आपण नंतर बोलू) अंतर्भाव होतो. ज्या वेळी आपण कोणत्याही विशेषणाशिवाय "संख्या" असे म्हणू तेव्हा आपल्याला प्रधानांकच अभिप्रेत आहेत असे समजावे. प्रधानांकाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे आहे हे लक्षात असेलच :–

एखाद्या वर्गाचा प्रधानांक म्हणजे त्या वर्गाशी सदृश असलेल्या सर्व वर्गांचा संच होय.

संबंध–संख्यांचे सर्वात स्वाभाविक असे उपयोजन (Application) मालिकांमध्ये आढळते. दोन मालिकांची संबंध–संख्या ज्या वेळी एकच असते त्या वेळी त्या सारख्याच दीर्घ आहेत असे मानता येईल. दोन *सान्त* मालिकांच्या क्षेत्रांचे प्रधानांक ज्या वेळी एकच असतील त्या वेळी, आणि फक्त त्याचवेळी, त्यांच्या संबंध-संख्या सारख्या असतील म्हणून ज्या मालिकेत (समजा) १५ पदे आहेत, तिची संबंध–संख्या १५ पदे असलेल्या कोणत्याही मालिकेइतकी असेल; पण १४ किंवा १६ पदे असलेल्या कोणत्याही मालिकेइतकी असणार नाही; आणि अर्थातच जो संबंध मालिका-

रूप नसेल अशा कोणत्याही संबंधाच्या संबंधसंख्येइतके असणार नाही. तेव्हा, सान्त मालिकांच्या या विशेष प्रकारात प्रधानांक आणि संबंध–संख्या
पृ. ५७ यांत सारखेपणा आढळतो. मालिकांना लागू पडणाऱ्या संबंध–संख्यांना "मालिका–अंक (Serial number)" म्हणता येईल. (ज्यांना सर्वसाधारणतः क्रमिक संख्या म्हटले जाते, त्या ह्यांचा उपवर्ग म्हणून राहतील); दिलेला मालिका-अंक धारण करणाऱ्या क्षेत्रातील पदांचा प्रधानांक माहिती असता सान्त मालिका–अंक निश्चित करता येतो. जर n हा सान्त प्रधानांक असेल तर n पदे असणाऱ्या मालिकांच्या संबंध–संख्येला क्रमिक संख्या n म्हणतात. (अनंत क्रमिक संख्याही असतात पण त्यांचा विचार आपण नंतर करू). ज्या वेळी एखाद्या मालिकेच्या क्षेत्रातील पदांचा प्रधानांक अनंत असतो, त्या वेळी त्या मालिकेची संबंध–संख्या केवळ त्या प्रधानांकामुळे ठरत नाही. खरे तर, एकच अनंत प्रधानांक असणाऱ्या असंख्य संबध–संख्या असतात. ह्याचा विचार आपण अनंत मालिकेच्या वेळी करू. ज्या वेळी मालिका अनंत असते त्या वेळी तिची "लांबी" म्हणजे तिची संबंध–संख्या, ही तिचा प्रधानांक न बदलताही बदलू शकेल; पण सान्त मालिकांच्याबाबतीत हे होऊ शकत नाही.

संबंध-संख्यांमध्ये, तसेच प्रधानांकांमध्येही आपण बेरीज आणि गुणाकार यांच्या व्याख्या करू शकू, आणि संबंध-संख्यांचे एक गणितच निर्माण करू शकू. हे कसे करावयाचे ते मालिकांचा विचार करून पाहता येईल. उदाहरणार्थ असे समजा, की परस्परांत मिसळणाऱ्या दोन मालिकांच्या संबंधांकांची बेरीज ही बेरीज-मालिकेच्या संबंधांकाएवढी होईल, अशा तऱ्हेने आपल्याला दोन मालिकांच्या बेरजेची व्याख्या करावयाची आहे.

प्रथमतः एक गोष्ट स्पष्ट आहे की, दोन मालिकांप्रमाणेच येथेही क्रम आहे; ह्या मालिकांपैकी एक दुसरीच्या आधी मांडली पाहिजे. म्हणजे मालिकांना जन्म देणारे P आणि Q हे जर त्या मालिकांचे जनक–संबंध असतील, तर त्यांत P हा Q च्या आधी येईल अशा रीतीने त्यांची बेरीज घेतली पाहिजे. ह्या त्यांच्या बेरजेत, P च्या क्षेत्रातील प्रत्येक घटक, Q च्या क्षेत्रातील प्रत्येक घटकाच्या आधी आला पाहिजे. म्हणजे P आणि Q ह्यांच्या बेरजेचा जो मालिका संबंध असेल तो कळेल. केवळ "P किंवा Q" असे म्हणून चालणार नाही, तर "P किंवा Q किंवा P च्या क्षेत्रातील कोणत्याही पदाचा Q च्या क्षेत्रातील कोणत्याही पदाशी असलेला संबंध", असे सांगावे लागेल. P आणि Q परस्परांत मिसळत नाहीत हे मान्य केल्यास हा संबंध मालिकारूप होईल. पण "P किंवा Q" हा संबंध संलग्न नसल्याने मालिकासंबंध होणार नाही, कारण तो P च्या क्षेत्रातील कोणताही घटक आणि Q च्या क्षेत्रातील कोणताही घटक ह्यांच्यात वसत नाही. तेव्हा दोन संबंधांच्या बेरजेची व्याख्या करण्याकरता आपल्याला, वर व्याख्या केल्याप्रमाणे P आणि Q यांची बेरीज लागेल. गुणाकार आणि घात ह्यांच्याकरताही असेच

बदल करावे लागतील. ह्यापासून मिळणारे गणित क्रमनिरपेक्षतेचे नियम पाळणार नाही.
दोन संबंधांकांचा गुणाकार ते कोणत्या क्रमाने घेतले आहेत
पृ. ५८ यावर साधारणतः अवलंबून राहील, मात्र ते साहचर्य-नियम, एक
वितरण नियम आणि घातांचे दोन नियम पाळतात. तेही केवळ
मालिका—अंकांपुरतेच नव्हेत, तर अधिक व्यापक संबंधांकांच्या बाबतीतही पाळले जातात. संबंध—गणित हे जरी खरोखर आधुनिक असले तरी ती अत्यंत महत्त्वाची अशी गणिताची एक शाखा आहे.

सादृश्याची कल्पना मालिकांना अगदी सहज लागू पडते एवढ्यावरून, तिचे महत्त्वाचे इतर काही उपयोग नाहीतच असे समजण्याचे कारण नाही. नकाशांचा उल्लेख आपण पूर्वीच केला आहे. आणि या उदाहरणावरून आपल्या विचारांची कक्षा वाढवून ते आपण भूमितीलाही लागू करू शकतो. जर एखाद्या पदसंचाला लागू करावयाच्या भूमितीची संबंध-व्यवस्था दुसऱ्या पदसंचाच्या संबंध-व्यवस्थेच्या सदृश करून मांडता येत असेल तर, गणिती दृष्टीने दोन्ही पदसंचांच्या भूमिती ह्या अभिन्न असतील. म्हणजे ते दोन पदसंच वेगळे आहेत एवढी बाब वगळता त्यांची सर्व प्रमेये एकसारखीच असतील. ४ थ्या प्रकरणात ज्याचे विवेचन आपण केले आहे त्याप्रकारच्या संबंधाचे म्हणजे ज्याला मध्यस्थ म्हटले आहे त्या– संबंधाचे उदाहरण घेऊन पाहू. आपण तेथे असे पाहिले की जर एखाद्या त्रिपद संबंधाजवळ काही विशिष्ट तात्त्विक धर्म असतील तर त्यांच्यापासून मालिका मिळते. आणि त्या संबंधाला आपण "दरम्यानता संबंध" म्हणू शकतो. कोणतेही दोन बिंदू दिले असता, त्या बिंदूमुळे मिळणाऱ्या सरळ रेषेची व्याख्या करण्याकरता आपण दरम्यानता संबंधाचा उपयोग करू शकतो. a, b आणि a व b ह्यांमध्ये कोणत्याना कोणत्या क्रमाने दरम्यानता संबंध अस्तित्वात असेल असे सर्व x बिंदू, यांनी ती बनलेली असते. O. Veblen ह्याने असे दाखवले आहे की आपला सर्व अवकाश, हा दरम्यानता ह्या त्रिपद संबंधाचे क्षेत्र मानण्यास हरकत नाही. आणि दरम्यानता संबंधाला
आपण देत असलेल्या गुणधर्मांच्या साहाय्याने आपली भूमिती
पृ. ५९ व्याख्यात करता येईल.[१] आता ज्याप्रमाणे द्विपद संबंधांमधील
सादृश्याची व्याख्या करता येते तशी त्रिपद संबंधांमध्येही करता
येईल. B आणि B′ हे दोन दरम्यानता संबंध असून "xB (y, z)" म्हणजे "B ह्या संबंधाच्या दृष्टीने x हा y आणि z ह्यांच्या दरम्यान आहे." असे समजू. जर B चे

---

[१] ले. टी. : हे, लंबवृत्तीय (Elliptic) अवकाशांना लागू पडत नाही; जेथे सरळ रेषा ही विवृत (Open) मालिका आहे अशाच अवकाशांना लागू पडते. J. W. A. Young ह्यांनी संपादित केलेले Modern Mathematics पृ. ३ ते ५१ पाहा O. Veblen ह्यांनी "The Foundations of Geometry" ह्या विषयावर लिहिलेला एक-विषय वृत्तांत (Monograph) पाहा.

क्षेत्र S चा व्यस्त प्रदेश असेल आणि जर पहिल्या प्रकारच्या पदांच्या S सहसंबंधितांमध्ये B′ हा संबंध असता त्या पदांमध्ये B हा संबंध असेल तर आणि तरच आपण S ला B आणि B′ ह्यांचा सहसंबंधक म्हणू. आणि ज्या वेळी B चा B′ बरोबर एक तरी (असा) सहसंबंधक असेल त्या वेळी B हा B′ शी सदृश आहे असे आपण म्हणू. ज्या वेळी B, B′ शी सदृश असेल त्या वेळी B ने जनित (Generated) केलेली भूमिती व B′ ने जनित केलेली भूमिती यात काहीही भेद असणार नाही हे वाचकांना सहज उमजून येऊ शकेल.

ह्यावरून असे म्हणता येते की बिंदू, रेषा आणि प्रतल ह्यांच्या अंगभूत गुणांच्या बाबतीत गणितज्ञाने, मग तो प्रयुक्त (Applied) गणितज्ञ म्हणून विचार का करीत असेना, लक्ष देण्याचे कारण नाही. ज्यांची व्याख्या करण्याचा प्रश्न येत नाही असे भूमितीतले काही भाग पुष्कळ अंशी सत्य असल्याबद्दल अनुभविक (Empirical) पुरावा आहे. पण " बिंदू " म्हणजे काय असावे ह्याविषयी कोणताही आनुभविक पुरावा नाही. बिंदू म्हणजे, आपले सिद्धान्त (Axiom) शक्य तेवढी पाळील असे काही तरी असले म्हणजे झाले. त्याने " अगदी सूक्ष्म " किंवा " अंगरहित (Without parts) " असण्याचे कारण नाही. जोवर ते बिंदू सिद्धान्तांचे पालन करीत आहे तोवर तो अमुक प्रकारचा आहे किंवा नाही याकडे लक्ष देण्याचे कारण नाही. आपल्या अनुभवजन्य सामग्रीमधून आपले भौमितिक सिद्धांत पाळणारी वस्तु– मग ती किती का क्लिष्ट असेना– आपण जर घडवू शकलो तर तिला " बिंदू " म्हणणे हे पूर्ण वैध ठरेल. मात्र विधिदृष्ट्या ज्याला बिंदू म्हणता येईल असे दुसरे काहीच असू शकणार नाही, असे आपल्याला म्हणता येणार नाही; " आम्ही तयार केलेली वस्तू भूमितितज्ज्ञांच्या दृष्टीने पुरेशी आहे, असल्या अनेक वस्तूंपैकी ती एक असेल. आणि त्यांतील कोणतीही एखादी वस्तू पुरेशी ठरेलही. पण तो प्रश्न आमचा नाही; कारण भूमितीची व्याख्या करावयाचा प्रश्न उद्भवत नसल्याने भूमितीतील अनुभविक सत्य प्रस्थापित करण्यास ती वस्तु समर्थ आहे " इतकेच आपण म्हटले पाहिजे.

गणिताच्या दृष्टीने आणि पुष्कळ अंशी भौतिक शास्त्रांच्या दृष्टीने आपल्या पदांच्या अंगभूत स्वाभाविक गुणांना महत्त्व नसून त्यांच्या परस्पर तार्किक संबंधांना महत्त्व असते, ह्या सर्वसाधारण तत्त्वाचे, हे एक उदाहरण आहे.

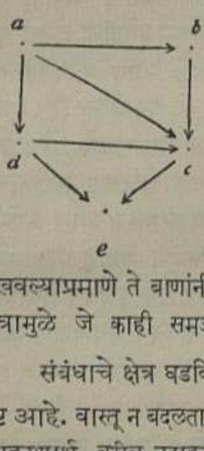
सदृश संबंधांची " रचना (Structure) " एकच आहे असे आपण म्हणू. गणिताच्या दृष्टीने (जरी शुद्ध तत्त्वज्ञानाच्या दृष्टीने नसला तरी) संबंधांचा महत्त्वाचा गुण म्हणजे त्यांचा अंगभूत स्वभाव नसून ज्या परिस्थितीत ते वसत असतात ती परिस्थिती होय. ज्याप्रमाणे समान व्याप्ती असणाऱ्या विविध कल्पनांच्या साह्याने एकाच वर्गाची व्याख्या करता येते– उदाहरणार्थ " मनुष्य " आणि " पंखविरहित द्विपाद ",– त्याचप्रमाणे संबोधाच्या

पृ. ६०

दृष्टीने भिन्न असे दोन संबंधही एकाच परिस्थितीत उद्भवू शकतात. ज्या "प्रसंगात" तो संबंध अस्तित्वात असतो तो प्रसंग म्हणजे, दोन पदे आणि ज्यामुळे त्यांतील एक आधी आणि दुसरे नंतर येईल असा काही क्रम होय; अर्थात त्यांतील पहिल्याशी दुसऱ्याचा प्रस्तुत संबंध असेल अशी ही दोन पदे असावीत. उदाहरणार्थ "पितृत्व" संबंध घ्या : ह्या संबंधाच्या "व्याप्तीची (Extension)" व्याख्या, आपल्याला x हा y चा पिता असेल अशा (x, y) ह्या सर्व क्रमित (Ordered) जोड्यांचा वर्ग, अशी करता येईल. गणिती दृष्टीने "पितृत्व" संबंधाच्या दृष्टीने महत्त्वाची एकच बाब म्हणजे त्यामुळे क्रमित जोड्यांचा संच निश्चित होतो ही होय. सर्वसाधारणपणे बोलायचे तर आपण पुढीलप्रमाणे विधान करू :–

एखाद्या संबंधाची "व्याप्ती" म्हणजे x चा y शी प्रस्तुत संबंध असेल अशा (x, y) ह्या सर्व क्रमित जोड्यांचा वर्ग होय.

अमूर्तीकरणाच्या प्रक्रियेत आपण आणखी एक पायरी पुढे जाऊ आणि "रचना" किंवा "वास्तु (Structure)" म्हणजे काय त्याची व्याख्या करू. कोणताही एक संबंध दिला असेल आणि तो काहीसा सोपा[1] असेल तर आपण त्याची आकृती काढू शकतो. सोईकरता आपण a, b, c, d, e ही पाच पदे– ती कोणतीही पदे असोत– असलेला आणि ab, ac, ad, bc, ce, dc, de ह्या जोड्या असलेला संबंध घेऊ. एका प्रतलात पाच बिंदू घेऊन सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे ते बाणांनी जोडून आपण ह्या संबंधाचे चित्र तयार करू शकतो. ह्या चित्रामुळे जे काही समजून येते त्यालाच दिलेल्या संबंधाची वास्तू असे आपण म्हणू.



संबंधाचे क्षेत्र घडविणाऱ्या विशिष्ट पदांवर संबंधाची वास्तू अवलंबून नसणार हे स्पष्ट आहे. वास्तू न बदलता क्षेत्र बदलता येईल आणि क्षेत्र न बदलता वास्तु बदलता येईल– उदाहरणार्थ, वरील उदाहरणात आपण ae ही जोडी वाढवली तर आपण वास्तू बदलली असे होईल पण क्षेत्र बदलणार नाही. ज्या वेळी दोन संबंधांकरता
पृ. ६१ एकच चित्र चालू शकेल त्यावेळी त्यांच्या "वास्तू" एकच आहेत असे आपण म्हणू– किंवा त्यांतील एक दुसऱ्याचे चित्र आहे असे म्हणता येईल. (प्रत्येक संबंध हा स्वतःचे चित्र असतोच.) आणि केवळ क्षणभर जरी दृष्टी टाकली तरी असे दिसून येईल की आपण ज्याला "सादृश्य" असे म्हणतो तेच हे आहे. म्हणजे जे दोन संबंध सदृश आहेत म्हणजेच ज्यांचा संबंधांक एक आहे त्यांच्या

---

[1] अ. टी. : गणिती अमूर्तीकरणाच्या दृष्टीने "सोपा" हा शब्द निरर्थक आहे. लेखकाने वर्णन केल्याप्रमाणे कोणत्याही संबंधाचे चित्र काढणे तत्त्वतः शक्य आहे.

वास्तूही एकच असतात. आपण ज्याला संबंधांक म्हणतो तोच काहीसा संदिग्धपणे वास्तू या शब्दाने सुचविला जातो. हा शब्द अत्यंत महत्त्वाचा असूनही तो वापरणाऱ्यांनी यथार्थ स्वरूपात (आमच्या माहितीप्रमाणे) त्याची व्याख्या केलेली नाही.

वास्तू कल्पनेचे महत्त्व आणि ती मिळविण्यामागील अडचणी जाणून घेतल्या असत्या तर पारंपरिक तत्त्वज्ञानातील पुष्कळसे अंदाज (Speculation) टाळता आले असते. उदाहरणार्थ, असे म्हणतात की अवकाश आणि काळ हे व्यक्तिसापेक्ष (Subjective) आहेत. पण त्यांना वस्तुनिष्ठ अंगे आहेत; किंवा अवलोकित घटना (Phenomena) ह्या व्यक्तिसापेक्ष आहेत. पण त्या त्यांतील वस्तूंमुळे घडतात आणि त्यांच्यातील अंतर्गत (Iner se) भेदांमुळेच त्यांच्यामुळे घडणाऱ्या घटनांमध्येही आनुषंगिक भेद राहतात. अशा तऱ्हेची गृहीते जेथे स्वीकारली जातात तेथेच असे साधारणतः मानले जाते की वस्तुनिष्ठ अंगांविषयी आपल्याला फारच थोडे ज्ञान होऊ शकेल. प्रत्यक्षात झालेली सृष्टीची मात्र, जर मांडलेले गृहीत बरोबर असेल तर वस्तुनिष्ठ अंगांमुळे निर्माण रचनासुद्धा अवलोकित सृष्टीच्या रचनेप्रमाणेच असेल आणि त्यामुळे अवलोकित घटनांच्या बाबतीत सत्य असलेल्या सर्व प्रमेयांच्या सत्यतेवरून अमूर्त पदांच्या रूपांत मांडलेल्या प्रमेयांची सत्यतासुद्धा अनुमानित करता येईल. जर अवलोकित घटनासृष्टी त्रिमिती असेल तर, तिच्यामागील सृष्टीसुद्धा त्रिमितीच असेल; जर अवलोकित घटनासृष्टी युक्लिडीय असेल तर दुसरी सृष्टीही तशीच असेल; इत्यादी. थोडक्यात, ज्याला काही म्हणण्यासारखा अर्थ असेल असे प्रमेय एक तर दोन्ही सृष्टींत सत्य राहील किंवा दोन्ही सृष्टींत असत्य राहील; जर काही फरक असलाच तर, तो केवळ नेहेमी शब्दजंजाळ निर्माण करणाऱ्या आणि वर्णनात गोंधळ उत्पन्न करणाऱ्या, मूळ घटकांतील भेदांमुळेच असला पाहिजे आणि शास्त्राच्या दृष्टीने तो अप्रस्तुत आहे. आता, अवलोकित सृष्टीला दूषण देण्यामागे
पृ. ६२ तत्वज्ञान्यांचा जो काही हेतू आहे, तो एकच : स्वतःला आणि इतरांनाही, त्यांना असे दाखवायचे असते की खरे जग हे दृश्य जगापेक्षा फार निराळे आहे. त्यांना हवे असलेले प्रमेय सिद्ध करण्याच्या त्यांच्या हेतूबद्दल आपण सहानुभूती बाळगू. पण त्यांच्या यशाबद्दल त्यांचे अभिनंदन करता येणार नाही. खरे म्हणजे त्यांच्यांतील बरेचजण अवलोकित घटनांची वस्तुनिष्ठ अंगे प्रतिपादन करीत नाहीत, आणि त्यामुळे ती वरील युक्तिवादातून सुटतात. जे असे प्रतिपादन करतात ते, बहुधा, ह्याविषयी मौन पाळतात, बहुंशी त्यांचे त्यानाच असे वाटत असावे की जर आपण ह्याचा पाठपुरावा केला तर कदाचित, खरे जग आणि अवलोकित जग ह्यांमध्ये फारच *सलोखा* (Rapproachment) निर्माण होईल. जर त्यांनी ह्या गोष्टीचा पाठपुरावा केला तर आपण सुचवित असलेल्या निष्कर्षाप्रत येण्याचे टाळणे त्यांना अवघड होईल. यासंबंधात आणि इतरही काही बाबतीत वास्तू किंवा संबंधांकाची कल्पना महत्त्वाची आहे.

□ □

प्रकरण ७

वास्तव आणि संमिश्र संख्या

आतापर्यंत आपण प्रधानांक (Cardinal numbers) आणि संबंधांकांची व्याख्या कशी करावयाची ते पाहिले. ज्यांना क्रमिक संख्या म्हणतात त्या संख्या म्हणजे संबंधांकांचे विशेष प्रकार होत. ह्या दोन्ही प्रकारच्या संख्या, अनंत
पृ. ६३ असू शकतात, तसेच सान्तही असू शकतात, असे दिसून येईल. पण
ह्यांपैकी कोणत्याही प्रकारात, तूर्त तरी, आपल्याला अधिक परिचित असलेल्या संख्यांच्या कल्पनेपर्यंत म्हणजे ऋण संख्यांपर्यंत किंवा अपूर्णांकयुक्त (Fractional) संख्या किंवा अपरिमेय (Irrational) संख्या किंवा संमिश्र (Complex) संख्यांपर्यंत विचार गेलेला नाही. प्रस्तुत प्रकरणात आपण संख्यांच्या ह्या विविध प्रकारच्या विस्तारांच्या तार्किक व्याख्या थोडक्यात देणार आहोत. ह्या क्षेत्रातील काटेकोर व्याख्यांचा शोध लागण्यास ज्या चुकांमुळे विलंब लागला त्या चुकांपैकी एक म्हणजे संख्या कल्पनेच्या प्रत्येक विस्तारामध्ये पूर्वीचे प्रकार विशेष प्रकार म्हणून अंतर्भूत असले पाहिजेत, अशी सर्वमान्य समजूत होय. धन आणि ऋण पूर्णांकांचा व्यवहार करताना धन पूर्णांक म्हणजे मूळचे चिन्हरहित पूर्णांकच मानले पाहिजेत अशी समजूत होती. तसेच, ज्या अपूर्णांकाचा छेद 1 असेल त्या अपूर्णांकाच्या अंशात असलेल्या पूर्णांकाशी तो एकरूप मानला पाहिजे, अशीही समजूत होती. आणि अपरिमेय संख्या, उदा. 2 चे वर्गमूळ म्हणजे परिमेय अपूर्णांकांमध्येच अशा एका स्थानी असावी की ती काही परिमेय संख्यांपेक्षा मोठी तर काही परिमेय संख्यांपेक्षा लहान असेल, अशी समजूत होती. परिणामी, परिमेय आणि अपरिमेय संख्यांचा मिळून एकच वर्ग, " वास्तव संख्या (Real numbers) " होऊ शकेल; आणि " संमिश्र " (Complex) संख्यापर्यंत, म्हणजे ज्यांच्यात –1 च्या वर्गमुळाचा अंतर्भाव असेल अशा संख्यांपर्यंत संख्येच्या कल्पनेची व्याप्ती जेव्हा वाढवली गेली तेव्हा वास्तव संख्या म्हणजे जिचा कल्पित (Imaginary)
पृ. ६४ भाग (म्हणजे –1 च्या वर्गमुळाची पट) शून्य आहे अशी एक
संमिश्र संख्याच होय असे मानण्यात येऊ लागले. ह्या सर्व समजुती चुकीच्या आहेत. आणि जर काटेकोर व्याख्या हव्या असतील तर त्या समजुतींचा त्याग करणे आवश्यक आहे.

धन आणि ऋण पूर्णांकांपासून आरंभ करू. क्षणभर विचार केल्यास एक गोष्ट स्पष्ट होईल की, + 1 आणि – 1 ह्या दोन्ही संख्या म्हणजे संबंधच असले पाहिजेत आणि ते परस्परांचे व्यस्त (Converse) असले पाहिजेत. अगदी स्पष्ट आणि पूर्ण व्याख्या द्यावयाची तर + 1 हा n + 1 चा n शी असलेला संबंध असला पाहिजे आणि –1 हा n चा n + 1 शी असलेला संबंध असला पाहिजे.

सामान्यतः जर m ही कोणतीही विगामी संख्या असेल तर + m म्हणजे n + m चा n शी (कोणत्याही n करता) असलेला संबंध होय; आणि – m हा n चा n + m शी असलेला संबंध होय. ह्या व्याख्येनुसार जोवर n हा एक प्रधानांक (सान्त वा अनन्त) असेल आणि m हा एक विगामी प्रधानांक असेल तोवर + m हा संबंध एक–एक असा राहील. पण कोणत्याही परिस्थितीत + m हा m शी सदृश मानता येणार नाही. कारण m हा संबंध नसून वर्गांचा वर्ग आहे. m हून – m जितका भिन्न आहे तितक्याच प्रमाणात + m सुद्धा m हून भिन्न आहे.

धन किंवा ऋण पूर्णांकांपेक्षा *अपूर्णांक* अधिक मनोरंजक आहेत. आपल्याला अपूर्णांक पुष्कळ कारणांकरता लागतात, पण मुख्यतः व्यावहारिक कारणाकरता म्हणजे मापनाच्या कामाकरता लागतात. माझे मित्र आणि सहकारी डॉ. ए. एन. व्हाइटहेड (A. N. Whitehead) यांनी खास मापनाच्या कामाला उपयोगी पडेल असे, अपूर्णांकाचे एक शास्त्रच बनवले आहे. त्यांनी ते Principia Mathematica[१] मध्ये मांडले आहे. पण केवळ आवश्यक ते शुद्ध गणिती गुणधर्म ज्यांच्या अंगी असतील अशा वस्तूंची व्याख्या करणे, इतकाच आपला हेतू असेल तर तो अधिक सोप्या मार्गाने साध्य होऊ शकेल; तोच मार्ग इथे स्वीकारला आहे. $xn = ym$ असता x आणि y ह्या दोन विगामी संख्यांमध्ये जो काही संबंध असेल तो संबंध म्हणजे m/n हा अपूर्णांक अशी व्याख्या आपण करू. जर n आणि m ह्यांच्यापैकी एकही संख्या शून्य नसेल तर m/n हा संबंध एक–एक असल्याचे ह्या व्याख्येवरून आपल्याला सिद्ध करता येते. आणि अर्थात् n/m हा m/n चा व्यस्त आहेच.

वरील व्याख्येवरून m/1 हा अपूर्णांक म्हणजे $x = my$ ह्या समीकरणामध्ये अंतर्भूत असलेला, x आणि y मधील संबंध असल्याचे वरील व्याख्येवरून स्पष्ट होते, हे उघड आहे. + m प्रमाणेच हा संबंधही विगामी प्रधानांक m शी सदृश मानणे अयोग्य होईल. कारण संबंध आणि वर्गांचा वर्ग ह्या अगदी पूर्णतः भिन्न जातीच्या वस्तू आहेत.[२]

पृ. ६५

[१] ले. टी. : Vol. iii. * ३००, विशेषतः * ३०३.

[२] ले. टी. : अर्थात व्यवहारात आपण एखादा अपूर्णांक 1/1 हून मोठा किंवा लहान आहे हे दर्शविण्याकरता तो 1 हून मोठा किंवा लहान आहे असेच म्हणत→

n ही कोणतीही विगामी संख्या असली तरी 0/n हा संबंध कायमच राहील हे स्पष्ट आहे. थोडक्यात तो संबंध म्हणजे शून्याचा n ह्या अन्य कोणत्याही विगामी संख्येशी असलेला संबंध होय. ह्याला आपण परिमेय संख्यांमधील शून्य म्हणू; अर्थात हे शून्य म्हणजे 0 ह्या प्रधानांकाच्या सदृश नाही. उलटपक्षी, m ही कोणतीही विगामी संख्या असली तरी m/0 हा संबंध कायमच असेल. m/0 शी संबंधित असेल अशी एकही विगामी संख्या नाही. त्याला आपण "अपरिमेय संख्यांतील अनंत" म्हणू. गणितातील पारंपरिक अनंताच्या प्रकाराचे हे एक उदाहरण आहे, आणि, तो "∞" ह्या चिन्हाने दर्शविला जातो. कांटोरीय (Cantorian)[१] अनंतापेक्षा हा अनंत संपूर्णतः भिन्न जातीचा आहे; त्याचा विचार आपण पुढील प्रकरणात करू. परिमेयांच्या अनंताच्या व्याख्येकरता कोणत्याही अनंत वर्गाची किंवा अनंत पूर्णांकांची गरज भासत नाही किंवा त्यांचा उपयोगही करावा लागत नाही. खरे म्हणजे ही काही फारशी महत्त्वाची कल्पना नव्हेच. आणि पूर्ण आपल्याला वाटत असेल तर आपण त्या कल्पनेवाचूनही काम करू शकतो. या उलट, कांटोरीय अनंत हा अत्यंत महत्त्वाचा आणि मूलभूत आहे; तो जाणून घेण्याने गणित आणि तत्त्वज्ञान यांचे एक संपूर्णतः नवीन दालनच खुले होईल.

गुणोत्तरांपैकी शून्य आणि अनंत हेच फक्त एक–एक (संबंध) नसल्याचे दिसून येईल. शून्य हा एक–अनेक असून अनंत हा अनेक–एक आहे.

गुणोत्तरांमध्ये (किंवा अपूर्णांकामध्ये) *मोठा* (गुरुतर) आणि *लहान* (लघुतर) यांच्या व्याख्या करण्यात कोणतीही अडचण उद्भवत नाही. m/n आणि p/q ही दोन गुणोत्तरे दिली असता जर mq, pn हून लहान असेल तर m/n, p/q हून लहान आहे असे आपण म्हणू. अशी व्याख्या असलेला "लहान" हा संबंध मालिकारूप असल्याचे लक्षात येण्यास कोणतीही अडचण नाही. ह्या मालिकेत शून्य हे लघुतम पद असून अनंत हे गुरुतम पद आहे. आपल्या मालिकेतून जर आपण शून्य आणि अनंत ही पदे वगळली तर मग तिच्यात लघुतम आणि गुरुतम पदे राहणार नाहीत; m/n हे पद शून्य आणि अनंत ह्यांपेक्षा वेगळे असे एखादे गुणोत्तर असेल तर m/2n हे त्याहून लहान राहील आणि 2m/n हे त्याहून मोठे गुणोत्तर असेल, हे उघड आहे; शून्य किंवा अनंत यांचा अंतर्भाव केलेला नसल्याने m/n हे
पृ. ६६ गुणोत्तर लघुतम असणार नाही वा गुरुतमही असणार नाही. आणि म्हणून m/n हे गुणोत्तर कसेही निवडले तरी (ज्या वेळी

→राहणार. म्हणून जोवर 1/1 हे गुणोत्तर आणि 1 हा प्रधानांक हे भिन्न असल्याचे ध्यानात आहे तोवर तो भेद दर्शविण्याकरता नेहमीच इतका क्लिष्टपणा पाळण्याची जरूरी नाही.

[१] अ. टी. : जर्मन गणितज्ञ गेओर्ग कांटोर (Georg Cantor)

शून्य आणि अनंत वगळलेले असतील त्या वेळी) ते गुणोत्तर लघुतम किंवा गुरुतम नसणार. याच प्रकारे, दोन अपूर्णांक परस्परांच्या कितीही जवळ असले तरी त्यांमध्ये आणखी अपूर्णांक असतात असेही आपण दाखवू शकू, कारण, उदा. m/n आणि p/q हे दोन अपूर्णांक घ्या (त्यांपैकी p/q मोठा माना). मग (m + p) / (n+q) हा अपूर्णांक m/n हून मोठा आणि p/q हून लहान आहे हे पाहणे (किंवा सिद्ध करणे) सोपे आहे. म्हणजे गुणोत्तरांच्या मालिकेत लगतची अशी पदे नसतात. कोणत्याही दोन पदांमध्ये आणखी काही पदे असतातच. ह्या पदांमध्येही आणखी पदे असणार आणि असे अनंत वेळा चालणार असल्याने, परस्परांच्या कितीही जवळ असलेल्या कोणत्याही दोन गुणोत्तरांमध्ये, अनंत गुणोत्तरे असणार हे स्पष्ट होते.[1] ज्या मालिकेत कोणत्याही दोन पदांमध्ये आणखी काही पदे असण्याचा, म्हणजेच जिच्यात लगतची अशी पदे नसण्याचा धर्म असतो तिला "दृढ (Compact)" म्हणतात. म्हणजे मग महत्तेच्या (Magnitude) क्रमाच्या आधारे केलेली गुणोत्तरांची मालिका ही "दृढ" ठरते. अशा मालिकांच्या अंगी कित्येक महत्त्वाचे गुणधर्म असतात. अवकाश किंवा काळ ह्यांच्या आधाराशिवाय किंवा कोणत्याही अनुभवजन्य सामग्रीशिवाय, केवळ शुद्ध तर्काच्या साहाय्याने मिळणाऱ्या दृढ मालिकेचे एक उदाहरण म्हणजे गुणोत्तरे होत हे पाहणेही महत्त्वाचे आहे.

ज्याप्रकारे आपण धन आणि ऋण पूर्णांकांची व्याख्या केली त्याचप्रमाणे धन आणि ऋण अपूर्णांकांचीही व्याख्या करता येईल. प्रथम m/n आणि p/q ह्यांची बेरीज म्हणजे (mq + np) / nq अशी व्याख्या करून + p/q म्हणजे, m/n + p/q चा m/n शी (m/n हे कोणतेही गुणोत्तर असता) असलेला संबंध अशी व्याख्या करता येईल; आणि अर्थातच − p/q म्हणजे + p/q चा व्यस्त होय. धन व ऋण गुणोत्तरांची व्याख्या करण्याचा हाच एक मार्ग उपलब्ध आहे असे मात्र नव्हे. पण पूर्णांकाप्रमाणेच नैसर्गिकपणा हा गुण त्या मार्गामध्ये असून आपला उद्देशही त्याच्यामुळे साध्य होतो.

आता आपण संख्येच्या कल्पनेच्या अधिक रंजक अशा विस्ताराकडे जाऊ या; ह्या विस्ताराला "वास्तव (Real)" संख्या म्हणतात आणि यात अपरिमेय (Irrational) संख्यांचा अंतर्भाव होतो. पहिल्या प्रकरणात आपण "असमेयांच्या (Incommensurables)" आणि पायथागोरसने त्यांच्या शोध लावल्याचा उल्लेख केला होता. त्याच मार्गाने म्हणजे भूमितीच्या मार्गानेच अपरिमेय
पृ. ६७ संख्यांचा विचार प्रथम झाला होता. ज्या चौरसाची बाजू एक इंच असेल त्याच्या कर्णाची लांबी 2 च्या वर्गमुळाइतकी इंच

[1] ले. टी. : काटेकोरपणे बोलावयाचे तर ह्या विधानामध्ये आणि ह्या परिच्छेदात शेवटपर्यंत येणाऱ्या सर्व विधानांमध्ये, ज्याला "अनंताचा सिद्धांत" (Axiom of Infinity) असे म्हणतात, तो अंतर्भूत आहे. त्याचा विचार नंतरच्या प्रकरणात केला जाणार आहे.

असते. पण पूर्वसूरींच्या शोधानुसार, ज्याचा वर्ग 2 आहे असा अपूर्णांकच नसतो. हे प्रमेय युक्लिडच्या दहाव्या पुस्तकात सिद्ध केले आहे. ज्या काळात युक्लिडची पुस्तके पाठ्यपुस्तके म्हणून वापरली जात त्या काळी असल्या पुस्तकांमध्ये शाळकरी मुलांनी पूर्णपणे बुडून जाणे हे भाग्याचे समजले जात असे. ह्या प्रमेयाची सिद्धता कमालीची सोपी आहे. 2 चे वर्गमूळ m/n आहे असे समजा. म्हणजे मग $m^2/n^2 = 2$ म्हणून $m^2 = 2n^2$ म्हणून m^2 ही समसंख्या आहे. आणि त्यामुळे m सुद्धा समसंख्याच आहे; कारण विषम संख्येचा वर्ग विषमच असतो. आता जर m सम असेल तर m^2 ला 4 ने भाग जाईल. कारण $m = 2p$ असेल तर $m^2 = 4p^2$ येईल. म्हणजे आपल्याला $4p^2 = 2n^2$ मिळेल. येथे p हा m च्या निम्मा आहे. म्हणून $2p^2 = n^2$ मिळेल. म्हणजे n/p हा सुद्धा 2 चा वर्गमूळ असेल. पण मग आपण हाच युक्तिवाद पुनःपुनः वापरू शकतो. जर $n = 2q$ असेल तर p/q सुद्धा 2 चे वर्गमूळ असेल, इत्यादी. ह्याप्रमाणे एकाच्या अर्धा दुसरा असे करीत गेलो तर आपल्याला अनंत मालिका मिळेल. पण हे तर अशक्य आहे; जर आपण एखाद्या संख्येस 2 ने भागले, नंतर त्या अर्ध्याच्या अर्धे, असे करीत गेलो तर काही सान्त पायऱ्यानंतर तरी आपल्याला विषम संख्या मिळेलच. आपण हे अधिक सोप्या रीतीनेही मांडू शकतो. m/n हे आरंभीचे गुणोत्तर अतिसंक्षिप्त रूपात असल्याचे मानू; मग m आणि n दोन्ही सम असणार नाहीत. आणि जर $m^2/n^2 = 2$ असेल तर m आणि n दोन्ही सम असणार हे आपण पाहिलेच आहे. तेव्हा, ज्याचा वर्ग 2 आहे असा अपूर्णांक असणे शक्य नाही.

म्हणजेच ज्याची बाजू 1 इंच लांब आहे अशा चौरसाच्या कर्णाची लांबी कोणत्याही अपूर्णांकाने व्यक्त करता येणार नाही. अंकगणिताला निसर्गाचे हे एक आव्हानच असल्याचे दिसते. संख्यांच्या शक्तीबद्दल अंकगणितज्ञांना कितीही अभिमान वाटत असला (त्याप्रमाणे पायथागोरसलाही वाटत असे,) तरी कोणत्याही एकांकांच्या (Unit) रूपात व्यक्त करता येणार नाहीत अशा प्रकारच्या लांबीसंबंधीचे प्रश्न त्यांच्या पुढे टाकून निसर्ग त्यांना गोंधळात टाकीत असतोच. मात्र ह्या प्रश्नाचे स्वरूप भूमिती-पुरते मर्यादित राहिले नाही. बीजगणिताचा उदय झाल्याबरोबर तोच प्रश्न समीकरणाच्या सोडवणुकीच्या रूपात उभा राहिला. मात्र येथे त्याचे स्वरूप अधिक विस्तृत झाले. कारण मग त्यात संमिश्र संख्यांचाही अंतर्भाव झाला.

ज्यांचे वर्ग (Squres) क्रमशः 2 च्या जवळ जवळ येतील असे अपूर्णांक शोधता येतात हे स्पष्ट आहे. 2 पेक्षा ज्यांचे वर्ग लहान आहेत पण नंतर नंतरच्या सर्व पदांचे वर्ग आणि 2, ह्यांतील फरक दिलेल्या कोणत्याही राशीहून कमी आहे अशा चढत्या अपूर्णांकाची मालिका आपल्याला बनवता येईल. म्हणजे समजा, मी आधीच एक लहान राशी, समजा एक अब्जांश, निश्चित केला, तर आपल्या मालिकेतील काही एका, समजा दहाव्या, पदा-नंतरच्या सर्व पदांचे वर्ग 2 पासून, ह्या राशीहूनही कमी अंतरावर असतील आणि जर

पृ. ६८

मी आणखी लहान राशी दिला तर फार तर मालिकेत आपल्याला आणखी पुढे जावे लागेल. पण मालिकेत केव्हा ना केव्हा, समजा २० व्या पदानंतर तरी, येणाऱ्या सर्व पदांचे वर्ग 2 पासून ह्या आणखी लहान राशीपेक्षाही कमी अंतरावर असतील. अंकगणिताच्या नेहमीच्या नियमांनुसार आपण 2 चे वर्गमूळ काढीत राहिलो तर आपल्याला कधीही न संपणारी दशांश स्थळांची मालिकाच मिळेल. आणि ही मालिका आवश्यक त्या स्थळांपर्यंत घेतल्यास वरील अट अचूकपणे पूर्ण करू शकेल. ज्यांचे वर्ग 2 हून अधिक आहेत आणि मालिकेत जसजसे आपण पुढे जाऊ तसतसे वर्गमूळ 2 पासूनचे ज्यांचे अंतर उत्तरोत्तर आणखी कमी होत जात, काही एका पदानंतर दिलेल्या कोणत्याही राशीपेक्षा कमीच राहील, अशा उतरत्या अपूर्णांकांची मालिकाही आपण ह्याच पद्धतीने रचू शकतो. ह्याप्रकारे 2 च्या वर्गमुळाभोवती आपण जणू काही एक तटबंदीच उभारू शकतो. पण तरीही तो आपल्या हातून कायमचा सुटलेलाच राहतो. यावर विश्वास बसणे कठीण आहे. अर्थात प्रत्यक्षात मात्र आपण वर्गमूळ 2 चा विचार ह्या पद्धतीने करणार नाही.

एखाद्या गुणोत्तराचा वर्ग 2 हून लहान आहे की मोठा आहे, यानुसार जर आपण सर्व गुणोत्तरांचे दोन वर्गांत विभाजन केले, तर असे लक्षात येईल की ज्यांचे वर्ग 2 हून लहान *नाहीत* त्या सर्वांचे वर्ग 2 हून मोठे आहेत; ज्यांचे वर्ग 2 हून लहान आहेत त्यांत गुरुतम नाही आणि ज्यांचे वर्ग 2 हून अधिक आहेत त्यांत लघुतम नाही; ज्यांचे वर्ग 2 हून थोडेसेच कमी आहेत आणि ज्यांचे वर्ग 2 हून थोडेसे अधिक आहेत, त्यांच्यातील फरकाला निम्न मर्यादा (Lower Limit) नाही. थोडक्यात, आपण सर्व गुणोत्तरे दोन वर्गांमध्ये अशा रीतीने विभागू शकतो की, एका वर्गातील सर्व पदे दुसऱ्यातील सर्व पदांहून लहान असतील, एकात गुरुतम नसेल आणि दुसऱ्यात लघुतम नसेल. ह्या दोन वर्गांच्या मध्यभागी, जेथे $\sqrt{2}$ असावा अशी अपेक्षा असेल तेथे काहीही असणार नाही. म्हणजे आपली तटबंदी जरी आपण हवी तेवढी घट्ट केली असली तरी ती अयोग्य ठिकाणी असून तिच्यात $\sqrt{2}$ सापडलेला नसेल.

पृ. ६९

एक वर्ग (Class) दुसऱ्याच्या संपूर्णतः आधी येईल, अशा तऱ्हेने मालिकेच्या पदांची दोन वर्गांत विभागणी करण्याची पद्धत डेडकिंडने (Dedekind)[1] पुढे आणली, आणि म्हणूनच तिला, " डेडकिंड छेद " (Dedekind Cut) म्हणतात. जेथे छेद (Section) घेतला जातो त्या बिंदूंच्या बाबतीत चार अवस्था संभवतात :

(१) खालच्या भागात गुरुतम (Maximum) असेल आणि वरच्या भागात लघुतम (Minimum) असेल, (२) खालच्यात गुरुतम असेल पण वरच्यात

[1] ले. टी. : Stetigkeit und irrationale Zahlen स्टेटिक्काईट उंट इर्राशोनालऽ त्सालेन, सांतत्य आणि अपरिमेय संख्या; आवृत्ती 2, (Brunswick, १८९२)

लघुतम नसेल, (३) खालच्यात गुरुतम नसेल पण वरच्यात लघुतम असेल, (४) खालच्यात गुरुतम नसेल आणि वरच्यातही लघुतम नसेल. या चारांपैकी पहिल्याचे उदाहरण, ज्या मालिकेत लगतची अशी पदे असू शकतात त्या प्रकारच्या मालिकेमुळे मिळेल; उदा. पूर्णांकांच्या मालिकेत खालचा भाग कोणत्यातरी n ह्या संख्येपाशी संपला असेल आणि वरचा n + 1 पासून सुरू होत असेल. आपण खालचा भाग 1 पर्यंतच्या गुणोत्तरांचा (1 धरून) बनवल्यास आणि वरचा 1 हून मोठ्या गुणोत्तरांचा बनवल्यास दुसऱ्या प्रकारचे उदाहरण मिळेल. खालचा भाग 1 हून लहान गुणोत्तरांचा आणि वरचा 1 पासूनच्या (1 धरून) गुणोत्तरांचा बनवल्यास तिसऱ्या प्रकारचे उदाहरण मिळते. आणि वर पाहिल्याप्रमाणे जर आपण ज्यांचे वर्ग 2 हून लहान आहेत, अशी सर्व गुणोत्तरे खालच्या भागात, व ज्यांचे वर्ग 2 हून मोठे आहेत अशी सर्व गुणोत्तरे वरच्या भागात घातली तर आपल्याला चौथ्या प्रकारचे उदाहरण मिळते.

आपल्या ह्या चार प्रकारांतील पहिला प्रकार, मालिकेत लगतची पदे आहेत अशाच प्रसंगी उद्भवत असल्याने आपण तो पाहिला नाही तरी चालेल. चारांतील दुसऱ्या प्रकारात, खालच्या भागातील गुरुतमाला आपण वरच्या भागाची, " निम्न मर्यादा " म्हणू; तसेच आपण एखादा संच असा घेतला की, वरच्या भागातील कोणतेही पद ह्या संचातील कोणत्याही पदाच्या आधी येणार नाही, तर त्या संचाचीही ती निम्न मर्यादा आहे असे म्हणू. तिसऱ्या प्रकारात वरच्या भागातील लघुतमाला खालच्या भागाची, (Upper) उच्च मर्यादा म्हणू; तसेच आपण एखादा संच असा घेतला की, खालच्या भागातील कोणतेही पद ह्या संचातील कोणत्याही पदाच्या नंतर येणार नाही तर त्या संचाची उच्च मर्यादा असे म्हणू. चौथ्या प्रकारात आपण तेथे एक " छिद्र " किंवा फट (Gap) आहे असे म्हणू. वरच्या किंवा खालच्या
पृ. ७० भागाला मर्यादा किंवा शेवटचे पद नाही. ह्या प्रकारात आपण असेही म्हणू की, आपल्याला मिळालेले छेद अपरिमेय (Irrational) आहे, कारण केवळ अपरिमेय संख्यांच्या बाबतीतच गुणोत्तरांच्या मालिकेचे छेद घेताना, आपल्याला छिद्रे मिळतात.

अपरिमेयांच्या मीमांसेला विलंब कशाने झाला असेल तर, गुणोत्तरांच्या सर्व मालिकांना " मर्यादा " असलीच पाहिजे ह्या भ्रामक विश्वासामुळेच. " मर्यादा " ही संकल्पना अत्यंत महत्त्वाची असून, पुढे जाण्यापूर्वी तिची व्याख्या करणे चांगले.

जर पुढील अटी पूर्ण होत असतील तर x ह्या पदाला, P ह्या संबंधाला अनुलक्षून α (आल्फा) ह्या वर्गाची " उच्च मर्यादा " म्हणतात : (१) P ह्या संबंधाच्या दृष्टीने α ला गुरुत्तम नाही, (२) α मधील जे घटक P च्या क्षेत्रात असतील ते सर्व x च्या पूर्वी येतात, (३) P च्या क्षेत्रातील जो घटक x च्या पूर्वी येत असेल तो α मधील निदान एका तरी घटकाच्या पूर्वी येतो. (" पूर्वी येणे " म्हणजे " चा P–संबंध असणे ".)

ह्यामध्ये "गुरुतमा"ची पुढील व्याख्या अध्याहृत आहे—

जर x हा ∝ आणि P च्या क्षेत्राचा घटक असेल आणि x चा ∝ मधील दुसऱ्या कोणत्याही घटकाशी P—संबंध नसेल तर x ला, ∝ चा P– संबंधाच्या संदर्भात "गुरुतम" म्हणतात.

प्रस्तुत व्याख्या ज्या पदांना लावावयाच्या ती पदे मापनयोग्य (Quantitative) असावीत, अशीहि अपेक्षा नाही, उदाहरणार्थ, 'पूर्वी' आणि 'नंतर' अशा क्रमाने रचना केलेल्या कालक्षणांची मालिका घेतल्यास, त्यांच्यातील "गुरुतम" (असल्यास) क्षण म्हणजे शेवटचा क्षण होय. पण ते जर 'नंतर' आणि 'पूर्वी' ह्या पद्धतीने रचले तर त्यांच्यातील "गुरुतम" (असल्यास) क्षण म्हणजे पहिला क्षण होय.

P ह्या संबंधाला अनुलक्षून एखाद्या वर्गाचा "लघुतम" म्हणजे P च्या व्यस्ताला अनुलक्षून त्या वर्गाचा गुरुतम होय.

मर्यादा आणि गुरुतम ह्या संकल्पना, ज्या संबंधाला अनुलक्षून ठरलेल्या असतील, तो संबंध मालिकारूपच असावा अशीही अपेक्षा नाहीं. पण संबंध मालिकारूप किंवा जवळजवळ मालिकारूप (Quasi– serial) नसल्यास त्या संकल्पनांचे फारच थोडे उपयोग होतात. मुख्यतः जी कल्पना महत्त्वाची आहे ती म्हणजे "उच्च मर्यादा किंवा गुरुतम" हिला आपण "उच्च सीमा (Boundary)" असे म्हणू. म्हणजे एखाद्या मालिकेतून निवडलेल्या पदांच्या संचाची "उच्च सीमा" म्हणजे त्यांतील, शेवटचा, (असल्यास) घटक होय; पण तसे नसेल तर ती सीमा म्हणजे
पृ. ७१ त्या सर्व पदांनंतरचे येणारे पहिलेच (असल्यास) पद होय. जर गुरुतम किंवा मर्यादा अस्तित्वात नसेल, तर मग उच्च सीमासुद्धा नसते. "निम्न सीमा" (Lower boundary) म्हणजे निम्न मर्यादा किंवा लघुतम होय.

चार प्रकारच्या डेडकिंड छेदांकडे पुनः वळल्यास आपल्याला असे दिसते की त्यांपैकी पहिल्या तीन प्रकारांत प्रत्येक भागास सीमा आहे (उच्च किंवा निम्न कोणती तरी), तर चौथ्यात कोणत्याच भागाला सीमा नाही. तसेच ज्या वेळी खालच्या भागाला उच्च सीमा असते त्या वेळी वरच्या भागाला निम्न सीमा असते, हेही स्पष्ट आहे. दुसऱ्या आणि तिसऱ्या प्रकारांत दोन्ही सीमा समान असतात; पहिल्या प्रकारात ह्या सीमा, मालिकेतील लागोपाठची दोन पदेच असतात.

ज्यावेळी मालिकेच्या प्रत्येक छेदाला सीमा (उच्च किंवा निम्न, कोणती तरी) असते, त्यावेळी त्या मालिकेला "डेडकिंडीय (Dedekindian)" मालिका म्हणतात.

महत्तेच्या क्रमानुसार (Order of Magnitude) गुणोत्तरांची मालिका डेडकिंडीय नाही, हे आपण पाहिले आहे.

अवकाशीय (भौतिक) कल्पनांचा प्रभाव लोकांच्या मनावर इतका होता की कोणत्याही मालिकांना मर्यादा ह्या असल्याच पाहिजेत असे त्यांना वाटत असे. आणि जेव्हा तसे घडले नाही, त्या वेळी त्यांना ते खटकले. म्हणूनच, ज्यांचे वर्ग 2 हून लहान आहेत अशा गुणोत्तरांची मर्यादा परिमेय (Rational) नाही असे जेव्हा त्यांच्या प्रत्ययाला आले तेव्हाच, डेडकिंट छिद्रे भरून काढण्याकरता म्हणून अपरिमेय सीमा "गृहीत" म्हणून पत्करावयास ते तयार झाले. हे छिद्र नेहमीच भरले जावे म्हणजे प्रत्येक छेदाला सीमा असावी ह्या हेतूने डेडकिंटने, वर उल्लेखिलेल्या त्याच्या कामात, एक सिद्धांत (Axiom) मांडला. ह्याच कारणाकरता ज्या ज्या वेळी एखाद्या मालिकेत हा सिद्धांत पाळला जातो त्या वेळी तिला "डेडकिंडीय" मालिका म्हणतात. पण हा जिथे पाळला जात नाही अशा असंख्य मालिका आहेत.

आपल्याला जे अपेक्षित असेल ते गृहीत म्हणून पत्करण्याच्या पद्धतीत अनेक सोयी आहेत. प्रामाणिक कष्टांपेक्षा, चोरीमारीच्या मार्गात मिळणाऱ्या मार्गासारख्याच ह्या सोयी आहेत. ते वाममार्ग म्हणून, इतरांकरता सोडून देऊन, आपण आपल्या प्रामाणिक कष्टाला आरंभ करू या.

अपरिमेय डेडकिंट छेद, अपरिमेय संख्येचा काही अंशी "प्रत्यय" घडवतो, हे स्पष्ट आहे. आरंभीच ही जी काही अधुकशी जाणीव झालेली आहे तिचा उपयोग करून घेण्यासाठी आपण तिच्यापासून काटेकोर व्याख्या काढण्याचा काही मार्ग काढला पाहिजे; आणि मार्ग काढण्याकरता, अपरिमेय संख्याच गुणोत्तरांच्या संचाची मर्यादा असली पाहिजे ही कल्पना मनातून काढून टाकली पाहिजे. छेद 1 असलेली गुणोत्तरे म्हणजे जसे पूर्णांक समजणे योग्य नव्हे; तसेच ज्या परिमेय संख्या अपरिमेय संख्याहून लहान किंवा मोठ्या आहेत; किंवा अपरिमेय संख्या ज्यांच्या मर्यादा आहेत त्या परिमेय संख्या म्हणजे गुणोत्तरे आहेत असे मानणे योग्य नव्हे. ज्यांना "वास्तव (Real) संख्या" म्हणता येईल अशा नव्या संख्यांची व्याख्या आपण केली पाहिजे; त्या संख्यांपैकी काही संख्या परिमेय असतील तर काही अपरिमेय असतील. जसा n/1, n शी "बांधलेला" आहे तशाच, परिमेय संख्यासुद्धा काही एका प्रकारे गुणोत्तरांशी बांधलेल्या आहेत; पण त्या संख्या म्हणजे गुणोत्तरे नव्हेत. त्या संख्या म्हणजे नेमक्या काय असाव्यात हे ठरवण्याकरताच, अपरिमेय संख्या, अपरिमेय छेदाने (Section) व्यक्तवली जाते आणि छेद खालच्या भागाने व्यक्तवला जातो हे लक्षात घ्या. ज्या छेदांच्या खालच्या भागांना गुरुतम नसतो अशा छेदांपुरतेच आपण सध्या आपले लक्ष केंद्रित करू या; अशा वेळी आपण ह्या खालच्या भागाला "खंड (Segment)" म्हणू. मग एखाद्या गुणोत्तराच्या संबंधातील खंड म्हणजे, त्या गुणोत्तराहून लहान असणाऱ्या सर्व गुणोत्तरांचा संच होईल,

पृ. ७२

ते गुणोत्तर म्हणजे त्या संचाची सीमा होईल; याउलट, अपरिमेय संख्या व्यक्त करणारे खंड म्हणजे ज्या संचांना सीमा नसेल असे खंड होत. दोन्ही प्रकारच्या खंडांच्या अंगी, मग त्यांना मर्यादा असो वा नसो, पुढचा एक धर्म निश्चित आहे. एकाच मालिकेतील दोन खंड घेतल्यास त्यांपैकी एक खंड दुसऱ्या खंडाचा भाग असतो; त्यामुळे 'पूर्ण आणि अंश' ह्या प्रकारच्या संबंधाच्या साह्याने त्यांचीही मालिका रचता येईल. ज्या मालिकेत डेडकिंट छिद्रे आहेत, म्हणजे जिच्यात सीमा नसलेले खंड आहेत त्या मालिकेपासून, तिच्यातील पदांपेक्षा जास्त खंड निर्माण होतील. कारण प्रत्येक पदामुळे ते पद ज्याची सीमा आहे असा खंड तर मिळेलच. शिवाय ज्यांना सीमा नाही, असे खंडही आणखी असतील.[1]

वास्तव संख्या आणि अपरिमेय संख्या ह्यांची व्याख्या करणे आपल्याला आता शक्य आहे.

महत्तेच्या क्रमानुसार घेतलेल्या गुणोत्तरांच्या मालिकेचा एक खंड म्हणजे "वास्तव संख्या (Real number)" होय.

गुणोत्तरांच्या मालिकेतील ज्या खंडाला सीमा नसते तो खंड म्हणजे "अपरिमेय संख्या" होय.

गुणोत्तराच्या मालिकेतील ज्या खंडाला सीमा असते तो म्हणजे "परिमेय वास्तव संख्या" होय.

याप्रमाणे परिमेय वास्तव संख्या ही एखाद्या विशिष्ट गुणोत्तरापेक्षा लहान असलेल्या सर्व गुणोत्तरांमुळे बनते आणि त्या गुणोत्तराशी संबंधित अशीच ती परिमेय वास्तव संख्या होते उदाहरणार्थ 1 ही वास्तव संख्या म्हणजे सर्व युक्त (Proper) अपूर्णांकाचा वर्ग होय.[2]

पृ. ७३

अपरिमेय संख्या म्हणजे गुणोत्तरांच्या संख्यांच्या संचांची सीमा आहे, असे ज्या वेळी आपण सहजपणे मानतो तेव्हा खंडांमधील 'पूर्ण आणि अंश' अशा क्रम-संबंधामुळे मिळणाऱ्या मालिकेतील संबंधित अशा परिमेय वास्तव संख्यांच्या संचाची ती सीमा असणे हेही सत्यच असते. उदाहरणार्थ, ज्या गुणोत्तरांचे वर्ग 2 हून कमी आहेत त्या गुणोत्तरांच्या संबंधातील 'गुणोत्तरांच्या मालिकेच्या खंडांची' $\sqrt{2}$ हीच उच्च सीमा

[1] अ. टी. : हा युक्तिवाद अपुरा आहे. कारण एखाद्या संचात दुसऱ्यापेक्षा काही घटक अधिक आहेत यावरून पहिल्यातील घटकांची "संख्या" (कांटोरीय) दुसऱ्यातील घटकांच्या संख्येहून अधिक असेल असे म्हणता येत नाही. मूळ पुस्तक पृष्ठ ८४ वर लेखकाने स्वतःच ह्याबद्दल चर्चा केली आहे.

[2] अ. टी. : 0 ते 1 मधील सर्व अपूर्णांक, 0 आणि 1 वगळून.

असते. अधिक सोप्या शब्दात म्हणावयाचे तर $\sqrt{2}$ म्हणजे, ज्यांचे वर्ग 2 हून लहान आहेत अशा गुणोत्तरांनी बनलेला खंडच होय.

कोणत्याही मालिकेच्या खंडांची मालिका ही डेडकिंडीय असल्याचे सिद्ध करणे सोपे असते. कारण, खंडांचा कोणताही संच दिला असता त्यांची सीमा म्हणजे त्यांचा तार्किक संयोग, म्हणजेच जी पदे त्या संचातील खंडांपैकी एका तरी खंडात असतात अशा पदांचा संच होय.[१]

वास्तव संख्यांची वरील व्याख्या म्हणजे, "रचना करणे" आणि "गृहीत धरणे" यांच्यामधील विरोधाचेच एक उदाहरण आहे. असले आणखी एक उदाहरण आपण प्रधानांकांच्या व्याख्येच्या वेळीं पाहिले आहे. ह्या रचना पद्धतीचा एक फार मोठा फायदा म्हणजे तिला नवीन गृहीते लागत नाहीत, तर आपण निगमन पद्धतीने मूळच्या तार्किक सामग्रीपासून आरंभ करू शकतो.

वर केलेल्या व्याख्येनुसार वास्तव संख्यांच्या बेरीज आणि गुणाकारांच्या व्याख्या करणे मुळीच कठीण नाही. μ आणि ν ह्या दोन वास्तव संख्या, म्हणजेच गुणोत्तरांचे वर्ग (Classes) दिले असता, μ मधील एक सदस्य आणि ν मधील एक सदस्य घेऊन गुणोत्तरांच्या बेरजेच्या नियमाप्रमाणे त्यांची बेरीज करा. याप्रमाणे μ आणि ν मधील वेगवेगळे सदस्य घेऊन मिळणाऱ्या सर्व बेरजांचा एक वर्ग बनवा. ह्याप्रकारे गुणोत्तरांचा एक नवीनच वर्ग मिळतो. हा वर्गसुद्धा गुणोत्तरांच्या मालिकेचाच एक खंड असतो हे दाखवणे सोपे आहे. हा वर्ग म्हणजेच μ आणि ν यांची बेरीज अशी व्याख्या आपण करू. ही व्याख्या आपण थोडक्यात अशी मांडू:—

दोन वास्तव संख्यांची अंकगणितीय बेरीज म्हणजे प्रत्येकीतील एकेक सदस्य शक्य त्या सर्व प्रकारे घेऊन केलेल्या त्यांच्या अंकगणितीय बेरजांचा वर्ग होय.

अगदी याच पद्धतीने प्रत्येक वास्तव संख्येमधील एकेक सदस्य शक्य त्या सर्व प्रकारे घेऊन, त्यांचा गुणाकार करून आपण त्यांच्या अंकगणितीय
पृ. ७४ गुणाकाराची व्याख्या करू शकतो. ह्या प्रकारे निर्माण झालेला गुणोत्तरांचा वर्ग म्हणजेच त्या दोन संख्यांचा गुणाकार, अशी व्याख्या करतात. (अशा सर्व व्याख्यांमध्ये, गुणोत्तरांच्या मालिकेतील, 0 आणि अनंत वगळावेत.)

---

[१] ले. टी. : खंड आणि डेडकिंडीय संबंध ह्या विषयाच्या संपूर्ण विवेचनाकरता Principia Mathematica vol. iii, * २१०–२१४ पाहा. वास्तव संख्यांच्या संपूर्ण विवेचनाकरता त्याच पुस्तकाचा vol. iii, * ३१० आणि Principles of Mathematics प्रकरण xxxiii व xxxiv पाहा.

आपल्या व्याख्या, धन आणि ऋण वास्तव संख्या आणि त्यांचे बेरीज–गुणाकार यांच्यापर्यंत पोचवण्यात काहीही अडचण येत नाही.

आता फक्त संमिश्र संख्यांची व्याख्या राहिली.

संमिश्र संख्यांना भौमितिक अर्थ देणे शक्य असले तरीसुद्धा अपरिमेय संख्यांप्रमाणे त्यांच्या व्याख्येत भूमिती अपरिहार्य ठरत नाही. "संमिश्र" संख्या म्हणजे ज्या संख्येत ऋण संख्येचे– पूर्णांक, अपूर्णांक किंवा वास्तव संख्येचे– वर्गमूळ अंतर्भूत आहे अशी एक संख्या होय. कोणत्याही ऋण संख्येचा वर्ग धनच असल्यामुळे, ज्या संख्येचा वर्ग ऋण असेल ती संख्या निराळ्याच जातीची संख्या असली पाहिजे. -1 च्या वर्गमुळाकरता i हे अक्षर, योजल्यास, ऋण संख्येचे वर्गमूळ अंतर्भूत असलेली संख्या $x + iy$ ह्या स्वरूपात व्यक्त करता येते; येथे x, y, वास्तव संख्या आहेत. iy ह्या भागाला "कल्पित" भाग[१] म्हणतात, आणि x ला "वास्तव" भाग म्हणतात. (कल्पित भागापेक्षा वेगळेपण दर्शवणे हेच हा वाक्प्रयोग रूढ होण्याचे कारण असावे.) अगदी काटेकोर व्याख्या न करता सुद्धा गणितज्ञ संमिश्र संख्या सवयीने वापरीत आलेले आहेत. अंकगणिताचे नेहमीचे नियम ते पाळतात असे केवळ गृहीत धरण्यात आले. आणि ह्या गृहीताच्या साह्याने केलेला त्यांचा उपयोग लाभदायक ठरल्याचे दिसले, बीजगणित आणि विश्लेषण (Analysis) यापेक्षा भूमितीत त्याचा उपयोग कमीच आहे.

उदाहरणार्थ, प्रत्येक वर्गसमीकरणाला दोन मुळे (Root) असावीत आणि घनसमीकरणाला तीन मुळे असावीत, इत्यादी गोष्टी आपल्याला हव्या आहेत. पण जर आपण वास्तव संख्यांपुरताच विचार केला तर $x^2+1=0$ अशा प्रकारच्या समीकरणाला एकही मूळ नसेल आणि $x^3-1=0$ अशा प्रकारच्या समीकरणाला एकच मूळ असेल. संख्येचे प्रत्येक सामान्यीकरण प्रथमतः अशा प्रकारच्या साध्या प्रश्नाच्या गरजेतूनच निर्माण झाले आहे. वजाबाकी कोणत्याही परिस्थितीत करता यावी याकरताच ऋण संख्यांची गरज पडली; नाहीतर b पेक्षा a लहान असताना a–b ला कधीच अर्थ आला नसता; भागाकार कोणत्याही परिस्थितीत करता यावा याकरताच
पृ. ७५ अपूर्णांकांची गरज पडली; आणि समीकरणे सोडवणे व त्यांची मुळे काढणे नेहमी शक्य व्हावे, यासाठी संमिश्र संख्यांची गरज पडली. पण संख्यांचे विस्तार त्यांच्या केवळ गरजेतून निर्माण झाले आहेत असे नाही; तर ते व्याख्येतून निर्माण झाले आहेत. आणि म्हणून आपण आता संमिश्र संख्यांच्या व्याख्येकडेच वळले पाहिजे.

---

[१] अ. टी. : प्रचलित गणितात iy ला कल्पित भाग न म्हणता y लाच कल्पित भाग म्हणतात.

संमिश्र संख्या म्हणजे वास्तव संख्यांची केवळ एक क्रमित जोडी असे मानण्यास आणि तशी तिची व्याख्या करण्यास हरकत नाही. इतर ठिकाणांप्रमाणेच, इथेही अनेक व्याख्या देणे शक्य आहे. महत्वाची बाब कोणती असेल तर कोणत्याही स्वीकृत व्याख्येतून अपेक्षित असे विशिष्ट गुणधर्म मिळवता आले पाहिजेत. संमिश्र संख्यांच्या बाबतीत, आपण जर त्यांची व्याख्या वास्तव संख्यांच्या जोड्या म्हणून केली तर आपल्याला इष्ट धर्मांपैकी काही धर्म तत्काळ मिळतात. ते असे : संमिश्र संख्या निश्चित होण्याकरता दोन वास्तव संख्या लागतात; यांपैकी एक पहिली आणि एक दुसरी असा फरक करता येईल. आणि ज्यावेळी दोन संमिश्र संख्यामध्ये एकीतील पहिली दुसरीतील पहिली बरोबर आणि दुसरी, दुसरीबरोबर असेल त्याचवेळी त्या संमिश्र संख्या समान असतात. आणखी जी काही सामग्री लागणार आहे ती, बेरीज आणि वजाबाकी यांचे नियम ठरवून मिळवता येईल. आपल्याला असे हवे आहे;

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y'),$$
$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

तेव्हा वास्तव संख्यांच्या दोन क्रमित जोड्या (x, y) आणि (x', y') दिल्या असता, त्यांची बेरीज म्हणून $(x+x', y+y')$ ही जोडी आणि गुणाकार म्हणून $(xx'-yy', xy'+x'y)$ ही जोडी, अशीच व्याख्या करू. ह्या व्याख्यांमुळे, आपल्या क्रमित जोड्यांकडे आपल्याला इष्ट ते धर्म असल्याची खात्री होईल. उदाहरणार्थ $(0, y)$ आणि $(0, y')$ ह्या दोन जोड्यांचा गुणाकार घ्या. हा, वरील नियमानुसार $(-yy', 0)$ येईल. म्हणून $(0, 1)$ ह्या जोडीचा वर्ग म्हणजे $(-1, 0)$ ही जोडी येईल. मग एरवीच्या परिभाषेप्रमाणे जिचा कल्पित भाग शून्य असेल त्या जोडीतील दुसरे पद शून्य येईल; $x+iy$ ह्या चिन्हामध्ये ती संख्या $x+0i$ होईल. स्वाभाविकतःच ती x अशीच लिहिली जाईल. छेद 1 असणाऱ्या गुणोत्तरांचे पूर्णांकांशी जसे सादृश्य मानणे स्वाभाविक (पण चुकीचे) असते, तसेच ज्या संमिश्र संख्याचा कल्पित भाग शून्य आहे त्यांचे वास्तव संख्यांशी सादृश्य मानणे स्वाभाविक (पण चुकीचे) असते. अर्थात जरी तात्त्विक दृष्ट्या हे चूक असले तरी व्यवहारतः सोयीचे असते. "$x+0i$", ऐवजी केवळ "x" आणि "$0+iy$" ऐवजी केवळ "iy" लिहावयाला हरकत नाही. मात्र अशा वेळी "x" ही खरोखरीची वास्तव संख्या नसून विशेष प्रकारची संमिश्र संख्या आहे हे ध्यानात ठेवले पाहिजे. त्याचप्रकारे ज्या वेळी y, 1 असेल त्या वेळी "iy" ऐवजी "i" लिहावयालाही हरकत नाही. म्हणजे $(0, 1)$ ही जोडी i ने दर्शवली जाईल आणि $(-1, 0)$ ही जोडी -1 ने दर्शवली जाईल. आता गुणाकाराच्या आपल्या नियमाने $(0, 1)$ चा वर्ग $(-1, 0)$ येतो, म्हणजेच i चा वर्ग -1 येतो. म्हणजे आपण केलेल्या व्याख्येमुळे आपले सर्व आवश्यक ते हेतू साध्य होतात, असे दिसते.

पृ. ७६

प्रतलाच्या भूमितीमध्ये संमिश्र संख्यांचा भौमितिक अर्थ मांडणे सोपे आहे, हा विषय, W. K. Clifford ने आपल्या Common Sense of the Exact Science ह्या पुस्तकात व्यवस्थितपणे विशद केला आहे. हे पुस्तक श्रेष्ठ दर्जाचे असले तरीही शुद्ध तार्किक व्याख्यांचे महत्त्व उमजण्यापूर्वी लिहिलेले आहे.

आपण व्याख्या केलेल्या संमिश्र संख्यांहून उच्चतर कोटीच्या अशाही संमिश्र संख्या असतात. त्या फारशा महत्त्वाच्या नसल्या तरी त्या संमिश्र संख्यांचेही काही उपयोग असून भूमितीच्या दृष्टीने त्यांचे महत्त्व नाही असे नाही. अशा संख्यांचे उदाहरण Dr. Whitehead च्या Universal Algebra मध्ये सापडेल. आपण दिलेल्या व्याख्येचा स्वाभाविक विस्तार केला तर n कोटीच्या (Order) संमिश्र संख्येची व्याख्या मिळेल. ज्याचा प्रदेश वास्तव संख्या आणि व्यस्त प्रदेश 1 ते n पर्यंतचे पूर्णांक आहेत ' [1] असा एक अनेक संबंध म्हणजे n कोटीची संमिश्र संख्या अशी व्याख्या करू. सर्वसाधारणपणे हे $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ह्या प्रतीकाने दर्शवले जाते; यांतील पादाक्षरे, पूर्णांकांचा पादाक्षरांशी एक सहसंबंध दर्शवतात. हा सहसंबंध एक– अनेक असू शकेल; एक–एकच असेल असे नाही; कारण p आणि q असमान असूनही x_p आणि x_q समान असू शकतील. गुणाकाराची सोयीस्कर व्याख्या केल्यास, वरील व्याख्येने उच्चतर कोटीच्या संमिश्र संख्यांसंबंधीचे सर्व हेतू साध्य होतील.[2]

येथवर आपण संख्यांच्या ज्या विस्तारात अनंताचा अंतर्भाव होत नाही अशा विस्तारांचे अवलोकन संपवले. संख्या कल्पनेचा, अनंत समूहावरील प्रयोग हा आपला पुढचा विषय असला पाहिजे.

□ □

---

[1] ले. टी. : Principles of Mathematics परिच्छेद ३६० पृ. ३७९ पाहा.

[2] अ. टी. : उच्चतर कोटीच्या संमिश्र संख्या नेहमीच मिळतात असे नाही. उदा. Hamilton ने तिसऱ्या कोटीच्या संमिश्र संख्या मिळवण्याचा प्रयत्न केला. तेव्हा ते त्याला शक्य झाले नाही. तर १८४३ मध्ये त्याला चवथ्या कोटीच्या संमिश्र संख्या (Quaternions) मिळाल्या. आणि आता असे प्रस्थापित झालेले आहे की वास्तव संख्या, दुसऱ्या कोटीच्या आणि चवथ्या कोटीच्या संमिश्र संख्या ह्यांच्याव्यतिरिक्त इष्ट गुणधर्म असणाऱ्या संख्या अस्तित्वात नसतात. इष्ट गुणधर्म म्हणजे त्या संख्यांमध्ये बेरीज व गुणाकार यांच्या व्याख्या करता याव्यात आणि त्यांचे क्षेत्र (बीजगणिताच्या दृष्टीने) व्हावे. वर वर्णन केलेल्या तीन प्रकारच्या संख्यांव्यतिरिक्त उच्च कोटीच्या दुसऱ्या कोणत्याही संख्यांचे क्षेत्र होऊ शकत नाही. पैकी चवथ्या कोटीच्या संख्यांमध्ये तर गुणाकार क्रमनिरपेक्षही नसतो.

प्रकरण ८

अनंत प्रधानांक

आपण प्रकरण २ मध्ये दिलेल्या प्रधानांकांच्या व्याख्येचा प्रयोग प्रकरण ३ मध्ये सान्त प्रधानांकांवर, म्हणजेच नेहमीच्या स्वाभाविक संख्यांवर केला. त्यांना आपण "विगामी (Inductive)" संख्या म्हटले. कारण त्यांनी, 0 पासून सुरू होणारे, गणिती विगमन पाळले होते हे आपण पाहिले. पण ज्यांच्या पदांची संख्या विगामी नाही असे संग्रह आपण अजून पाहिले नाहीत, आणि अशा संग्रहांना काही संख्या असेल किंवा कसे याचीही चर्चा आपण केली नाही. हा फार पुरातन प्रश्न असून आपल्या[1] काळात हा प्रश्न मुख्यतः गेओर्ग कांटोरने सोडवला आहे. फ्रेगेची संख्यांची तार्किक मीमांसा आणि कांटोरचे संशोधन ह्यांच्या संयोगापासून ज्या संख्यांच्या रूपात काही निष्कर्ष मिळतात, त्या सान्तातीत (Transfinite) संख्यांच्या किंवा अनंत संख्यांच्या मीमांसेचे स्पष्टीकरण देण्याचा प्रयत्न आपण प्रस्तुत प्रकरणात करणार आहोत.

पृ. ७७

जगामध्ये खरोखर अनंत संग्रह असतीलच असे *खात्रीलायक* सांगता येणार नाही. 'असे अनंत संग्रह आहेत' ह्या गृहीतालाच आपण "अनन्ताचा सिद्धांत" (Axiom of infinity) म्हणतो. हा सिद्धांत सिद्ध करता येईल अशी आशा जरी अनेक कारणांमुळे भासत असली, तरी ते सर्व मार्ग तर्कदुष्टच (Fallacious) ठरतील अशी साधार भीती वाटते. तसेच तो सिद्धांत सत्य असल्याचा विश्वास बाळगावा इतपत निर्णायक तार्किक पुरावाही उपलब्ध नाही. पण त्याचबरोबर अनंत समूहांच्या *विरोधी* जाईल असाही तार्किक पुरावा नसल्याचे निश्चयाने म्हणता येते; म्हणून तर्कशास्त्रामध्ये, असले समूह अस्तित्वात असल्याबद्दलच्या गृहीताचा शोध घेणे समर्थनीय ठरते. ह्या गृहीताचे व्यावहारिक स्वरूप, 'जर n ही विगामी संख्या असेल तर n, n + 1 बरोबर नाही' हे आहे असे तूर्त समजू. अनंत संग्रहांचे अस्तित्व प्रतिपादन करणाऱ्या स्वरूपाचे ह्या स्वरूपाशी साद्दश्य पहात असता विविध सूक्ष्म मुद्दे आढळतात; पण सध्या आपण ते विचारात घेणार

पृ. ७८

[1] अ. टी. : रसेलच्या.

नाही. नंतरच्या एका प्रकरणात आपण त्यांचा विचार करू. सध्या आपण केवळ इतकेच मानू की जर n ही एक विगामी संख्या असेल तर n आणि n + 1 ह्या संख्या समान नसणार. कोणत्याही दोन विगामी संख्यांचे अनुचर (Successor) सारखे नाहीत, हे पेआनोच्या गृहीतात अंतर्भूतच आहे; कारण जर n = n + 1 असेल तर n – 1 आणि n ह्यांचा अनुचर एकच, म्हणजे n, येईल. म्हणजेच, पेआनोच्या, आरंभीच्या प्रविधानात नव्हते असे कोणतेही नवीन विधान गृहीत धरलेले नाही.

आता आपण प्रत्यक्ष विगामी संख्यांचा संग्रह पाहू या. ज्याची व्याख्या अगदी परिपूर्ण आहे असा हा वर्ग आहे. प्रथमतः असे लक्षात घ्या की प्रधानांक म्हणजे परस्परांशी सदृश (Similar) असणाऱ्या आणि ह्यांव्यतिरिक्त इतरांशी समान नसणाऱ्या वर्गांचा संच होय; ह्या प्रधानांकांतील ज्या संख्या n च्या n + 1 शी असलेल्या संबंधाच्या दृष्टीने, 0 च्या वंशात (Posterity) असतील, म्हणजे ज्यांच्या अंगी 0 चा प्रत्येक धर्म असेल, तसेच तसा धर्म धारण करणाऱ्या संख्येच्या अनुचराच्या अंगीही तो धर्म असेल अशा संख्यांना आपण “ विगामी संख्या ” म्हणू ; येथे “ अनुचर ” चा अर्थ- ‘ n चा अनुचर n + 1 असा ’ आहे. म्हणजे “ विगामी संख्यांचा ” वर्ग पूर्णपणे सुव्याख्यात (Welldefined) आहे. प्रधानांकाच्या आपल्या सर्वसाधारण व्याख्येनुसार विगामी संख्यांच्या वर्गातील पदांची संख्या म्हणजे “ विगामी संख्यांच्या वर्गाशी सदृश असणारे सर्व वर्ग ” होत; म्हणजे आपल्या व्याख्येनुसार हा वर्ग म्हणजेच विगामी संख्यांची संख्या होय.

आता, ही संख्या मात्र विगामी संख्या असू शकत नाही हे तर उघड दिसते. जर n ही एक विगामी संख्या असेल तर 0 ते n (दोन्हीधरून) पर्यंतच्या संख्यांची संख्या n + 1; म्हणून n ही कोणतीही विगामी संख्या असली तर सर्व विगामी संख्यांची संख्या n हून अधिक असणार. जर आपण सर्व विगामी संख्या त्यांच्या महत्तेच्या क्रमाने मालिका म्हणून रचल्या तर त्यात शेवटचे पद असणार नाही. पण जर n ही विगामी संख्या असेल तर ज्या मालिकेच्या क्षेत्रात n पदे असतील अशा प्रत्येक मालिकेत शेवटचे पद असेलच पाहिजे हे सिद्ध करणे सोपे आहे. असले फरक हवे तेवढे दाखवता येतील. यावरून सर्व विगामी संख्यांची संख्या ही त्या सर्वांहून
पृ. ७९
वेगळी आहे. तिच्या अंगी सगळे विगामी धर्म नाहीत. 0 च्या अंगी एखादा धर्म आहे आणि n च्या अंगी असता n + 1 च्या आहे, पण ह्या नवीन संख्येजवळ मात्र तो नाही, असे होऊ शकेल. अनंत संख्यांच्या मीमांसेला इतका विलंब होण्यातील मुख्य अडचण म्हणजे विगामी धर्मातील निदान, काही धर्म तरी सर्व संख्यांजवळ *असलेच पाहिजेत* ही चुकीची समजूत होय. तसेच, ते म्हणणे नाकारले तर काही व्याघात (Contradiction) निर्माण होतील अशीही समजूत होती. अनंत संख्यांच्या अभ्यासातील पहिली पायरी म्हणजे हा दृष्टिकोण चुकीचा

असल्याचे उमजून येणे ही होय. विगामी संख्या आणि ही नवी संख्या यांच्यातील, ध्यानात घेण्यासारखा आणि सर्वात आश्चर्यजनक फरक म्हणजे तिच्यात 1 मिळवल्याने किंवा तिच्यातून 1 वजा करण्याने तिची दुप्पट किंवा निमपट करण्याने किंवा ती लहान किंवा मोठी करण्याच्या दृष्टीने आपल्याला सुचतील त्या आणि सुचतील तेवढ्या क्रिया करूनही तिच्यात बदल होत नाही. 1 मिळवून सुद्धा त्या संख्येत बदल होत नाही या वस्तुस्थितीचा उपयोग कांटोरने ज्याला तो "सान्तातीत" संख्या म्हणतो त्याच्या व्याख्या करण्याकरता केला आहे. पण अनेक कारणांकरता, यांपैकी काही व्याख्यांचा विचार पुढे करू. जिच्याजवळ सगळे विगामी धर्म नसतील अशी संख्या किंवा अगदी सरळ म्हणायचे तर विगामी नसलेली संख्या, अशी अनंत प्रधानांकांची व्याख्या करणे अधिक चांगले. काहीही असले तरी 1 मिळवूनही बदल न होणे हा धर्म महत्त्वाचा असून आपण त्याचा थोडा वेळ तरी विचार केला पाहिजे.

एखाद्या वर्गाची संख्या तिच्यात 1 मिळवूनही बदलत नाही हे म्हणणे म्हणजे "जर त्या वर्गात नसणारे असे x हे पद घेतले तर ज्याचा प्रदेश तो वर्ग, आणि ज्याचा व्यस्त प्रदेश त्या वर्गात x ची भर घालून मिळणारा वर्ग असेल असा एक वर्ग, ह्यांच्यात एखादा एक–एक संबंध प्रस्थापित करता येईल" असे म्हणण्यासारखेच आहे. कारण मग तो वर्ग त्या वर्गात x हे पद घालून मिळणाऱ्या म्हणजेच एक जादा पद असणाऱ्या वर्गाशी सदृश ठरतो. मग त्याची संख्या त्याच्याहून एक पद जास्त असणाऱ्या वर्गाच्या संख्येइतकीच असते. आणि ही संख्या n असेल तर $n = n + 1$ राहील. ह्या वेळी $n = n - 1$ हेसुद्धा आपल्याला मिळेल.[१] म्हणजे ज्यांचा प्रदेश एक संपूर्ण वर्ग आहे आणि व्यस्त प्रदेश म्हणजे त्याच वर्गातील एक पद कमी करून मिळणारा वर्ग आहे, असे एक–एक संबंध अस्तित्वात असतात. ह्या प्रकारच्या घटना अधिक सर्वसामान्य परिस्थितीतही घडतात, असे सिद्ध करणे शक्य आहे; म्हणजे एखाद्या वर्गाच्या एखाद्या भागाचा त्या वर्गाशी एक–एक संबंध प्रस्थापित करता येईल. असे करणे शक्य असेल त्या वेळी, जो सहसंबंधक हे घडवतो तो संपूर्ण वर्गाचे स्वतःच्याच एका भागामध्ये "आत्मक्षेपण" घडवतो (Reflects); अशा वर्गांना "आत्मसाक्षेपी (Reflexive)" म्हणतात.[२] म्हणून,

पृ. ८०

---

[१] अ. टी. : जोपर्यंत ह्या नव्या जातीच्या संख्यांची वजाबाकी म्हणजे काय हे ठरत नाही तोवर $n - 1$ हे चिन्ह अर्थशून्य आहे. शिवाय सान्तातीत संख्यांची वजाबाकी होत नसते हे लेखकानेही मूळ पुस्तकातील पृ. ८७ वर स्पष्ट केले आहे.

[२] अ. टी. : प्रचलित गणितात आत्मक्षेपी ही संज्ञा 'वर्गांना' लावीत नाहीत. तर त्या 'संबंधाला' आत्मक्षेपी म्हणतात व ज्या वर्गांच्या बाबतीत असा संबंध प्रस्थापित करता येतो त्या वर्गांना अनंत वर्ग असे म्हणतात. मूळ पुस्तक पृ. ८८ पाहा.

जो वर्ग स्वतःच्या उचित (Proper) अंशाशी (किंवा भागाशी) सदृश असेल तो आत्मक्षेपी वर्ग होय.[1] (उचित भाग म्हणजे संपूर्ण नसलेला भाग.)

"आत्मक्षेपी" प्रधानांक म्हणजे आत्मक्षेपी वर्गाचा प्रधानांक होय.

आता आपल्याला ह्या आत्मक्षेपी गुणधर्माचा विचार करावयाचा आहे.

"आत्मक्षेपणाचे" लक्षणीय असे एक मोठे उदाहरण म्हणजे Royce चे नकाशाचे उदाहरण होय.

इंग्लंडच्या पृष्ठभागाच्याच एका भागावर इंग्लंडचा नकाशा काढायचा आहे, अशी कल्पना तो करतो. नकाशा जर अचूक असेल, त्याचा मूळ प्रदेशाशी परिपूर्ण असा एक-एक संबंध राहील; म्हणजे मूळप्रदेशाचाच एक भाग असलेल्या आपल्या नकाशाचा पूर्ण प्रदेशाशी एक-एक संबंध असतो; म्हणून त्याच्यात संख्येने मूळच्या प्रदेशाइतकेच बिंदू असतात. आणि म्हणून ही संख्या आत्मक्षेपी संख्या होय. Royce च्या दृष्टीने महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे नकाशा जर अचूक असेल तर त्यात नकाशाचाही नकाशा पाहिजे; म्हणून त्यात नकाशाच्या नकाशाचा नकाशा असला पाहिजे; आणि हे अनंत वेळा चालेल. हा मुद्दासुद्धा महत्त्वाचा आहे. पण तूर्त आपण त्यात फार वेळ घालविण्याचे कारण नाही. खरे म्हणजे अशा वैचित्र्यपूर्ण उदाहरणांमधूनच आपण अधिक परिपूर्ण आणि निश्चित उदाहरणांकडे वळू; आणि त्यासाठी आपल्याला प्रत्यक्ष अंक-मालिकेशिवाय इतर उदाहरणांचा फारसा उपयोग होणार नाही.

n चा $n+1$ शी असलेला संबंध विगामी संख्यांपुरताच मर्यादित ठेवला, तर तो संबंध एक-एक असतो; सर्व विगामी संख्या म्हणजे त्याचा प्रदेश असतो; 0 सोडून सर्व विगामी संख्या त्याचा व्यस्त प्रदेश असतो. म्हणजे विगामी संख्यांचा संपूर्ण वर्ग हा, त्यातून शून्य वगळल्यावर मिळणाऱ्या वर्गाशी सदृश असतो. परिणामतः व्याख्येनुसार तो "आत्मक्षेपी" वर्ग असून त्याची संख्या म्हणजे ही एक "आत्मक्षेपी" संख्या असते. पुन्हा, n चा $2n$ शी असलेला संबंध विगामी संख्यांपुरताच मर्यादित ठेवला तर, तोही एक–एक असतो. सर्व विगामी संख्या त्याचा प्रदेश असून सर्व सम विगामी संख्या त्याचा व्यस्त प्रदेश असतो. म्हणून विगामी संख्यांची एकूण संख्या ही सम विगामी संख्यांच्या एकूण संख्येइतकीच असते. अनंत संख्या अस्तित्वात असणे अशक्य आहे, हे सिद्ध करण्याकरता लाइब्नित्झने (आणि इतरही अनेकांनी) हा गुणधर्म वापरला होता; "अंश हा भागाच्या समान असणे हे" आत्म-व्याघाती (Self contradictory) मानले जात असे.

पृ. ८१ पण हा वाक्प्रयोग म्हणजे, सत्यतेसाठी अज्ञात संदिग्ध गोष्टींवर अवलंबून असणारे जे वाक्प्रयोग असतात अशांपैकीच एक होय.

---

[1] अ. टी. : गणितीदृष्ट्या स्वतः वर्ग हासुद्धा स्वतःचाच एक भाग मानला जातो. म्हणून जो भाग संपूर्ण वर्गाइतका नसेल त्याला उचित भाग म्हणतात.

"समान (Equal)" ह्या शब्दाला अनेक अर्थ आहेत. पण तो शब्द जर आपण, ज्याला सदृश (Similar) म्हणतो त्या अर्थाने वापरला तर त्यात कोणताच व्याघात (Contradiction) उद्भवत नाही; कारण अनंत संग्रहांना, स्वतःशी सदृश असलेले भाग असणे हे संपूर्णतः योग्य आहे. ज्या लोकांना हे अशक्य वाटते ते नकळत, एक चूक करीत असतात. काही धर्म हे गणिती विगमनानेच सिद्ध करता येतात. हे धर्म त्यांना इतके परिचित असतात की सान्त क्षेत्रांच्या बाहेरही ते सत्यच असले पाहिजेत असे मानावयास ते लोक प्रवृत्त होतात. आणि मग अधिक सामान्य अशा संख्यांनाही ते लोक ते धर्म लागू करतात.

ज्या वेळी एखाद्या वर्गाचे, त्याच्या अंशात आपण आत्मक्षेपण करू शकतो, त्या वेळी त्याच संबंधाच्या साह्याने त्याच भागाचे आणखी लहान भागात आत्मक्षेपण होणे अटळ ठरते, आणि त्याची आवृत्ती अनंत वेळा होऊ शकते. उदाहरणार्थ, आपण आताच पाहिल्याप्रमाणे सर्व विगामी संख्या, सर्व सम संख्यांमध्ये आत्मक्षेपित करू शकतो; आणि त्याच संबंधाच्या (म्हणजेच n चा 2n शी जो संबंध आहे त्याच्या) साह्याने सम संख्या, 4 च्या पटींमध्ये आत्मक्षेपित करू शकतो; ह्या संख्या पुन्हा 8 च्या पटींमध्ये आत्मक्षेपित करू शकतो;... इत्यादी. रॉइसच्या नकाशाच्या उदाहरणाचेच हे अमूर्त स्वरूप आहे. सम संख्या ह्या सर्व विगामी संख्यांचा "नकाशा" होत; 4 च्या पटी म्हणजे नकाशाचा नकाशा होय. 8 च्या पटी म्हणजे नकाशाच्या नकाशाचा नकाशा होय; जर आपण हीच प्रक्रिया n च्या n + 1 शी असलेल्या संबंधाला लावली तर आपल्याला "नकाशा" म्हणजे 0 सोडून उरलेल्या सर्व संख्या मिळतील, नकाशाचा नकाशा म्हणजे 2 पासून पुढच्या सर्व संख्या; नकाशाच्या नकाशाचा नकाशा म्हणजे 3 पासून पुढच्या सर्व संख्या मिळतील. ह्या उदाहरणांचा मुख्य उपयोग आत्मक्षेपी वर्गांशी आपला परिचय होण्याकरता होईल. ह्यांच्या साह्याने आपल्याला, बाह्यतः विरोधी भासणाऱ्या अंकगणिती विधानांचे रूपांतर, आत्मक्षेपणांच्या आणि वर्गांच्या भाषेत करता येईल; त्यात विरोधाभासाचा भास जरा कमी राहील.

विगामी प्रधानांकांच्या संख्येची व्याख्या देणे उपयुक्त ठरेल. ह्यासाठी आपण प्रथम, विगामी प्रधानांकांच्या, महत्त्वेच्या क्रमामुळे ज्या मालिका मिळतात त्यांच्या निरनिराळ्या व्याख्या करू. जिला "श्रेढी (Progression)" म्हणतात तशा प्रकारच्या मालिकांचा विचार प्रकरण 1 मध्ये पूर्वीच केला आहे. ज्या मालिका क्रमवार-पणाच्या (Consecutiveness) संबंधांपासून जनित करता येतात

पृ. ८२ अशा प्रकारची ती मालिका आहे; अशा मालिकेच्या प्रत्येक सदस्याला अनुचर असून, ज्याला पूर्वचर नाही असा एकच सदस्य असतो; आणि "लगतचा अनुचर" (Immediate predecessor) ह्या संबंधाला अनुलक्षून,

मालिकेचा प्रत्येक सदस्य ह्या सदस्याच्या वंशात असतो. ही लक्षणे पुढील व्याख्येत एकत्रित करून मांडता येतील.[1]

ज्या एक-एक संबंधाचे नेमके एकच पद असे असते की ते प्रदेशात असेल पण व्यस्त प्रदेशात नसेल, आणि संपूर्ण प्रदेश हा त्या पदाच्या वंशाशी एकरूप असेल तो संबंध म्हणजे श्रेढी होय.

ह्याप्रमाणे व्याख्या केलेली कोणतीही श्रेढी पेआनोचे पाचही सिद्धांत पाळते हे पाहणे सोपे आहे. ज्याला तो 0 म्हणतो त्या ठिकाणी, प्रदेशात असलेले पण व्यस्त प्रदेशात नसलेले पद येते; ज्या पदाचा दिलेल्या पदाशी प्रस्तुत एक-एक संबंध असेल ते पद म्हणजे त्या दिलेल्या पदाचा अनुचर होय; आणि एक-एक संबंधाचा प्रदेश म्हणजेच, ज्याला तो "संख्या" म्हणतो तो होय. पाच सिद्धांत क्रमाने घेतल्यास, आपल्याला पुढील रूपांतरे मिळतील :—

(१) "0 ही संख्या आहे" याचे रूपांतर पुढीलप्रमाणे होईल : "प्रदेशाचा सदस्य असून व्यस्त प्रदेशाचा सदस्य नसलेला घटक प्रदेशाचा सदस्य असतो." अशा प्रकारचे एक पद असावे असे जे आपण व्याख्येत म्हटले आहे त्याच्याशी हे समानार्थी होईल. आपण ह्या सदस्याला "पहिले पद" म्हणू.

(२) "कोणत्याही संख्येची अनुचर संख्याच असते" याचे रूपान्तर "प्रदेशातील दिलेल्या सदस्याशी ज्या पदाचा इष्ट तो संबंध असतो, तो त्या प्रदेशाचा सदस्यच असतो" असे होईल. हे पुढीलप्रमाणे सिद्ध करता येईल. व्याख्येनुसार प्रदेशाचा प्रत्येक सदस्य पहिल्या पदाच्या वंशात असतो. म्हणून प्रदेशातील सदस्याचा अनुचर हा पहिल्या पदाच्या वंशाचाही सदस्य असतो. (कारण वंशाच्या सामान्य व्याख्येनुसार एखाद्या पदाच्या वंशात त्याचा अनुचर असतो.) परिणामी तो, प्रदेशाचाही सदस्य असतो, कारण व्याख्येनुसार पहिल्या पदाचा वंश म्हणजेच प्रदेश होय.

(३) "कोणत्याही दोन संख्यांना एकच अनुचर नसतो" हे, प्रस्तुत संबंध एक-अनेक असल्याचे म्हणण्याप्रमाणे आहे, आणि तो व्याख्येनुसार (एक-एक असल्याने) एक-अनेक आहेही.

(४) "0 ही संख्या कोणत्याही संख्येचा अनुचर नाही" हे, "पहिले पद व्यस्त प्रदेशाचा सदस्य नाही" असे होते; हेही व्याख्येवरूनच आपल्याला मिळते.

(५) हे गणिती विगमन आहे; आणि त्याचे रूपात "प्रदेशाचा प्रत्येक सदस्य पहिल्या पदाच्या वंशात असतो" असे होते आणि हेही आपल्या व्याख्येवरूनच मिळते.

पृ. ८३

[1] ले. टी. : Principia Mathematica vol. ii पृष्ठ १२३ पाहा.

याप्रमाणे पेआनोने ज्यांच्यापासून अंकगणित निगमित केले ते पाच तार्किक धर्म आपण व्याख्या केल्यानुसार श्रेढींच्याही अंगी आहेत. प्रकरण ६ मध्ये आपण संबंधांच्या सादृश्याची व्याख्या केली आहे. त्या व्याख्येच्या अर्थाने कोणत्याही दोन श्रेढ्या " सदृश " असतात हे दाखवणे सोपे आहे. अर्थात ज्या एक–एक संबंधापासून आपण श्रेढीची व्याख्या करतो त्यापासून मालिकारूप संबंधही आपल्याला मांडता येईल; त्याची पद्धत आपण प्रकरण ४ मध्ये स्पष्ट केलेलीच आहे; हा संबंध म्हणजे एखाद्या पदाचा, मूळ संबंधाला अनुलक्षून होणाऱ्या त्याच्या उचित वंशाच्या सदस्यांशी असलेलाच संबंध होय.

श्रेढी जनित करणारे कोणतेही दोन संक्रमणीय (Transitive) आणि असंमित (Asymmetrical) संबंध सदृश असतात; ज्या कारणामुळे त्यांतील एक-एक संबंध सदृश असतात त्याच कारणांमुळे (श्रेढी जनित करणारे) हे संबंधसुद्धा सदृश असतात. श्रेढींच्या अशा सर्व संक्रमणीय जनकांचा वर्ग, हा प्रकरण ४ च्या अर्थानुसार " मालिका-अंकच " असतो; खरे म्हणजे, सर्व प्रकारच्या अनंत मालिका-अंकांतील हा मालिका-अंक लघुतम असतो. याला कांटोरने ω (ओमेगा, ग्रीक अक्षर) हे नाव दिले आणि त्याच नावाने तो अंक ओळखला जातो.

पण तूर्त तरी आपल्याला *प्रधानांकांपुरताच* विचार करावयाचा आहे. ज्या अर्थी दोन श्रेढी म्हणजे सदृश संबंध असतात, त्या अर्थी त्यांचे प्रदेशही (किंवा त्यांची क्षेत्रे, ती येथे प्रदेशच आहेत) सदृश वर्गच असतात, हेही सरळ आहे. श्रेढींचे प्रदेश, प्रधानांक निर्माण करतात, कारण कोणत्याही श्रेढीच्या प्रदेशाशी सदृश असणारा प्रत्येक वर्ग स्वतः सुद्धा एखाद्या श्रेढीचा प्रदेश असल्याचे दाखवता येते. सर्व अनंत प्रधानांकांमध्ये हा लघुतम असतो; ह्या अंकासाठीच कांटोरने अलेफ हे हिब्रू अक्षर त्याला उचित असे 0 हे पादाक्षर लावून वापरले; कारण अन्य पादाक्षरांनी युक्त अशा गुरुतर अनंत प्रधानांकांपासून त्यांचे भिन्नत्व त्याला दर्शवावयाचे होते. याप्रमाणे लघुतम अनंत प्रधानांकाचे नाव $\aleph_0$ (अलेफ–शून्य) आहे.

एखाद्या वर्गात $\aleph_0$ पदे आहेत असे म्हणणे म्हणजे तो वर्ग $\aleph_0$ चा एक सदस्य आहे असे म्हणण्यासारखेच आहे. तसेच, हे म्हणणे, त्या वर्गाचे सदस्य श्रेढी रूपात रचता येतात असे म्हणण्यासारखे सुद्धा आहे. जर
पृ. ८४
एखाद्या श्रेढीमधून आपण काही सान्त पदे वगळली, किंवा एका आड एक पदे वगळली, किंवा प्रत्येक दहावे वा शंभरावे सोडून बाकीची सर्व वगळली, तरी ती श्रेढीच राहील हे उघड आहे. ह्या पद्धतींनी आपण श्रेढी पातळ करीत गेलो तरी श्रेढी ह्या श्रेढीच राहतात, आणि त्यांच्या पदांची संख्या कमी होत नाही, ती $\aleph_0$ इतकीच राहते. खरे तर श्रेढीमधून कशीही निवड केली, ती

कितीही विरळ झाली, तरी जोवर तिला शेवटचे पद नाही तोवर ती श्रेढीच राहते. n^n, n^{n^n} अशा प्रकारच्या विगामी संख्या घेतल्या आहेत असे समजा. संख्यामालिकेत अशा

प्रकारच्या संख्या अधिकाधिक विरळ होत जातात, आणि तरीही त्यांची संख्या विगामी संख्यांइतकीच म्हणजे $\aleph_0$ इतकीच असते.

ह्याउलट, विगामी संख्यांची संख्या न वाढवता त्यांत आपणाला आणखी काही पदांची भरही घालता येते. उदाहरणार्थ, गुणोत्तरे घ्या. गुणोत्तरांची संख्या पूर्णांकाहून पुष्कळ जास्त असणार असेच कोणालाही वाटेल. कारण ज्या गुणोत्तरांचे छेद 1 आहेत ते पूर्णांकांशी संबद्ध आहेत, आणि त्यामुळे पूर्णांक हे गुणोत्तरांच्या अत्यल्प अंशाइतके असल्याचे भासतात. पण खरोखरी गुणोत्तरांची (किंवा अपूर्णांकांची) संख्या नेमकी विगामी संख्यांच्या इतक्या संख्येइतकीच, म्हणजे $\aleph_0$ इतकीच असते. सर्व गुणोत्तरे खालील योजनेनुसार रचून हे पडताळून पाहणे सोपे आहे : जर एखाद्या अपूर्णांकांच्या अंशाची आणि छेदांची बेरीज दुसऱ्या अपूर्णांकांच्या अंश छेदांच्या बेरजेहून लहान असेल तर तो अपूर्णांक दुसऱ्या अपूर्णांकाच्याआधी लिहा. जर ही बेरीज सारखी असेल तर ज्याचा अंश लहान असेल तो अपूर्णांक आधी लिहा. ह्यामुळे पुढील मालिका मिळेल :

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ 2,\ \tfrac{1}{3},\ 3,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 4,\ \tfrac{1}{5},\ldots\ldots$$

ही मालिका श्रेढीच आहे. आणि केव्हा ना केव्हा हिच्यात प्रत्येक गुणोत्तर येणारच. म्हणजे आपल्याला सर्व गुणोत्तरे श्रेढीत रचता येतात, आणि म्हणून त्यांची संख्या $\aleph_0$ आहे, असे ठरते.

तरी पण सर्वच अनंत समूहांमध्ये $\aleph_0$ पदे असतात असे मात्र नव्हे. उदाहरणार्थ वास्तव संख्यांची संख्या $\aleph_0$ हून अधिक असते; खरे म्हणजे ती $2^{\aleph_0}$ इतकी असते आणि जेव्हा n अनंत असेल तेव्हाही 2^n ही संख्या n हून मोठी असल्याचे दाखवणे अवघड नाही. हे सिद्ध करण्याचा सर्वांत सोपा मार्ग म्हणजे प्रथम, एखाद्या वर्गात n पदे असतील तर त्याचे एकूण 2^n उपवर्ग (Subclasses) असतात असे दाखवणे. निराळ्या शब्दांत सांगावयाचे तर वेगवेगळ्या प्रकारे त्याचे सदस्य निवडण्याचे (यांत सर्व सदस्य निवडणे किंवा एकही न निवडणे हे दोन्ही टोकांचे प्रकार अंतर्भूत आहेत) एकूण 2^n प्रकार आहेत. आणि दुसरा मार्ग म्हणजे एखाद्या वर्गाच्या उपवर्गांची संख्या त्या वर्गाच्या संख्येहून अधिक असल्याचे दाखवणे. ह्या प्रविधानांपैकी पहिले प्रविधान तर सान्त संख्यांच्या बाबतीत सत्य असल्याचे माहितीच आहे. आणि ते अनंत संख्यानाही लागू करणे अवघड नाही.[१] दुसऱ्याची सिद्धता इतकी सोपी आणि उद्बोधक आहे की ती येथे देणे योग्य होईल.

पृ. ८५

[१] अ. टी. : n अनंत असता हे कसे दाखवणार याचा विचार लेखकाने केला आहे की नाही ते कळत नाही. n अनंत असता 2^n ह्याला नेहमीचा अर्थ देणे शक्य नाही. n संख्या असलेल्या वर्गाच्या उपवर्गांचा प्रधानांक अशी 2^n ची व्याख्याच करतात.

पहिल्या प्रथम, दिलेल्या वर्गाच्या (समजा ∝) उपवर्गांची संख्या निदान त्या वर्गाच्या संख्येइतपत आहे, हे पाहणे सरळ आहे. कारण प्रत्येक सदस्यामुळे एकेक उपवर्ग मिळेल. याप्रमाणे आपल्याला सर्व घटकांचा काही उपवर्गांशी सहसंबंध जोडता येतो. यावरून, जर उपवर्गांची संख्या सदस्यांच्या संख्येशी *समान* नसेल तर ती तिच्याहून *अधिक* असणार हे सिद्ध होते. आता ही संख्या समान नाही हे दाखवणे सोपे आहे. त्याकरता असे दाखवावयाचे की ज्याचा प्रदेश सदस्यांनी बनला आहे आणि व्यस्त प्रदेश उपवर्गांच्या एखाद्या संचात आहे असा कोणताही एक–एक संबंध घेतला तरी त्याच्या व्यस्त प्रदेशात नसेल असा एक तरी उपवर्ग असतोच. सिद्धता अशी[१] : ज्या वेळी ∝ मधील सर्व घटक आणि त्याचे काही उपवर्ग यांच्यामध्ये R हा कोणताही एक, एक–एक सहसंबंध प्रस्थापित केला असेल त्या वेळी एकतर x हा सदस्य दिला असता तो ज्या उपवर्गाशी सहसंबंधित आहे त्याचा सदस्यच असेल; किंवा x हा ज्या उपवर्गाशी सहसंबंधित आहे त्याचा तो सदस्य नसेल. जे सदस्य आपल्या सहसंबंधित उपवर्गाचे घटक नाहीत अशा सर्व x सदस्यांचा β हा एक वर्ग बनवू. हा ∝ चाच एक उपवर्ग असून तो ∝ च्या कोणत्याही सदस्याशी सहसंबंधित नसणार असे दाखवता येते.

कारण प्रथम β चे सदस्य घेतल्यास त्यापैकी प्रत्येक (β च्या व्याख्येनुसार) पद ज्याचा ते सदस्य नाही, अशा कोणत्या तरी उपवर्गाशी सहसंबंधित असणार म्हणून β शी सहसंबंधित नसणार. नंतर β चे सदस्य नसलेली पदे घेतल्यास त्यापैकी प्रत्येक सदस्य. (β च्या व्याख्येनुसार), तो ज्याचा सदस्य आहे अशा एखाद्या उपवर्गाशी सहसंबंधित असणार, म्हणजे पुन्हा β शी सहसंबंधित नसणार. याप्रमाणे ∝ चा कोणताही सदस्य β शी सहसंबंधित राहात नाही. पण सदस्य आणि काही उपवर्ग यांच्यांतील, R हा *कोणताही* एक, एक–एक सहसंबंध होता; त्यामुळे *सर्व* उपवर्गांशी सर्व सदस्यांचा संबंध जोडला जाईल असा एकही सहसंबंध असणार नाही. β मध्ये एकही सदस्य नसला तरीही काही बिघडत नाही. या प्रकारात काय होत असेल तर, जो उपवर्ग वगळल्याचे आपण दाखवत असतो तो रिक्त (Empty, Null) वर्ग असेल इतकेच. म्हणून कसाही विचार केला तरी उपवर्गांची संख्या सदस्यांच्या संख्येइतकी येत नाही; त्यामुळे, पूर्वी म्हटल्याप्रमाणे, सदस्यांच्या संख्येपेक्षा ती संख्या मोठी असणार. सदस्यांची संख्या n असल्यास ही उपवर्गांची संख्या 2^n असते ह्या प्रविधानाबरोबर ह्या विधानाचा विचार करून आपल्याला n ही संख्या अनंत असली तरी 2^n ही संख्या नेहमी n पेक्षा मोठी असते, असे प्रमेय

पृ. ८६

---

[१] ले. टी. : काही सुधारणा करून ही सिद्धता कांटोरकडून घेतलेली आहे : Jahresbericht der deustschen Mathematiker Vereinigung यारेस्बेरिख्ट डेर डॉइट्शेन माटेमाटिकेर फेराइनिगुङ् (जर्मन गणितज्ञ संघाचा वार्षिक वृत्तान्त) i (1892) पृ. ७७ पाहा.

मिळते. अनंत प्रधानांकांमध्ये महत्तम संख्या नसते हे ह्या प्रविधानावरून मिळते. n ही अनंत संख्या कितीही मोठी असली तरी 2^n त्यापेक्षाही आणखी मोठी असते. जोवर आपल्याला अनंत संख्यांचा पुरेसा परिचय होत नाही तोवर त्यांचे अंकगणित काहीसे आश्चर्यकारक वाटते. उदाहरणार्थ आपल्याला असे दिसते की,

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$,

$\aleph_0 + n = \aleph_0$, येथे n ही कोणतीही विगामी संख्या असेल. $\aleph_0^2 = \aleph_0$

(हे गुणोत्तरांच्या उदाहरणावरून मिळते. कारण, गुणोत्तर हे विगामी संख्यांच्या जोडीवरून[1] मिळत असल्याने गुणोत्तरांची संख्या विगामी संख्येच्या वर्गाइतकीच येते म्हणजे $\aleph_0^2$ येते हे पाहणे सोपे आहे. पण आपण पाहिले आहे की ती संख्या $\aleph_0$ इतकीसुद्धा आहेच) $\aleph_0^n = \aleph_0$, येथे n ही कोणतीही विगामी-संख्या आहे. (हे $\aleph_0^2 = \aleph_0$ वरून विगमनाने मिळेल; कारण जर $\aleph_0^n = \aleph_0$ असेल तर $\aleph_0^{n+1} = \aleph_0^2 = \aleph_0$) मात्र, $2^{\aleph_0} > \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}$ ही फार महत्त्वाची संख्या आहे. हे खरे म्हणजे आपण नंतर पाहणारच आहोत. कांटोरने ज्या अर्थाने "सांतत्य" (Continuity) हा शब्द वापरला आहे त्या अर्थाने जिला सांतत्य आहे अशा— मालिकेच्या पदांची ती संख्या आहे. ह्या अर्थाने अवकाश आणि काल हेही संतत आहेत असे मानल्यास (तसे बहुधा आपण वैश्लेषिक भूमिती (Analytical Geometry) आणि गतिशास्त्र (Kinematics) यांमध्ये करतोच) ही संख्या म्हणजे अवकाशातील बिंदूंची किंवा काळातील क्षणांची संख्या

पृ. ८७ ठरेल; ही संख्या म्हणजे, अवकाशाच्या कोणत्याही सान्त भागातील बिंदूंचीसुद्धा संख्या होईल. असा भाग म्हणजे एखादी रेषा किंवा क्षेत्र किंवा घन भाग असेल.

अनंत प्रधानांकांमध्ये बेरीज व गुणाकार जरी नेहमीच शक्य असले तरी वजाबाकी आणि भागाकार यांच्यामुळे नेहमीच निश्चित उत्तरे मिळतात असे नाही; आणि त्यामुळे त्यांचा उपयोग प्राथमिक गणिताप्रमाणे करता येणार नाही. प्रारंभीचे उदाहरण म्हणून वजाबाकी घ्या : वजा करावयाची संख्या जोवर सान्त आहे तोवर सर्व ठीक चालेल; जर दुसरी संख्या आत्मक्षेपी असेल तर उत्तर बदलत नाही. म्हणजे जोवर n सान्त आहे तोवर $\aleph_0 - n = \aleph_0$. इथपर्यंत वजाबाकीपासून निश्चित असे उत्तर मिळते. पण $\aleph_0$ मधून $\aleph_0$ च वजा केल्यास निराळीच परिस्थिती उद्भवते; मग आपल्याला 0 पासून $\aleph_0$ पर्यंत कोणतेही उत्तर मिळू शकेल. हे उदाहरणांवरून सहज दिसेल. विगामी संख्यांच्या संग्रहामधून $\aleph_0$ पदे असलेले खालील संग्रह काढून घ्या.

---

[1] अ. टी. : क्रमित Ordered.

(१) सर्व विगामी संख्या— बाकी, काहीही नाही.

(२) n पासून सर्व विगामी संख्या— बाकी, 0 ते $n - 1$ पर्यंतच्या संख्या- एकूण n.

(३) सर्व विषम संख्या— बाकी सर्व समसंख्या, एकूण $\aleph_0$.

हे सर्व $\aleph_0$ मधून $\aleph_0$ वजा करण्याचे प्रकार आहेत, आणि ह्या सर्वांत निर-निराळी उत्तरे येतात असे दिसते.

भागाकाराच्या दृष्टीने पाहता $\aleph_0$ ला 2 किंवा 3 ने किंवा कोणतीही सान्त संख्या n ने किंवा $\aleph_0$ ने गुणल्यास उत्तर $\aleph_0$ येते. ह्यावरून असे दिसते की $\aleph_0$ ला $\aleph_0$ ने भागल्यास 1 ते $\aleph_0$ पर्यंत कोणतेही उत्तर येऊ शकेल.

वजाबाकी आणि भागाकार यांतील संदिग्धतेमुळे असे दिसते की, ऋण संख्या आणि गुणोत्तरे यांचा विचार अनंत संख्यांच्या विषयात करता येणार नाही. बेरीज, वजाबाकी व घातकरण समाधानकारकपणे मिळू शकतात, पण व्यस्त क्रिया— वजाबाकी, भागाकार आणि मूलकरण ह्या क्रिया— संदिग्ध आहेत आणि त्यामुळे अनन्त संख्यांचा विचार करताना त्या क्रियांवर अवलंबून असलेल्या कल्पना कोसळून पडतात.

सान्तत्वाची (Finitude) व्याख्या करताना योजलेला लक्षणधर्म म्हणजे गणिती विगमन, म्हणजे 0 पासून आरंभ होणारे गणिती विगमन पाळणाऱ्या संख्येला आपण सान्त संख्या म्हटले. तसेच, ज्यावेळी एखाद्या वर्गाची संख्या सान्त असेल त्या वेळी त्याला सान्त वर्ग म्हटले. एखाद्या व्याख्येमुळे, होणारा अपेक्षित परिणाम
पृ. ८८ ह्या व्याख्येमुळे होतो. सर्वसामान्य संख्या–मालिकेत येणाऱ्या 0, 1 2, …… ह्या सान्त संख्या होत. पण प्रस्तुतच्या प्रकरणात ज्यांचे विवेचन केले आहे त्या संख्या अविगामी (Non–inductive) आहेत. इतकेच नव्हे तर त्या संख्या आत्मक्षेपी (Reflexive) सुद्धा आहेत. कांटोरने आत्मक्षेपणाचा उपयोग अनन्तांची व्याख्याच करण्यासाठी केला. आत्मक्षेपित्व हे अविगामित्वाशी समानार्थी आहे असा त्याचा विश्वास होता; म्हणजे असे की, कोणताही वर्ग आणि कोणताही प्रधानांक एक तर विगामी असतो किंवा आत्मक्षेपी असतो. हे विधान सत्य आहे, आणि त्याची सिद्धता देणेही शक्य आहे. परंतु कांटोरने आणि इतर लेखकांनी (एके काळी प्रस्तुत लेखकाचाही यांत अंतर्भाव होता) मांडलेल्या सिद्धता तर्कदुष्ट आहेत. जेव्हा आपण "गुणन-सिद्धान्ताचा (Multiplicative axiom)" विचार करू तेव्हा याचे कारण पाहू.

विगामीही नाहीत आणि आत्मक्षेपीही नाहीत अशाप्रकारचे वर्ग किंवा प्रधानांक आहेत किंवा नाहीत हे अजून माहिती नाही. जर n हा असा एखादा प्रधानांक

असेल तर आपल्याला $n = n + 1$ मिळणार नाही. पण मग n ही "स्वाभाविक संख्या" सुद्धा असणार नाही, आणि n जवळ एका तरी विगामी गुणधर्माची उणीव असेल. *ज्ञात* असे सर्व अनन्त वर्ग आणि प्रधानांक हे आत्मक्षेपी आहेत. पण तूर्त आपले मन खुले ठेवणे चांगले –, जे आत्मक्षेपीही नाहीत आणि विगामीही नाहीत अशा वर्गांची आणि प्रधानांकांची, आजवर अज्ञात असलेली, अशी उदाहरणे कदाचित मिळूही शकतील. तोवर आपण पुढील व्याख्या स्वीकारू —

जो *विगामी* असेल तो वर्ग, किंवा प्रधानांक सान्त होय.

जो *विगामी* *नसेल* तो वर्ग किंवा प्रधानांक अनन्त होय. सर्व आत्मक्षेपी वर्ग आणि प्रधानांक हे अनन्त असतात; पण सगळेच अनन्त वर्ग किंवा प्रधानांक आत्मक्षेपी आहेत किंवा कसे हे सध्या माहिती नाही. ह्या विषयाकडे, आपण पुन्हा प्रकरण १२ मध्ये वळू.

□ □

प्रकरण ९

अनंत मालिका आणि क्रमिक संख्या

ज्या मालिकेचे क्षेत्र अनन्त वर्ग असते अशी मालिका म्हणजे " अनन्त मालिका " होय, अशी व्याख्या करता येईल. एका प्रकारच्या अनन्त मालिकेचा, म्हणजे श्रेढींचा (Progression) विचार आपण पूर्वीच केला आहे. ह्या प्रकरणात, ह्या विषयाचा विचार आपण अधिक व्यापकतेने करणार आहोत.

पृ. ८९

अनन्त मालिकांचे ध्यानात येण्यासारखे एक अत्यंत महत्त्वाचे लक्षण असे की केवळ तिच्या पदांच्या क्रमात बदल केल्यास तिचा मालिका-अंक बदलतो. ह्या दृष्टीने पाहता प्रधानांक आणि मालिका-अंक ह्यांत काही विरोध आहे. आत्मक्षेपी वर्गामध्ये काही पदांची भर घालूनसुद्धा त्याच्या प्रधानांकात बदल न होणे शक्य असते; तर दुसरीकडे मालिकेत पदांची भर न घालता किंवा पदे कमी न करता पदांची केवळ पुनर्रचना करूनसुद्धा तिचा मालिका-अंक बदलू शकतो. पण त्याचवेळी कोणत्याही अनन्त मालिकेच्या बाबतीत प्रधानांकांप्रमाणे, मालिका-अंक न बदलता तिच्यात काही पदांची भर घालता येते. कोणत्या पद्धतीने ही भर घातली आहे ह्यावर सर्व काही अवलंबून असते.

सर्व विवेचन स्पष्ट होण्याकरता, उदाहरणांनी सुरवात करणे सर्वोत्तम. प्रथम विविध हेतू मनात बाळगून, त्याप्रमाणे रचना करून, विगामी संख्यांपासून मिळणाऱ्या अनेक भिन्न भिन्न प्रकारच्या मालिकांचा विचार करू. 1, 2, 3, 4,..., n,......, ह्या मालिकेपासून आपण आरंभ करू. ह्या मालिकेचा मालिका–अंक लघुतम अनंत संख्या असल्याचे आपण पाहिले आहे. ह्याला कांटोर ω म्हणतो. हिच्यातील प्रत्येक सम अंक क्रमाक्रमाने काढून, तो शेवटी लिहून ती विरळ करू या. आपल्याला क्रमशः पुढील मालिका मिळतात :

पृ.९०

1, 3, 4, 5, ..., n, ..., 2

1, 3, 5, 6......, n + 1 ... ... 2, 4

1, 3, 5, 7 ...... n + 2 ... ... 2, 4, 6

इत्यादी. जर ही प्रक्रिया जेवढ्या वेळा अमलात आणणे शक्य आहे तेवढ्या वेळा

अमलात आणली आहे अशी कल्पना केली तर आपल्याला सरते शेवटी,

$1, 3, 5, 7, \ldots\ldots 2n+1, \ldots\ldots 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots 2n, \ldots$

ही मालिका मिळते. हिच्यामध्ये प्रथम सर्व विषम अंक येतात आणि नंतर सम अंक येतात.

ह्या विविध मालिकांचे मालिका-अंक क्रमशः $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$ ... 2ω असे आहेत. यातील प्रत्येक अंक पूर्वीच्या अंकापेक्षा खालील अर्थाने "मोठा" आहे--

ज्या वेळी एक मालिका–अंक असणाऱ्या मालिकेत दुसरा मालिका– अंक– असणाऱ्या मालिकेचा अंश अंतर्भूत असेल (पण दुसरा मालिका–अंक असणाऱ्या कोणत्याही मालिकेत पहिला मालिका–अंक असणाऱ्या मालिकेचा अंश अंतर्भूत नसेल) त्या वेळी पहिला दुसऱ्याहून मोठा आहे असे म्हणतात.

जर आपण

$1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$

$1, 3, 4, \ldots\ldots n+1 \ldots\ldots 2,$

ह्या मालिकांची तुलना केली तर आपल्याला असे दिसते की पहिली दुसऱ्याच्या एका भागाशी, म्हणजे 2 वगळून मिळणाऱ्या भागाशी सदृश आहे. पण दुसरी पहिल्याच्या कोणत्याही भागाशी सदृश नाही. (हे उघड आहे. पण सहज दाखवताही येईल.) तेव्हा व्याख्येनुसार दुसऱ्या मालिकेचा मालिका–अंक पहिल्यापेक्षा मोठा आहे. म्हणजे $\omega+1$, ω हून मोठा आहे. पण एखादे पद आपण श्रेढीच्या शेवटी घालण्याऐवजी तिच्या आरंभी घातले तर आपल्याला पुन्हा श्रेढीच मिळते. म्हणजे $1+\omega=\omega$ म्हणजेच $1+\omega$ हा $\omega+1$ इतका नसतो. सर्वसाधारणतः संबंध– गणिताचे हे व्यवच्छेदक लक्षण आहे. जर μ आणि ν हे संबंधांक असतील तर सामान्यतः $\mu+\nu$, $\nu+\mu$ इतका नसतो. सान्त क्रमिक संख्यांच्या (Ordinals) बाबतीत, म्हणजे जेथे अशी समानता उद्‌भवत असेल, तेथे ती अपवादभूतच आहे.

आता, सरतेशेवटी आपल्याला मिळालेली मालिका प्रथम सर्व विषम संख्यांची आणि मग सर्व सम संख्याची बनवलेली होती, आणि तिचा मालिका–अंक 2ω होता. हा अंक ω किंवा $\omega+n$ पेक्षा मोठा आहे; येथे n एक
पृ. ९१ सान्त संख्या आहे. क्रमाच्या सर्वसाधारण व्याख्येनुसार, पूर्णांकाच्या रचनेतील प्रत्येक रचना निश्चित अशा एखाद्या संबंधामुळे मिळाली आहे असे मानले पाहिजे. हे पाहणे महत्त्वाचे आहे. उदा. जिच्यात केवळ 2 ही संख्या शेवटी टाकलेली आहे ती रचना पुढील संबंधाच्या साह्याने व्याख्यात करता येईल :– "x आणि y हे सान्त पूर्णांक आहेत. एक तर y, 2 असेल आणि x, 2

नसेल; किंवा कोणीच 2 नसेल आणि x, y पेक्षा लहान असेल." जिच्यात सर्व विषम संख्या प्रथम आणि नंतर सर्व सम संख्या येतात तिची व्याख्या अशी करता येईल : "x आणि y सान्त पूर्णांक असून, एक तर x विषम आणि y सम असेल किंवा x, y पेक्षा लहान असून दोन्ही विषम असतील किंवा दोन्ही सम असतील." यापुढे आपण ही सूत्रे देत बसण्याचा त्रास घेणार नाही. पण ती *देता* येतात हीच बाब महत्त्वाची आहे.

ज्या संख्येला आपण 2ω म्हटले आहे तिला म्हणजे जिच्यात दोन श्रेढी आहेत अशा मालिकेच्या संख्येला कधीकधी $\omega 2$ सुद्धा[1] म्हणतात. बेरजेप्रमाणेच गुणाकारसुद्धा, गुणकांच्या क्रमावर अवलंबून असतो. जोड्यांच्या श्रेढीमुळे खालील प्रकारची मालिका मिळेल.

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots\ldots; x_n, y_n \ldots\ldots,$

ही स्वतः पुन्हा श्रेढीच आहे, पण श्रेढीच्या जोडीमुळे मिळणारी मालिका श्रेढीच्या दुप्पट लांबीची असते. म्हणून 2ω आणि $\omega \cdot 2$ यांच्यात भेद करणे आवश्यक ठरते. यांच्या वापरामध्ये विविधता आहे; आपण श्रेढींच्या जोडीकरता 2ω वापरू आणि जोड्यांच्या श्रेढीकरता $\omega \cdot 2$ वापरू; हा आपला संकेत, α, β हे संबंधांक असता "$\alpha . \beta$"ला द्यावयाच्या सर्वसाधारण अर्थाकरताही लागू पडतो; "$\alpha \cdot \beta$"चा अर्थ प्रत्येकी β पदे असणाऱ्या एकूण α संबंधांची सोईस्करपणे केलेली बेरीज, असा केला पाहिजे. विगामी संख्या विरळ करण्याची प्रक्रिया आपण वाटेल तितक्या वेळा करू शकतो. उदाहरणार्थ, आपण प्रथम विषम अंक मांडू नंतर त्यांच्या दुप्पटी मांडू, मग त्यांच्या दुप्टी, इत्यादी. मग आपल्याला,

1, 3, 5, 7,……; 2, 6, 10, 14……; 4, 12, 20, 24,……; 8, 24, 40, 56,……;

ही मालिका मिळेल. तिची संख्या ω^2 येईल कारण ती श्रेढींची श्रेढी आहे. ह्या नव्या मालिकेतील कोणतीही श्रेढी, अर्थातच पूर्वीच्या श्रेढींप्रमाणेच

पृ. ९२ विरळ करता येईल; मग याप्रमाणे आपण $\omega^3, \omega^4, \ldots, \omega^{\omega} \ldots$ इ. पाहिजे तितके लांब जाऊ शकू; आणि कितीही पुढे गेलो तरी आणखी पुढे जाणेही शक्य राहील.

ह्या प्रकारे मिळणाऱ्या, म्हणजे श्रेढी विरळ करून मिळणाऱ्या सर्व क्रमिक संख्यांची (Ordinals) मालिका ही श्रेढीची पुनर्रचना करून मिळणाऱ्या कोणत्याही

---

[1] प्रचलित गणितात $\omega 2$ असेच म्हणतात. 2ω चा अर्थ $2 \times \omega$ असून त्याचे उत्तर ω असे येते. P. R. Halmos चे Naive Set theory – Van Nostrand – Section 19 & 21 पाहा.

मालिकेपेक्षा लांब असते. (हे सिद्ध करणे अवघड नाही.) अशा क्रमिक संख्यांच्या वर्गाचा प्रधानांक $\aleph_0$ हून मोठा दाखवता येईल; ह्याच संख्येला कांटोर $\aleph_1$, म्हणतो. एखाद्या $\aleph_0$ पासून बनवता येणाऱ्या सर्व क्रमिक संख्यांच्या मालिकेच्या क्रमिक संख्येला ω_1 म्हणतात. म्हणजे ज्या मालिकेची क्रमिक संख्या ω_1 आहे त्याच्या क्षेत्राचा प्रधानांक $\aleph_1$ आहे.

ज्या पद्धतीने आपण ω आणि $\aleph_0$ पासून ω_1 आणि $\aleph_1$ पर्यंत गेलो, नेमक्या त्याच पद्धतीने ω_1 आणि $\aleph_1$ पासून आपण ω_2 आणि $\aleph_2$ पर्यंत जाऊ शकू. आणि ह्या प्रकारे अनंत वेळा करून, नवीन क्रमिक संख्या आणि नवीन प्रधानांक मिळवण्यास आपल्याला कसलीच अडचण येत नाही. $2^{\aleph_0}$ हा अलेफांच्या मालिकेतील एखाद्या प्रधानांकाइतका आहे किंवा नाही हे माहिती नाही. महत्तेच्या दृष्टीने त्याची यांच्याशी तुलना करता येईल किंवा नाही हे सुद्धा माहिती नाही; याचे कारण माहिती असो, नसो; तो अलेफांपैकी कोणाच्याही बरोबर किंवा मोठा किंवा लहान नसू शकेल. हा प्रश्न गुणनसिद्धांताशी संलग्न आहे, त्याचा विचार आपण नंतर करू.

येथवर ह्या प्रकरणात आपण ज्या मालिकांचा विचार केला त्या सर्व, ज्यांना "सुक्रमित (Well-ordered)" म्हणतात तशा मालिका होत्या. सुक्रमित मालिका म्हणजे जिला आरंभ असतो, एकापाठोपाठ एक अशी पदे असतात, आणि पदांची कशीही निवड केली तरी नंतरचे असे पद असतेच (अर्थात निवडलेल्या पदानंतर काहीतरी पदे असावीत,) अशी मालिका होय. एकीकडे ह्यांत दृढ (Compact) मालिका म्हणजे जिच्यात कोणत्याही दोन पदांमध्ये आणखी काही पदे असतात अशा प्रकारच्या मालिका अंतर्भूत होत नाहीत, तर दुसरीकडे, ज्यांना आरंभ नाही किंवा ज्यांना आरंभ नसलेले उपविभाग आहेत, अशाही मालिकांचा अंतर्भाव होत नाही. जिला आरंभ नाही पण जी -1 शी जी संपते, ती ऋण पूर्णांकांची मालिका महत्तेच्या क्रमाला अनुलक्षून सुक्रमित नाही; पण व्यस्त क्रमाने घेतल्यास, -1 पासून आरंभ होणारी मालिका सुक्रमित आहे, खरे म्हणजे ती एक श्रेढीच (Progression) आहे. सुक्रमित मालिकेची व्याख्या अशी :

> ज्या मालिकेच्या कोणत्याही उपवर्गामध्ये (अर्थात रिक्त वर्ग वगळून) पहिले पद असते तिला "सुक्रमित" मालिका म्हणतात.
>
> **पृ. ९३** "क्रमिक" संख्या म्हणजे सुक्रमित मालिकेचा संबंधांक होय.

सुक्रमित मालिकांना गणिती विगमनाचे व्यापक रूप लागू पडते. ज्या वेळी एखादा धर्म निवडलेल्या काही पदांकडे असल्यास तो त्यांच्या लगतच्या अनुचराकडेही — तसा अनुचर असल्यास— असेल त्या वेळी तो धर्म "सान्तातीतपणे आनुवंशिक (Transfinitely hereditary)" आहे असे म्हणतात. सुक्रमित मालिकांमध्ये

सान्तातीत आनुवंशिक धर्म पहिल्या पदाजवळ असेल तर तो धर्म त्या संपूर्ण मालिकेजवळच असतो. ह्यामुळे, इतर मालिकांसंबंधी सत्य नसणारी अशी, कित्येक प्रविधाने सुक्रमित मालिकांच्या संबंधात सिद्ध करणे शक्य होते.

सुक्रमित नसेल अशा मालिकेत किंवा दृढ मालिकेतही, विगामी संख्या रचणे सोपे आहे. उदाहरणार्थ, आपण पुढील योजना करू : ·1 पासून 1 पर्यंतच्या, ·1 धरून व 1 सोडून, दशांश रूपातील संख्यांची महत्तेच्या क्रमाने केलेली रचना घ्या. ही दृढ श्रेणी आहे : कोणत्याही दोहोंमध्ये इतर असंख्य संख्या आहेत. आता प्रत्येकीच्या आरंभीचा दशमान-बिंदू वगळा मग सर्व सान्त पूर्णांकांची दृढ मालिका मिळेल. यात फक्त 10 ने भाग जाणारे पूर्णांक येणार नाहीत. जर याचाही अंतर्भाव करण्याची इच्छा असेल तर ते फारसे अवघड नाही; ·1 पासून आरंभ करण्याऐवजी आपण 1 हून लहान असणाऱ्या सर्व दशांश अपूर्णांकांचा अंतर्भाव करू पण मग दशांश बिंदू काढल्यावर आरंभी जेवढी शून्ये असतील तेवढी शेवटी टाकू.

ह्या संख्या वगळून आणि ज्यांच्या आरंभी शून्य नाही अशा दशांश अपूर्णांकाकडे वळून ह्या संख्यांच्या रचनेचा नियम आपण पुढीलप्रमाणे मांडू : ज्या दोन पूर्णांकांची सुरुवात एकाच आकड्याने होत नसेल त्यापैकी ज्याची सुरुवात लहान आकड्याने होईल तो प्रथम येईल. ज्यांचा आरंभ त्याच आकड्याने होतो पण ज्यांच्यातील दुसरे आकडे भिन्न आहेत त्यांपैकी दुसरा अंक लहान असणारा आधी येईल. पण त्यातही ज्यात दुसरा आकडाच नाही तो सर्वात आधी येईल; इ. सामान्यतः जे पूर्णांक पहिल्या n अंकांपर्यंत जुळतात पण (n + 1) व्या अंकाशी जुळत नाहीत, त्यांतील ज्याला (n + 1) वा अंकच नाही तो किंवा ज्याचा (n + 1) वा अंक लहान आहे तो, अंक प्रथम येईल. रचनेच्या ह्या नियमामुळे 10 ने भाग न जाणाऱ्या सर्व पूर्णांकांची एक दृढ मालिका मिळते. आणि आपण पाहिल्याप्रमाणे 10 ने भाग जाणाऱ्या पूर्णांकांचा अंतर्भाव करणे फारसे अवघड नाहीच. (वाचकांना हे स्वतःशीच ताडून पाहणे सोपे आहे.) ह्या उदाहरणावरून असे दिसते की जिच्यात $\aleph_0$ पदे आहेत अशी दृढ मालिका रचणे शक्य आहे. खरे तर गुणोत्तरे $\aleph_0$ आहेत आणि महत्तेच्या क्रमाने त्यांची दृढमालिका होते हे आपण पूर्वीच पाहिले आहे. इथे आपल्याला आणखी एक उदाहरण मिळाले. आपण ह्या विषयाकडे पुढच्या प्रकरणात पुन्हा वळू.

पृ. ९४

बेरीज, गुणाकारांसंबंधीचे नेहमीचे सर्व नियम सान्तातीत प्रधानांकांकडून पाळले जातात. पण सान्तातीत क्रमिक संख्यांकडून मात्र त्यातील काही नियमच पाळले जातात. आणि ते नियम संबंधांकाकडूनही पाळले जातात. “ नेहमीचे नियम ” म्हणजे :—

१. क्रमनिरपेक्षता (Commutative) नियम :

$\alpha+\beta=\beta+\alpha$ आणि $\alpha\times\beta=\beta\times\alpha$.

२. साहचर्य (Associative) नियम :

$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ आणि $(\alpha\times\beta)\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$

३. वितरण (Distributive) नियम :

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$

ज्या वेळी क्रमनिरपेक्षता नियम पाळला जात नसेल त्या वेळी वितरण नियमाचे वरील रूप—

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

ह्या रूपापासून भिन्न मानले पाहिजे.

यातील एक सत्य असेल तर दुसरा असत्य असेल हे आपण आता लागलीच पाहणार आहोत.

४. घातकरणाचे (Exponentiation) नियम :

$$\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma},\ \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma},\ (\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}.$$

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

हे सर्व नियम सान्त आणि सान्तातीत अशा दोन्ही प्रधानांकांकडून आणि सान्त क्रमिक संख्यांकडून पाळले जातात पण ज्यावेळी आपण अनंत क्रमिक संख्यांकडे वळतो किंवा सर्वसाधारणपणे बोलावयाचे तर, संबंधांकांकडे वळतो, त्यावेळी त्यांतील काही नियम टिकतात तर काही टिकत नाहीत. क्रमनिरपेक्षता नियम
पृ. ९५ सत्य राहात नाही; साहचर्य नियम सत्य राहतो; वितरण नियम (गुणाकारातील गुणकांच्या क्रमाविषयी आपण वर स्वीकारलेला संकेत स्वीकारल्यास) पुढील रूपात सत्य राहतो.

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$$

पण, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ ह्या रूपात सत्य राहात नाही.

घातकरणाचे—

$$\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma} \text{ आणि } (\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\gamma}.$$

हे नियम सत्य राहातात. पण

$$\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma}=(\alpha\beta)^{\gamma}$$

हा सत्य राहात नाही.

गुणाकार आणि घातकरण यांच्या ज्या व्याख्या वरील प्रविधानांत अंतर्भूत आहेत त्या काहीशा गुंतागुंतीच्या आहेत. ह्या व्याख्या काय आणि कशा आहेत हे ज्या वाचकांना जाणून घ्यायची इच्छा असेल त्यांनी Principia Mathematica दुसरा खंड *१७२–१७६ पाहावेत.

क्रमिक संख्यांचे सान्तातीत अंकगणित, कांटोरने प्रधानांकांच्या सान्तातीत गणिताच्या पूर्वीच विकसित केले. कारण त्याचे अनेक तांत्रिक गणिती उपयोग आहेत. त्यामुळेच तो आधी त्यांच्याकडे वळला. परंतु गणिताच्या तत्त्वज्ञानाच्या दृष्टिकोणातून ते सान्त प्रधानाकांच्या मीमांसेपेक्षा कमी महत्त्वाचे आणि कमी मूलभूत आहेत. प्रधानांक हे क्रमिक संख्यांपेक्षा केव्हाही सोपे आहेत. पण ते क्रमिक संख्यांचे अमूर्त रूप म्हणून प्रकट व्हावेत व नंतर क्रमशः स्वतंत्रपणे अभ्यासले जावेत हा एक विचित्र ऐतिहासिक अपवात आहे. हे फ्रेगेच्या कार्याला लागू नाही. त्यात सान्त आणि अनंत प्रधानांकांचा अभ्यास, क्रमिक संख्यांपासून पूर्णतः स्वतंत्रपणे झालेला आहे; मात्र जगाला ह्या विषयाची जाणीव कांटोरच्याच कामामुळे झाली, आणि फ्रेगेचे कार्य बहुंशी अज्ञातच राहिले. बहुधा त्याच्या प्रतीक पद्धतीतील अवघडपणामुळे तसे झाले असावे. आणि नेहमीच्या व्यवहाराशी संबंधित अशा अधिक क्लिष्ट गोष्टी करण्यापेक्षा तौलनिक दृष्ट्या
पृ. ९६ तर्कतः अधिक "सुकर" अशा गोष्टी समजावून घेणे आणि
वापरणे इतर लोकांप्रमाणेच गणितज्ञांनाही अधिक अवघड जात असावे. याच कारणामुळे गणिती तत्त्वज्ञानामध्ये प्रधानांकांचे खरे महत्त्व फार सावकाश ओळखले गेले. क्रमिक संख्यांचे महत्त्व केव्हाही कमी नसले तरी प्रधानांकांपेक्षा निश्चित कमी आहे. आणि अधिक व्यापक अशा संबंधांकाच्या कल्पनेतच ते पूर्णतः अंतर्भूत झाले आहे.

◻ ◻

प्रकरण १०

मर्यादा आणि सान्तत्य

"मर्यादा" ह्या संकल्पनेचे महत्त्व गणितात, वाटते त्यापेक्षा कितीतरी अधिक असल्याचे नेहमी आढळून आले आहे. संपूर्ण अवकलन (Differential calculus) आणि संकलन (Integral calculus), आणि खरे तर उच्च गणितातील सर्व गोष्टी, मर्यादा ह्या कल्पनेवर अवलंबून आहेत. पूर्वी असे समजले जात असे की, ह्या विषयांच्या आधाराकरता शून्यलब्धींची (Infinitesimals) गरज आहे, पण वाइयरस्ट्रासने (Weierstrass) हे चुकीचे असल्याचे दाखवून दिले; जिथे जिथे शून्यलब्धी लागत असल्याचे समजले जात असे तेथे खरोखर काही येत असेल तर
पृ. ९७ ज्यांची निम्न (Lower) मर्यादा शून्य आहे अशा राशींचा (Quantity) सान्त संचच होय.[1] "मर्यादा" म्हणजे एखादी राशीरूप बाब समजली जात असे आणि इतर राशींबद्दल पुढील समजूत होती : त्या राशी मर्यादेच्या इतक्या जवळजवळ जात आहेत की त्यांपैकी काहींचे तिच्यापासूनचे अंतर पूर्वदत्त अशा कोणत्याही राशीहून कमी होऊ शकेल. पण खरे म्हणजे "मर्यादेची" संकल्पना ही शुद्ध क्रमिक आहे. त्यात कोणत्याही राशींचा संबंध नाही (अपवाद म्हणजे संबंधित मालिका, राशींची बनलेली असेल तेव्हा उद्‌भवतो.) रेषेवरील दिलेला बिंदू म्हणजे त्या रेषेवरील काही बिंदूंच्या संचाची मर्यादा असू शकेल, पण त्यासाठी सहगुणक किंवा काही मापे, किंवा राशीमय असे काहीही आणण्याची गरज पडत नाही. $\aleph_0$ हा प्रधानांक म्हणजे 1,2,3,...... n, ... ह्या प्रधानांकांची (महत्तेच्या क्रमानुसार) मर्यादा आहे; जरी $\aleph_0$ आणि कोणताही सान्त प्रधानांक यांच्यातील अंतर स्थिर आणि अनंत असले तरी, राशींच्या दृष्टीने पाहिले तर सान्त संख्या वाढत गेल्यावरही $\aleph_0$ च्या मुळीच जवळ जात नाहीत. $\aleph_0$ हा सांत संख्यांची मर्यादा कशामुळे होत असेल तर तो त्या मालिकेत त्यांच्यानंतर लागलीच येतो म्हणून. आणि ही बाब तर क्रमिक आहे, राशीरूप नव्हे.

---

[1] अ. टी. : धन संख्यांचा संच सात असता त्यात शून्य ही संख्या असेल तर निम्न मर्यादा शून्य येईल. अन्यथा ती धन संख्या येईल. म्हणून संच अनंत असले पाहिजेत.

"मर्यादा" ह्या संकल्पनेची अधिकाधिक गुंतागुंतीची अशी अनेक रूपे आहेत. सर्वांत सोप्या आणि मूलभूत अशा रूपाची व्याख्या आपण आधी केलीच आहे. ह्या व्याख्येच्या साह्यानेच मर्यादेच्या इतर व्याख्या मांडल्या जातात.

पृ. ९८

पण ज्या व्याख्यांच्यामुळे आपल्याला ही व्याख्या मिळाली त्यांची येथे पुनरुक्ति करू. पण त्या व्याख्यांच्या विषयातील संबंध मालिका-रूपच असला पाहिजे अशी अपेक्षा नसेल अशी, त्यांची अधिक सामान्य रूपे मांडू.

व्याख्या अशा :—

P ह्या संबंधाला अनुलक्षून α ह्या वर्गाचे "लघुतम (Minimum)" घटक म्हणजे α मध्ये असणारे आणि ज्यांच्याशी α मधील कोणत्याही घटकांचा P–संबंध नसेल असे P च्या क्षेत्रातील (असल्यास) घटक– होत.

P ला अनुलक्षून "गुरुतम (Maximum)" म्हणजे P च्या व्यस्ताला अनु-लक्षून मिळणारे लघुतम होत.

α वर्गाच्या "अनुचरां"चे (Successors) लघुतम म्हणजे α चे P या संबंधास अनुलक्षून "अनुक्रमक (Sequents)" होत. आणि α चे "अनुचर" म्हणजे P च्या क्षेत्रातील ज्या सदस्यांशी α आणि P चे क्षेत्र यांतील समाईक घटकांचा P–संबंध असेल, असे घटक होत.

P च्या व्यस्ताला अनुलक्षून असणारे अनुक्रमक म्हणजेच P ला अनुलक्षून "पूर्वक्रमक (Precedents)" होत.

मात्र जर α ला गुरुतम नसेल तर, α च्या P ला अनुलक्षून "उच्च मर्यादा (Upper limits)" म्हणजे अनुक्रमक होत; पण जर α ला गुरुतम असेल तर त्याला उच्च मर्यादा नसतात.

P च्या व्यस्ताला अनुलक्षून असलेल्या उच्च मर्यादा म्हणजे P ला अनुलक्षून असलेल्या "निम्न (Lower)" मर्यादा होत.

ज्या वेळी P जवळ "संलग्नता (Connexity)" धर्म असेल त्या वेळी त्या त्या वर्गाजवळ जास्तीत जास्त एकच गुरुतम, एकच लघुतम, एकच अनुक्रम इ....... असतात. म्हणजे आपल्या व्यवहाराशी संबंधित अशा वर्गाबद्दल आपण एकमेव मर्यादा (The limit) असल्याचे बोलू शकू. (अर्थात अशी मर्यादा असेल तरच.)

ज्या वेळी P हा मालिका संबंध असेल त्या वेळी मर्यादेची वरील व्याख्या पुष्कळच सोपी करता येईल. त्या वेळी आपण प्रथम, वर्गाची "सीमा (Boundary)" म्हणजे त्याच्या मर्यादा किंवा गुरुतम यांची व्याख्या करू शकू. याकरता "खंडा"ची (Segment) संकल्पना वापरणे सर्वांत उत्तम.

α ह्या वर्गातील एका किंवा अनेक सदस्यांशी ज्यांचा P हा संबंध असेल ती सर्व पदे म्हणजे "α ह्या वर्गाने निश्चित केलेला P चा खंड" असे आपण म्हणू. ह्या खंडाचा अर्थ सातव्या प्रकरणात मांडलेल्या पद्धतीने घ्यावा;
पृ. ९९ खरोखर, त्या अर्थाने कोणताही खंड हा *कोणत्या* तरी α ह्या वर्गानेच निश्चित केलेला असतो. जर P हा मालिकारूप असेल तर, α ने निश्चित केलेला खंड, α च्या कोणत्या ना कोणत्या पदाच्या पूर्वी येणाऱ्या अशा सर्व पदांचा बनलेला असतो. जर α मध्ये गुरुतम असेल तर, सदर खंड त्या गुरुतमा-पूर्वी येणाऱ्या सर्व पदांचा होईल. पण जर α ला गुरुतम नसेल तर α चे प्रत्येक पद α च्या कोणत्यातरी पदापूर्वी येईल म्हणून α ने निश्चित केलेल्या खंडात संपूर्ण α चाच अंतर्भाव केला जाईल. उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\ldots$ ह्या संख्या म्हणजे n च्या विविध सान्त किंमती घेऊन मिळणाऱ्या $1 - \dfrac{1}{2^n}$ ह्या प्रकारच्या अपूर्णांकांचा वर्ग घ्या. अपूर्णांकांच्या ह्या मालिकेत गुरुतम नाही; आणि महत्तेच्या क्रमाने घेतलेल्या सर्व अपूर्णांकांच्या मालिकेत तिच्यामुळे मिळणारा खंड म्हणजे सर्व उचित (Proper) अपूर्णांकांचा वर्ग होय हे उघड आहे. किंवा पुनश्च, महतेच्या क्रमाने घेतलेल्या प्रधानांकांतून (सान्त किंवा अनंत) निवडलेल्या अविभाज्य संख्या (मूळ संख्या) घ्या. ह्यात मिळणारा खंड म्हणजे सर्व सान्त पूर्णांकांचा वर्ग होय.

P मालिकारूप आहे असे मानल्यास α ची सीमा म्हणजे ज्याच्या सर्व पूर्वचरांचा वर्ग α ने निश्चित केलेला खंड येईल असे एखादे x हे पद असेल तर ते पद होय.

α चा "गुरुतम" म्हणजे α ची सदस्य असलेली अशी α ची सीमा होय.

α ची "उच्च मर्यादा" म्हणजे α ची सदस्य नसलेली अशी α ची सीमा होय.

जर एखाद्या वर्गाला सीमा नसेल तर त्याला गुरुतमसुद्धा नसतो आणि मर्यादाही नसते. हे "अपरिमेय (Irrational)" डेडकिंट छेद (Cut) च्या संदर्भात घडते. त्यालाच "छिद्र (Gap)" असे म्हणतात.

तेव्हा, P ह्या मालिकेला अनुलक्षून α ह्या पदांच्या संचाची "उच्च मर्यादा" (असल्यास) म्हणजे, सर्व α नंतर येणारे पद x होय. मात्र त्याच्या आधीचे प्रत्येक पद कोणत्यातरी α च्या आधी येत असले पाहिजे.

β ह्या पदांच्या संचाच्या सर्व "उच्च मर्यादा-बिंदूंची (Upper limiting Points)" व्याख्या आपण, β मधून निवडलेल्या पदांच्या संचांच्या उच्च मर्यादा, अशी करू शकतो. अर्थातच आपल्याला उच्च मर्यादा-बिंदू आणि निम्न मर्यादा-बिंदू ह्यांच्यात भेद करावा लागेल. उदाहरणार्थ, आपण जर क्रमिक संख्या पाहिल्या,

$1, 2, 3, \ldots\ldots \omega, \omega+1, \ldots\ldots 2\omega, 2\omega+1, \ldots\ldots 3\omega, \ldots\ldots \omega^2, \ldots\ldots \omega^3, \ldots\ldots$ तर ह्या मालिकेच्या क्षेत्रातील उच्च मर्यादा-बिंदू म्हणजे

ज्यांना लगतचे पूर्वचर नाहीत ते सर्व बिंदू म्हणजेच : $1, \omega,$
पृ. १०० $2\omega, 3\omega \ldots \omega^2, \omega^2+\omega, \ldots\ldots 2\omega^2, \ldots\ldots \omega^3 \ldots\ldots$
इत्यादी. ह्या नव्या मालिकेच्या क्षेत्राचे उच्च सीमा बिंदू म्हणजे, $1, \omega^2, 2\omega^2, \ldots\ldots \omega^3, \omega^3+\omega^2 \ldots\ldots$ इत्यादी. या उलट, क्रमिक संख्यांच्या मालिकेला– आणि अर्थात प्रत्येक सुक्रमित मालिकेला– निम्नमर्यादा बिंदू नसतात, कारण शेवटची पदे वगळता इतर कोणत्याही पदाला लगतचे अनुचर नसतात. पण गुणोत्तरांच्या मालिकेसारख्या मालिकेत प्रत्येक पद म्हणजे उच्च आणि निम्न मर्यादा-बिंदू असतो. जर आपण वास्तव संख्यांचा संच घेतला आणि त्यातून परिमेय वास्तव संख्या निवडल्या तर सर्व वास्तव संख्या, निवडलेल्या संचाच्या (परिमेय संख्यांच्या) उच्च आणि निम्न मर्यादा-बिंदू असतात. संचाच्या मर्यादा-बिंदूंना (बिंदूंच्या संचाला) त्याचे "पहिले साधित (Derivative)" म्हणतात. पहिल्या साधिताच्या मर्यादा-बिंदूंना (संचाला) दुसरे साधित म्हणतात; इ. मर्यादांच्या संदर्भात, ज्याला मालिकांचे "सांतत्य" म्हणतात त्याच्या वेगवेगळ्या श्रेणींमध्ये (Grades) आपण फरक करू शकू. "सांतत्य" हा शब्द बराच काळ वापरात होता, पण डेडकिंट आणि कांटोर ह्यांच्या काळापर्यंत त्याची काटेकोर व्याख्या झालेली नव्हती. ह्या दोघांनीही ह्या संज्ञेची काटेकोर व्याख्या दिली, पण कांटोरची व्याख्या ही डेडकिंटपेक्षा अधिक संकुचित आहे : ज्या मालिकेला कांटोरीय सांतत्य असेल तिला डेडकिंडीय सांतत्यही असते, पण उलट होत नाही.

मालिकेच्या सांतत्याचा अचूक अर्थ शोधणाऱ्या माणसाला स्वाभाविकतःच तिची प्रारंभीची व्याख्या म्हणून "दृढता (Compactness)" असलेली मालिका अशी व्याख्या करावी लागेल; दृढता म्हणजे मालिकेतील कोणत्याही दोन पदांमध्ये आणखी पदे असणे. पण ही व्याख्या गुणोत्तरांसारख्या मालिकेतील छिद्रांमुळे अपुरी ठरेल. पहिल्या विभागात शेवटचे पद नसेल, दुसऱ्या भागात पहिले पद नसेल, आणि पहिली संपूर्णपणे दुसऱ्याच्या आधी येईल, अशा प्रकारे गुणोत्तरांची
पृ. १०१ मालिका विभागण्याचे असंख्य प्रकार आहेत हे, प्रकरण ७ मध्ये
आपण पाहिले आहे. ही परिस्थिती, "सांतत्याचे" लक्षण काय असावे ह्याबद्दल आपल्या ज्या काही अंधुकशा कल्पना आहेत त्यांच्या विरुद्ध असल्याचे दिसते. आणि यापेक्षाही विशेष म्हणजे गणिताच्या बहुतेक कामाच्या दृष्टीने गुणोत्तरां-सारखी मालिका उपयोगी पडत नाही– असेही ह्यावरून दिसते. उदाहरणार्थ, भूमिती घ्या : ज्या वेळी दोन रेषा परस्परांस ओलांडून जातात त्या वेळी त्यांच्यांत एक समाईक बिंदू असावा असे आपल्याला हवे आहे. पण जर रेषेवरील बिंदूंची मालिका गुणोत्तरांच्या मालिकेसदृश असेल तर त्या रेषा परस्परांस एका "छिद्रात" छेदतील आणि मग त्यांच्यात एकही समाईक बिंदू असणार नाही. हे उदाहरण स्थूल झाले असेल; पण

सांतत्याच्या गणिती व्याख्येकरता केवळ दृढता पुरी पडत नाही हे दाखविणारी अनेक उदाहरणे देता येतील.

इतर शाखांप्रमाणे, भूमितीची गरज हीच "डेडकिंडीय" सांतत्याच्या व्याख्येला कारणीभूत ठरली. ज्या मालिकेच्या क्षेत्राच्या प्रत्येक उपवर्गाला मर्यादा आहे ती मालिका डेडकिंडीय होय, अशी व्याख्या केली आहे हे लक्षात घ्यावे. (केवळ उच्च सीमेचे अस्तित्व किंवा केवळ *निम्न* सीमेचे अस्तित्व गृहीत धरणे पुरेसे आहे. यांतील एकीचे अस्तित्व गृहीत धरल्यास दुसरे निगमित करता येईल.) म्हणजेच, ज्या मालिकेत छिद्रे नाहीत ती डेडकिंडीय होय. छिद्रांचा अभाव हा प्रत्येक पदाला अनुचर असल्याने निर्माण होवो वा मर्यादांच्या अस्तित्वामुळे (गुरुतमांच्या अभावातून निर्माण होणाऱ्या) निर्माण होवो. म्हणजे सान्त मालिका किंवा सुक्रमित मालिका तसेच, वास्तव संख्यांची मालिकाही डेडकिंडीय असते. आपली मालिका दृढ आहे हे गृहीत असल्याने पहिल्या प्रकारची (सान्त) मालिका वगळली पाहिजे. मग ज्याला सांतत्य आहे असे अनेक दृष्टींनी चपखल-पणे म्हणता येईल असा धर्म आपल्या मालिकेजवळ राहील. मग आपल्याला पुढील व्याख्या मिळते :

जी मालिका डेडकिंडीय असून दृढ असते तिला "डेडकिंडीय सांतत्य" असते असे म्हणतात.

पण अनेक दृष्टींनी ही व्याख्या अतिव्याप्त आहे. उदाहरणार्थ, ज्यामुळे प्रत्येक बिंदू वास्तवसंख्यात्मक सहनिर्देशकांच्या साह्याने दर्शवता येतील, असे धर्म भौमितिक अवकाशाला देणे शक्य व्हावे अशी आपली इच्छा आहे : केवळ डेडकिंडीय सांतत्याने याची ग्वाही मिळत नाही. जो जो बिंदू *परिमेय* सहनिर्देशकांच्या साह्याने
पृ. १०२ दर्शवता येत नसेल तो प्रत्येक बिंदू ज्यांचे सहनिर्देश *परिमेय* आहेत, अशा बिंदूंच्या *श्रेढींच्या* मर्यादा म्हणून दर्शवता येईल अशी आपली खात्री झाली पाहिजे. हा आणखी एक धर्म आपल्या व्याख्येतून आपल्याला निगमित करता येत नाही.

ह्यामुळे, मर्यादांच्या संदर्भात मालिकांचा अधिक जवळून शोध करण्याकडे आपल्याला वळणे भाग आहे. हा शोध कांटोरने घेतला आणि तोच त्याने केलेल्या सांतत्याच्या व्याख्येचा आधार होता. मात्र ही व्याख्या अगदी साध्या स्वरूपात व्यक्त झालेली असली तरी मूलतः ती ज्या विचारांतून उद्भवली आहे, ते विचार तिच्यामुळे झाकले जातात. त्यामुळे कांटोरची सांतत्याची व्याख्या देण्यापूर्वी, आपण त्याच्या काही कल्पनांचा परामर्श घेऊ.

ज्या संचाचे सर्व बिंदू हे मर्यादा बिंदू आहेत आणि ज्याचे सर्व मर्यादा बिंदू त्या संचात आहेत अशा संचाला कांटोर "परिपूर्ण (Perfect)" म्हणतो. पण त्याला

नेमके काय म्हणावयाचे आहे हे ह्या व्याख्येने स्पष्ट होत नाही. सर्व बिंदू मर्यादा-बिंदू असावेत ह्या धर्माचा विचार केल्यावर त्यात कोणतीही दुरुस्ती करावी लागत नाही, असे दिसते; जर सर्व बिंदू उच्च मर्यादा-बिंदू किंवा निम्न मर्यादा-बिंदू असावयाचे तर हा धर्म फक्त दृढ मालिकांजवळच असतो; इतरांजवळ नसतो. पण जर आपण ते एकाच प्रकारचे मर्यादा-बिंदू आहेत असे गृहीत धरले आणि कोणत्या प्रकारचे ते सांगितले नाही, तर निर्देशित धर्म असलेल्या आणखीही मालिका असू शकतील. उदाहरणार्थ दशांशांच्या ज्या मालिकेत 9 चे आवर्तन होत असेल तो दशांश आणि तत्संबंधित असा, पण थांबणारा असा दशांश ह्यांच्यात भेद करून पहिला दशांश त्याच्या आधी ठेवून मिळणारी मालिका.[1]

ही मालिका जवळ जवळ दृढ असून तिच्यात अपवादादाखल लगतच्या संख्या मिळतात; त्यापैकी पहिलीला लगतचा पूर्वचर नसून दुसरीला लगतचा अनुचर नसतो. ह्या मालिकेव्यतिरिक्त इतर ज्या मालिकेत प्रत्येक बिंदू मर्यादा-बिंदू असतो त्याही दृढच असतात. आणि प्रत्येक बिंदू उच्च मर्यादा-बिंदू असल्याचे (किंवा निम्न मर्यादा-बिंदू असल्याचे) निर्दिष्ट करून दुसरा कोणताही उल्लेख केल्याशिवाय ह्या मालिका दृढ असल्याचे ठरते.

कांटोर जरी स्पष्टपणे विचार करीत नसला तरी ज्या लघुतम उपमालिकांच्या साह्याने मर्यादा-बिंदूची व्याख्या करता येते. त्यांच्या स्वभावानुसार विविध मर्यादा-बिंदूमध्ये आपण भेद केला पाहिजे. कांटोर असे गृहीत धरतो की, त्यांची व्याख्या श्रेढींच्या किंवा प्रतिश्रेढींच्या (Regressions म्हणजे श्रेढीची व्यस्त) साह्याने करता येते. ज्या वेळी आपल्या मालिकेतील प्रत्येक सदस्य एखाद्या श्रेढीची किंवा प्रतिश्रेढीची मर्यादा असेल, त्या वेळी कांटोर आपल्या मालिकेला "आत्मदृढ (Condensed in itself)" म्हणतो. (मूळ जर्मन नाव : Insichdicht इन्झिशूडिख्ट).

आता, ज्याच्या साह्याने परिपूर्णतेची व्याख्या आपल्याला करावयाची होती त्या दुसऱ्या धर्माकडे वळू. ह्या धर्माला कांटोर "बंदिस्त किंवा संवृत" (Closed. जर्मन : Abgeschlossen आब्गेश्लोसेन) असणे असे म्हणतो. आपण पाहिल्याप्रमाणे ही, अपेक्षा म्हणजे मालिकेचे मर्यादा-बिंदू त्या मालिकेतच असावेत असे म्हणण्यासारखे होय. पण जर आपली मालिका ही दुसऱ्या एखाद्या मोठ्या मालिकेत असल्याचे *दिलेले* असेल (उदा. वास्तव संख्यांमधून काही संख्या निवडणे), आणि मर्यादा-बिंदू हे मोठ्या

पृ. १०३

---

[1] अ. टी. : 0·1299 ... ... शी संबंधित दशांश 0·130 ... होय. 0·13 च्या आधी 0·12999...हा आधी लिहावयाचा. ह्या दोन्ही दशांशांमुळे एकच मालिका मिळते.

मालिकेच्या संदर्भात असतील तरच याला काही परिणामकारक असे महत्त्व आहे. नाही-तर जर एखाद्या मालिकेचा विचार केवळ तिच्यापुरताच केला असेल, तर तिचे मर्यादा-बिंदू तिच्यात नाहीत, असे कधी होणारच नाही. कांटोर जे म्हणतो आहे ते त्याला *अभिप्रेत* नाही; खरे तर दुसऱ्या एका प्रसंगी त्याने निराळेच म्हटले आहे, आणि *तेच* खरोखरी त्याला अभिप्रेत आहे. त्याला जे अभिप्रेत आहे ते असे : जिला मर्यादा असावी अशी अपेक्षा असेल अशा प्रत्येक दुय्यम मालिकेला मर्यादा असून ती दिलेल्या मालिकेत असते; म्हणजे ज्या दुय्यम मालिकेला गुरुतम नसेल अशा प्रत्येक मालिकेला मर्यादा असते; म्हणजे प्रत्येक दुय्यम मालिकेला सीमा असते. पण कांटोर हे *प्रत्येक* मालिकेच्या बाबतीत मांडत नाही. तर, फक्त श्रेढी आणि प्रतिश्रेढींच्या बाबतीतच तो हे मांडतो. (ह्या मर्यादेची त्याला कितपत कल्पना होती, हे स्पष्ट नाही.) शेवटी, आपल्याला जी व्याख्या हवी आहे ती पुढीलप्रमाणे :

ज्यावेळी एखाद्या मालिकेतील प्रत्येक श्रेढी आणि प्रतिश्रेढींना मालिकेतच मर्यादा असेल त्या वेळी ती मालिका "संवृत" आहे असे म्हणतात.

त्यानंतर आपल्याला पुढील व्याख्या मिळते:—जी मालिका आत्मदृढ आणि संवृत असते म्हणजे प्रत्येक पद हे एखाद्या श्रेढी किंवा प्रतिश्रेढींची मर्यादा असते आणि मालिकेतील प्रत्येक श्रेढी आणि प्रतिश्रेढीला मालिकेत मर्यादा असते तिला "परिपूर्ण" म्हणतात.

सांतत्याच्या व्याख्येचा शोध घेत असता कांटोरच्या मनात अशी व्याख्या होती की, जी वास्तव संख्यांच्या मालिकेला किंवा तत्सम कोणत्याही मालिकेला लागू पडेल, पण दुसऱ्या कोणत्याही मालिकेला लागू पडणार नाही. पण हे साधावयाचे असेल तर आपल्याला पुढच्या धर्माची भर घातली पाहिजे वास्तव संख्यांमध्ये काही परिमेय असतात तर काही अपरिमेय असतात. जरी परिमेय संख्यांपेक्षा अपरिमेय संख्या जास्त असल्या, तरी कोणत्याही दोन वास्तव संख्यांमध्ये एकतरी परिमेय संख्या असतेच, मग त्यांमधील फरक कितीही कमी असो. परिमेय संख्यांची संख्या
पृ. १०४ आपण पाहिल्याप्रमाडे $\aleph_0$ असते. ह्याच्यामुळे सांतत्याचे संपूर्ण लक्षण देण्याला पुरेसा असा आणखी एक धर्म आपल्याला मिळतो; तो म्हणजे आपल्या मालिकेत असा एक वर्ग असावा की ज्यात $\aleph_0$ सदस्य असतील आणि मालिकेतील परस्परांच्या कितीही जवळ असणाऱ्या अशा, कोणत्याही दोन पदांमध्ये ह्या वर्गातील सदस्य सापडतील. परिपूर्णतेमध्ये ह्या धर्माची भर घातल्यास, परस्परांशी सदृश असणाऱ्या मालिका मिळतील; त्यामुळे अशा सर्व मालिका मिळून होणाऱ्या वर्गाच्या मालिका-अंकाची व्याख्या करण्यास पुरेशी सामग्री उपलब्ध होईल. हा वर्ग म्हणजेच कांटोरच्या व्याख्येप्रमाणे संतत मालिकांचा वर्ग होय.

त्याची व्याख्या आपण थोडी सोपी करू. आरंभी आपण असे म्हणू :

दिलेल्या मालिकेतील कोणत्याही दोन पदांमध्ये ज्या वर्गातील पदे सापडतील, असा तिच्या क्षेत्राचा एक उपवर्ग, म्हणजे मालिकेचा “ मध्यगत वर्ग (Median Class) ” म्हणू.

म्हणजे परिमेय संख्यांचा संच हा वास्तव संख्यांमधील मध्यगत वर्ग होय. दृढ मालिकांव्यतिरिक्त इतर मालिकांमध्ये मध्यगत वर्ग असणार नाही, हे उघड आहे.

आता कांटोरची व्याख्या पुढील व्याख्येशी समानार्थी असल्याचे आढळून येईल :—

जर मालिका १) डेडकिंडीय असेल २) तिच्यात $\aleph_0$ पदे असणारा एक मध्यगत वर्ग असेल, तर ती “ संतत ” असते.

सांतत्य ह्या शब्दांमुळे होणारा संभ्रम टाळण्याकरता ह्या प्रकारच्या सांतत्याचा उल्लेख आपण “ कांटोरीय सांतत्य ” असा करू. यावरून असे लक्षात येईल की ह्यात डेडकिंडीय सांतत्य अभिप्रेत आहे, पण उलट होऊ शकत नाही. कांटोरीय सांतत्य असलेल्या सर्व मालिका सदृश असतात पण डेडकिंडीय सांतत्य असलेल्या सगळ्या मालिका तशा असतात असे नाही.

मर्यादा आणि *सांतत्य* ह्या ज्या संबोधांच्या व्याख्या आपण करीत आहोत. त्यांचा आणि एखाद्या फलाची, त्याचा पक्ष (Argument) विशिष्ट संख्येप्रत जात असता मिळणाऱ्या मर्यादेचा किंवा एखाद्या संख्येच्या परिसरातील (Neighbourhood), फलाच्या सांतत्याचा, घोटाळा होऊ देऊ नये. हे संबोध अगदी वेगळे आहेत, व अतिशय महत्त्वाचे आहेत. पण ते वरील संबोधांपासून निगमित करता येत असून अधिक क्लिष्ट आहेत. गतीचे सांतत्य (जर गति संतत असेल तर) हे फलाच्या सांतत्याचे एक उदाहरण आहे; दुसरीकडे अवकाशाचे आणि कालाचे सांतत्य (जर ते संतत असतील तर) हे मालिकेच्याच सांतत्याचे उदाहरण आहे; किंवा (अधिक काळजीपूर्वक बोलावयाचे तर) सांतत्याच्या हा प्रकार असा आहे की त्याचे रूपांतर बऱ्याच गणिती आकडेमोडीनंतर मालिकांच्या जातीच्या सांतत्यात करता येईल. प्रयुक्त (Applied) गणितातील ‘ गती ’च्या मूलभूत महत्त्वामुळे तसेच इतरही कारणांमुळे मर्यादा आणि सांतत्य ह्या, फलांना लागू असलेल्या संबोधांचा थोडक्यात परामर्श घेणे योग्य होईल. पण हा विषय स्वतंत्र प्रकरणाकरता राखून ठेवणे सर्वोत्तम.

पृ. १०५

सांतत्याच्या, आपण विचार करीत असलेल्या व्याख्या, म्हणजे डेडकिंड आणि कांटोर यांच्या व्याख्या आणि सामान्य व्यक्ती किंवा तत्त्वज्ञ ह्यांच्या मनात ह्या शब्दांमुळे

निर्माण होणारी स्थूल कल्पना ह्या दोहोंत फारसे साम्य नाही. सांतत्य म्हणजे त्यांना विभक्तपणाचा अभाव असे वाटते, वस्तुवस्तूंमधील फरक नाहीसा करणारे धूसर धुके असे काहीतरी वाटते. धुक्याचा आकार आणि दाटपणा ह्यांच्या विषयी निश्चित काही माहीत नसतानाही ते प्रचंड असल्याचा भास होतो. सांतत्य म्हणजे सत्ताशास्त्रज्ञांना (Metaphysician) असे काहीतरी असावे असे वाटते. आणि त्यामुळे त्यांचे मानसिक वय, मुले किंवा इतर प्राणी यांच्या इतकेच असले पाहिजे, हे स्पष्ट होते.

" सांतत्य " हा शब्द अशा तऱ्हेने वापरून किंवा " प्रवाह (Flux) " हा शब्द वापरून जी काय सामान्य कल्पना उद्‌भवते ती, आपण ज्या कल्पनेची व्याख्या करणार आहोत तिच्यापेक्षा निश्चितच पूर्णपणे वेगळी आहे. उदाहरणार्थ, वास्तवसंख्यांची मालिका घ्या. प्रत्येक संख्या जी काय आहे ती स्पष्ट आणि निसंदिग्ध असते, ती काही एखाद्या अगम्य, अतर्क्य पद्धतीने एकातून दुसऱ्यात गेली असे होत नाही; ती कठोर, स्वतंत्र, पूर्ण, असून तिचे दुसऱ्या कोणत्याही संख्येपासूनचे अंतर, जरी दिलेल्या एखाद्या राशीपेक्षा कमी असले तरी ते सान्त असते. वास्तव संख्यांमध्ये अस्तित्वात असलेले सान्तत्य आणि वर दर्शविलेला प्रकार यांच्यांतील संबंधाचा प्रश्न हा अतिशय कठिण आणि दुर्गम आहे. ह्या दोन कल्पना परस्परसदृश आहेत असे समजून चालू नये. पण ज्या गणिती संकल्पनेचा आपण ह्या पाठात विचार करीत आहोत तिच्यामुळे आपल्याला एक अमूर्त तर्कसंगत पद्धत मिळते, असे समजण्यास हरकत नांही, असे मला वाटते. त्या पद्धतीशी सुयोग्य व्यवहारातून, आनुभविक पदार्थाची सांगड घालणे, जर तो पदार्थ यथार्थतः " संतत " असल्याचे मानता येत असेल तर, शक्य होते.

पृ. १०६ प्रस्तुत ग्रंथाच्या मर्यादेत ह्या मताचे समर्थन करणे सर्वथा अशक्य आहे. ज्यांना इच्छा असेल त्या वाचकांनी, प्रस्तुत लेखकाने, *काळ* ह्या कल्पनेच्या विषयाबद्दल केलेल्या समर्थनाचा प्रयत्न Monist १९१४–१५ मध्ये किंवा Our Knowledge of the External World मध्ये वाचावा. इतकेच सुचवून हा विषय जरी रंजक असला तरी गणिताशी त्याच्यापेक्षा अधिक जवळ असलेल्या इतर विषयांकडे वळण्याकरता, तो सोडून दिला पाहिजे.

□ □

प्रकरण ११

फलांची मर्यादा आणि सान्तत्य

पक्ष (Argument) दिलेल्या संख्येप्रत जात असताना मिळणारी, फलाची मर्यादा (असल्यास) म्हणजे काय त्याचा विचार आपण ह्या
पृ. १०७ प्रकरणात करणार आहोत. तसेच "संतत फल" म्हणजे काय त्याचाही विचार करणार आहोत. ह्या दोन्ही कल्पना काहीशा तांत्रिक असून गणिती तत्त्वज्ञानाच्या परिचयाविषयीच्या पुस्तकात त्यांच्या विवेचनाला फारसे स्थान नाही. पण एका गोष्टीकरता, विशेषतः शून्यलब्धी कलनातून (Infintesimal calculus) आपल्या प्रस्तुत विषयांबद्दल आलेली चुकीची दृष्टी, व्यवसायाने तत्त्वज्ञ असणाऱ्या आपल्या तत्त्वज्ञान्यांच्या मनात इतकी दृढमूल झाली आहे की ती उपटून काढण्याकरता प्रदीर्घ आणि प्रचंड प्रयत्न करावे लागतील. अगदी लाइब्नित्झ (Leibnitz) च्या काळापासून असा समज रूढ झालेला आहे की अवकलन आणि संकलन (Differential and integral calculus) यांच्यामध्ये शून्यलब्धी राशी लागतात. गणितज्ञांनी (विशेषतः वाइयरस्ट्रासने Weierstrass) हे चूक असल्याचे दाखवले आहे, पण एकदा झालेल्या चुका– हेगेलने (Hegel) गणिताविषयी म्हटले आहे त्याप्रमाणे– पक्क्या रुजतात. आणि प्रत्यक्षात तत्त्वज्ञान्यांचा कलही वाइयरस्ट्रास-सारख्या माणसांच्या कार्याकडे दुर्लक्ष करण्याचाच राहिला.

सर्वसाधारण गणितावरील वाङ्मयात, फलांच्या मर्यादा आणि सांतत्याची व्याख्या संख्यांच्या रूपात केलेल्या असतात. डॉ. व्हाइटहेडने (Whitehead) ह्याची आवश्यकता नसल्याचे दाखवले आहे.[१] तरीसुद्धा आपण पाठ्यपुस्तकातील व्याख्यांपासून सुरुवात करून नंतर असे दाखवणार आहोत की, केवळ संख्यात्मक किंवा संख्यांच्या साह्याने मोजता येणाऱ्या मालिकांनाच नव्हेत, तर सामान्य मालिकांनाही लागू पडतील– अशा रीतीने ह्या व्याख्यांचे सामान्यीकरण करता येते.

---

१ ले. टी. : Principia– Mathematica vol. ii *२३०–३४ पाहा.

fx हे कोणतेही गणितातील एक नेहमीचे फल घ्या. येथे x आणि fx ह्या दोन्ही वास्तव संख्या आहेत. आणि fx हे एक–मूल्य फल
पृ. १०८ आहे. म्हणजे x दिला असता fx ला फक्त एकच मूल्य असू शकते. आपण x ला "पक्ष" म्हणून fx ला x ह्या पक्षाकरता असलेले मूल्य म्हणू. फलाच्या सांतत्याची जी यथार्थ व्याख्या आपल्याला हवी आहे त्याची स्थूल कल्पना अशी की x मधील अल्प फरकाशी आनुषंगिक असा, fx मधील फरकही अल्पच असावा आणि जर आपण x मधील फरक पुरेसा लहान केला, तर fx मधील फरक दिलेल्या कोणत्याही किंमतीपेक्षा खाली आणता यावा. फल जर संतत असायला हवे असेल तर त्यात एकदम उड्डाण नसावे. म्हणजे x मधील लहान बदलाच्या आनुषंगिक असा (fx मधील) बदल एखाद्या दिलेल्या सांत संख्येहून जास्त आहे, असे नसावे. गणितातील नेहमीच्या साध्या फलांकडे हा गुणधर्म असतो. उदा. तो x^2, x^3, ..., log x, sin x इ. फलांकडे असतो. पण असंतत फलांची व्याख्या करणेसुद्धा मुळीच कठीण नाही. गणिताबाहेरील एक उदाहरण घ्या : "t ह्या क्षणी वयाने सर्वात लहान असणाऱ्या व्यक्तीचे जन्मस्थळ" हे t चे फल आहे. ह्याचे मूल्य एका व्यक्तीच्या जन्मकालापासून नंतरच्या लगतच्या व्यक्तीच्या जन्मकालापर्यंत कायम असते आणि नंतर *अकस्मात* एका जन्मस्थळापासून दुसरीकडे जाते. गणितातले तसलेच उदाहरण म्हणजे "x लगतचा खालचा पूर्णांक" (x वास्तव संख्या) हे होईल. हे फल एका पूर्णांकापासून नंतरच्या पूर्णांकापर्यंत स्थिर असते आणि मग एकदम उडी घेते. खरी गोष्ट अशी आहे की संतत फले जरी अधिक परिचित असली तरी ती अपवादभूत आहेत : संतत फलांपेक्षा असंतत फले अनेक पटींनी अधिक आहेत.

बरीचशी फले एक किंवा अनेक मूल्यांकरता संतत असतात पण इतर मूल्यांकरता असंतत असतात. उदाहरण म्हणून sin 1/x घ्या. θ ज्या वेळी $-\pi/2$ ते $+\pi/2$ मधील मूल्ये घेत असते, त्या वेळी sin θ हे फल, -1 ते $+1$ मधील सर्व मूल्यांतून जाते. तसेच, $\pi/2$ आणि $3\pi/2$ मधील θ च्या मूल्यांकरताही होते. आणि सामान्यपणे तेच n पूर्णांक असताना θ च्या $(2n-1)\pi/2$ आणि $(2n+1)\pi/2$ मधील मूल्यांकरताही होते. आता आपण 1/x हे फल x खूप लहान असता पाहिले तर आपल्याला असे दिसेल की जसजसा x घटत जाईल 1/x अधिकाधिक वेगाने वाढत जाईल आणि x जसजसा लहान होईल तसतसा 1/x हा $\pi/2$ च्या एका पटीपासून
पृ. १०९ दुसऱ्या पटीपर्यंतच्या चक्रातून अधिक वेगाने जाईल. (परिणामतः x जसजसा लहान होईल तसतसे sin x हे -1 ते 1 आणि पुन्हा -1 ह्यांमधील किंमती अधिक वेगाने घेईल. खरे म्हणजे आपण 0 बिंदू ज्यात अंतर्भूत आहे असा कोणताही अंतराल (Interval) उदा. $-\varepsilon$ ते $+\varepsilon$ घेतला, (ε कोणतीही लहान संख्या) तर त्या अंतरालात sin 1/x ची असंख्य आंदोलने

(Oscillations) होतील, आणि अंतराल अधिक लहान करूनही आपण ही आंदोलने कमी करू शकणार नाही. म्हणजे, 0 ह्या पक्षाच्या आजूबाजूस फल असंतत ठरते पुष्कळ ठिकाणी असंतत असेल किंवा $\aleph_0$ ठिकाणी असंतत असेल किंवा सर्वत्र असंतत असेल. अशी फले रचणे सोपे आहे. याची उदाहरणे वास्तव संख्यांच्या फलांचे विवेचन करणाऱ्या कोणत्याही पुस्तकात सापडतील.

पक्ष आणि मूल्य ही दोन्ही वास्तव संख्या असता दिलेल्या फलाचे, एखाद्या दिलेल्या पक्षाकरता सांतत्य म्हणजे काय याची अचूक व्याख्या करण्यास निघताना प्रथम आपण x च्या "परिसराची (Neighbourhood)" व्याख्या करू. x चा परिसर म्हणजे $x-\varepsilon$ ते $x+\varepsilon$ पर्यंतच्या सर्व संख्या; यात ε ही एक संख्या असून, महत्त्वाच्या प्रसंगी ती अत्यंत लहान असेल. एखाद्या बिंदूपासचे सांतत्य हे त्या बिंदूच्या कितीही लहान अशा परिसरात काय घडते याच्याशी निगडित आहे, हे उघड आहे.

आपली इच्छा अशी आहे : आपले फल ज्या पक्षापाशी सतत असावे असे वाटते असा a हा एक पक्ष असेल तर त्या पक्षाकरता फलाच्या (fa) ह्या मूल्याचा परिसर (समजा α) म्हणजे काय याची प्रथम व्याख्या करूया; आपल्याला असे हवे आहे की जर आपण a चा एखादा पुरेसा लहान परिसर घेतला तर त्या परिसरातील पक्षांकरता मिळणारी सर्व मूल्ये α ह्या परिसरात असतील; मग α आपण कितीही लहान घेतलेला असो. म्हणजे असे : आपण जर निश्चय केला की आपले फल (fa) पेक्षा एखाद्या अगदी छोट्या संख्येहून दूर असू नये, तर आपण वास्तव संख्यांचा असा भाग मिळवू शकू की ज्यांचा a हा मध्य असेल आणि ह्या भागाकरता fx हे fa पेक्षा दिलेल्या छोट्या राशीपेक्षा जास्त अंतरावर असणार नाही आणि आपण कितीही छोटी राशी घेतली तरी हे सत्य राहिल. मग आपल्याला पुढील व्याख्या करावी लागेल :

σ ह्या 0 हून निराळ्या असणाऱ्या कोणत्याही, पण आपल्याला वाटेल तेवढ्या लहान धन संख्येकरता जर ε ही अशी एक धनसंख्या अस्तित्वात
पृ. ११० असेल की, ε पेक्षा आकाराने लहान[1] असणाऱ्या कोणत्याही δ ह्या संख्येकरता $f(a+\delta)-f(a)$ हे अंतर σ पेक्षा आकाराने लहान असेल तर $f(x)$ हे फल a ह्या पक्षाकरात संतत असते असे म्हणतात.

ह्या व्याख्येमध्ये σ ने प्रथम $f(a)$ चा परिसर निश्चित होतो. तो परिसर म्हणजे $f(a)-\sigma$ आणि $f(a)+\sigma$ व्याख्या पुढे आपल्याला असे सांगते की आपण $a-\varepsilon$ ते $a+\varepsilon$ हा a चा असा एक परिसर काढू शकतो की ह्या परिसरातील प्रत्येक पक्षाकरता

---

[1] ले. टी. : एखादी संख्या $-\varepsilon$ आणि $+\varepsilon$ ह्यांच्यामध्ये असेल तर ती ε पेक्षा आकाराने लहान आहे असे म्हणतात.

फलाचे मूल्य $f(a)-\sigma$ ते $f(a)+\sigma$ ह्या परिसरात राहील. σ कितीही लहान घेतला तरीसुद्धा जर हे शक्य होत असेल तर फल a ह्या पक्षापाशी "संतत" असते.

अद्याप आपण फलाची, एखाद्या दिलेल्या पक्षाकरता "मर्यादा" म्हणजे काय त्याची व्याख्या केली नाही. जर आपण तसे केले असते तर आपण फलाच्या सांतत्याची व्याख्या निराळ्या तऱ्हेने करू शकलो असतो. एखाद्या बिंदूपासच्या त्याच्या मूल्याशी, खालून किंवा वरून घेतलेली मर्यादा समान असेल, तर ते फल त्या बिंदूपाशी संतत असते. पण पक्ष, विशिष्ट बिंदूप्रत जात असता ज्यांना मर्यादा असते अशी "सौम्य (Tame)" फले अगदी अपवाद म्हणूनच सापडतात. सर्वसामान्य नियम असा की फलाचे आंदोलन होत राहते. आणि दिलेल्या पक्षाचा कोणताही कितीही लहान परिसर जरी दिला तरी पक्ष ह्या परिसरात असता फलांच्या मूल्यांचा विस्तार खूप मोठा राहू शकतो. बहुधा असेच घडत असल्याने, त्याचाच विचार आपण प्रथम करू.

पक्ष a कडे खालून येत असता काय होऊ शकेल त्याचा प्रथम विचार करू. म्हणजे असे की पक्ष $a-\varepsilon$ ते a ह्या अंतरालात असता काय होते त्याचा विचार आपल्याला करावयाचा आहे; ε ही कोणतीही एक राशी असून महत्त्वाच्या प्रसंगी ती अत्यंत लहान असेल.

पक्ष, $a-\varepsilon$ ते a मध्ये असता (a वगळून) मिळणाऱ्या फलाच्या मूल्यांचा संच होईल; ह्या मूल्यांमुळे वास्तव संख्यांच्या संचांचा एक विशिष्ट भाग निश्चित होईल; पक्ष $a-\varepsilon$ ते a मध्ये राहात असता फलाची जी काही मूल्ये मिळतात त्या सर्व मूल्यांपेक्षा ज्या वास्तव संख्या मोठ्या नसतील अशा संख्यांचा ती संच असेल. ह्या भागातील कोणतीही संख्या घ्या. मग $a-\varepsilon$ ते a ह्यांच्या दरम्यान (म्हणजे a पासून फार दूर नसणारा) असा एक तरी पक्ष असा मिळू शकतो की फलाचे त्या ठिकाणचे मूल्य निदान ह्या संख्येइतपत असेल. (ε अगदी लहान आहे.) आता शक्य त्या सर्व ε संख्या आणि संबंधित असे वास्तव संख्यांचे सर्व भाग घेऊ. ह्या सर्व भागांच्या सामाईक भागाला आपण पक्ष a कडे जात असतानाचा "अंतिम छेद (Ultimate Section)" म्हणू. z ही संख्या अंतिम छेदामध्ये आहे असे म्हणणे म्हणजे, आपण ε कितीही लहान घेतला तरी ज्या पक्षांपासचे फलाचे मूल्य z हून लहान नसेल असा एकतरी पक्ष $a-\varepsilon$ ते a मध्ये असणारच. असे म्हणण्यासारखे आहे.

पृ. १११

आपण हीच प्रक्रिया वरच्या छेदांनाही लागू करू. म्हणजे जे छेद खालपासून एखाद्या बिंदूपर्यंत जाण्याऐवजी, एखाद्या बिंदूपासून वरपर्यंत जातात, त्यांनाही लागू करू. ह्या वेळी $a-\varepsilon$ ते a मधील पक्षांकरता असलेल्या सर्व मूल्यांहून ज्या संख्या लहान

नसतात त्या संख्या आपण घेतो. ह्यामुळे आपल्याला वरचा छेद मिळतो. ε बदलला की हा छेदही बदलेल.

संभाव्य त्या सर्व ε करता मिळणाऱ्या सर्व वरच्या छेदांचा सामाईक भाग घेतल्यास आपल्याला " वरचा अंतिम छेद (Ultimate upper section) " मिळेल. एखादी संख्या z. वरच्या अंतिम छेदात आहे असे म्हणणे म्हणजे, आपण ε कितीही लहान घेतला तरी ज्या पक्षांपासचे फलाचे मूल्य z पेक्षा अधिक नसेल असा एकतरी पक्ष $a - \varepsilon$ ते a यांमध्ये असणारच, असे म्हणण्यासारखे आहे.

जर एखादे पद z, हे अंतिम छेद आणि वरचा अंतिम छेद ह्या दोन्हींत असेल तर ते पद " अंतिम आंदोलनात (Ultimate oscillation) " असते असे आपण म्हणू. x शून्याकडे जात असता, sin $1/x$ ह्या फलाचे काय होते ह्या पुन्हा विचार करून ही गोष्ट आपण समजावून घेऊ. वरच्या व्याख्यांत बसवता यावे म्हणून हे मूल्य खालून शून्याकडे जात आहे असे आपण मानू.

" अंतिम छेदापासून " आरंभ करू या. ε काहीही असला तरी, $-\varepsilon$ ते 0 यांमध्ये फल, काही पक्षांकरता 1 हे मूल्य घेईल, पण त्याहून मोठे असे कोणतेही मूल्य घेणार नाही. म्हणून अंतिम छेद हा 1 पर्यंतच्या सर्व संख्यांचा (धन आणि ऋण) म्हणजे सर्व ऋण वास्तव संख्या, शून्य आणि 1 पर्यंतच्या सर्व धन संख्या, यांचा होईल.

तद्वतच " वरचा अंतिम छेद " सर्व धन वास्तव संख्या, शून्य आणि -1 पर्यंतच्या सर्व ऋण संख्यांचा होईल.

म्हणून " अंतिम आंदोलन " हे -1 ते 1 पर्यंतच्या (दोन्ही धरून) सर्व वास्तव संख्यांचे मिळून होईल.

आपण a च्या कितीही जवळ गेलो तरी निदान x इतका मोठा आकार असणारे तसेच निदान x इतका लहान आकार असणारे मूल्य सापडेलच,
पृ. ११२ असे सर्व x, म्हणजेच पक्ष a कडे जात असता मिळणारे फलाचे " अंतिम आंदोलन " असे आपण सामान्यपणे म्हणू.

अंतिम आंदोलनात एकही पद नसेल, एकच पद असेल किंवा अनेक पदे असतील. पहिल्या दोन प्रकारात फलाला खालून (a च्या) जवळ जात असतानाची मर्यादा असते. जर अंतिम आंदोलनात एकच पद असेल तर हे सरळ आहे. एकही पद नसेल तरीही ते तितकेच सरळ आहे; कारण जर अंतिम आंदोलन रिक्त असेल तर अंतिम छेदाची आणि वरच्या अंतिम छेदांची सीमा एकच असल्याचे सिद्ध करणे अवघड नाही. आणि ही सीमा म्हणजे फलाची खालून जवळ जात असता मिळणारी मर्यादा अशी व्याख्या करता येईल. पण जर अंतिम आंदोलनात अनेक पदे असतील तर खालून

जवळ जात असता फलाला निश्चित अशी मर्यादा नसते. ह्या प्रकारात आपण अंतिम आंदोलनाच्या निम्न आणि उच्च सीमा (म्हणजे वरच्या अंतिम छेदाची निम्न सीमा आणि अंतिम छेदाची उच्च सीमा) ह्या खालून जवळ जात असतानाच्या "अंतिम" मूल्यांच्या निम्न आणि उच्च मर्यादा म्हणून घेऊ शकू. त्याचप्रमाणे आपणाला वरून जवळ जात असतानाच्या अंतिम मूल्यांच्या निम्न आणि उच्च मर्यादाही मिळतील. याप्रमाणे सामान्यतः, आपल्याला दिलेल्या a या पक्षाच्या जवळ जात असतानाच्या एकूण चार मर्यादा मिळतील ज्यावेळी या चारही मर्यादा समान असतील त्यावेळीच त्या फलाला एकमेव (the) मर्यादा असते आणि ती त्या समान मूल्य इतकी असते. आणि a पासचे फलाचे मूल्यही तितकेच असेल, तर फल त्या पक्षापाशी संतत असते. ही सांतत्याची व्याख्या घेता येईल. ही पूर्वीच्या व्याख्येशी समानार्थीच आहे.

अंतिम आंदोलन आणि सामान्य प्रकारातील चार मर्यादा, यांतून न जाताही दिलेल्या पक्षाकरता फलाच्या मर्यादेची (मर्यादा अस्तित्वात असल्यास) व्याख्या आपल्याला करता येईल. पूर्वी जशी सांतत्याची व्याख्या केली तशीच व्याख्या याही वेळी करता येईल. खालून जवळ जात असतानाच्या मर्यादेचीच व्याख्या करू. a च्या खालून जवळ जात असताना निश्चित मर्यादा असावयाची तर पुढील अट आवश्यक आणि पुरेशी आहे. σ ही कोणतीही लहान (धन) संख्या दिली असता, a च्या पुरेशा जवळच्या (पण a हून लहान) पक्षापासच्या, फलाच्या मूल्यांमधील अंतर σ हून लहान असेल, म्हणजे जर ϵ पुरेसा लहान असेल आणि आपण $a-\epsilon$ व a

पृ. ११३

ह्यांच्या दरम्यानचे कोणतेही दोन पक्ष (a सोडून) घेतले असतील तर ह्या पक्षांपासच्या मूल्यांमधील अंतर σ हून लहान असेल. σ कितीही लहान असला तरी हीच परिस्थिती राहिली पाहिजे. अशा वेळी (पक्ष) खालून जवळ जात असता फलाला मर्यादा असते. त्याचप्रमाणे (पक्ष) वरून जवळ जात असतानाच्या प्रकारातही आपणाला मर्यादेची व्याख्या करता येईल. ह्या दोन्ही मर्यादा जरी अस्तित्वात असल्या, तरी त्या समान असतील असे नाही, आणि जरी समान असल्या तरी त्या a ह्या पक्षापासच्या फलाच्या *मूल्या*इतक्या असतील असेही नाही. ह्या शेवटच्या परिस्थितीत (म्हणजे तीन्ही संख्या समान असता) फल, a ह्या पक्षापाशी *संतत* आहे असे आपण म्हणतो.

ज्या वेळी फल प्रत्येक पक्षापाशी "संतत" असते त्या वेळी ते "संतत" (अमुक पक्षापाशी, अशा प्रकारचे विशेषण न लावता) आहे असे म्हणतात. सांतत्याच्या व्याख्येकडे जाण्याचा आणखी एक किंचितसा निराळा प्रकार पुढीलप्रमाणे :—

जर एखादी संख्या अशी असेल की त्या संख्येपाशी (पक्ष म्हणून) आणि तिच्याहून मोठ्या असलेल्या पक्षांपाशी (संख्यांपाशी), फलाचे मूल्य α ह्या वर्गाचा, सदस्य

आहे तर ते फल " अंतिमतः α ह्या वर्गात केंद्रित होते " असे म्हणू. त्याचप्रमाणे ज्या वेळी y हा x पेक्षा लहान असा एखादा पक्ष (संख्या) असा असेल की y (धरून) पासून x (वगळून) पर्यंतच्या प्रत्येक पक्षापासचे मूल्य α चे सदस्य असेल त्या वेळी फल, " x ह्या पक्षाकडे खालून जवळ जात असता α ह्या वर्गात केंद्रित होते " असे म्हणू. ज्यावेळी f (a) हे a पासचे मूल्य असेल आणि पुढील चार अटी ते फल पूर्ण करीत असेल त्या वेळी ते संतत आहे असे आता आपण म्हणू.

(१) f (a) पेक्षा लहान अशी कोणतीही संख्या दिली असल्यास पक्ष, a कडे खालून जात असता या संख्येच्या अनुचरांमध्ये (म्हणजे त्यांच्या संचांमध्ये) फल केंद्रित होते.

(२) f (a) पेक्षा मोठी अशी कोणतीही संख्या दिली असल्यास पक्ष, a कडे खालून जात असता ह्या संख्येच्या पूर्वचरांमध्ये फल केंद्रित होते.

(३) आणि (४) वरील सारख्याच अटी, फक्त पक्ष, a कडे वरून येत असावा. ह्या पद्धतीने व्याख्या करण्यामध्ये काही फायदे आहेत. तिच्यात सांतत्याच्या अटींचे चार तुकड्यात विभाजन झाले आहे; ज्या पक्षाच्या आणि ज्या मूल्याच्या संदर्भात सांतत्याची व्याख्या करावयाची असेल त्यांच्यापेक्षा लहान किंवा मोठे, पक्ष आणि मूल्ये ह्यांच्या विचारातून ते चार विभाग केले गेले आहेत.

आता आपण आपल्या व्याख्यांचे सामान्यीकरण अशा प्रकारे करू की ज्या मालिका संख्यात्मक नाहीत किंवा संख्यांच्या रूपात ज्यांचे मोजमाप करता येत नाही त्यांनाही ह्या व्याख्या लागू पडाव्यात. ह्यासाठी गतीचे उदाहरण मनात ठेवणे सोईचे होईल. एखाद्या पक्षाकरता फलाची मर्यादा आणि त्याच पक्षाकरता त्याचे मूल्य यांतील फरक गतीच्या साह्याने स्पष्ट करता येईल, अशा प्रकारची एच्. जी. वेल्सची एक कथा आहे. गोष्टीतील नायकाजवळ त्याला माहिती नसलेली पण त्याची इच्छा पूर्ण करणारी एक शक्ती असते. त्याच्यावर एक पोलिस हल्ला करतो. तो " – कडे जा " असे उद्गारताच पोलिस नाहीसा होतो. जर t ह्या काळी पोलिसाचे स्थान f (t) असेल, t_0 ह्या क्षणी उद्गार निघाले असतील तर t_0 कडे, t खालून जवळ येत असता पोलिसाच्या स्थानाची मर्यादा कथेच्या नायकापाशी असेल पण t_0 पासची किंमत '—' असेल. अर्थात असे प्रसंग व्यावहारिक जगात विरळा. आणि प्रत्यक्षात जरी चांगलासा पुरावा मिळालेला नसला तरी सर्व गती या संततच आहेत असे गृहीत धरले जाते. म्हणजे कोणतीही वस्तू दिली असता जर t ह्या काळी तिचे स्थान f (t) असेल, तर f (t) हे t चे संतत फल असते. अशा विधानांमध्ये अपेक्षित असलेली सांतत्याच्या अर्थाची, करता येईल तेवढी सोपी व्याख्या आपण करू इच्छितो.

पृ. ११४

पक्ष आणि मूल्य दोन्ही वास्तव संख्या असता दिलेल्या व्याख्या अधिक व्यापक प्रकारांकरता सहज लागू करता येतील.

P आणि Q हे दोन संबंध घ्या. आणि जरी आपल्या व्याख्याकरता आवश्यक नसले तरी ते संबंध मालिकारूप असल्याचे मानणे उत्तम. ज्याचा प्रदेश P च्या क्षेत्रांतर्गत असेल आणि ज्याचा व्यस्त प्रदेश Q च्या क्षेत्रांतर्गत असेल असा R हा एक-अनेक संबंध घेऊ. मग (व्यापक अर्थाने) R म्हणजे, ज्याचे पक्ष Q च्या क्षेत्रात आणि ज्याची मूल्ये P च्या क्षेत्रात असतील असे फल होईल. समजा, आपण रेषेवरून फिरणाऱ्या एका कणाचा विचार करीत आहोत. Q म्हणजे कालमालिका समजू. P ही आपल्या रेषेवरील डावीकडून उजवीकडे जाणाऱ्या बिंदूंची मालिका समजू. R हा संबंध म्हणजे ‘ a ह्या क्षणाचा ’, a ह्या क्षणी, आपल्या कणाच्या, रेषेवरील स्थानाशी असलेला संबंध मानू. मग “ a चा R ” म्हणजे त्या कणाचे a ह्या क्षणीचे स्थान होईल. आपल्या व्याख्यांच्या विवेचनामध्ये हे उदाहरण नीट लक्षात ठेवावे. a ह्या पक्षापासचे मूल्य ज्यात आहेत असा P मालिकेतील α हा कोणताही अंतराल घ्या.
पृ. ११५
जर Q मालिकेत, a हा ज्याचा अंत्यबिंदू (Endpoint) नसेल असा एखादा अंतराल असेल की ह्या अंतरालाच्या संबंधात सर्वत्र, R ह्या फलाची मूल्ये α मध्येच राहतात तर तो संतत आहे असे आपण म्हणू. (अंतराल म्हणजे कोणत्याही दोन पदांमधील सर्व बिंदूंचा संच; म्हणजे P च्या क्षेत्रातील x आणि y ही कोणतीही दोन पदे असतील आणि x चा y शी P–संबंध असेल तर x चा ज्या z शी P–संबंध असेल आणि z चा y शी P–संबंध असेल अशी सर्व पदे z, आणि त्यांजबरोबर स्वतः x आणि y सुद्धा, घेऊन मिळणारा संच म्हणजे “ x पासून y पर्यंतचा P–अंतराल ” असे आपण म्हणू.

“ अंतिम छेद ” आणि “ अंतिम आंदोलन ” यांच्या व्याख्या आपण सहज देऊ शकू. a ह्या पक्षाकडे खालून जवळ जात असता “ अंतिम छेद ” याची व्याख्या करण्याकरता a च्या आधी येणारा म्हणजे ज्याचा a शी Q–संबंध आहे असा y हा कोणताही एक पक्ष घ्या; y आणि y पर्यंतच्या सर्व पक्षांकरता मिळणारी फलाची सर्व मूल्ये घ्या; आणि मूल्यांमुळे होणारा P चा छेद, म्हणजे ह्या मूल्यांइतके असणारे किंवा ह्या मूल्यांच्या आधी येणारे असे P–मालिकेचे सर्व सदस्य घ्या; हाच अंतिम छेद होय. वरचा अंतिम छेद आणि अंतिम आंदोलन यांच्या व्याख्या आता पूर्वीप्रमाणेच देता येतील.

केंद्रित्वाची (Convergence) आणि त्यातून उद्‌भवणारी सांतत्याची वैकल्पिक व्याख्या करताना सुद्धा कोणत्याही प्रकारची अडचण येत नाही.

जर R च्या व्यस्त प्रदेशाचा आणि Q च्या क्षेत्राचा y हा असा एक सदस्य असेल की R–फलाचे y ह्या पक्षापासचे मूल्य आणि y चा ज्या ज्या पक्षाशी Q–

संबंध असेल त्या पक्षापासचे मूल्य, ही सर्व α मध्ये असतील, तर ते फल “ अंतिमतः α मध्ये Q – केंद्रित ” आहे असे आपण म्हणू. a शी Q–संबंध असणारे आणि R च्या व्यस्त प्रदेशात असणारे एखादे पद y जर असे असेल की y (धरून) पासून ते a (वगळून) पर्यंतच्या Q–अंतरालातील कोणत्याही पक्षापासचे फलाचे मूल्य α मध्ये असेल, तर R हे फल, “ पक्ष, a ह्या दिलेल्या पक्षाप्रत जात असता α मध्ये Q–केंद्रित ” असते असे आपण म्हणू.

आपले फल a पाशी संतत असण्याकरता त्याने पूर्ण करावयाच्या चार अटींपैकी पहिली, अट पुढीलप्रमाणे होईल; त्यासाठी a ह्या पक्षापासच्या मूल्याकरता b लिहू :

पृ. ११६

b शी P संबंध असणारे कोणतेही एक पद दिले असल्यास, पक्ष, a कडे खालून जवळ जात असता R हे फल, b च्या अनुचरांमध्ये (P ला अनुलक्षून) Q–केंद्रित असते.

P ऐवजी त्याचा व्यस्त घेतल्यास दुसरी अट मिळेल, पहिल्या आणि दुसऱ्यात Q ऐवजी त्याचा व्यस्त घेतल्यास तिसरी व चौथी मिळतील.

तेव्हा फलाच्या मर्यादेविषयीची कल्पना किंवा सांतत्याविषयीची कल्पना, यांत संख्यांचाच अंतर्भाव केला पाहिजे असे काही नाही. दोघांचीही व्यापक व्याख्या करता येईल, आणि त्यांच्याबद्दलची अनेक प्रमेये कोणत्याही दोन मालिकांच्या (एक मालिका पक्षांची आणि दुसरी मालिका मूल्यांची आहे असे म्हणून) संदर्भात सिद्ध करता येतील. ह्यात असे दिसेल की व्याख्यांमध्ये शून्यलब्धींचा अंतर्भाव केलेला नाही. ज्या अंतरालाची लांबी प्रत्यक्षात शून्य होत नाही पण अमर्यादपणे लहान होते अशा अंतरालांच्या असंख्य वर्गांचा त्यात अंतर्भाव केलेला होता. पण सांत नसणारा असा एकही अंतराल त्यात नव्हता; पुढील उदाहरणाप्रमाणेच हे आहे : एक इंच लांबीची एक रेषा प्रथम निम्मी केली, मग पुन्हा निम्मी केली, आणि असे अमर्याद वेळा केले, तरी आपण शून्यलब्धींकडे कधीही जात नाही. n वेळा दुभागल्यावर आपल्या रेषेची लांबी $1/2^n$ इंच येईल आणि n कोणतीही सांतसंख्या असता ही संख्यासुद्धा सांतच राहील. क्रमशः द्विभाजन केल्याने आपल्या एकूण भागांची क्रमिक संख्या कधीही अनंत होत नाही. कारण मूलतः ती ‘ एका वेळी एक ’ अशी प्रक्रिया असते. ह्या पद्धतीने शून्यलब्धींकडे जाता येणार नाही. ह्या विषयांबद्दलच्या समजुतींत असलेल्या गोंधळांमुळेच अनंत आणि मर्यादा ह्यांबद्दलच्या चर्चेमध्ये अडचणी येत असल्याचे दिसून येते.

◻ ◻

प्रकरण १२

उद्ग्रहण आणि गुणन-सिद्धान्त

जो मांडता येतो पण तर्कशास्त्राने सिद्ध करता येत नाही आणि जो सोईस्कर आहे पण अपरिहार्य नाही, अशा एका सिद्धांताचा विचार आपल्याला ह्या प्रकरणात करावयाचा आहे. जी अनेक प्रमेये, स्वाभाविकतः सत्य असल्याचे समजले
पृ. ११७ जाते, पण ह्याच्या साह्याशिवाय सिद्ध करता येत नाहीत अशा अनेक प्रमेयांच्या दृष्टीने तो सोईस्कर आहे; पण तो अपरिहार्य नाही. कारण ती प्रमेये ज्या विषयांत उद्भवतात ते विषय त्या प्रमेयांशिवायही अस्तित्वात राहतात; क्वचित ते काहीसे विकलांग होत असतील इतकेच.

गुणन-सिद्धांत मांडण्यापूर्वी प्रथम आपल्याला उद्ग्रहणाच्या तत्त्वाचे स्पष्टीकरण केले पाहिजे आणि ज्या वेळी गुणकांची संख्या अनंत असेल त्या वेळच्या गुणाकाराची व्याख्या दिली पाहिजे.

अंकगणितीय क्रियांची व्याख्या करण्याची योग्य पद्धत म्हणजे आवश्यक तेवढी पदे असणारा वर्ग (किंवा संबंधकांच्या बाबतीतील संबंध) प्रत्यक्ष घडवणे ही होय. हे करण्याकरता काही प्रमाणात कौशल्य लागते. पण प्रस्तुत संख्येचे अस्तित्व सिद्ध करण्याकरता हे अटळ आहे. सोपे उदाहरण म्हणून बेरीज घ्या. समजा, आपल्याला μ हा प्रधानांक आणि μ पदे असलेला α हा वर्ग दिला आहे. मग $\mu + \mu$ ची व्याख्या आपण कशी करावी ? ह्यासाठी आपल्याजवळ प्रत्येकी μ घटक असणारे दोन वर्ग हवेत. आणि त्यांच्यात सामाईक घटक नसावेत. α पासून आपल्याला असे वर्ग अनेक प्रकारे घडवता येतील; ह्यापैकी पुढील प्रकार बहुधा सर्वात सोपा आहे : प्रथम, जिचे पहिले पद हे α मधील एकच सदस्य असणारा वर्ग आहे,
पृ. ११८ आणि दुसरे पद रिक्त वर्ग आहे. अशी सर्व क्रमित युग्मे (Ordered pair) बनवा. नंतर, जिचे पहिले पद रिक्तवर्ग आणि दुसरे पद हे α मधील एकच सदस्य असणारा वर्ग आहे, अशी सर्व क्रमित युग्मे बनवा. युग्मांच्या ह्या दोन्ही वर्गांमध्ये एकही सामाईक पद नसेल, आणि त्यांच्या तार्किक बेरजेमध्ये $\mu + \mu$ पदे असतील. अगदी याच पद्धतीने μ पदे असणारा α आणि ν पदे असणारा β हे वर्ग दिले असता $\mu + \nu$ ची व्याख्या करता येईल.

अशा व्याख्या बहुधा, सोइस्कर तांत्रिक साधन शोधून काढण्यापुरत्याच मर्यादित असतात. पण गुणकांची संख्या अनंत असता, गुणाकाराच्या वेळी अशा व्याख्येमधून अनेक महत्त्वाचे प्रश्न निर्माण होतात.

ज्या वेळी गुणकांची संख्या सांत असते त्या वेळी गुणाकार करताना कोणतीही अडचण येत नाही. ज्यांत अनुक्रमे μ आणि ν पदे आहेत असे α आणि β हे वर्ग दिले असता, पहिले पद α मधून आणि दुसरे β मधून निवडून मिळणाऱ्या सर्व क्रमित युग्मांची संख्या म्हणजे $\mu \times \nu$, अशी व्याख्या आपण करू शकू. ह्या व्याख्येत α आणि β परस्परात मिसळलेले नसलेच पाहिजेत असे नाही. α आणि β अगदी समान असले तरीही हीच व्याख्या योग्य ठरते. उदाहरणार्थ, ज्याचे घटक x_1, x_2, x_3 हे आहेत असा α हा वर्ग घ्या. मग $\mu \times \mu$ ची व्याख्या करण्याकरता वापरावयाचा वर्ग म्हणजे पुढील युग्मांचा वर्ग राहील :

$$(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3).$$

μ आणि ν दोन्ही अनंत असले तरीसुद्धा हीच व्याख्या योग्य ठरते; तसेच ती क्रमाक्रमाने तीन चार किंवा कितीही, पण सांत, गुणकांपर्यंत वाढवता येते. ह्या व्याख्येच्या बाबतीत कोणतीही अडचण येत नाही. फक्त ती व्याख्या गुणकांची संख्या *अनंत* असता लागू पडत नाही.

गुणकांची संख्या अनंत असता गुणाकार करण्याचा प्रश्न पुढील प्रकारे उद्भवतो : समजा, आपल्याकडे κ हा एक वर्गांचा वर्ग आहे. समजा, ह्यातील प्रत्येक वर्गातील पदांची संख्या आपल्याला दिली आहे. ह्या सर्व संख्यांच्या गुणाकाराची व्याख्या आपण कशी करवी ? जर आपली व्याख्या व्यापक असेल तर ती κ सान्त किंवा अनंत असताही लागू पडेल. येथे हे लक्षात घ्यावे की, मुख्य प्रश्न κ अनंत असताना काय करावे हा आहे; κ मधील वर्ग अनंत असताना काय करावे हा नव्हे. जर κ सान्त असेल, तर वर दिलेली पद्धत त्याचे वर्ग सांत असताना जशी लागू पडेल तशीच ती, ते अनंत असतानाही लागू पडेल. प्रश्न, κ अनंत असताना (मग त्याचे सदस्य सांत असले तरी) काय मार्ग काढावा हा आहे.

पृ. ११९

सामान्यपणे, गुणाकार करण्याची पुढील पद्धत डॉ. व्हाइटहेड यांची आहे. ती Principia Mathematica, vol. i *80 ff आणि vol. ii *114 मध्ये विस्ताराने स्पष्ट केली आहे.

ज्यातील कोणतेही दोन वर्ग परस्परात मिसळलेले नाहीत, अशा वर्गांचा κ हा एक वर्ग आहे असे समजू– समजा एखाद्या देशातील सर्व मतदार संघ घेतले. प्रत्येक मतदार

संघ हा मतदारांचा बनलेला आहे, आणि बहुसदस्य मतदानाची पद्धत नाही. आता प्रत्येक वर्गातील एकेक पद प्रतिनिधी म्हणून निवडायचे काम करू या; जसे प्रत्येक मतदारसंघ लोकसभेकरता एकेक सभासद निवडून देतो तसे. नियम असा आहे की, प्रत्येक मतदारसंघाने आपल्यातूनच, मतदार असेल असा एकच माणूस निवडून द्यायचा आहे. याप्रमाणे आपल्या प्रत्येक मतदारसंघातून एकेक सभासद निवडून, लोकसभा म्हणून प्रतिनिधींचा वर्ग मिळतो. लोकसभा निवडण्याचे किती भिन्न प्रकार आपल्याला मिळतील ? प्रत्येक संघ एक प्रतिनिधी निवडू शकतो, म्हणून जर संघात μ मतदार असतील तर एकूण μ प्रकारे निवड करता येईल. निरनिराळ्या संघांच्या निवडी स्वतंत्र आहेत; तेव्हा हे उघड आहे की संघांची संख्या सांत असता, संभाव्य भिन्न भिन्न लोकसभांची संख्या, विविध संघांतील मतदारांच्या संख्यांचा गुणाकार करून मिळेल. ज्या वेळी संघांची संख्या सांत आहे, की अनंत आहे, हे माहिती नसेल त्या वेळी, संभाव्य भिन्न भिन्न लोकसभांची संख्या म्हणजेच वेगवेगळ्या संघातील मतदार संख्यांचा गुणाकार, अशी *व्याख्या* आपण करू. ह्या पद्धतीने अनंत गुणाकारांची व्याख्या करतात. आता, आपण उदाहरणांचा आधार सोडून देऊन काटेकोर मांडणीकडे वळले पाहिजे.

κ हा वर्गांचा वर्ग घ्या. प्रारंभी असे मानू, की κ चे कोणतेही दोन वर्ग परस्परात मिसळत नाहीत, म्हणजे α आणि β हे κ चे दोन भिन्न सदस्य असतील तर एकाचा कुठलाही घटक दुसऱ्यात नसेल. जर एखादा वर्ग κ मधील प्रत्येक घटकातील नेमका एक घटक घेऊन बनलेला असेल तर त्या वर्गाला आपण κ मधून केलेले उद्ग्रहण (Selection) म्हणू; तो μ ने दाखवू. म्हणजे जर μ मधील प्रत्येक घटक κ च्या एखाद्या सदस्यात असेल, आणि α हा κ चा कोणताही एक सदस्य असता μ आणि α ह्यांत नेमके एक पद सामाइक असेल, तर μ ला κ मधून केलेले उद्ग्रहण असे म्हणू. κ मधून केलेल्या सर्व उद्ग्रहणांच्या वर्गाला आपण κ चा " गुणनवर्ग (Mutliplicative class) " म्हणू. κ च्या गुणनवर्गातील पदांच्या संख्येला म्हणजे κ मधून करता येईल अशा सर्व संभाव्य उद्ग्रहणांच्या संख्येलाच κ मधील सदस्यांच्या संख्यांचा गुणाकार म्हणतात. κ सांत असो वा अनंत असो, ही व्याख्या सारखीच लागू पडते. ह्या व्याख्या पूर्ण समाधानकारक करण्याकरता, κ चे कोणतेही दोन सदस्य परस्परांत मिसळू नयेत हे बंधन आपण काढले पाहिजे. ह्याकरता प्रथम " उद्ग्रहण " वर्गाची व्याख्या करण्यापूर्वी आपण " उद्ग्राहक (Selector) " ह्या संबंधाची व्याख्या करू. जर R हा संबंध κ मधील प्रत्येक सदस्यातून एकेक पद त्या सदस्याचे प्रतिनिधी-पद (Representative) म्हणून निवडीत असेल तर त्याला आपण κ मधील " उद्ग्राहक " म्हणू ; म्हणजे α हा κ मधील कोणताही एक वर्ग दिला असेल तर, जो α चा सदस्य असेल आणि ज्याचा α शी R संबंध असेल असे x हे नेमके एकच पद असते. याची काटेकोर व्याख्या अशी :

पृ. १२०

κ ह्या वर्गांच्या वर्गामधील " उद्ग्राहक " म्हणजे ज्याचा व्यस्त प्रदेश κ असेल असा एक-अनेक संबंध आहे. आणि जर x चा α शी हा संबंध असेल तर x, α चा सदस्य असतो.

जर R हा κ मधील उद्ग्राहक असेल, α हा κ चा सदस्य असेल, आणि x ह्या पदाचा α शी R–संबंध असेल, तर x ला आपण α चा R–संबंधाच्या संदर्भातील प्रतिनिधी म्हणू.

आता κ मधील " उद्ग्रहणाला " आपण उद्ग्राहकाचा प्रदेश म्हणू, आणि पूर्वीप्रमाणेच गुणनवर्ग म्हणजे, सर्व उद्ग्रहणांचा वर्ग म्हणू.

पण ज्या वेळी κ चे सदस्य एकमेकात मिसळतात, त्या वेळी उद्ग्रहणांपेक्षा उद्ग्राहक अधिक असू शकतील. x हे पद α आणि β ह्या दोन्ही वर्गात असता ते एकदा α चा प्रतिनिधी आणि एकदा β चा प्रतिनिधी म्हणून निवडले जाऊ शकेल. त्यामुळे त्या दोन प्रकारात दोन भिन्न उद्ग्राहक निर्माण होईल पण उद्ग्रहण तेच येईल म्हणून गुणाकाराची व्याख्या करण्याकरता आपल्याला उद्ग्रहणांऐवजी उद्ग्राहकच अधिक करून लागतील. म्हणून व्याख्या अशी केली पाहिजे :

" κ ह्या वर्गांच्या वर्गातील सदस्यांच्या संख्यांचा गुणाकार " म्हणजे κ मधील उद्ग्राहकांची संख्या होय.

वरील योजनेच्या साह्याने आपण घातकरणाचीही व्याख्या करू शकू. अर्थात μ^{ν} म्हणजे प्रत्येक वर्गात μ पदे आहेत अशा एकूण ν वर्गांमधील उद्ग्राहकांची संख्या, अशी व्याख्या आपण करू शकू. पण ह्यावर काही आक्षेप घेतले

पृ. १२१ जातात; विशेषतः ह्या प्रकारे व्याख्या करण्यात गुणन-सिद्धांताचा (ह्याविषयी लवकरच बोलू) उपयोग केला जातो, म्हणून त्याऐवजी आपण पुढील रचना स्वीकारू :

ज्यात μ पदे आहेत असा α हा वर्ग आणि ज्यात ν पदे आहेत असा β हा वर्ग घेऊ. y हा β चा एक सदस्य घ्या आणि ज्याचे पहिले पद α चा एक सदस्य आणि दुसरे पद y आहे अशा सर्व क्रमित युग्मांचा वर्ग बनवा. अशी एकूण μ युग्मे होतील, कारण दिलेल्या y करता α मधील कोणताही सदस्य पहिले पद म्हणून घेता येईल. आणि α मध्ये μ सदस्य आहेत. y बदलून मिळणारे असे सर्व वर्ग आपण बनवले तर आपल्याला एकूण ν वर्ग मिळतील कारण y हा β चा कोणताही सदस्य असू शकेल आणि β मध्ये एकूण ν सदस्य आहेत. ह्या ν वर्गांपैकी प्रत्येक वर्ग, युग्मांचा वर्ग आहे. आणि यांपैकी प्रत्येक वर्ग, α मधील एकेक बदलता सदस्य आणि β मधील निश्चित सदस्य अशांच्या जोड्यांपासून बनलेला आहे. ह्या ν वर्गांच्या वर्गांमधील उद्ग्राहकांची

संख्या म्हणजे μ^{ν} अशी व्याख्या आपण करू, किंवा तसेच म्हटले तर μ^{ν} म्हणजे सर्व उद्ग्रहणांची संख्या असेही आपण म्हणू शकतो. कारण आता आपले वर्ग परस्परांत मिसळलेले नसल्याने उद्ग्राहकांची संख्या उद्ग्रहणांच्या संख्येइतकीच राहील. आपल्या वर्गांच्या वर्गामधील उद्ग्रहण म्हणजे क्रमित युग्मांचा संच होय. ह्या युग्मांपैकी नेमके एक असे असेल की त्याचे दुसरे पद β मधील कोणतेही दिलेले पद आणि पहिले α मधील कोणतेही पद आहे. तेव्हा प्रत्येकात μ पदे असतील अशा ν वर्गांच्या एखाद्या संचातील उद्ग्राहकांच्या साह्याने μ^{ν} ची व्याख्या आपण केली. ह्या संचाची घटना विशिष्ट प्रकारची असून त्याची अंतर्रचना व्यापक प्रकारांपेक्षा हाताळण्यास अधिक सोपी आहे. ह्याचा गुणन-सिद्धांताशी काय संबंध आहे ते पुढे लवकरच येईल.

घातकरणाला जी पद्धत लागू पडते तेच दोन प्रधानांकांच्या गुणाकारालाही लागू पडते. "$\mu \times \nu$" ची व्याख्या आपण, प्रत्येकात μ पदे असतील अशा ν वर्गांच्या संख्यांची बेरीज अशी करू शकतो, पण α मधील एक घटक आणि मग β मधील एक घटक अशा तऱ्हेने मिळणाऱ्या युग्मांची संख्या, अशी त्याची व्याख्या करणे आपण अधिक पसंत करू. (येथे α मध्ये μ आणि β मध्ये ν पदे आहेत.) शिवाय गुणन-सिद्धांताची आवश्यकता टाळण्याची योजनाही ह्या व्याख्येत आहे.

आपल्या व्याख्येवरून गुणाकाराचे आणि घातांकांचे नेहमीचे नियमही आपण सिद्ध करू शकतो. पण यात एक गोष्ट अशी आहे की ती आपण सिद्ध करू शकणार नाही. ज्या वेळी एक तरी गुणक शून्य असतो त्या वेळी गुणाकार शून्य असतो हे आपण सिद्ध करू शकणार नाही. ज्या वेळी गुणकांची संख्या सान्त असेल त्या वेळी आपल्याला हे सिद्ध करता येईल. पण अनंत असताना येणार नाही. दुसऱ्या शब्दांत, ज्यातील एकही वर्ग रिक्त नाही अशा वर्गांचा एक वर्ग दिला असेल तर त्यांच्यात एक (तरी) उद्ग्राहक असतोच किंवा परस्परवियुक्त अशा वर्गांचा वर्ग दिला असता प्रत्येकातील नेमके एकच पद असेल असा एक तरी वर्ग असतोच हे आपल्याला सिद्ध करता येणार नाही. ह्या गोष्टी सिद्ध करता येणार नाहीत आणि जरी त्या प्रथमदर्शनी सरळ आहेत असे वाटत असले तरी, पुनः पुनः विचार केल्यास, हळूहळू त्यांच्याबद्दलच्या शंका वाढतच जातात. आणि सरतेशेवटी समांतर-सिद्धांताप्रमाणे हे विधानसुद्धा, आणि त्याचे परिणामही, सत्य की असत्य हे कधीकाळी माहिती होईल हे, गृहीत न धरताच स्वीकारणे भाग पडते. थोड्या सैल भाषेत सांगावयाचे तर आपले गृहीत असे : अपेक्षित ठिकाणी आणि वेळी उद्ग्राहक आणि उद्ग्रहणे अस्तित्वात असतात. ते काटेकोरपणे मांडण्याचे अनेक समानार्थी (Equivalent) पर्याय आहेत. आपण खाली दिलेल्या पर्यायापासून आरंभ करू :

पृ. १२२

" परस्परवियुक्त व रिक्त नसलेल्या वर्गांचा कोणताही वर्ग दिला असता, ज्यात प्रत्येक वर्गातील नेमका एकच घटक असेल असा एक वर्ग अस्तित्वात असतो."

ह्या प्रविधानाला आपण "गुणन सिद्धांत"[१] म्हणू. प्रथम आपण ह्या प्रविधानाशी समानार्थी अशी विविध रूपे देऊ. आणि त्याचे सत्यासत्यत्व जिथे गणिताच्या दृष्टीने उपयोगी आहे, असे काही प्रकार पाहू.

गुणन सिद्धान्त पुढील प्रविधानाशी समानार्थी आहे. निदान एक गुणक शून्य असेल तरच गुणाकार शून्य असतो. म्हणजे जर काही प्रधानांकांचा गुणाकार केला असेल तर त्यापैकी एक तरी शून्य असल्याशिवाय गुणाकार शून्य येणार नाही.

गुणन सिद्धान्त पुढील प्रविधानाशी समानार्थी आहे; जर R हा एक संबंध असेल आणि R च्या व्यस्त प्रदेशात अंतर्भूत असलेला κ हा कोणताही एक वर्ग असेल तर, ज्याच्यापासून R मिळवता येतो आणि ज्याचा व्यस्त प्रदेश κ आहे असा एक तरी एक-अनेक संबंध अस्तित्वात असतो.

गुणन-सिद्धांत पुढील प्रविधानाशी समानार्थी आहे : जर α हा कोणताही वर्ग असेल आणि κ हा α च्या, रिक्त वगळता सर्व उपवर्गांचा वर्ग असेल तर κ मध्ये एकतरी उद्ग्राहक असतो. सिद्धान्ताचे हे रूप शिक्षित जगाच्या नजरेस

पृ. १२३

प्रथम त्सेर्मेलो (Zermelo) याने आपल्या " Beweis dass jede menge wohlgeordnet werden kann " (बेवाइस् डास् येड ऽ मेंग ऽ वोलोओर्डनेट वेर्डेन कान्. प्रत्येक संच सुक्रमित करता येतो याची सिद्धता), या लेखात[२] त्सेर्मेलो ह्या सिद्धान्ताला, शंकातीत सत्य मानतो. जोवर त्याने तो स्पष्टपणे मांडला नव्हता तोवर गणितज्ञ मनात शंका सुद्धा न आणता त्याचा वापर करीत होते, हे कबूल केले पाहिजे; पण त्यांनी हे अजाणता केले असावे असे दिसते. आणि स्पष्ट रूपात तो मांडण्याचे त्सेर्मेलोचे श्रेय हे, तो (सिद्धान्त) सत्य की असत्य ह्यावर यत्किंचितही अवलंबून नाही.

---

[१] ले. टी. : Principia Mathematica, vol. i *88, तसेच vol. iii *257–58 पाहा.

अ. टी. : आजकाल यालाच उद्ग्रहण सिद्धांत Axiom of choice म्हणतात. याची बाह्यतः भिन्न अशी अनेक रूपे आहेत.

[२] ले. टी. : Mathematische annalen (माटेमाटिश्श आनालेन्) vol. ix, pp. 514-16 ह्या रूपाला आपण त्सेर्मेलोचा सिद्धांत म्हणू.

वर उल्लेखिलेल्या सिद्धतेत त्सेर्मेलोने गुणन-सिद्धांत पुढील प्रविधानाशी समानार्थी असल्याचे दाखवले होते : प्रत्येक वर्ग सुक्रमित करता येतो; म्हणजेच प्रत्येक उपवर्गाला (अर्थात रिक्त उपवर्ग सोडून) · पहिले पद असेल अशा तऱ्हेने तो मालिकेच्या रूपात रचता येतो. ह्या प्रविधानाची संपूर्ण सिद्धता अवघड आहे. पण ज्या तत्त्वापासून सिद्धतेची सुरुवात होते ते सर्वसाधारण तत्त्व समजून घेणे मात्र अवघड नाही. त्यामध्ये, आपण ज्याला "त्सेर्मेलोचा सिद्धांत" म्हणतो ते स्वरूप वापरले आहे. त्यात असे गृहीत धरलेले आहे की, α हा कोणताही वर्ग दिला असेल तर, R हा एकतरी एक-अनेक संबंध असा असतो की ज्याचा व्यस्त प्रदेश म्हणजे α चे सर्व उपवर्ग असतील आणि जर x चा ξ शी R–संबंध असेल तर x हा ξ चा सदस्य असेल. हा संबंध प्रत्येक उपवर्गातून एक "प्रतिनिधी" उचलतो; अर्थात कित्येकदा दोन उपवर्गांचा तोच प्रतिनिधी असू शकेल. त्सेर्मेलो शेवटी काय करीत असेल तर तो α च्या सदस्यांची, R आणि सान्तातीत (Transfinite) विगमन यांच्या साह्याने एक-एक करून गणना करतो. α चाच प्रतिनिधी आपण प्रथम मांडू; त्याला x_1 म्हणू. नंतर α मधून x_1 वगळून मिळणाऱ्या वर्गाचा प्रतिनिधी घेऊ; त्याला x_2 म्हणू तो x_1 पेक्षा निराळा असणार, कारण कोणत्याही वर्गाचा प्रतिनिधी त्या वर्गाचा सदस्य असणार आणि x_1 तर ह्या वर्गाच्या बाहेर आहे. त्याच पद्धतीचा अवलंब करून x_2 सुद्धा काढून घ्या आणि उरलेल्याचा प्रतिनिधी म्हणून x_3 घ्या. ह्या रीतीने α सान्त नसल्याचे मानल्यास आपल्याला $x_1, x_2, \ldots, x_n$ अशी श्रेढी मिळेल. नंतर आपण ही सर्व मालिकाच काढून घेऊ; मग α मधून जे उरेल त्याचा प्रतिनिधी म्हणून x_ω घेऊ. या रीतीने α संपून जाईपर्यंत
पृ. १२४ आपण करू शकू. क्रमशः मिळणाऱ्या ह्या प्रतिनिधींमुळे आपल्याला α च्या सदस्यांची एक सुक्रमित मालिका मिळेल. (वर दिलेली मांडणी, सिद्धतेच्या सर्वसाधारण मार्गाची एक केवळ झलक आहे.) ह्या प्रविधानाला "त्सेर्मेलोचे प्रमेय" म्हणतात.

गुणन-सिद्धांत पुढच्या प्रविधानाशीही समानार्थी आहे : जर कोणतेही दोन असमान प्रधानांक दिले तर त्यातील कोणता तरी एक दुसऱ्यापेक्षा मोठा असतोच. जर हा सिद्धांत असत्य असेल तर μ हा ν पेक्षा मोठा नाही किंवा त्याच्याशी समानही नाही अशा तऱ्हेचे दोन प्रधानांक μ आणि ν असू शकतील. $\aleph_1$ आणि $2^{\aleph_0}$ हे अशा जोडीचे बहुधा एक उदाहरण असावे. हे आपण पाहिले आहे.

ह्या सिद्धाताची आणखी अनेक रूपे देता येतील. पण वर मांडलेली रूपे आजवर माहिती असलेल्या रूपांत सर्वांत अधिक महत्त्वाची आहेत. मात्र कुठल्याही रूपात असो त्याच्या सत्यासत्यत्वाविषयी आज काहीही माहिती उपलब्ध नाही.

ह्या सिद्धांतावर अवलंबून आहेत, पण त्याच्याशी समानार्थी आहेत की नाही हे माहिती नाही, अशी प्रविधाने असंख्य आहेत, आणि ती महत्त्वाचीही आहेत. प्रथम

बेरीज आणि गुणाकार यांच्यातील संबंध घ्या. आपल्याला स्वाभाविकतःच असे वाटते की प्रत्येकी μ पदे असलेल्या आणि परस्परवियुक्त असलेल्या ν वर्गांमध्ये एकूण $\mu \times \nu$ पदे असली पाहिजेत. ज्या वेळी ν सान्त असेल त्या वेळी हे सिद्ध करता येईल. पण ν ज्या वेळी अनन्त असेल त्या वेळी गुणन-सिद्धांताशिवाय हे सिद्ध करता येणार नाही; विशेष परिस्थितीत जर उद्ग्राहकांचे अस्तित्व सिद्ध करता येत असेल तर तसा एखादा अपवाद मिळेलही. गुणन-सिद्धांताचा प्रवेश पुढीलप्रमाणे होतो : समजा, आपल्याकडे प्रत्येकी μ पदे असलेल्या परस्पर वियुक्त अशा वर्गांचे दोन संच आहेत, आणि पहिल्या संचाचा संयोग, बरोबर दुसऱ्या वर्गाचा संयोग असे आपल्याला दाखवावयाचे आहे. हे सिद्ध करण्याकरता आपल्याला एखादा एक–एक संबंध प्रस्थापित केला पाहिजे. आता, प्रत्येक संचात ν वर्ग असल्याने त्यांच्यात काही ना काही प्रकारचा एक–एक संबंध असला पाहिजे; पण आपल्याला त्यांच्या पदांमधील एक–एक संबंध पाहिजे आहे. त्या वर्गातील S हा एखादा एक–एक संबंध घ्या. मग जर κ आणि λ हे वर्गांचे दोन संच असतील आणि α हा κ मधील एक वर्ग असेल तर S ला अनुलक्षून त्याच्याशी सहसंबंध असणारा, λ मध्ये β हा एक वर्ग असेल. आता α आणि β मध्ये μ च पदे आहेत आणि म्हणून ते सदृश असणार. α आणि β मध्ये याप्रमाणे एक–एक सहसंबंध असणार. अडचण इथे आहे की असे कित्येक (संबंध)

पृ. १२५ असतील. κ ची बेरीज आणि λ ची बेरीज यांच्यातील सहसंबंध मिळवण्याकरता आपल्याला, सहसंबंधकांच्या वर्गाच्या एका संचातून एक उद्ग्रहण उचलले पाहिजे. या संचातील एक वर्ग म्हणजे α आणि β मधील सर्व एक–एक सहसंबंधक होत. जर κ आणि λ हे अनंत असतील तर, गुणन-सिद्धांत सत्य असल्याचे माहिती असल्याशिवाय अशा तऱ्हेचे उद्ग्रहण, अस्तित्वात असल्याचे सर्वसाधारणपणे आपल्याला कळू शकणार नाही. म्हणून आपल्याला बेरीज आणि गुणाकार यांच्यातील नेहमीचा संबंध प्रस्थापित करता येणार नाही.

या माहितीचे बरेच विलक्षण निष्कर्ष आहेत. आरंभी आपल्या परिचयाचे $\aleph_0^2 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ हे विधान घेऊ. यावरून सामान्यतः असे अनुमान काढले जाते की प्रत्येकी $\aleph_0$ पदे असलेल्या $\aleph_0$ वर्गांच्या बेरजेतही $\aleph_0$ च सदस्य असतात. पण हे अनुमान तर्कदुष्ट आहे, कारण अशा बेरजेत $\aleph_0 \times \aleph_0$ आणि परिणामतः $\aleph_0$ पदे असतात हेच आपल्याला माहिती नाही. ह्याची सत्यता सान्तातीत क्रमिक संख्यांवर आधारित आहे. ज्या क्रमिक संख्येला $\aleph_0$ पूर्वचर असतील त्याला कांटोर "द्वितीय वर्ग" म्हणतो. म्हणजे ही क्रमिक संख्या असलेल्या मालिकेच्या क्षेत्रात $\aleph_0$ पदे असतात हे सिद्ध करणे कठीण नाही. तसेच, जर आपण द्वितीय वर्गाच्या क्रमिक संख्यांची कोणतीही श्रेढी घेतली, तर त्यांच्या मर्यादेचे पूर्वचर, जास्तीत जास्त प्रत्येकी $\aleph_0$ पदे असलेल्या $\aleph_0$ वर्गांच्या बेरजेइतके राहतील, हे दाखवणेही अवघड नाही. यावरून पुढील अनुमान काढतात – जर गुणन– सिद्धांताचे सत्यत्व गृहीत धरले नाही तर मात्र ते अनुमान

तर्कदुष्ट असते– की मर्यादेच्या अनुचरांची संख्या $\aleph_0$ असते आणि म्हणून मर्यादा ही "द्वितीय वर्गाची" संख्या असते. म्हणजे द्वितीय वर्गाच्या क्रमिक संख्यांच्या कोणत्याही श्रेढीची मर्यादा सुद्धा द्वितीय वर्गाची क्रमिक संख्या असते हे सिद्ध केले असे समजणेच होय. हे प्रविधान आणि त्याचबरोबर ω_1 (तृतीय वर्गातील लघुतम क्रमिक संख्या) कोठल्याही श्रेढीची सीमा नसते, हे उपप्रमेय, यांची आवश्यकता द्वितीय वर्गाच्या क्रमिक संख्यांच्या कोणत्याही मान्य मीमांसेत असते. गुणन–सिद्धांताचा अंतर्भाव ज्या रीतीने होतो त्या दृष्टीने पाहता, हे प्रविधान आणि हे उपप्रमेय, ही सिद्ध झाली असे म्हणता येणार नाही. तीं सत्य असतील किंवा नसतील. तूर्त आपल्याला माहिती नाही इतकेच म्हणता येईल. तेव्हा द्वितीय वर्गाच्या क्रमिक संख्यांच्या मीमांसेचा बराच मोठा भाग असिद्धच मानला पाहिजे.

हा मुद्दा स्पष्ट करण्याकरता आणखी एक उदाहरण बहुधा उपयोगी होईल. $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$ हे आपल्याला माहिती आहे. तेव्हा आपल्याला असे समजता येईल की $\aleph_0$ जोड्यांच्या बेरजेत $\aleph_0$ पदे असतील. पण काही प्रसंगी असे असते, असे जरी आपल्याला सिद्ध करता आले तरी गुणन-सिद्धांत गृहीत धरल्याशिवाय तसे *नेहमीच* घडेल असे सिद्ध करता येणार नाही. हे एका लक्षाधीशाच्या

पृ. १२६

(काल्पनिक) उदाहरणाने दिसेल. तो ज्या वेळी बुटांची एखादी जोडी विकत घेई त्याच वेळी (आणि एरवी कधीही नाही) तो मोज्यांचीही जोडी आणी. आणि हे दोन्ही विकत आणण्याची त्याला इतकी हौस होती की सरतेशेवटी त्याजजवळ बुटांच्या $\aleph_0$ जोड्या आणि मोज्यांच्या $\aleph_0$ झाल्या. प्रश्न असा की : त्याच्याजवळ किती बूट आणि किती मोजे होते? एखाद्याला स्वाभाविकपणेच वाटेल की त्याच्याजवळ दुप्पट बूट आणि दुप्पट मोजे असणार आणि ज्या अर्थी $\aleph_0$ ची दुप्पट केल्यामुळे संख्या वाढत नाही त्या अर्थी त्याच्याजवळ प्रत्येकी $\aleph_0$ असणार. पण प्रत्येकी μ पदे असणाऱ्या ν वर्गाच्या बेरजेचा $\mu \times \nu$ शी संबंध जोडण्याची जी पूर्वी अडचण मांडली त्याचे हे एक उदाहरण आहे. कधी हे करता येते तर कधी येत नाही. आपल्या उदाहरणात, हे बुटांच्या बाबतीत करता येईल तर मोज्यांच्या बाबतीत एखादी कृत्रिम युक्ती वापरल्याशिवाय करता येणार नाही. असा भेद होण्याचे कारण असे : बुटांच्या बाबतीत डावा आणि उजवा असा फरक करता येईल आणि आपल्याला प्रत्येक जोडीतून निवड (उद्ग्रहण) करता येईल. उदाहरणार्थ, आपण सर्व उजवे किंवा सर्व डावे बूट घेऊ शकू. परंतु मोज्यांच्या बाबतीत असे निवडीचे कोणतेही तत्त्व सहज सुचत नाही; आणि गुणन–सिद्धांत गृहीत धरल्याशिवाय ज्या वर्गात प्रत्येक जोडीतील नेमका एक मोजा आहे असा वर्ग अस्तित्वात असल्याबद्दल आपण कोणतीही खात्री देऊ शकत नाही. आणि म्हणूनच प्रश्न आहे.

हे आपण निराळ्या रीतीने मांडू. एखाद्या वर्गात $\aleph_0$ पदे आहेत हे सिद्ध करण्याकरता त्यातील पदे श्रेढीत रचता येणे आवश्यक व पुरेसे आहे. बुटांच्या बाबतीत

हे करताना कोणतीच अडचण येत नाही. जोड्यांपासून $\aleph_0$ मिळू शकते, आणि त्यांच्यापासून श्रेढीचे एक क्षेत्रही मिळते. जोड्यांचा क्रम न बदलता प्रत्येक जोडीतील प्रथम डावा आणि मग उजवा बूट घ्या; ह्या पद्धतीने आपल्याला बुटांची श्रेढी मिळते. पण मोज्यांमधून आपल्याला कशीही निवड करावी लागेल; प्रत्येक जोडीतील कुठला मोजा घ्यावयाचा ? आणि निवड करण्याचे तर वाटेल तेवढे, अगणित प्रकार, म्हणजे अशक्यच. जोवर आपल्याला निवडीचा नियम म्हणजेच उद्ग्राहक संबंध मिळत नाही तोवर निवड तत्त्वतः तरी शक्य होईल किंवा नाही हे आपल्याला समजणार
पृ. १२७ नाही. उदाहरणार्थ, मोज्यांचे गुरुत्वमध्य घ्या. अवकाशात P हे बिंदू असे असतील की कोणत्याही जोडीतील मोज्यांच्या गुरुत्वमध्यांची P पासूनची अंतरे अगदी सारखी नसतील; तेव्हा ज्याच्या गुरुत्वमध्याचे अंतर P पासून किमान असेल, असा मोजा आपण घेऊ शकू. पण याप्रकारे निवड करणे नेहमीच शक्य होईल ह्याला कोणताच तात्विक आधार नाही, आणि वाचकांच्या सौजन्याला आवाहन करून, मोज्यांच्या बाबतीत हे कसे अशक्य आहे ते दाखवता येईल.

प्रत्येक जोडीतील एक मोजा निवडणे हे जर **अशक्य आहे** तर मोजे, श्रेढीमध्ये रचता **येणार नाहीत** हे उघड आहे हे लक्षात घ्यावे. आणि म्हणून ते एकूण $\aleph_0$ नाहीत. या उदाहरणावरून असे दिसते की जर μ ही अनंत संख्या असेल तर μ जोड्यांच्या एका संचात जेवढी पदे असतील तितकीच पदे μ जोड्यांच्या दुसऱ्या संचात असतील असे नाही; कारण बुटांच्या $\aleph_0$ जोड्यांत मिळून एकूण $\aleph_0$ बूट होते पण गुणन–सिद्धांत मानल्याशिवाय किंवा वर वर्णन केल्याप्रमाणे दैवाधीन अशा भौमितिक पद्धतीचा अवलंब केल्याशिवाय मोज्याच्या संदर्भात आपल्याला तशी खात्री देता येणार नाही.

गुणन–सिद्धांताचा अंतर्भाव असलेला आणखी एक प्रश्न म्हणजे आत्मक्षेपित्वाचा अविगामित्वाशी असलेला संबंध. आत्मक्षेपी संख्या अविगामी असते. पण (तूर्त जी माहिती उपलब्ध आहे त्यावरून) गुणन सिद्धांताशिवाय व्यस्त सिद्ध करता येणार नाही असे आपण आठव्या प्रकरणात निदर्शनास आणले होते हे आठवत असेल. हे पुढीलप्रमाणे मांडता येईल :

ज्यात $\aleph_0$ पदे असलेला उपवर्ग अंतर्भूत आहे तो वर्ग आत्मक्षेपी असतो हे दाखवणे सोपे आहे. (अर्थात, त्या स्वतः वर्गातच $\aleph_0$ पदे असली तरी चालेल.) तेव्हा, शक्यतोवर आपल्याला असे दाखवावयाचे आहे की, कोणत्याही अविगामी वर्गात कोणत्याही विगामी वर्गापेक्षा अधिक पदे असतात. हे दाखवण्यात, किंवा निराळ्या शब्दांत, जर α हा अविगामी वर्ग असेल आणि ν ही कोणतीही विगामी संख्या असेल तर, ν पदे असलेला α चा एकतरी उपवर्ग असतो हे दाखवण्यात काहीही अडचण येत नाही. आपण α च्या सान्त उपवर्गांचे संच बनवू. पहिला वर्ग ज्यात एकही पद नाही असा. मग ज्यात एक पद आहे असे वर्ग (असे वर्ग α मध्ये जितकी पदे आहेत तितके

होतील). मग ज्यात दोन पदे आहेत असे इ. याप्रमाणे आपल्याला उपवर्गांच्या संचांची श्रेढी मिळते. प्रत्येक संचात दिलेल्या सान्त संख्येइतकी पदे असलेले
पृ. १२८ वर्ग असतात. अद्यापपर्यंत आपण गुणन सिद्धांत वापरलेला नाही,
पण α च्या उपवर्गांच्या संग्रहाची संख्या आत्मक्षेपी असल्याचे दाखवले आहे; म्हणजेच, जर α च्या सदस्यांची संख्या μ असेल आणि त्यामुळे α च्या उपवर्गांची संख्या 2^{μ} असेल आणि उपवर्गांच्या विविध संग्रहांची संख्या $2^{2^{\mu}}$ असेल, तर μ विगामी नसल्यास $2^{2^{\mu}}$ आत्मक्षेपी असली पाहिजे असे दाखवले आहे. पण आपण जे सिद्ध करण्यास निघालो त्यापेक्षा हे फारच दूर आहे.

ह्या मुद्याच्या पुढे जाण्याकरता आपणाला गुणन-सिद्धांताचा उपयोग केला पाहिजे. ज्यात फक्त रिक्तवर्ग आहे तो उपवर्ग वगळून उपवर्गांच्या बाकीच्या प्रत्येक संचामधून एकेक उपवर्ग निवडू. म्हणजे आपण एक पद असलेला एक उपवर्ग, समजा α_1 निवडला दोन पदे असलेला एक, समजा α_2 निवडला; तीन पदे असलेला एक, समजा α_3 निवडला इ. (गुणन-सिद्धांत गृहीत धरला तरच आपल्याला हे करता येईल, नाहीतर नेहमीच हे करता येईल किंवा नाही हे सांगता येणार नाही.) याप्रमाणे आपल्याकडे उपवर्गांच्या संग्रहाच्या श्रेढीऐवजी $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ अशी α च्या उपवर्गांची श्रेढी झाली; म्हणजे आपण आपल्या उद्दिष्टाच्या जवळ एक पायरी आलो. गुणन–सिद्धान्त गृहीत धरल्यावर जर μ अविगामी संख्या असेल तर 2^{μ} आत्मक्षेपी संख्या असते हे आता आपल्याला माहिती झाले आहे.

पुढच्या पायरीत $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ ह्या श्रेढीत α चे नवनवीन सदस्य कोणत्या विशिष्ट अवस्थेत येतात हे जरी खात्रीलायक कळत नसले तरी वेळोवेळी ते येत राहतात इतके निश्चितपणे सांगता येते हे लक्षात घ्या. कसे ते पाहू. α_1 ह्या वर्गात एक पद आहे. हे पद म्हणजे नवीन सुरवात आहे. ह्या पदाला x_1 म्हणू. दोन पदे असलेल्या α_2 मध्ये x_1 असेल किंवा नसेल; जर असेल तर त्यामुळे एकच नवे पद पुढे येते, नसेल तर दोन नवीन पदे आली असणार समजा ही पदे x_2 आणि x_3 आहेत अशा वेळी α_3 मध्ये x_1, x_2, x_3, हीच तीन पदे असणे, शक्य आहे. आणि त्यामुळे एकही नवीन पद पुढे येणार नाही, पण मग α_4 मुळे नवीन पद पुढे आलेच पाहिजे. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ $\ldots\alpha_\nu$ ह्या पहिल्या ν वर्गांमध्ये जास्तीत जास्त $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \nu$
म्हणजे $\nu(\nu+1)/2$ इतकी पदे असणार; त्यामुळे जर
पृ. १२९ पहिल्या ν वर्गात पदांची पुनरुक्ती झालेली नसेल तर $(\nu+1)$
व्या वर्गापासून $\nu(\nu+1)/2$ व्या वर्गापर्यंत पुनरुक्तीच होत राहणे शक्य आहे. पण तोवर पुढच्या वर्गात सदस्यांची योग्य ती संख्या म्हणजे

$\nu(\nu+1)/2+1$ होण्याकरता जुनी पदे पुरी पडणार नाहीत. म्हणून जर इथवर नवीन पदे आली नसतील तर या ठिकाणी तरी नवीन पद आलेच पाहिजे. यावरून असे दिसते की $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$......ह्या आपल्या श्रेढीतून जे वर्ग पूर्णपणे पूर्वीच्या वर्गातील सदस्यांमुळेच बनलेले असतात ते जरी वगळले तरी आपल्याला श्रेढी मिळेलच. आपल्या नव्या श्रेढीला आपण $\beta_1, \beta_2, \beta_3,$......म्हणू. (आपल्याला $\alpha_1 = \beta_1$ आणि $\alpha_2 = \beta_2$ मिळेलच. कारण α_1 आणि α_2 मध्ये नवीत पद येणारच पण $\alpha_3 = \beta_3$ असेलच असे नाही. मात्र सामान्यपणे बोलावयाचे तर प्रत्येक β_μ हा कोणतातरी α_ν च्या समान असणार आणि ν ही μ पेक्षा मोठी (अथवा समान) संख्या असणार, म्हणजे प्रत्येक β हा कोणता तरी α च असणार.) आता हे β असे आहेत की कोणत्याही β मध्ये (समजा β_μ मध्ये) पूर्वीच्या एकाही β मध्ये न आलेली पदे असणारच. β_μ मधील नवीन पदांच्या भागाला γ_μ म्हणू. आता आपल्याला $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$......ही नवीन श्रेढी मिळेल. (पुन्हा γ_1 म्हणजे β_1 म्हणजेच α_1 असेल; जर α_2 मध्ये α_1 मधील सदस्य आलेला नसेल तर $\gamma_2 = \beta_2 = \alpha_2$ असेल, पण जर α_2 मध्ये α_1 चा सदस्य असेल तर γ_2 मध्ये α_2 मधील केवळ दुसरा सदस्यच असेल.) γ ची ही नवीन श्रेढी परस्परवियुक्त वर्गांची राहील. मग त्यांच्यातील उद्ग्रहणांमुळे श्रेढी होईल. म्हणून जर x_1 हा γ_1 चा सदस्य x_2 हा γ_2 चा सदस्य, x_3 हा γ_3 चा सदस्य, असतील......, तर $x_1, x_2, x_3,$ ...... ही श्रेढी होईल आणि ती α चा उपवर्ग होईल. गुणन-सिद्धांत गृहीत धरल्यावर उद्ग्रहण करणे शक्य आहे. तेव्हा गुणन-सिद्धांत दोनदा वापरून आपण असे सिद्ध करू शकतो की जर सिद्धांत सत्य असेल तर प्रत्येक अविगामी प्रधानांक आत्मक्षेपी असतो. जर सिद्धांत सत्य असेल तर प्रत्येक वर्ग सुक्रमित करता येतो ह्या त्सेर्मेलोच्या सिद्धांतावरूनही हे मिळवता येईल. कारण सुक्रमित मालिकेच्या क्षेत्रातील पदांची संख्या एक तर सान्त किंवा आत्मक्षेपी संख्या असली पाहिजे.

वरील प्रत्यक्ष युक्तिवादाचा जो एक लाभ आहे; तो त्सेर्मेलोच्या सिद्धांतात वापरण्यात नाही; हा लाभ असा : वरील युक्तिवादामध्ये गुणन सिद्धांताची सार्वत्रिक सत्यता अपेक्षिलेली नाही. तर ती $\aleph_0$ वर्गांच्या संचाला लागू होण्यापुरतीच अपेक्षिलेली आहे. सिद्धांत $\aleph_0$ वर्गांपुरता सत्य असून अधिक मोठ्या वर्गांच्या बाबतीत सत्य नाही असे असू शकेल. याच कारणाकरता शक्यतोवर अधिक संकुचित असे
पृ. १३० गृहीत घेणे चांगले. वरील प्रत्यक्ष युक्तिवादातील गृहीत असे की $\aleph_0$ पदांच्या गुणाकारातील एक तरी पद 0 असल्याशिवाय गुणाकार 0 होऊ शकणार नाही. हे गृहीत आपण "$\aleph_0$ गुणनीय (Multipliable) अंक आहे" अशा शब्दांत व्यक्त करू. ज्या वेळी ν गुणकांपैकी एक तरी 0 असल्याशिवाय

त्यांचा गुणाकार 0 होऊ शकत नाही अशी स्थिती असेल त्या वेळी ν ला आपण गुणनीय अंक म्हणू. कोणतीही *सान्त* संख्या गुणनीय असते असे आपण *सिद्ध* करू शकू. पण कोणतीही अनंत संख्या तशी असते हे आपल्याला सिद्ध करता येणार नाही. सर्व प्रधानांक गुणनीय असतात, ह्या गृहीताशी गुणन-सिद्धांत समानार्थी आहे. पण आत्मक्षेपित्वाचे, अविगामित्वाशी साधर्म्य दाखवण्याकरता, किंवा बूट आणि मोजे यांचा प्रश्न सोडवण्याकरता, किंवा द्वितीयवर्गी संख्यांची कोणतीही श्रेढी द्वितीयवर्गी असते, हे दाखवण्याकरता मात्र आपल्याला फक्त $\aleph_0$ गुणनीय आहे इतके संकुचित गृहीत धरून चालेल.

प्रस्तुत पाठात चर्चिलेल्या विषयासंबंधी पुष्कळ संशोधन व्हावयाचे असेल हे असंभाव्य नाही. गुणन-सिद्धांत जिथे अंतर्भूत आहे अशी प्रविधाने त्या सिद्धांताशिवायच सिद्ध करता येतात असे प्रकारही सापडू शकतील. गुणन-सिद्धांत त्याच्या सामान्य स्वरूपात असत्य असल्याचे दाखवणे सत्य आहे असे मनात येऊ शकेल. या दृष्टीने पाहता त्सेर्मेलोच्या प्रमेयाविषयी चांगली आशा वाटते : संतत मालिकांतील किंवा त्यांपेक्षाही अधिक दृढ मालिकांतील पदे सुक्रमित करणे शक्य नाही असे *कदाचित* सिद्ध करता येईल आणि त्यामुळे त्सेर्मेलोच्या सिद्धांताला अनुसरून गुणन-सिद्धांत अशक्य असल्याचे आपण दाखवू शकू. पण असे करण्याचा कोणताही मार्ग अजून तरी उपलब्ध नाही. आणि हा विषय अजूनही संदिग्धतेच्या धुक्यात गुरफटलेला आहे.

□ □

प्रकरण १३

अनंताचा सिद्धान्त आणि तार्किक जाती

अनंताचा सिद्धान्त म्हणजे खालीलप्रमाणे मांडलेले एक गृहीत
पृ. १३१ आहे : " जर n हा कोणताही विगामी प्रधानांक असेल तर ज्यात n पदे आहेत असा (वस्तूंचा) एकतरी वर्ग असतोच "

जर हे सत्य असेल तर n पदे असलेले, वस्तूंचे अनेक वर्ग असतील आणि जगातील सर्व वस्तूंचा वर्ग विगामी असणार नाही, हे अर्थातच उघड आहे. कारण सिद्धान्तावरून n + 1 पदे असणारा एक तरी वर्ग असणारच. यावरून n पदांचे अनेक वर्ग असणार आणि त्यामुळे जगातील वस्तूंची संख्या n नसणार. जर n ही *कोणतीही* विगामी संख्या असेल तर यावरून, जगातील वस्तूंची संख्या कोणत्याही विगामी संख्येपेक्षा (जर आपला सिद्धांत सत्य असेल तर) जास्त असणार हे सरळ येते. विगामीही नाहीत आणि आत्मक्षेपीही नाहीत असे प्रधानांक असण्याच्या शक्यतेविषयी आपल्याला मागच्या प्रकरणात जे काही दिसले त्या दृष्टीने पाहता गुणन सिद्धांत गृहीत धरल्याशिवाय जगात निदान $\aleph_0$ वस्तू आहेत असा निष्कर्षही, आपल्या सिद्धांतापासून काढता येणार नाही. पण वर्गांचे निदान $\aleph_0$ वर्ग आहेत हे आपल्याला माहिती आहे आणि विगामी प्रधानांक हे वर्गांचे वर्ग असल्याने, जर आपला सिद्धांत सत्य असेल तर त्यांची श्रेढी होते. ह्या सिद्धांताची गरज ज्या परिस्थितीत उद्भवते ती पुढीलप्रमाणे स्पष्ट करता येईल :– पेआनोच्या गृहीतांपैकी एक गृहीत असे आहे की, कोणत्याही दोन विगामी प्रधानांकांचा अनुचर समान असणार नाही. म्हणजे जर m आणि n हे विगामी प्रधानांक असतील तर m = n असल्याशिवाय m + 1 = n + 1 मिळणार नाही. जवळजवळ पेआनोच्या वरील गृहीतासारखेच गृहीत मानण्याचा प्रसंग आठव्या प्रकरणात आला होता. म्हणजे जर n हा विगामी
पृ. १३२ प्रधानांक असेल तर n हा n + 1 इतका असणार नाही. आपल्याला हे सिद्ध करता येईल असे वाटण्याची शक्यता आहे. जर α हा विगामी वर्ग असेल आणि α च्या सदस्यांची संख्या n असेल तर n ही संख्या n + 1 इतकी असणार नाही, हे आपल्याला दाखवता येईल. हे प्रविधान विगमनाने सिद्ध करता येईल. यावरून पहिले सिद्ध होते असे वाटण्याचा संभव आहे. पण प्रत्यक्षात मात्र

तसे होत नाही. कारण α म्हणून काही वर्गच अस्तित्वात नसणे शक्य असेल. म्हणून त्यात काय सिद्ध होत असेल तर हे : ज्यात n सदस्य आहेत असा एक वर्ग असेल असा n हा विगामी प्रधानांक असेल तर n हा n + 1 इतका असणार नाही. n सदस्य असलेले वर्ग अस्तित्वात असतात अशी ग्वाही (खरी किंवा खोटी) आपल्याला अनंताच्या सिद्धांतामुळे मिळते आणि त्यामुळे n हा n + 1 बरोबर नसेल असे आपण प्रतिपादन करू शकतो. पण हा सिद्धांत मानला नाही तर n आणि n + 1 दोन्ही वर्ग रिक्त वर्ग आहेत अशा अवस्थेत आपण सापडू.

ही शक्यता उदाहरणाने स्पष्ट करू. समजा जगात फक्त 9 व्यक्ती (Individual) आहेत. (" व्यक्ती " ह्या शब्दाविषयी वाचकांनी थोडा धीर धरावा असे मी त्यांना सांगेन.) 0 ते 9 पर्यंतचे विगामी प्रधानांक आपल्या अपेक्षेप्रमाणेच आहेत. पण 10 (व्याख्येनुसार 9 + 1) म्हणजे रिक्त वर्ग असेल. n + 1 ची व्याख्या पुढीलप्रमाणेकरता येते हे लक्षात घ्यावे ज्या वर्गात x हे पद आहे आणि ते पद काढून घेतल्यावर ज्यात n पदे शिल्लक राहतात अशा संग्रहाला n + 1 म्हणतात. ही व्याख्या लागू केल्यावर आपल्या असे लक्षात येते की 9 + 1 म्हणजे ज्यात एकही वर्ग नाही असा वर्ग असेल म्हणजेच रिक्त वर्ग असेल. हेच 9 + 2 किंवा सामान्यतः 9 + n करताही (n शून्य नसल्यास) सत्य असेल. तेव्हा 10 आणि तदनंतरचे सर्व विगामी प्रधानांक सारखेच राहतील, कारण ते सर्वच रिक्त असतील. अशा प्रकारात विगामी प्रधानांकांची, श्रेढी होऊ शकणार नाही. तसेच दोन संख्यांचे अनुचर सारखे नाहीत असेही होणार नाही, कारण 9 आणि 10 यांचा अनुचर एकच म्हणजे रिक्त वर्ग असणार. (10 स्वतःच रिक्तवर्ग आहे.) असल्या अंकगणिती आपत्तींना आळा घालण्याकरताच आपल्याला अनंताच्या सिद्धांताची आवश्यकता आहे.

वस्तुतः जोवर सान्त पूर्णांकाचे अंकगणित करण्यामुळे आपले काम होणार आहे, आणि जोवर आपल्याला, अनंत पूर्णांक किंवा अनंत वर्ग, किंवा पूर्णांकांची किंवा गुणोत्तरांची मालिका लागत नाही, तोवर इष्ट ती सर्व प्रमेये मिळवण्याकरता आपल्याला अनंताचा सिद्धांत लागणार नाही. म्हणजे असे की, आपल्याला
पृ. १३३ सांत पूर्णांक आणि गुणोत्तरे यांच्या बेरजा गुणाकार व घातकरण करता येतील, पण अनंत पूर्णांक आणि अपरिमेय संख्या (Irrationals) वापरता येणार नाहीत. म्हणजे सान्तातीत संख्या आणि वास्तव संख्या यांच्या मीमांसा करणे आपल्याला जमणार नाही. ही विविध प्रमेये कशी येतात ते आता सांगितले पाहिजे.

जगातील व्यक्तींची संख्या n मानल्यास व्यक्तींच्या वर्गांची संख्या 2^n होईल. ज्यात n सदस्य आहेत अशा वर्गामध्ये अंतर्भूत असलेल्या वर्गांची संख्या 2^n असते हे दाखवणे प्रकरण ८ मध्ये उल्लेखिलेल्या सामान्य प्रविधानामुळे साधते. आता 2^n, नेहमी

n पेक्षा मोठा असणार. त्यामुळे, जर आपण, (आताच पाहिल्याप्रमाणे), व्यक्तींची संख्या 9 मानली तर, वर्गांची संख्या 2^9 म्हणजे 512 होईल. म्हणजे जर आपल्या संख्यांचा उपयोग व्यक्तींच्या मोजणीकरता करण्याऐवजी वर्गांच्या मोजणीकरता करावयाचे ठरवले तर जोवर आपण 513 ला पोचत नाही तोवर आपले अंकगणित नेहेमीसारखे राहील. शून्य होणारी पहिली संख्या म्हणजे 513. आणि जर आपण पुढे वर्गांच्या वर्गांपर्यंत गेलो तर परिस्थिती आणखी चांगली होईल: त्यांची संख्या 2^{512} होईल. ही संख्या आपल्या कल्पनेच्या बाहेर प्रचंड आहे, कारण तिच्यात सुमारे 153 अंक असतील आणि जर आपण वर्गांच्या वर्गांच्या वर्गापर्यंत गेलो तर 2 चा 153 आकडी संख्येइतका घात आपल्याला मिळेल. ह्या संख्येतील अंकांची संख्या सुमारे 10^{152} च्या तिप्पट होईल. कागदाचा तुटवडा असलेल्या दिवसात ही संख्या लिहून काढणे अनिष्ट ठरेल, आणि आपल्याला आणखी दीर्घ संख्या हव्या असतील तर अशा, पाहिजे तेवढ्या लांब तार्किक उतरंडी रचून आपल्याला त्या मिळवता येतील. ह्या पद्धतीने तार्किक उतरंडींवर पुरेसे अंतर चढून जाऊन दिलेल्या कोणत्याही प्रधानांकाकरता एक स्थान मिळवून देता येईल.[१]

गुणोत्तरांच्या बाबतीतही अगदी तशीच परिस्थिती आहे. μ/ν ह्या गुणोत्तराजवळ जर इष्ट गुणधर्म असावयाचे असतील तर अचानकपणे रिक्तवर्गांचा प्रादुर्भाव होता कामा नये. त्यासाठी, ज्या प्रकारे मोजणी करावयाची आहे त्याला पुरतील इतक्या वस्तू उपलब्ध असतील हे पाहणे आवश्यक आहे. तार्किक उतरंडीवर केवळ पाहिजे तेवढे अंतर चढून जाऊन, अनंताचा सिद्धांत न वापरता, दिलेल्या कोणत्याही μ/ν ह्या गुणोत्तराकरता हे निश्चयाने करता येईल. जर व्यक्ती मोजून आपल्याला यश आले

पृ. १३४

नाही तर आपण व्यक्तींच्या वर्गांची मोजणी करून पाहू; तरीही जर यश आले नाही तर वर्गांचे वर्ग मोजून पाहू;... याप्रमाणे चालू ठेवू. शेवटी, जगात कितीही थोड्या वस्तू असल्या तरी μ वस्तूंपेक्षा अधिक वस्तू आहेत अशी अवस्था येईलच. मग μ कितीही मोठी विगामी संख्या असो. अगदी एकही वस्तू नसेल तरीही हे सत्य राहील. कारण मग एक वर्ग मिळेल, तो म्हणजे रिक्त वर्ग; वर्गांचे वर्ग 2, (वर्गांचा रिक्त वर्ग आणि रिक्त वर्ग हा एकच सदस्य असलेला वर्गांचा वर्ग[२]) वर्गांच्या वर्गांचे वर्ग एकूण ४, नंतर १६ नंतर ६५,५३६,... इ. तेव्हा दिलेला कोणताही अपूर्णांक मिळवण्याकरता किंवा दिलेले कोणतेही गुणोत्तर मिळवण्याकरता अनंताचा सिद्धांत वगैरे काहीही लागत नाही.

---

[१] ले. टी. : ह्या विषयावर Principia Mathematica, vol. ii *120 पाहणे गुणोत्तरांवरील तत्सम प्रश्नांकरता तोच ग्रंथ vol. iii. * 303 पाहणे.

[२] अ. टी. : हे सर्व चिन्हात लिहिल्यास अधिक स्पष्ट होईल. ϕ ह्या चिन्हाने रिक्त वर्ग दर्शवला जातो. वस्तू : शून्य, वर्ग : ϕ, वर्गांचे वर्ग : ϕ, $\{\phi\}$.

ज्यावेळी सर्व विगामी प्रधानांक किंवा गुणोत्तर, वापरावयाचे असतील, त्याच वेळी आपल्याला हा सिद्धांत लागतो. $\aleph_0$ चे अस्तित्व प्रस्थापित करण्याकरता आपल्याला विगामी प्रधानांकांचा संपूर्ण वर्गच लागतो; आणि श्रेढींचे अस्तित्व प्रस्थापित करण्याकरता संपूर्ण मालिका लागते. हे प्रस्थापित करावयाचे असेल तर, ज्यात एकही रिक्त विगामी प्रधानांक नसेल असा एखादा वर्ग किंवा मालिका तयार करणे आपल्याला शक्य झाले पाहिजे. खंड म्हणून, वास्तव संख्यांच्या व्याख्या करण्याकरता आपल्याला महत्त्वाचा क्रम असणारी गुणोत्तरांची संपूर्ण मालिका लागेल : गुणोत्तरांची मालिका दृढ (Compact) असल्याशिवाय केवळ ह्या व्याख्येमुळे आपल्याला इष्ट ते निष्कर्ष मिळणार नाहीत; आणि गुणोत्तरांची संख्या अनंत नसेल ता ती मालिका दृढ असूच शकणार नाही.

आतापर्यंत आपण ज्या पद्धतीने रचना करीत आलो तिच्या साह्याने अनंताचा सिद्धांत सिद्ध करता येईल असे वाटणे स्वाभाविक आहे. (प्रारंभीच्या दिवसांत मलाही तसे वाटत असे) पुढील म्हणणे पाहा: व्यक्तींची संख्या n मानू. n जरी शून्य असेल तरी आपला युक्तिवाद फसणार नाही, मग आपण व्यक्ती, वर्ग, वर्गांचे वर्ग, इ. सर्व एकत्रित घेऊन संपूर्ण संच बनविला तर आपल्या ह्या संचातील वस्तूंची संख्या

$$n + 2^n + 2^{2^n} + \ldots\ldots\ldots \text{ (अनंतवार)},$$

म्हणजे $\aleph_0$ येईल. याप्रमाणे, एकाच जातीच्या वस्तूंवर लक्ष

पृ. १३५

केंद्रित न करता सर्व जातीच्या वस्तू घेतल्या, तर आपल्याला अनंत वर्ग मिळेल. आणि म्हणून अनंताचा सिद्धांत लागत नाही, असा युक्तिवाद केला जाईल.

आता ह्या युक्तिवादात शिरण्यापूर्वी प्रथम यात काहीतरी गडबड घोटाळा आहे की काय ते पाहू. ह्या युक्तिवादामुळे, आपल्या टोपीतून निरनिराळ्या वस्तू काढून दाखवणाऱ्या जादूगाराची आठवण येते. ज्याने आपली टोपी जादुगाराला दिलेली असते त्याला, आपल्या टोपीत जिवंत ससा नव्हता याची खात्री असते. तरीसुद्धा टोपीत ससा कुठून आला म्हणून त्याचा गोंधळ उडतोच. सत्य परिस्थितीबद्दल ज्या वाचकांची धारणा दृढ आहे त्यांना व्यक्तींच्या सान्त संग्रहातून आपल्याला अनंत संग्रह घडवणे अशक्य आहे असा विश्वास असतो. फारतर वरील रचनेत काय गोम आहे ते त्याला सांगता येणार नाही. असल्या भ्रामक कल्पनांवर फार भर देणे चुकीचे ठरेल. इतर कल्पनांप्रमाणेच त्याही आपल्याला भलतीकडेच नेणे शक्य आहे. पण ज्या युक्तिवादातून त्या उद्भवतात त्याचे बारकाईने परिशीलन करण्यापुरता प्राथमिक आधार त्या पुरवतात. आणि ज्यावेळी वरील युक्तिवादाचे परिशीलन होईल त्या वेळी तो, माझ्या मते, सदोष असल्याचे आढळून येईल, आणि जरी तो तर्कदोष (Fallacy) सूक्ष्म असून तो सातत्याने टाळणे हे सोपे नाही. येथे अंतर्भूत असलेल्या तर्कदोषाला, "जातिसंभ्रम (Confusion of Types)" म्हणतात. "जाति" ह्या विषयाचे पूर्ण विवरण

करण्याकरता सबंध ग्रंथ लागेल; शिवाय जे विषय अजून संदिग्ध आहेत व ज्यांच्याबद्दल मतभेद आहेत ते टाळणे, आणि नवशिक्या वाचकांच्या सोईकरता, गणिताने ज्यांचे सत्यत्व मान्य केले आहे असे विषय वेगळे काढणे, हा या पुस्तकाचा हेतू आहे. जातिमीमांसा (Theory of Types) आपल्या विषयाच्या दृष्टीने परिपूर्ण आणि निश्चित भागात नीटपणे मोडत नाही : यासंबंधातील बहुतेक मीमांसा अद्यापि अपूर्ण संभ्रमित आणि अंधुक आहे. जातितत्त्वांच्या, अपेक्षित, अचूक रूपापेक्षा आपल्याला लागणारी काही तत्त्वे पाहणे विशेष सोपे आहे.

ही गरज, उदाहरणार्थ, " महत्तम प्रधानांकांच्या व्याघातामुळे (Contradiction) " उद्‌भवते. दिलेल्या वर्गात अंतर्भूत असलेल्या वर्गांची संख्या नेहमीच त्या वर्गातील सदस्यांच्या संख्येपेक्षा अधिक असते असे आपण
पृ. १३६ आठव्या प्रकरणात पाहिले आहे. त्यावरून आपण असे अनुमान काढले की महत्तम प्रधानांक अस्तित्वात नाही. पण क्षणापूर्वीच सुचवल्यानुसार जर आपण, व्यक्ती, व्यक्तींचे वर्ग, व्यक्तींच्या वर्गांचे वर्ग इ. सर्व एकाच वर्गात बसवले तर आपल्याला असा एक वर्ग मिळेल की त्याचे स्वतःचे उपवर्ग हे त्याचे सदस्यच होतील. ज्या वस्तू मोजता येतात, त्या कशाही प्रकारच्या असोत, अशा सर्व वस्तूंच्या वर्गाचा– असा वर्ग असलाच तर– प्रधानांक मोठ्यात मोठा असणार. त्याचे सर्व उपवर्ग त्याचे सदस्यच असल्याने, त्यात असलेल्या सदस्यांपेक्षा अधिक काही असू शकणार नाही. ह्याप्रमाणे आपल्याला विपर्यस्त उत्तर (व्याघात) मिळते.

१९०१ मध्ये, प्रथमतः माझा ह्या व्याघाताशी ज्या वेळी परिचय झाला त्या वेळी, ' महत्तम प्रधानांक अस्तित्वात नसतो ' ह्या, आठव्या प्रकरणात मांडलेल्या, कांटोरच्या सिद्धतेतील न्यून शोधण्याचा मी प्रयत्न केला. आपल्या कल्पनेत बसेल अशा सर्व वस्तूंच्या गृहीत वर्गाला ही सिद्धता लागू करून मला अधिक सोपा व्याघात मिळाला; तो असा :— आपण ज्या सर्वसमावेशक (म्हणजे सर्वांना व्यापणाऱ्या) वर्गाचा विचार करीत आहोत त्याने स्वतःलासुद्धा, सदस्य म्हणून समाविष्ट केले पाहिजे. निराळ्या शब्दांत, जर " सर्व काही " अशी गोष्ट असेल तर हे " सर्व काही ", म्हणजे " काही तरी " असले पाहिजे, आणि ते स्वतःसुद्धा त्या " सर्व काही " चा सदस्य असले पाहिजे. पण सर्वसामान्यपणे वर्ग, स्वतःचा सदस्य नसतो, उदाहरणार्थ, मानवसमाज म्हणजे मनुष्य नव्हे. आता जे वर्ग स्वतःचे सदस्य नाहीत अशांचा संग्रह करा. हा एक वर्ग आहे. तो स्वतःचा सदस्य आहे की नाही ? जर असेल तर जे स्वतःचे सदस्य नाहीत अशा वर्गांपैकी तो असणार, म्हणजेच तो स्वतःचा सदस्य नसणार; जर नसेल तर जे स्वतःचे सदस्य नाहीत अशा वर्गांपैकी तो नसणार, म्हणजेच तो स्वतःचा सदस्य असणार. म्हणजे तो स्वतःचा सदस्य आहे किंवा नाही या दोन्ही गृहीतांमध्ये आत्मव्याघात अनुस्यूत आहे. हाच तो व्याघात होय.

या रीतीने आपल्याला पाहिजे तितके व्याघात बनवणे शक्य आहे. त्यात काहीही कठीण नाही. जातिमीमांसेच्या साह्याने अशा व्याघातांचे पूर्ण विवरण Principia Mathematica मध्ये[1] आणि अधिक थोडक्यात, प्रस्तुत लेखकाने American Journal of Mathematics[2] आणि Revue de Metaphysique et de Morale[3] (रव्ह द मेताफिजीक ए द मोराल : सत्ताशास्त्र व नीतीशास्त्र याचे समीक्षण) यांतील लेखांमधून मांडले आहे.

पृ. १३७

ज्यांना " अशुद्ध " वर्ग म्हणता येईल असे वर्ग बनवण्यामुळे तर्कदोष निर्माण होतो. अशुद्ध वर्ग म्हणजे " जाति " दृष्ट्या शुद्ध नसलेले वर्ग. पुढच्या प्रकरणात आपण पाहणार आहोत की वर्ग म्हणजे तार्किक कल्पनाच (Fiction) होत, आणि एखाद्या वर्गाबाबतचे विधान जेव्हा त्या वर्गाचा उल्लेख केल्याशिवाय रूपांतरित करता येईल तेव्हाच त्याला अर्थ येईल. ह्यामुळे, वर्गाच्या नावांना ज्या मार्गांमुळे, प्रत्यक्ष नसला तरी नाममात्र, अर्थ प्राप्त होतो त्या मार्गांवर बंधन येतेः ज्या वाक्यात किंवा प्रतीकांच्या संचात चुकीच्या रीतीने भासमय नावे उद्भवतात ते चुकीचे नसते, पण ते केवळ अर्थहीन असते. एखादा वर्ग स्वतःचा सदस्य आहे अथवा नाही हे गृहीतच मूलतः ह्या प्रकारे अर्थहीन आहे. आणि अधिक व्यापकपणे बोलावयाचे तर, व्यक्तींचा एक वर्ग, व्यक्तींच्या दुसऱ्या वर्गाचा सदस्य आहे अथवा नाही हे गृहीत म्हणजे एक निरर्थक गृहीत आहे, तार्किक उतरंडीच्या दृष्टीने एकाच दर्जाच्या नसलेल्या सदस्यांचा एखादा वर्ग प्रतीकांच्या रूपात बनवणे म्हणजे ज्याला काहीही अर्थ नाही असे काहीतरी, प्रतीकांच्या साह्याने घडवणे होय.

तेव्हा जर जगात n वस्तू असतील आणि वस्तूंचे वर्ग 2^n असतील, तर वस्तू आणि वर्ग, दोन्हींचा अंतर्भाव करून, $n + 2^n$ सदस्य असणारा नवीन वर्ग तयार करता येत नाही. यामुळेच अनंताच्या गृहीताच्या अत्यावश्यकतेपासून सुटका करून घेण्याचा प्रयत्न फसतो. जातितत्त्वाचे मी विवरण केले आहे, किंवा स्थूल रूपरेषा सांगण्यापलीकडे काही केले आहे किंवा या तत्त्वाची गरजच काय हे तरी सांगितले आहे, असा आव मी

[1] ले. टी. : Vol. i, Introduction, chap. ii *12 आणि *20, vol. ii, Prefatory statement.

[2] ले. टी. : " Mathematical Logic as based on the Theory of Types ", vol. xxx, 1908, pp. 222–262.

[3] ले. टी. : " Les Paradoxes de la logique " (ले पारादोक्स ऽ द ला लोजिक; तर्कशास्त्राचे विरोधाभास), 1906 pp. 627–650.

आणीत नाही. पण जादुगारी पद्धतीने (पूर्वी पाहिलेल्या) अनंतसंख्या आणि वर्ग यांचे अस्तित्व आपण *सिद्ध* करू शकत नाही हे दाखवता येते, असे सांगणे इतकाच हेतू मी बाळगला आहे. तरीसुद्धा आणखीही ज्या काही पद्धती संभवतात, त्यांचा विचार केला पाहिजे.

अनंत वर्गाचे अस्तित्व सिद्ध करू, असा दावा करणाऱ्या विविध युक्तिवादांची माहिती Principles of Mathematice§ ३३९ (पृ. ३५७) मध्ये दिली आहे.

या युक्तिवादांमधील ' n हा विगामी प्रधानांक असेल तर n, n + 1 बरोबर असणार नाही ', ह्या गृहीतापुरता परामर्श आपण पूर्वीच घेतला

पृ. १३८

आहे. प्लेटोच्या Parmenides मधील एका परिच्छेदात असे एक विधान आहे. जर 1 ह्या प्रकारची काही एक संख्या असेल तर 1 ला अस्तित्व आहे, पण 1 आणि अस्तित्व ह्या वेगळ्या गोष्टी आहेत, म्हणून 1 आणि अस्तित्व मिळून दोन झाले आणि म्हणून 2 ही एक संख्या आहे. 1 आणि अस्तित्व यांजबरोबर दोन घेतल्यास आपल्याला 3 पदांचा वर्ग मिळतो; इ. हा युक्तिवाद तर्कदुष्ट आहे. एक म्हणजे " अस्तित्व " हे काही निश्चित अर्थ असलेले पद नव्हे, यामुळे आणि यापेक्षाही अधिक म्हणजे जर त्याच्याकरता निश्चित असा काही अर्थ शोधून काढला, तर असे दिसेल की संख्यांना अस्तित्वच नसते– संख्या म्हणजे ज्याला तार्किक कल्पना म्हणता येईल असे काहीतरी आहे; ज्या वेळी आपण वर्गाची व्याख्या करावयास जाऊ त्या वेळी हे पाहू.

0 ते n पर्यंतच्या (दोन्ही धरून) संख्यांची संख्या n + 1 आहे हे विधान, n आणि त्याच्या आधीची कोणतीही संख्या आपल्या अनुचराबरोबर नसते ह्यावर अवलंबून आहे. आणि जर अनंताचा सिद्धांत असत्य असेल तर हे नेहमीच सत्य राहील असे नाही. जगातील सर्व व्यक्तींच्या संख्येपेक्षा n अधिक असेल तर सान्त n करता मिळणारे n = n + 1 हे समीकरण आत्मक्षेपी संख्यांच्या बाबतीतील तसल्याच समीकरणापेक्षा वेगळे आहे. आत्मक्षेपी संख्यांना हे लागू करताना त्याचा अर्थ n पदांचा एखादा वर्ग असेल तर त्यात एका पदाची भर घालून मिळणाऱ्या वर्गाशी तो " सदृश " असतो, असा आहे. पण जगातील वस्तूंच्या मानाने फार मोठ्या असलेल्या संख्येला ते लागू करताना त्याचा अर्थ n पदांचा वर्गच अस्तित्वात नाही आणि n + 1 पदांचाही नाही, असा होतो. आपण जर जातींची उतरंड n पदांचा वर्ग अस्तित्वात येईल इतकी मोठी रचली तर आपल्याला n + 1 पदांच्या वर्गाशी " सदृश " असा वर्ग मिळेल, असा याचा अर्थ होत नाही. कारण जर n विगामी असेल तर अनंताचा सिद्धांत खरा असो वा खोटा, हे घडणे शक्य नाही.

परावर्ती वर्गांचे अस्तित्व सिद्ध करण्याकरता Bolzano[1] आणि डेडकिंट[2] ह्या दोघांनी अवलंबिलेला असा एक युक्तिवाद आहे. हा युक्तिवाद, थोडक्यात, पुढील-प्रमाणे आहे : वस्तू ही त्या वस्तू विषयीच्या कल्पनेपेक्षा वेगळी
पृ. १३९ आहे. कोणत्याही वस्तूविषयी काही एक कल्पना (निदान ती अस्तित्वात असणे) असतेच. वस्तूचा, तिच्याविषयीच्या कल्पनेशी असलला संबंध एक–एक आहे, आणि कल्पना ह्या वस्तूंपैकीच आहेत. त्यामुळे "–बद्दलची कल्पना" हा संबंध संपूर्ण वर्गाचे स्वतःच्याच एका भागावर म्हणजे सर्व कल्पनांच्या मिळून झालेल्या भागावरील आत्मक्षेपणच होय. परिणामतः वस्तूंचा वर्ग आणि कल्पनांचा वर्ग दोन्ही अनंत आहेत. हा युक्तिवाद मनोरंजक आहे. केवळ युक्तिवाद म्हणूनच नव्हे तर त्यातील चुका (किंवा मला ज्या चुका वाटतात त्या) पाहणे बोधप्रद ठरेल. यातील मुख्य प्रमाद म्हणजे प्रत्येक वस्तूशी एखाद्या कल्पनेचे साहचर्य मानणे हा. "कल्पना" म्हणजे काय हे ठरवणे, अर्थातच, अत्यंत कठीण आहे; पण आपल्याला ते माहिती आहे असे समजू. मग समजा सॉक्रेटीसपासून आपण सुरुवात केली तर सॉक्रेटीस–बद्दल काही कल्पना आहे असे आपल्याला मानावे लागेल आणि पुढेही असेच म्हणता येईल. आता असल्या सगळ्या कल्पनांनाच लोकांच्या मनात प्रत्यक्ष अनुभवान्ती काही अस्तित्व आहे, अशी काही स्थिती नाही हे उघड आहे. दुसऱ्या किंवा तिसऱ्या पायरीनंतर ते भ्रामक ठरते. हा युक्तिवाद जर उचलून धरावयाचा असेल तर यात अभिप्रेत असलेल्या कल्पना अस्मानी, पोकळ अशाच असणार. कारण त्या जमिनीवरच्या निश्चितपणे नसतील. पण मग लगेच, अशा प्रकारच्या कल्पनांना अस्तित्व आहे की नाही याचीच शंका येते. अशा कल्पना. आहेत हे जर आपल्याला कळावयाचेच असेल तर त्या, काही एका तार्किक पायावर आधारित असल्या पाहिजेत आणि कोणत्याही गोष्टीच्या मागे कल्पना असली पाहिजे हे त्यावरून सिद्ध करता यावयास पाहिजे. हे उत्तर आपण निश्चितच अनुभवाच्या आधारावर मिळवू शकणार नाही. किंवा डेडकिंट प्रमाणे "meine Gedankenwelt" ला (माइन ऽ गेडान्केन्वेल्ट् : माझे विचार जगत) लागू करू शकणार नाही.

कल्पना आणि वस्तू यांच्यामधील संबंध तपासून पाहण्यापुरताच जर विचार आपल्याला करावयाचा असेल तर आपल्याला कित्येक प्रकारच्या मानसशास्त्रीय आणि तर्कशास्त्रीय चौकशांच्या उद्योगात पडावे लागेल. आणि आपल्या मूळ हेतूशी तर ते

---

[1] ले. टी. : Bolzano, Paradoxien des Unendlichen पारादोक्सियेन देस उनएंडलिशेन 13. अनंताचे असत्याभास.

[2] ले. टी. : Was sind und was sollen die zahlen? वास झिंट् उंट वास झोलेन डी त्सालेन N. 66. संख्या काय आहेत आणि काय असतील?

सुसंगत नाही. पण पुढचे आणखी काही मुद्दे पाहिले पाहिजेत. जर "कल्पना" ही तर्कशुद्ध रीतीने समजावून घ्यावयाची असेल तर ती वस्तूशी *एकरूप* असली पाहिजे. नाही तर ते *वर्णन* ठरेल. (याबद्दल नंतरच्या प्रकरणात खुलासा केला आहे.) पहिल्या प्रकारात युक्तिवाद फसतो, कारण आत्मक्षेपित्वाच्या सिद्धतेसाठी वस्तू आणि कल्पना भिन्न ठरतील. दुसऱ्या प्रकारच्या वेळीही युक्तिवाद फसतोच कारण वस्तू आणि वर्णन यांच्यातील संबंध एक–एक नसतो. दिलेल्या कोणत्याही वस्तूची असंख्य अचूक वर्णने असू शकतात. सॉक्रेटीसचे वर्णन (उदाहरणार्थ) "प्लेटोचा गुरु" असे करता येईल, किंवा "विष प्यालेला तत्त्वज्ञ" किंवा "झांटिपेचा पती" असेही वर्णन करता येईल. जर दुसरे गृहीत घेऊन– "कल्पनेची" मानसशास्त्रीय उपपत्ती द्यावयाची असेल तर जिला वस्तूची *एकमेव* (The) कल्पना असे म्हणता येईल अशी एकही निश्चित मानसशास्त्रीय चीज नाही.

पृ. १४०

ज्यांना वस्तूची एक कल्पना असे म्हणता येईल असे असंख्य दृष्टिकोण किंवा प्रकार आहेत. म्हणजे आपण असे म्हणू शकू की "सॉक्रेटिसबद्दलची माझी कल्पना तुमच्या-पेक्षा निराळी आहे." पण सॉक्रेटीसबद्दलच्या विविध कल्पनांना एकत्र बांधून ठेवू शकतील अशी एकही मध्यवर्ती कल्पना (स्वतः सॉक्रेटीस वगळल्यास) नाही. आणि वर युक्तिवादात मांडल्याप्रमाणे वस्तू आणि कल्पना यांच्यात कोणताही एक-एक संबंध राहाणार नाही. तसेच जगातील वस्तूंपैकी काही थोड्या वस्तू सोडल्या तर इतर वस्तूंच्या संबंधित अशा काही कल्पना आहेत असे, अर्थाची कितीही ओढाताण केली तरी म्हणता येणार नाही; हे मानसशास्त्रीय सत्य आहे आणि आपण ते पूर्वीच पाहिले आहे. ह्या सर्व कारणास्तव, आत्मक्षेपी वर्गाच्या तार्किक अस्तित्वाला अनुकूल वाटणारा वरील युक्तिवाद त्याज्य ठरला पाहिजे.

तार्किक युक्तिवादांविषयी काहीही म्हटले असले तरी अवकाश आणि काळ, रंगांची विविधता इत्यादी वरून करता येणारे *आनुभविक* युक्तिवाद, वस्तुविशेषांचे (Particualrs) अनंतत्व सिद्ध करण्यास अगदी पुरेसे आहेत, असे वाटण्याची शक्यता आहे. माझा ह्यावर विश्वास नाही आणि जोवर अवकाश आणि काळ ह्या वास्तव गोष्टी आहेत, गणिती कल्पना नव्हेत, तोवर अवकाश आणि काळ संतत आहेत किंवा निदान दृढ आहेत असे आपण मानणे स्वाभाविक आहे. पण पुन्हा हाही मुख्यतः पूर्वग्रहच. वास्तवशास्त्रातील पुंज उपपत्ती (Quantum theory), सत्य किंवा असत्य असली तरी सांतत्याची सिद्धता देणे, वास्तवशास्त्राला परवडणारे नाही, असेच दाखवते. कदाचित सांतत्य नसल्याचेच त्या उपपत्तीवरून सिद्ध होईल. संतत गती आणि तुटक साखळीची वेगवान गती यातील मतभेद कळवण्याइकी इंद्रिये पुरेशी कार्यक्षम नसतात; हे आपल्याला चित्रपटामुळेही कळते. ज्या जगात गती ही छोट्या, सान्त अशा झटक्यांच्या

मालिकेची बनलेली असेल ते जग, ज्यात गती संतत असेल त्या जगापासून, अनुभवाच्या साह्याने वेगळे करणे शक्य नाही. ह्या विधानांचे संपूर्ण समर्थन करण्यास फार जागा लागेल; तूर्त वाचकांच्या विचाराकरता मी केवळ सूचकरीत्या विवेचन करीत आहे. ते जर युक्त असेल तर जगातील वस्तुविशेषांची संख्या अनंत आहे हे मानण्याला कोणताही अनुभाविक आधार नाही, आणि कधीही असणार नाही. हे उघड आहे; तसेच ही संख्या सान्त आहे असे मानण्यालाही सध्या आधार नाही. कदाचित त्या दिशेने जाणारा पुरावा, निर्णायक नसला तरी कधी काळी तरी मिळेल असे तत्त्वतः वाटणे शक्य आहे.

पृ. १४१

अनंत हा संबोध आत्मव्याघाती नाही आणि तर्कदृष्ट्या प्रस्थापित करण्यासारखाही नाही. ह्या गोष्टीवरून आपल्याला असाच निष्कर्ष काढावा लागतो की जगातील गोष्टींची संख्या सान्त आहे की अनंत आहे याच्या कार्यकारणभावाविषयी आपल्याला काहीही समजू शकणार नाही. तेव्हा लाइब्निटझच्या भाषेत बोलावयाचे झाल्यास, काही संभाव्य जगे सान्त आहेत तर काही अनंत आहेत. आपले हे जग कोठल्या प्रकारात मोडते हे ठरवण्याचे कोणतेही साधन आपल्याला उपलब्ध नाही, असाच निष्कर्ष काढावा लागतो. संभाव्य अशी काही जगे दुसऱ्या (सान्त) प्रकारची नसतील तर अनंताचा सिद्धांत सत्य ठरेल; पण आपल्या ह्या जगात तो सत्य आहे की असत्य, हे आपल्याला सांगता येणार नाही.

ह्या प्रकरणात सर्वत्र " व्यक्ती " आणि " वस्तुविशेष हे शब्द स्पष्टीकरण न देता समानार्थी म्हणून वापरले आहेत. जातिमीमांसेवर ह्या पुस्तकाच्या मर्यादेत बसेल असा ह्या संज्ञांचा खुलासा करणे, यापेक्षा दीर्घ स्पष्टीकरण दिल्याशिवाय शक्य नाही; पण हा विषय सोडून जाण्यापूर्वी, ह्या शब्दांच्या अर्थाला ग्रासून टाकणारी संदिग्धता कमी करण्याकरता काही शब्द उपयोगी ठरतील.

वर्णन किंवा संबंध दर्शवणाऱ्या क्रियापदातील आणि वर्ण्य विषयांबद्दल (किंवा कर्त्याबद्दल) किंवा संबंधित पदांबद्दल प्रकर्षाने सांगणाऱ्या क्रियापदातील चालूचलाऊ विधानांमधील, भेद आपण स्पष्ट करू शकतो. " सीझर होऊन गेला " यात सीझरचे वर्णन आहे; " ब्रूटस्ने सीझरला मारले " यात ब्रूटस आणि सीझर यांच्यातील संबंध स्पष्ट होतो. " कर्ता " हा शब्द व्यापक अर्थाने वापरून, ह्या प्रविधानात आपण ब्रूटस आणि सीझर ह्या दोघांनाही कर्ता म्हणू. व्याकरणदृष्ट्या ब्रूटस हा कर्ता आणि सीझर कर्म आहेत पण ही बाब तर्कदृष्ट्या बिनमहत्त्वाची आहे, कारण तोच प्रसंग " सीझर ब्रूटसकडून मारला गेला " असा व्यक्त करता येईल आणि यात सीझर हा व्याकरणदृष्ट्या कर्ता होईल.[1]

---

[1] अ. टी. : कर्मणिप्रयोगात कर्माची प्रथमा असते इतक्यापुरतेच हे विधान सत्य मानावे.

तेव्हा प्रविधानाच्या साध्या विचारात "कर्ता" ह्या शब्दाच्या व्यापक अर्थाच्या दृष्टीने एक, दोन किंवा अधिक कर्त्यांचा, किंवा कर्त्यांमधील, संबंध
पृ. १४२ मांडलेला आढळेल. (संबंधामध्ये दोनापेक्षा अधिक पदे असू शकतील. उदा. A, B ला C देतो हा *तीन* पदांमधील संबंध आहे.) आता, अनेकदा असे होते की, अधिक सूक्ष्म निरीक्षण केल्यावर बाह्यतः कर्ते भासणारे प्रत्यक्षात कर्ते नसतात, तर त्यांचे आणखी विश्लेषण होऊ शकते; पण ह्याचा एकच परिणाम होतो की, त्यांच्या जागा नवीन कर्त्यांनी घेतली आहे. क्रियापदसुद्धा व्याकरणदृष्ट्या कर्ता होऊ शकते. उदा. आपण असेही म्हणू "ठार मारणे हा ब्रूटस आणि सीझर यांच्यातील संबंध आहे". पण अशा प्रकारात व्याकरणामुळे दिशाभूल होते. मात्र सरळ विधानांमध्ये, तत्त्वज्ञानप्रधान व्याकरणाचे नियम पाळल्यास, ब्रूटस आणि सीझर हे कर्ते होतील आणि मारणे हे क्रियापद राहील.

तेव्हा संज्ञांविषयीच्या पुढील संकल्पनेप्रत आपण पोचतो : ज्या वेळी प्रविधानांमध्ये संज्ञा येतात तेव्हा त्या कर्ता *म्हणून*च येऊ शकतात, अन्य कोणत्याही प्रकारे येऊ शकत नाहीत. वस्तूच्या, जुन्या पद्धतीच्या व्याख्येचा हा भाग आहे. पण वापरून वापरून त्या कल्पनेला जो अर्थ प्राप्त झाला आहे त्याच्याशी आपल्याला काहीही कर्तव्य नाही. प्रविधानांमध्ये जी पदे केवळ कर्ता म्हणून येतात, त्यांची व्याख्या आपण "विशेषनामे" म्हणून करू. (येथे कर्ता हा शब्द वर म्हटल्याप्रमाणे व्यापक अर्थाने योजला आहे.) नंतर, ज्या वस्तु विशेषनामांच्या साह्याने दर्शविता येतील त्यांना आपण "व्यक्ती" किंवा "वस्तुविशेष" म्हणू. (प्रतीकांच्या साह्याने त्या ज्या दर्शविल्या जातात, त्यापेक्षा त्यांची प्रत्यक्ष व्याख्या करणे अधिक चांगले. पण ते करण्याकरता सत्ताशास्त्रामध्ये, (Metaphysics) आपल्याला गरज आहे त्याहून अधिक खोल बुडी मारावी लागेल.) ह्याप्रमाणे उलट क्रमाने अनंतकाळ जाणे अर्थातच शक्य आहे: म्हणजे जे काही व्यक्ती आहे असे भासते ते सर्व, अधिक सक्ष्म निरीक्षणांनी एक प्रकारचा वर्ग किंवा काही एक प्रकारचे मिश्रणच आहे, असे दिसेल. जर असे असेल तर अनंताचा सिद्धांत अर्थातच, सत्य असला पाहिजे. पण जर असे नसेल तर विश्लेषणाने शेवटच्या कर्त्यापर्यंत जाऊन पोचणे तत्त्वतः (तरी) शक्य झाले पाहिजे. आणि यांच्यामुळेच "व्यक्ती" किंवा "वस्तुविशेष" यांना अर्थ प्राप्त होतो असे मानतात. जर हा अर्थ
पृ. १४३ त्यांच्या बाबतीत सत्य असेल तर तो त्यांच्या वर्गांच्या आणि वर्गांच्या वर्गांच्या इ. बाबतीतही सत्य असणार. तसेच जर तो त्यांच्या बाबतीत असत्य असेल तर तो ह्या संपूर्ण उतरंडीकरताही असत्य असतो. त्यामुळे उतरंडीतील दुसऱ्या कोणत्या अवस्थेकरता अनंताचा सिद्धांत मांडण्यापेक्षा तो त्यांच्या (वस्तूंच्या) बाबतीत मांडणे स्वाभाविक होय. पण सिद्धांत सत्य असेल किंवा असत्य असेल, ते शोधून काढण्याचा कोणताही मार्ग उपलब्ध आहे असे दिसत नाही.

☐ ☐

प्रकरण १४

अननुरूपता आणि निगमन मीमांसा

आतापर्यंत आपण, गणिती तत्त्वज्ञानाच्या ज्या भागाला, *वर्ग* ह्या कल्पनेचे विवेचक परीक्षण लागत नाही असा भाग पाहिला. ह्यात काहीशी घाई झाली हे खरे आहे. मात्र पूर्वीच्या प्रकरणांतून आपल्याला अशा काही प्रश्नांना
पृ. १४४ तोंड द्यावे लागले आहे की त्यामुळेच आता अशा तऱ्हेचे परीक्षण करणे प्राप्त झाले आहे. हे काम अंगावर घेण्यापूर्वी, गणिती तत्त्वज्ञानाच्या ज्या अंगांकडे आतापर्यंत आपण लक्ष दिले नव्हते त्यांचा विचार आपल्याला केला पाहिजे. आता, ज्या अंगांचा विचार करायाचा आहे ते संश्लेषक (Synthetic) विवेचनामध्ये प्रथम येतात. आतापर्यंत आपण ज्यांचा विचार केला त्यांपेक्षा ही अंगे अधिक मूलभूत आहेत. वर्गमीमांसेचा विचार करण्यापूर्वी आपल्याला तीन विषयांचा विचार करावा लागेल : (१) निगमनमीमांसा, (२) प्रविधानात्मक फल, (३) वर्णने. यातला तिसरा विषय तर्कतः वर्गमीमांसेला पूर्वावश्यक मानला जात नाही, पण, वर्गांचे विवेचन करण्याकरता ज्या *प्रकार*ची मीमांसा आपल्याला लागते त्याचे हे एक सोपे उदाहरण आहे.

गणित हे एक निगमनात्मक शास्त्र आहे. काही पूर्वपक्षांपासून (Premiss) आरंभ करून निगमनाच्या (Deduction) काटेकोर प्रक्रियेच्या साह्याने ते विविध प्रमेयापर्यंत पोचते; गणित अशा प्रमेयांचेच बनले आहे. जुन्या काळी
पृ. १४५ गणिती निगमन अनेकदा काटेकोरपणात कमी पडत असे हे खरे आहे. काटेकोरपणात परिपूर्णता आणण्याचे ध्येय क्वचितच साध्य होत असे हेही खरे आहे. काहीही असले तरी जोवर गणिती सिद्धता काटेकोरपणात कमी असेल तोवर ती सिद्धता सदोषच होय. सर्वसामान्य अनुभव अमुक परिणाम दर्शवतो असे आवाहन करणे हा काही योग्य बचाव नव्हे; कारण आपण त्याच्यावरच जर अवलंबून राहणार असलो तर मग सामान्य बुद्धीचा आसरा घेऊन तर्कदुष्टता आणण्यापेक्षा युक्तिवाद मुळातच टाकून दिलेला चांगला. गणितामध्ये एकदा पूर्वपक्ष मांडल्यावर, सामान्य बुद्धीला किंवा " अन्तःप्रेरणेला " किंवा काटेकोर निगमनीय तर्कशास्त्राशिवाय दुसऱ्या कशालाही, आवाहन करणे भाग पडू नये.

ज्या वेळी कांटला असे आढळून आले की त्याच्या काळच्या भूमितिज्ञांना, ज्यात-दुसऱ्या कशाचे साह्य नाही अशा युक्तिवादाशिवाय त्यांची प्रमेये सिद्ध करता येत नाहीत, तर आकृतींना आवाहन करणे त्यांना भाग पडते आहे, त्या वेळी त्याने गणिती कार्यकारणाची एक नवी मीमांसा शोधून काढली, त्यानुसार अनुमान कधीही केवळ तार्किक नसे तर, ज्याला " अन्तःप्रेरणा " म्हणतात अशाचा आधार त्याला नेहमी लागत असे. आधुनिक गणिताचे संपूर्ण सूत्र, काटेकोरपणाच्या त्याच्या वाढत्या पाठपुराव्यासकट, कांटीय मीमांसेच्या विरुद्ध आहे. कांटच्या काळात, गणितातील ज्या बाबी *सिद्ध* करता येत नसत त्या *ज्ञात*हि होऊ शकत नसत– उदा. समांतराचा सिद्धांत. जे शुद्ध तर्कशास्त्राने निगमित करता येते तेच गणितात आणि गणिती पद्धतीने समजू शकते, आणि मानवी ज्ञानातील इतर गोष्ट, दुसऱ्या मार्गाने– अनुभवाने, इंद्रियजन्य किंवा दुसऱ्या कोठल्या तरी अनुभवाने साध्य झाली पाहिजे, पण कार्यकारणभावपद्धतीने किंवा अनुभवपूर्व (A priori) पद्धतीनें नव्हे. ह्या प्रतिपादनाला प्रत्यक्ष आधार Principia Mathematica, passim मध्ये आढळेल. Principles of Mathematics मध्ये ह्याचा बचाव दिला आहे. पण त्याबद्दल मतभेद आहेत. पण वाचकांपुढे त्याचा केवळ निर्देश करण्यापेक्षा अधिक काही आपण येथे करू शकणार नाही. हा विषय इतका विस्तृत आहे की त्याचे विवेचन घाईने करणे शक्य नाही. मध्यंतरी आपण असे धरून चालू की सर्व गणित हे निगमनशील आहे. आणि निगमनात काय काय अंतर्भूत आहे, याचा तपास करण्यास आरंभ करू.

निगमनामध्ये आपल्याकडे एक किंवा अनेक प्रविधाने असतात, त्यांना पूर्वपक्ष किंवा पक्षविधाने म्हणतात; त्यांच्यापासून आपण निष्कर्ष अनुमानित करतो. आपले उद्दिष्ट साधण्याकरता, सोय म्हणून, ज्या वेळी अनेक पक्षविधाने असतील त्या वेळी ती एकाच प्रविधानात मिश्रित करणे सोईस्कर; त्यामुळे आपल्याजवळ एकच पक्षविधान आणि एकच निष्कर्ष आहे असे म्हणणे शक्य होते. तेव्हा निगमन म्हणजे एखाद्या प्रविधानातील पक्षविधानाच्या ज्ञानापासून दुसऱ्या एखाद्या प्रविधानाच्या, म्हणजे निष्कर्षाच्या ज्ञानापर्यंत जाण्याची प्रक्रिया अचूक नसेल तर तिला आपण तर्कशुद्ध म्हणणार नाही; अचूक म्हणजे पक्षविधान आणि निष्कर्ष यांच्यामध्ये असा एक संबंध असावा की
पृ. १४६ पक्षविधान सत्य असल्याचे माहिती असेल तर निष्कर्षावर विश्वास ठेवण्याचा अधिकार आपल्याला मिळावा. निगमनाच्या तर्कशुद्ध मीमांसेमधील याच संबंधात, आपल्याला मुख्यतः, रस आहे.

एखाद्या प्रविधानाच्या सत्यत्वाचे (Truth) अनुमान सप्रमाणतेने (Validly) करण्याकरता आपल्याला दुसरे एखादे प्रविधान सत्य असल्याचे माहिती असले पाहिजे आणि ज्याला " अभिप्रेतता (Implication) " असे म्हणतात तो संबंध त्या दोघांत असला पाहिजे; म्हणजे पक्ष विधानात निष्कर्ष " अभिप्रेत " आहे, असे आपण म्हणू.

(ह्या संबंधाची व्याख्या आपण लवकरच करू.) किंवा आपल्याला एखादे प्रविधान असत्य असल्याचे माहिती असावे, आणि त्यांच्यात, " p किंवा q " अशा रीतीने[१] व्यक्त केलेला " विकल्पन (Disjunction) " हा संबंध असावा; व त्यामुळे एक असत्य असल्याचे माहिती असल्यास त्यावरून दुसरा सत्य असल्याचे अनुमान काढता[२] यावे. पुन्हा, एखाद्या प्रविधानाच्या सत्यत्वाऐवजी त्याच्या *असत्यत्वाचे* (Falsehood) अनुमान काढण्याचीही आपली इच्छा असू शकेल. हे दुसऱ्या एखाद्या प्रविधानावरूनही अनुमानित करता येईल; मात्र ती दोन प्रविधाने " अननुरूप (Incompatible) " असल्याचे आपल्याला माहिती असले पाहिजे. म्हणजे जर त्यातले एक सत्य असेल तर दुसरे असत्य असले पाहिजे. ज्याप्रमाणे एकाच्या सत्यत्वावरून दुसऱ्याचे सत्यत्व अनुमानित करता येते त्याचप्रमाणे दुसऱ्या एखाद्या प्रविधानाच्या असत्यत्वावरूनही अनुमानित करता येईल. म्हणजे ज्या वेळी q मध्ये p अभिप्रेत असेल त्या वेळी p च्या असत्यत्वावरून, आपण q चे असत्यत्व अनुमानित करू शकू. हे चारही प्रकार अनुमानाचे प्रकार होत. ज्या वेळी, आपले मन अनुमानावर केंद्रित झाले असेल त्या वेळी " अभिप्रेतता " हा मूलभूत आदिसंबंध म्हणून घेणे स्वाभाविक वाटते. कारण जर आपल्याला p च्या *सत्यत्वावरून* q चे *सत्यत्व* अनुमानित करणे शक्य व्हावयाचे असेल तर p आणि q ह्यांच्यामध्ये हाच एक संबंध असला पाहिजे. पण तांत्रिक कारणांसाठी काही ही सर्वोत्कृष्ट आदिकल्पना म्हणून निवडता येणार नाही. आदिकल्पना आणि व्याख्या ह्यांच्याकडे जाण्यापूर्वी प्रविधानांमधील वर उल्लेखिलेल्या संबंधांनी सूचित केलेल्या, प्रविधानांच्या यापुढच्या विविध फलांचा विचार करू.

अशा फलांपैकी सर्वांत सोपे म्हणजे नकारात्मक (Negative) किंवा नकृत, " न – p " हे फल म्हणजे p असत्य असता सत्य असणारे आणि p सत्य असता असत्य असणारे प्रविधान होय. एखाद्या प्रविधानाचे सत्यत्व किंवा त्याचे असत्यत्व ह्यांचा उल्लेख त्याचे " सत्यतामूल्य (Truth value) " म्हणून करणे सोयीचे होईल;[३] म्हणजे सत्य प्रविधानाचे " सत्यतामूल्य " *सत्यत्व* व असत्य प्रविधानाचे *असत्यत्व*, होय. म्हणजे न–p चे सत्यतामूल्य p च्या विरुद्ध राहील.

---

[१] ले. टी. : आपण p, q, r, s, t इ. अक्षरांनी चल प्रविधाने दर्शवू.

[२] अ. टी. : " विकल्पन " हा संबंध नसून ती द्विपद (Binary) क्रिया (Operation) आहे.

[३] ले. टी. : ही संज्ञा फ्रेगेची आहे.

पृ. १४७ नंतर आपण *विकल्पन* “p किंवा q” घेऊ. p सत्य असता, तसेच q सत्य असता ज्याचे सत्यतामूल्य सत्यत्व असते, पण p आणि q दोन्ही असत्य असता असत्यत्व असते असे हे फल होय.

नंतर आपण *संयोजन* (Conjuction), “p आणि q” घेऊ. ज्या वेळी p आणि q दोन्ही सत्य असतील त्या वेळी ह्याचे सत्यतामूल्य सत्यत्व असते; नाहीतर त्याचे सत्यतामूल्य असत्यत्व असते.

नंतर आपण अननुरूपता (Incompatibility) म्हणजे “p आणि q दोन्ही (एकाच वेळी) सत्य नाहीत”, हे घेऊ. हे संयोजनाचे नकरण (Negation) होय; ते p आणि q ह्यांच्या नकरणांचे विकल्पनही आहे. म्हणजे ते “न – p किंवा न – q” असे आहे. ज्यावेळी p असत्य असेल तेव्हा, तसेच q असत्य असेल त्या वेळी, ह्याचे सत्यतामूल्य सत्यत्व असते; ज्या वेळी p आणि q दोन्ही सत्य असतात त्या वेळी त्याचे सत्यतामूल्य असत्यत्व असते.

शेवटी *अभिप्रेतता* घ्या. p मध्ये अभिप्रेत q ”, हे किंवा “जर p तर q” हे प्रविधान ज्यामुळे p च्या सत्यत्वावरून q च्या सत्यत्वाचे अनुमान करणे शक्य होईल अशा अधिक व्यापक अर्थाने समजून घ्यावयाचे आहे म्हणजे ह्याचा अर्थ आपण असा लावू :– “p असत्य नसेल तर q सत्य असते” किंवा, “एकतर p असत्य असते किंवा q सत्य असते”, (“मध्ये अभिप्रेत” ह्याचे इतरही अनेक अर्थ होऊ शकतात; ह्या बाबींशी आपल्याला कर्तव्य नाही; येथे मांडलेला अर्थच आपल्या दृष्टीने सोयीचा आहे) म्हणजे असे : “p मध्ये अभिप्रेत q” ह्याचा अर्थ “न – p किंवा q” असा असावा; p असत्य असेल तेव्हा, तसेच जर q सत्य असेल तेव्हा ह्याचे सत्यतामूल्य सत्यत्व असावे आणि p सत्य आणि q असत्य असेल तेव्हा ते असत्यत्व असावे.

याप्रमाणे आपल्याकडे पाच फले झाली; नकरण, विकल्पन, संयोजन, अननुरूपता आणि अभिप्रेतता.[१] आपण ह्यात आणखीही भर घालू शकलो असतो. उदाहरणार्थ संयुक्त असत्यत्व “न – p आणि न – q”; पण वरील पाच पुरेशी आहेत. नकरण हे इतर चार फलांपेक्षा भिन्न आहे कारण त्यात एकच अंतर्भूत प्रविधान आहे, तर इतर फलात *दोन–दोन* आहेत. पण पाची फलांमध्ये एक साम्य आहे. त्यांचे सत्यतामूल्य, ती ज्या प्रविधानांवर

---

[१] अ. टी. : अलीकडे, ‘अननुरूपता’ हेच फल घेण्याऐवजी ‘समतुल्यता’ हे फल घेतात. ‘p समतुल्य q’. एकतर p आणि q दोन्ही सत्य असतील किंवा दोन्ही असत्य असतील. म्हणजे, नकरण, विकल्पन, संयोजन, अभिप्रेतता आणि समतुल्यता ही पाच फले आरंभाकरता घेतात.

अवलंबून आहेत त्यांच्या सत्यतामूल्यांवर अवलंबून असते. p चे किंवा p आणि q चे (जसा प्रकार असेल तसे) सत्यत्व किंवा असत्यत्व दिले असता आपल्याला नकरण, विकल्पन, संयोजन अननुरूपता, किंवा अभिप्रेतता ह्यांचे सत्यत्व किंवा असत्यत्व मिळू शकते. प्रविधानांच्या ज्या फलाकडे हा गुणधर्म असतो त्याला "सत्यताफल (Truth-function)" म्हणतात.

ज्या परिस्थितीत सत्यताफल सत्य किंवा असत्य असेल ती परिस्थिती मांडली, की त्या फलाचा संपूर्ण अर्थ स्पष्ट होतो. उदाहरणार्थ "न – p"
पृ. १४८ हे p चे असे फल आहे की p असत्य असता ते सत्य असते,
आणि p सत्य असता ते असत्य असते. त्याला इतर कोणताही अर्थ लावावयाचा नाही. हेच "p किंवा q" याला आणि इतरांनाही लागू आहे. यावरून प्रविधानांच्या सर्व मूल्यांकरता ज्या दोन फलांचे सत्यतामूल्य सारखेच असेल त्यांच्यात कोणताही फरक करता येणार नाही हे सरळ दिसते. उदाहरणार्थ "p आणि q" हे "न – p किंवा न – q" यांचे नकरण आहे, आणि उलट; तेव्हा यांपैकी कोणत्याही एकाची *व्याख्या* दुसऱ्याचे नकरण म्हणून करता येईल. ज्या अवस्थेत सत्यताफल सत्य किंवा असत्य असेल त्या अवस्थेबाहेर त्याला आणखी कोणताही अर्थ नसतो.

वरील पाच फळे परस्पर स्वतंत्र नाहीत हे स्पष्ट आहे. त्यातील काहींची व्याख्या इतरांच्या रूपात करता येईल. ही संख्या दोनावर आणणे काहीही अवघड नाही. Principia Mathematica मध्ये निवडलेली दोन, म्हणजे नकरण आणि विकल्पन. मग अभिप्रेततेची व्याख्या "न – p किंवा q" अशी, अननुरूपतेची "न – p किंवा न – q" अशी करता येईल. संयोजन म्हणजे अननुरूपतेचे नकरण. पण Sheffer ने असे दाखवून दिले आहे की[1] आपल्याला वरील पाची फलांकरता एकच आदिकल्पना पुरेशी होईल आणि निकोडने[2] (Nicod) असे दाखवून दिले आहे की यामुळे निगमन मीमांसेमध्ये लागणाऱ्या आदि प्रविधानांचा संक्षेप दोन अनाकारिक (Non-formal) तत्त्वांपर्यंत आणि एका आकारिक (Formal) तत्त्वांपर्यंत करता येईल. याकरता आपले अव्याख्यात प्रविधान म्हणून आपण अननुरूपता किंवा संयुक्त असत्यता असे घेऊ शकतो. आपण यातले पहिले घेऊ.

आता आपली आदिकल्पना म्हणजे ज्याला "अननुरूपता" म्हणतात, असे एक सत्यताफल आहे. हे आपण p/q याने दर्शवू. लगेच नकरणाची व्याख्या प्रविधानाची

---

[1] ले. टी. : Transactions of American Mathematical Society vol. xiv पृष्ठ ४८१–४८८.

[2] ले. टी. : Proceedings of Cambridge Philosophical Society vol. xix; i, जानेवारी १९१७.

स्वतःशीच अननुरूपता अशी करता येईल. म्हणजे "न – p" ची व्याख्या "p/p" अशी करता येईल. विकल्पन म्हणजे न – p आणि न – q यांची अननुरूपता, म्हणजे (p/p) | (q/q). अभिप्रेतता, p आणि न – q यांची अननुरूपता, म्हणजे p | (q/q) होय. संयोजन हे अननुरूपतेचे नकरण आहे. म्हणजे ते (p/q) | (p/q) आहे. याप्रमाणे उरलेल्या चारही फलांची व्याख्या अननुरूपतेच्या रूपात करता येईल.

नवनवीन प्रविधानांचा अंतर्भाव करून किंवा त्याच प्रविधानांची पुनरुक्ती करून किती सत्यताफले बनवावीत ह्याला काही मर्यादा नाही, हे उघड आहे. आपल्याला कशाचा विचार करावयाचा असेल तर तो ह्या विषयाच्या अनुमानाशी

पृ. १४९

असलेल्या संबंधाचा होय. जर आपल्याला p सत्य असल्याचे आणि 'p मध्ये अभिप्रेत q' हे, माहिती असेल, तर आपण q (सत्य असल्याचे) प्रतिपादन करण्याचा विचार करू शकू. अनुमानाबद्दल असे आपल्या मनात *काहीतरी* नेहमीच असते : ज्याच्या साह्याने नवीन ज्ञान मिळते असा अनुमान हा एक मार्ग आहे. पण ज्याच्यामुळे अचूक अनुमान करणे आपल्याला सोपे होते असा, अनुमान हा एक मार्ग आहे हे मात्र त्याच्याविषयी आपल्या मनात नसते. p या प्रतिपादना-पासून q या प्रतिपादनापर्यंत प्रत्यक्ष जाणे ही मात्र एक मानसिक प्रक्रियाच आहे आणि ती शुद्ध तात्त्विक रूपात व्यक्त करण्याचा प्रयत्न आपण करता कामा नये.

गणितामध्ये ज्या वेळी आपण अनुमाने करतो, त्या वेळी चल प्रविधानांचा, समजा 'p आणि q' असा एखादा राशी नेहमीच आपल्याकडे असतो. तो राशी एक प्रकारचा साचा (Form) म्हणूनच माहिती असतो. आणि, p व q च्या सर्व मूल्यांकरता सत्य असतो; आपल्याकडे याचाच एक भाग असलेला दुसरा एक राशी असतो, तो सुद्धा p आणि q च्या सर्व मूल्यांकरता सत्य असतो; आणि अनुमानांच्या तत्त्वांनुसार मूळ राशी-मधून हा भाग टाकून उरलेला भाग प्रतिपादन करणे आपल्याला शक्य होते. हे वर्णन काहीसे अमूर्त आहे, म्हणून उदाहरणांनी स्पष्ट केले पाहिजे.

Principia Mathematica मध्ये मांडलेली निगमनाची आकारिक (Formal) तत्त्वे आपणाला माहिती आहेत असे गृहीत धरू. (श्री. निकोड यांनी यांचा संक्षेप एकापर्यंत केला आहे पण ते फार क्लिष्ट असल्यामुळे आपण पाचांपासूनच सुरुवात करू.) ही पाच प्रविधाने पुढीलप्रमाणे आहेत :—

(१) "p किंवा p" मध्ये अभिप्रेत p— म्हणजे जर p सत्य असेल किंवा p सत्य असेल, तर p सत्य असते.

(२) q मध्ये अभिप्रेत "p किंवा q"— म्हणजे विकल्पांपैकी ज्यावेळी एक सत्य असते त्यावेळी "p किंवा q" हे विकल्पन सत्य असते.

(३) "p किंवा q" मध्ये अभिप्रेत "q किंवा p". जर आपल्याकडे तत्त्वतः अधिक परिपूर्ण प्रतीके असती तर याची आवश्यकता पडली नसती. कारण विकल्पनाच्या

संबोधामध्ये क्रमाचा अंतर्भाव झालेला नसतो. त्यामुळे “ p किंवा q ” आणि “ q किंवा p ” हे एकरूपच ठरतात. पण आपल्या प्रतीकांमध्ये कोणतेही सोईस्कर स्वरूप घेतले तरी काही एक क्रम राहणे अटळ आहे. त्यामुळे क्रम महत्त्वाचा नाही हे सांगण्यासाठी आपल्याला योग्य अशी गृहीते लागतात.

(४) जर p सत्य असेल किंवा “ q किंवा r ” सत्य असेल तर q सत्य असते किंवा “ p किंवा r ” सत्य असते. या प्रविधानातील अदलाबदलीमुळे त्याचे निगमनप्रक्रियेतील त्याचे सामर्थ्य वाढते.

(५) जर q मध्ये अभिप्रेत r तर “ p किंवा q ” मध्ये अभिप्रेत “ p किंवा r ”.

ही, पाच तत्त्वे म्हणजे *Principia mathematica* मध्ये वापरलेली निगमनाची आकारिक तत्त्वे होत. निगमनाच्या आकारिक तत्त्वांचे दुहेरी उपयोग असतात. आणि हेच स्पष्ट करण्याकरता आपण वरील पाच प्रविधाने उद्धृत केली
पृ. १५० आहेत. त्याचा एक उपयोग, अनुमानातील पक्षविधान म्हणून होतो आणि दुसरा उपयोग, पक्षविधानांमध्ये निष्कर्ष अभिप्रेत असतो हे प्रस्थापित करण्याकरता म्हणून होतो. अनुमानाच्या मांडणीमध्ये आपल्याजवळ p हे प्रविधान आणि “ p मध्ये अभिप्रेत q ”, हे प्रविधान असते; त्यावरून आपण q अनुमानित करतो; आता ज्या वेळी आपण निगमनाच्या तत्त्वांचा विचार करतो, त्या वेळी आपल्या आदि प्रविधानांच्या सामग्रीमध्ये आपल्या अनुमानातील, p आणि “ p मध्ये अभिप्रेत q ” ह्या दोन्हींचा अंतर्भाव असला पाहिजे. म्हणजे असे की, निगमनाचे जे नियम आपण वापरणार, त्यांचा उपयोग “ p मध्ये अभिप्रेत q ” हे प्रस्थापित करणे इतकाच, केवळ *नियम* म्हणूनच न होता, आपल्या मांडणीत जसे p हे पूर्वपक्ष म्हणून येते तसे महत्त्वपूर्ण पक्ष म्हणूनही ते यावे अशीही अपेक्षा आहे.

समजा, उदाहरणार्थ, जर p मध्ये अभिप्रेत q असता q मध्ये अभिप्रेत r असेल, तर p मध्ये अभिप्रेत r असे मिळते, असे आपल्याला सिद्ध करता यावे. ज्यात अभिप्रेतता अंतर्भूत आहे असा हा तीन प्रविधानांमधील संबंध आहे.

$p_1 = p$ मध्ये अभिप्रेत q, $p_2 = q$ मध्ये अभिप्रेत r, आणि $p_3 = p$ मध्ये अभिप्रेत r, असे लिहा. मग p_1 मध्ये अभिप्रेत (p_2 मध्ये अभिप्रेत p_3) असे आपल्याला सिद्ध करावयाचे आहे. आता आपल्या वरील तत्त्वांपैकी पाचवे घ्या, p ऐवजी न $-p$ लिहा, आणि व्याख्येनुसार “ न $-$ p किंवा q ” म्हणजेच “ p मध्ये अभिप्रेत q ” हे लक्षात ठेवा. याप्रमाणे पाचव्या तत्त्वावरून आपल्याला पुढील निष्कर्ष मिळेल.

“ जर q मध्ये अभिप्रेत r, तर ‘ p मध्ये अभिप्रेत q ’ मध्ये अभिप्रेत ‘ p मध्ये अभिप्रेत r ’ ”, म्हणजे “ p_2 मध्ये अभिप्रेत (p_1 मध्ये अभिप्रेत p_3)”. ह्या प्रविधानाला A म्हणा.

p आणि q ऐवजी न – p आणि न – q घातल्यावर— अभिप्रेततेची व्याख्या लक्षात ठेवा— आपले चौथे तत्त्व असे होते :

" जर p मध्ये अभिप्रेत (q मध्ये अभिप्रेत r), तर q मध्ये अभिप्रेत (p मध्ये अभिप्रेत r) ". यात p ऐवजी p_2, q ऐवजी p_1 आणि r ऐवजी p_3 लिहून हे पुढीलप्रमाणे होईल :

" जर p_2 मध्ये अभिप्रेत (p_1 मध्ये अभिप्रेत p_3), तर p_1 मध्ये अभिप्रेत (p_1 मध्ये अभिप्रेत p_3). याला B म्हणा.

पृ. १५१ आता आपल्या पाचव्या तत्त्वाच्या साह्याने आपण असे सिद्ध केले की,

" p_2 मध्ये अभिप्रेत (p_1 मध्ये अभिप्रेत p_3) ". यालाच आपण A म्हटले होते.

याप्रमाणे आपल्याकडे अनुमानाच्या मांडणीचे उदाहरण झाले. कारण आपल्या योजनेतील p म्हणजे A आणि " p मध्ये अभिप्रेत q " म्हणजे B. म्हणून आपण q पर्यंत म्हणजेच,

" p_1 मध्ये अभिप्रेत (p_2 मध्ये अभिप्रेत p_3) ", पर्यंत पोचलो. आणि हेच प्रविधान सिद्ध करावयाचे होते. या सिद्धतेमध्ये ज्यामुळे A हे प्रविधान मिळाले, त्या आपल्या पाचव्या तत्त्वाचे रूपांतर मूलभूत पक्षविधान म्हणून प्रत्ययास आले; तर ज्यापासून B हे प्रविधान मिळाले त्या आपल्या चवथ्या तत्त्वाच्या रूपांतराचा उपयोग अनुमानाचा *आकार* घडवण्यास झाला. निगमनमीमांसेमध्ये पक्षविधानांचा आकारिक आणि वास्तविक वापर हे एकमेकात कमालीचे गुंतले आहेत. आणि जर ते तत्त्वतः भिन्न असल्याचे आपल्याला पटले असेल तर ते वेगळे ठेवणे फारसे महत्त्वाचे नाही.

पक्षविधानापासून नवीन निष्कर्षापर्यंत पोचण्याची फार पूर्वीची पद्धत वरील निगमनात वर्णन केली आहे; पण तिलाच निगमन म्हणणे तितकेसे बरोबर होणार नाही. आदि प्रविधाने, मग ती काहीही असोत, ही त्यांमध्ये येणाऱ्या p, q, r या चल प्रविधानांच्या सर्व संभाव्य मूल्यांकरता प्रतिपादित केली आहेत असे मानले पाहिजे. म्हणून आपण (समजा) p करता, ज्याचे मूल्य नेहमीच एक प्रविधान आहे असा कोणताही राशी लिहू शकतो; उदाहरणार्थ, न – p, s मध्ये अभिप्रेत t, इत्यादी. या मार्गाने खरे म्हणजे आपण आपल्या मूळ प्रविधानांचे विशेष प्रकारच मिळवीत असतो, पण व्यावहारिक दृष्ट्या, मात्र नवीन प्रविधाने मिळवीत असतो. या प्रकारचा बदल करण्याच्या वैधतेची आपण अनुमानाच्या अनाकारिक तत्त्वांच्या साह्याने खात्री करून घेतली पाहिजे.[1]

---

[1] ले. टी. : अशा तऱ्हेचे कोणतेही तत्त्व Principia Mathematica मध्ये किंवा M. Nicod च्या वर उल्लेखिलेल्या लेखामध्ये मांडलेले नाही. पण हे बहुधा राहून गेलेले असावे.

वरील पाच तत्त्वांचा संक्षेप M. Nicod ने अनुमानाच्या ज्या एका आकारिक तत्त्वामध्ये केला आहे, ते तत्त्व आता आपण मांडू. या उद्देशासाठी प्रथम आपण एखादे सत्यताफल अननुरूपतेच्या रूपात कसे व्याख्यात करता येते ते दाखवू.

$p \mid (q/r)$ म्हणजे "p मध्ये अभिप्रेत q"

हे आपण आधीच पाहिले आहे. आता हे पहा की–

$p \mid (q/r)$ म्हणजे "p मध्ये अभिप्रेत q आणि r दोन्ही" होय. कारण या राशीचा अर्थ, "p हे, q आणि r यांच्या अननुरूपतेशी अननुरूप
पृ. १५२
आहे." म्हणजेच "p मध्ये असे अभिप्रेत आहे की q आणि r अननुरूप नाहीत." म्हणजेच "p मध्ये असे अभिप्रेत आहे की q आणि r दोन्ही सत्य आहेत" असा होतो. कारण आपण पाहिल्याप्रमाणे q आणि r ह्यांचे संयोजन त्यांच्या अननुरूपतेचे नकरण असते.

नंतर असे पहा की, $t \mid (t/t)$ म्हणजे "t स्वतः मध्ये अभिप्रेत". हा $p \mid (q/q)$ चा विशेष प्रकार आहे.

p च्या नकरणासाठी आपण $\overline{p}$ लिहू; म्हणजे मग p / s चा अर्थ $\overline{p/s}$ चे नकरण म्हणजेच p आणि s चे संयोजन असा होईल. यावरून $(s/q) \mid \overline{p/s}$, म्हणजे s/q ची, p आणि s च्या संयोजनाशी अननुरूपता असल्याचे मिळते; दुसऱ्या शब्दांत, याचा अर्थ जर p आणि s दोन्ही सत्य असतील तर s / q असत्य असते. म्हणजे s आणि q दोन्ही सत्य असतील; आणखी सोप्या शब्दांत, त्याने हेच असे प्रतिपादन होते की p आणि s हे एकत्रितपणे, s आणि q एकत्रित अभिप्रेत करतात. आता,

$$P = p \mid (q/r)$$

$$\pi = t \mid (t/t),$$

$$Q = (s/q) \mid \overline{p/s},$$

लिहा. मग निकोडचे एकमेव आकारिक निगमन तत्त्व

$$P \mid (\pi / Q).$$

होय; निराळ्या शब्दांत P मध्ये π आणि Q दोन्ही अभिप्रेत असतात.

याव्यतिरिक्त तो जातिमीमांसेमधील आणखी एका अनौपचारिक तत्त्वाचा वापर करतो. (आपल्याला त्याची चिंता करावयाचे कारण नाही.) तसेच p दिले असता आणि p मध्ये अभिप्रेत q दिले असता, आपण q प्रतिपादन करू शकतो, यासारख्या आणखी एका तत्त्वाचाही तो वापर करतो. ते तत्त्व असे :

"जर $p \mid (r/q)$ सत्य असेल, आणि p सत्य असेल, तर q सत्य असते". ह्या सामग्रीवरून निगमनाची संपूर्ण मीमांसा मिळते. याला अपवाद म्हणजे, "प्रविधान फलांच्या" सार्वत्रिक सत्यत्वापासून किंवा सत्यत्वापर्यंत, करावयाच्या निगमनाचा विचार. हा विचार आपण पुढच्या प्रकरणात करू.

मला असे वाटते की ज्या प्रविधानांमुळे अनुमान सप्रमाण होते अशा प्रविधानांमधील संबंधांविषयी काही लेखकांच्या मनात गोंधळ आहे. p वरून q चे अनुमान करणे *सप्रमाण* ठरण्याकरता, p सत्य असले पाहिजे आणि " न–p
पृ. १५३ किंवा q " सत्य असले पाहिजे, इतकेच केवळ आवश्यक आहे.
ज्या वेळी असे असेल, त्या वेळी q सत्य असणारच हे उघड आहे पण " न– p किंवा q " हे प्रविधान न– p च्या किंवा q च्या ज्ञानापेक्षा इतर मार्गांनी *ज्ञात* झालेले असेल, तरच खरोखर अनुमान मिळू शकेल. ज्या वेळी p असत्य असेल त्या वेळी " न–p किंवा q " सत्य असतेच, पण ज्या अनुमानाला p सत्य असणे आवश्यक असते त्याच्या दृष्टीने हे निरुपयोगी आहे. ज्या वेळी q सत्य असल्याचे माहितीच असेल, त्या वेळी " न–p किंवा q " हेही सत्य असल्याचे अर्थातच माहिती होईल, पण पुन्हा अनुमानाच्या दृष्टीने निरुपयोगीच, कारण q आधीच माहिती आहे आणि त्यामुळे ते पुन्हा निराळे अनुमानित करण्याची आवश्यकता नाही. खरे म्हणजे ज्या वेळी " न– p किंवा q " हे विकल्पन त्याच्या दोन विकल्पांपैकी कोणामुळे सत्य होत आहे हे आपल्याला समजण्याशिवायच (इतर मार्गांनी) माहिती होत असेल तरच इष्ट अनुमान उद्‌भवते. आता ज्या परिस्थितीत हे उद्‌भवते, ती परिस्थिती म्हणजे p आणि q ह्यांच्यामध्ये अस्तित्वात असलेले विशिष्ट प्रकारचे संबंध होत. उदाहरणार्थ, जर r मध्ये s चे नकरण अभिप्रेत आहे असे आपल्याला माहिती असेल तर s मध्ये r चे नकरण अभिप्रेत असते. " r मध्ये अभिप्रेत न–s " आणि " s मध्ये अभिप्रेत न–r " ह्या दोहोंमध्ये, एक आकारिक संबंध असतो. त्यामुळेच यातले पहिले असत्य आहे हे माहिती झाल्याशिवायच किंवा दुसरे सत्य आहे हेही माहिती झाल्याशिवायच, पहिल्यामध्ये दुसरे अभिप्रेत आहे हे *जाणणे* आपल्याला शक्य होते. अशाच परिस्थितीमध्ये अनुमाने काढण्याकरता अभिप्रतता– संबंध, व्यावहारिक दृष्ट्या, उपयोगी ठरतात.

पण पक्षविधान असत्य आहे किंवा निष्कर्ष सत्य आहे हे *जाणून* घेण्यापुरताच हा रचनात्मक संबंध लागेल. अनुमानाच्या *सप्रमाणतेसाठी* काही लागत असेल तर " न – p किंवा q " याचे सत्यत्व होय; आणखी काही जे लागत असेल तर ते फक्त अनुमान व्यावहारिकरीत्या साध्य करण्यासाठीच लागते. प्रा. लेविस (C. I. Lewis) [1] याने अधिक मर्यादित आकारिक संबंधाचा विशेष अभ्यास केला आहे; त्याला आपण " आकारिक निगमशीलता (Formal Deducibility) "
पृ. १५४ असे म्हणू. त्याचा असा आग्रह आहे की, " न – p किंवा q "
ने व्यक्त केलेल्या व्यापक संबंधाला " अभिप्रेतता " म्हणता कामा

---

[1] Mind, vol. xxi, १९१२ पृ. ५२२–५३१ आणि vol. xxii, १९१४ पृ. २४०–२४७ पाहा.

नये. अर्थात हे केवळ शाब्दिक आहे. जोवर आपला शब्दांचा वापर सुसंगत आहे तोवर आपण त्यांच्या व्याख्या कशा करतो हे फारसे महत्त्वाचे नाही. मी ज्या मीमांसेची वकिली करत आहे, आणि प्रा. लेविस ज्या मीमांसेची वकिली करत आहेत, त्यांतील फरकाच्या दृष्टीने महत्त्वाचा मुद्दा असा : त्यांचे म्हणणे असे, की ज्या वेळी q हे एक प्रविधान दुसऱ्या एकाद्या p पासून "आकारिकपणे निगमित" करता येते त्या वेळी त्यांच्यामधील जो संबंध आपल्याला जाणवतो त्याला "काटेकोर अभिप्रेता (Strict implication)" म्हणावे; हा संबंध म्हणजे "न – p किंवा q" ने व्यक्त केलेला संबंध नसून अधिक संकुचित किंवा मर्यादित अर्थाचा संबंध आहे. आणि ज्या वेळी p आणि q मध्ये काही एक आकारिक अनुसंधान असेल त्याचवेळी तो अस्तित्वात असतो. माझे म्हणणे असे की तो म्हणतो त्याप्रमाणे संबंध असेल किंवा नसेल, त्याची गणिताला कोणतीही आवश्यकता नाही; आणि म्हणून साधारण काटकसर म्हणून मूलभूत कल्पनांच्या आपल्या सामग्रीमध्ये त्याला प्रवेश देता कामा नये. ज्या वेळी दोन प्रविधानांमध्ये "आकारिक निगमनशीलतेचा" संबंध असतो त्या वेळी, आपल्याला असे दिसून येईल की एकतर पहिले असत्य असते किंवा दुसरे सत्य असते, आणि ह्या गोष्टीपलिकडे आणखी कशालाही आपल्या पक्षविधानामध्ये प्रवेश देण्याची आवश्यकता नाही. आणि शेवटी, मी मांडलेल्या दृष्टिकोनाच्या विरुद्ध प्रा. लेविस यांनी जी कारणे तपशिलात मांडली आहेत त्यांचा समाचार तपशिलाने घेता येईल आणि जो दृष्टिकोण मी त्याज्य मानला आहे त्यावरच ती सर्व कारणे आपल्या अस्तित्वासाठी नकळत अवलंबून आहेत. म्हणून माझा निर्णय असा की, सत्यताफलाच्या रूपात व्यक्त करता येत नसेल अशा, अभिप्रेततेच्या कोणत्याही स्वरूपातील मूलभूत कल्पनेला प्रवेश देण्याची आवश्यकता नाही.

◻ ◻

प्रकरण १५ वे

प्रविधानफले

ज्या वेळी मागच्या प्रकरणामध्ये आपण प्रविधानाविषयी चर्चा करत
पृ. १५५ होतो, त्या वेळी ‘ प्रविधान ’ या शब्दाची व्याख्या देण्याचा आपण
प्रयत्न केला नाही. पण ह्या शब्दाची जरी औपचारिकरीत्या व्याख्या करता येत नसली तरी त्याच्या अर्थाविषयी काहीतरी बोलणे आवश्यक आहे; कारण प्रस्तुत प्रकरणामध्ये, “ प्रविधानफलाच्या ” विषयी उद्भवणारा गोंधळ टाळला पाहिजे.

आपल्या मते “ प्रविधान ” म्हणजे प्रामुख्याने, ज्याने व्यक्त केलेला विचार एकतर सत्य किंवा असत्य असेल असा शब्दांचा एक समूह होय. मी “ प्रामुख्याने ” असे म्हणतो याचे कारण, शाब्दिक प्रतीकांहून ज्यांना प्रतीकात्मक स्वरूप असेल असे, नुसते विचारही वगळण्याची माझी इच्छा नाही. पण मला असे वाटते की “ प्रविधान ” हा शब्द, काही एका अर्थाने ज्याला प्रतीके म्हणता येईल त्यांच्यापुरता, तसेच ज्या प्रतीकांनी सत्यत्व आणि असत्यत्व व्यक्त होईल त्यांच्यापुरताच मर्यादित ठेवला पाहिजे. तेव्हा “ 2 आणि 2 = 4 ” आणि “ $2 + 2 = 5$ ” ही प्रविधाने होतील. तसेच “ सॉक्रेटिस मनुष्य आहे ” आणि “ सॉक्रेटिस मनुष्य नाही. ” हीही प्रविधाने होतील. a आणि b ह्या कोणत्याही संख्या असल्या तरी $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ हे विधान प्रविधान आहे; पण केवळ “ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ” हे सूत्र प्रविधान नाही, कारण त्यावर a आणि b ला कोणतीही मूल्ये चालतील की नाही, किंवा त्यांना अशी अशी मूल्ये आहेत की नाही, हे आपल्याला सांगितलेले नाही, किंवा आपणच गृहीत धरले तरी चालेल काय हेही माहिती नाही. यातील पहिले, गणितामधील सूत्रांमध्ये अध्याहृत असावे, असा नियम आहे. आणि त्यामुळे ती प्रविधाने होतात. पण अशा तऱ्हेचे काहीही गृहीत धरले
नसेल तर ती सूत्रे “ प्रविधानफले ” होतील. खरे म्हणजे ज्या
पृ. १५६ वाक्यात एक किंवा अधिक अविज्ञात घटक असतात, आणि
त्यांना मूल्ये दिल्यानंतर जे प्रविधान बनते अशा वाक्यांना “ प्रविधानफले ” म्हणतात. दुसऱ्या शब्दांत, ज्याची मूल्ये प्रविधाने आहेत असे ते एक फलच आहे. पण ही नंतरची व्याख्या काळजीपूर्वक वापरली पाहिजे. एखादे वर्णनात्मक

फल उदा.– " श्री. क्ष यांच्या गणिताच्या पुस्तकातील, सर्वात अवघड प्रमेय " हे, त्याची मूल्ये जरी प्रविधाने असली तरी प्रविधानफल नव्हे. पण अशा प्रकारात प्रविधानांचे केवळ वर्णन करतात. प्रविधानफलामध्ये मूल्ये घातल्यास प्रविधान प्रत्यक्षात *प्रतिपादित* झाले पाहिजे.

प्रविधानफलांची उदाहरणे देणे सोपे आहे. " x हा मनुष्यप्राणी आहे " हे एक प्रविधानफल आहे; जोवर x अविज्ञात राहील तोवर ते सत्यही नसते वा असत्यही नसते पण ज्या वेळी एखादे मूल्य x ला दिले जाते त्या वेळी ते सत्य किंवा असत्य प्रविधान बनते. गणितामधील कोणतेही समीकरण हे प्रविधानफलच असते. जोवर त्यातील चलांना विशिष्ट मूल्ये नसतात तोवर ते समीकरण म्हणजे, सत्य किंवा असत्य प्रविधान निश्चितपणे ठरण्याची वाट पहाणारा एक राशी असतो. त्या समीकरणात एकच एक चल असेल त्या वेळी चलाची किंमत समीकरणाच्या बीजाएवढी केली तर ते सत्य बनते, नाहीतर ते असत्य बनते; पण जर ते " नित्यसमीकरण " असेल तर चलाच्या जागी कोणतीही संख्या असली तरी ते सत्यच राहील. प्रतलातील वक्राचे किंवा अवकाशातील पृष्ठाचे समीकरण हे एक प्रविधानफल होय. ते वक्रावरील किंवा पृष्ठावरील बिंदूंच्या सहनिर्देशकांच्या मूल्यांकरता सत्य आणि इतर मूल्याकरता असत्य असते. पारंपरिक तर्कशास्त्रातील " सर्व A, B आहेत " असले राशी प्रविधानफलेच होत. असे राशी सत्य किंवा असत्य ठरण्यापूर्वी A आणि B हे वर्ग निश्चित झाले पाहिजेत.

" प्रकार (Cases) " किंवा " प्रसंग (Instances) " यांची कल्पना प्रविधानफलांवर अवलंबून आहे. उदाहरणार्थ, जिला " सामान्यीकरण " असे म्हणतात तिने सूचित केलेली प्रक्रिया घेऊ, आणि अगदी प्राथमिक असे एखादे उदाहरण घेऊ. समजा " विजेमागोमाग गडगडाट होतो ". आपल्याला असले पुष्कळ प्रसंग माहिती आहेत. म्हणजे अशी आपल्या जवळ कित्येक विधाने आहेत : " वीज चमकून जात आहे आणि मागाहून गडगडाट होत आहे ". ह्या घटना कशाची उदाहरणे आहेत ? त्या पुढील प्रविधानफलाची उदाहरणे होत : " जर x म्हणजे

पृ. १५७

विजेचे चमकणे असेल; तर x मागोमाग गडगडाट होतो ". सामान्यीकरणाच्या प्रक्रियेमध्ये (सुदैवाने तिच्या सयुक्तिकपणाबद्दल आपल्याला विचार करण्याचे कारण नसते) अशा अनेक उदाहरणांमधून प्रविधानफलाच्या *सार्वत्रिक* (Universal) सत्यतेकडे जातात : " जर x म्हणजे विजेचे चमकणे असेल तर x मागोमाग गडगडाट होतो ". ज्या वेळी आपण प्रसंग किंवा प्रकार किंवा उदाहरणे यांच्याबद्दल बोलू त्या वेळी याच पद्धतीने प्रविधानफलांचा अंतर्भाव होतो, हे दिसून येईल.

" प्रविधान फल म्हणजे *काय* हा प्रश्न विचारण्याचे किंवा त्याचे उत्तर देण्याचे प्रयत्न करण्याचे आपल्याला कारण नाही. प्रविधानफल म्हणजे अर्थ भरण्याकरता

असलेली केवळ एक मांडणी किंवा एखादे कवच किंवा एखादे रिकामे पात्र होय. आरंभापासूनच त्याला अर्थ असतो असे नव्हे. प्रविधानफलांचा विचार स्थूलमानाने आपल्याला दोन प्रकारे करावयाचा आहे: पहिला म्हणजे "सर्व प्रकारांत सत्य" आणि "काही प्रकारांत सत्य". दुसरा म्हणजे, वर्ग आणि संबंध ह्यांच्या मीमांसेत अंतर्भूत असलेली प्रविधानाफले. ह्यातला दुसरा विषय आपण पुढच्या एका प्रकरणावर सोपवू. पहिल्याचा विचार मात्र आताच केला पाहिजे.

ज्या वेळेला आपण असे म्हणतो की काही एक गोष्ट "सदैव सत्य असते" किंवा "सर्व प्रकारात सत्य असते", तेव्हा यात अंतर्भूत असलेली बाह्य प्रविधान असू शकणार नाही हे उघड असते. प्रविधान म्हणजे केवळ सत्य किंवा असत्य; यापेक्षा निराळा विचार नाही. "सॉक्रेटिस हा मनुष्य आहे" किंवा "नेपोलियन सेंट हेलेना येथे मेला" याची आणखी उदाहरणे किंवा प्रकार नाहीत. ही प्रविधाने आहेत आणि "सर्व प्रकारात" ती सत्य आहेत असे म्हणणे निरर्थक आहे. हा वाक्प्रयोग फक्त प्रविधानफलांना लागू असतो. उदाहरणार्थ, कार्यकारणपरंपरेचा विचार करताना ज्या प्रकारच्या गोष्टीची चर्चा करतात ती पहा. (जे म्हटले गेले असेल त्याच्या सत्यासत्यतेविषयी आपल्याला चिंता करण्याचे कारण नाही. आपल्याला फक्त त्याच्या तार्किक विश्लेषणाचा विचार करावयाचा आहे.) प्रत्येक प्रसंगी A च्या पाठोपाठ B येते असे आपल्याला सांगण्यात आले आहे. जर A चे काही "प्रसंग" घडत असतील तर, A म्हणजे काही एक सर्वसामान्य कल्पना असेल. मग त्याच्या संबंधात "x_1 हा A आहे", "x_2 हा A आहे", "x_3 हा A आहे", इत्यादी म्हणण्याला अर्थ राहील; येथे x_1, x_2, x_3 वस्तुविशेष असून परस्परांशी समान नाहीत. उदाहरणार्थ आपल्या विजेबद्दलच्या पूर्वीच्या प्रकाराला हे लागू आहे. आपण असे म्हणतो की वीज चमकण्यामागोमाग (A), गडगडाट होतो (B). पण विजेचे चमकणे हे भिन्न असून सारखे नाहीत, तरीही त्यांच्यात चमकणे हा समान गुणधर्म आहे. समान गुणधर्म व्यक्त करण्याचा
पृ. १५८ एकमेव मार्ग असा; अनेक वस्तूंमधील हा समान गुणधर्म म्हणजे एक प्रविधानफल असून, ज्या वेळी ह्या वस्तूंपैकी एखादी वस्तू त्यातील चलाचे मूल्य म्हणून घेतली असेल त्या वेळी ते सत्य ठरते. ह्यामध्ये सर्व वस्तू प्रविधानफलाच्या सत्यत्वाचे "प्रसंग किंवा उदाहरणे" होत– कारण प्रविधानफल स्वतः जरी सत्य किंवा असत्य नसले तरी, जर ते "सदैव सत्य" किंवा "सदैव असत्य" अशा प्रकारचे नसेल तर, काही प्रसंगात ते सत्य राहील आणि काही प्रसंगात असत्य राहील. आता पुन्हा आपल्या उदाहरणाकडे वळू. प्रत्येक प्रसंगात A च्या मागोमाग B घडते, असे ज्या वेळी आपण म्हणतो, त्या वेळी आपण असे मानतो की, x काहीही असो, x जर A असेल तर त्या मागोमाग B घडणार; म्हणजे विशिष्ट प्रविधानफल हे "सदैव सत्य" असते असे आपण येथे प्रतिपादन करतो.

ज्या वाक्यामध्ये " सर्व ", " प्रत्येक ", " एक ", " विशिष्ट एक ", " काही " असे शब्द अंतर्भूत असतात त्या वेळी त्यांचा अर्थ लावण्यासाठी प्रविधानफले लागतात. ज्या प्रकारे प्रविधानफले उद्भवतात ते वरीलपैकी " सर्व " आणि " काही " या दोन शब्दांनी स्पष्ट करता येतील.

पूर्वीच्या विश्लेषणातील प्रविधानफलांविषयी करण्यासारख्या केवळ दोन गोष्टी आहेत. एक म्हणजे ते *सर्व* प्रकारांत सत्य आहेत असे प्रतिपादन करणे, तर दुसरे म्हणजे ते निदान एका, किंवा *काही* प्रकारांत (जरी आपण काही असे म्हटले तरी अनेक प्रकारच आहेत असे मात्र आपल्याला अपेक्षित नाही) ते सत्य असल्याचे प्रतिपादन करणे. प्रविधानफलाच्या इतर सर्व उपयोगांचा संक्षेप दोन प्रकारांत करता येईल. एखादे प्रविधानफल " सर्व प्रकारांत " किंवा " सदैव " (जरी आपण असे म्हटले तरी आपल्याला येथे कोणत्याही प्रकारे काळाचा निर्देश अपेक्षित नाही) सत्य आहे असे ज्या वेळी आपण म्हणतो, त्या वेळी त्याची सर्व मूल्ये सत्य आहेत असे आपले म्हणणे असते. जर " ϕx " हे फल असेल आणि a ही " ϕx " करता योग्य अशा जातीची वस्तू असेल, तर a कसाही जरी निवडला तरी ϕa सत्यच असेल. उदाहरणार्थ " जर a मनुष्यप्राणी असेल तर a मर्त्य असतो " हे विधान, a ही वस्तू मनुष्यप्राणी असो वा नसो, सत्य असणारच; खरे म्हणजे ह्या पद्धतीचे प्रत्येक प्रविधान सत्य असणार तेव्हा " जर x मनुष्यप्राणी असेल तर x मर्त्य असतो " हे प्रविधानफल " नेहमीच सत्य " 'किंवा " सर्व प्रकारात सत्य " असते. किंवा " एकशिंगी प्राणी " नसतात हे विधान, " 'x हा एकशिंगी नाही ' हे प्रविधानफल सर्व प्रकारात सत्य असते " या विधानासारखेच आहे. पूर्वीच्या प्रकरणातील प्रविधानांसंबंधीची प्रतिपादने उदा. " 'p किंवा q ' मध्ये अभिप्रेत ' q किंवा p ' " ही प्रतिपादने म्हणजे काही

पृ. १५९

विशिष्ट प्रविधानफले, सर्व प्रकारात सत्य असतात असे प्रतिपादन करण्यासारखीच आहेत. उदाहरणार्थ वरील तत्त्व, कोणत्याही विशिष्ट p किंवा q करता सत्य असल्याचे आपण प्रतिपादित नसतो, तर त्याच्याशी संबंधित असलेल्या आणि त्याला ज्याच्यामुळे काही अर्थ येईल अशा *कोणत्याही* p आणि q करता ते सत्य असते, असे प्रतिपादतो. दिलेल्या पक्षासाठी (Argument) फल *सार्थ* होणे ही अट त्याला त्या पक्षासाठी मूल्य– सत्य किंवा असत्य– असावे ह्या अटीप्रमाणेच आहे. या सार्थतेचा अभ्यास जातितत्त्वांच्या विषयात मोडतो. पण पूर्वीच्या प्रकरणात मांडलेल्या रूपरेषेपेक्षा, याचा अधिक पाठपुरावा आपण करणार नाही.

केवळ निगमनाच्या तत्त्वांमध्येच नव्हे तर तर्कशास्त्राच्या सर्व मूलभूत तत्त्वांमध्ये-सुद्धा, काही विशिष्ट प्रविधाने सदैव सत्य असल्याचे प्रतिपादिलेले असते. असे जर नसते तर, तेथे विशेष गोष्टी किंवा कल्पनांचा–सॉक्रेटिस किंवा रक्तिमा किंवा पूर्व आणि पश्चिम इत्यादी कशाचाही अंतर्भाव करावा लागला असता. आणि जी प्रतिपादने अशा

एखाद्या बाबीसाठी किंवा कल्पनेसाठी सत्य आहेत पण दुसऱ्यासाठी नाहीत अशी प्रतिपादने तर्कशास्त्राच्या कक्षेत येत नाहीत हे उघड आहे. सर्व प्रविधाने संपूर्णतः व्यापक असल्याचे मांडणे म्हणजेच, ज्या प्रविधानफलामध्ये एकही स्थिरपद नाही असे प्रविधान सदैव सत्य असल्याचे मांडणे. हा तर्कशास्त्राच्या व्याख्येचा एक भाग आहे (अर्थात ती संपूर्ण व्याख्या नव्हे). ज्यात स्थिरपदे मुळीच नाहीत अशा प्रविधानफलांच्या विवेचनाकडे आपण आपल्या शेवटच्या प्रकरणात पुन्हा वळू. तूर्त प्रविधानफलांबद्दल आपणास जी आणखी एक गोष्ट करावयाची आहे तिकडे वळू. ही गोष्ट म्हणजे, जे "कधी कधी सत्य असते" म्हणजे निदान एका प्रसंगात तरी सत्य असते, असे प्रतिपादन मांडणे.

ज्या वेळी "मानव प्राणी अस्तित्वात आहे" असे आपण म्हणतो त्या वेळी त्याचा अर्थ, "x हा मनुष्य आहे" हे प्रविधान फल कधी कधी सत्य असते असा होतो. "काही माणसे ग्रीक आहेत" असे ज्या वेळी आपण म्हणतो त्या वेळी त्याचा अर्थ "x हा मनुष्य आहे आणि ग्रीक आहे" हे प्रविधान फल कधी कधी सत्य असते असा होतो. "आफ्रिकेमध्ये नरभक्षक लोक अजूनही आहेत" असे ज्या वेळी आपण म्हणतो त्या वेळी त्याचा अर्थ "x हा आफ्रिकेतील आजचा नरभक्षक आहे" हे प्रविधानफल कधी कधी सत्य असते, म्हणजेच x च्या काही मूल्यांकरता सत्य असते, असा होतो. "जगामध्ये निदान n व्यक्ती आहेत" असे म्हणणे हे "α हा व्यक्तींचा वर्ग असून तो n ह्या प्रधानांकाचा सदस्य आहे" हे प्रविधानफल कधी कधी
पृ. १६० सत्य असते असे म्हणण्यासारखे आहे; किंवा ते α च्या विशिष्ट मूल्यांसाठी सत्य आहे असेही आपण म्हणू. कोणता चल घटक आपल्या प्रविधानफलाचा पक्ष म्हणून आपण घेणार असल्याचे निर्देशित करणे ज्या वेळी आवश्यक असेल त्या वेळी, कल्पना व्यक्त करण्याची ही पद्धत अधिक सोईची ठरते. उदाहरणार्थ, वरील प्रविधानफल आपण थोडक्यात "α हा n व्यक्तींचा वर्ग आहे" असे लिहू. त्यात α आणि n ही दोन चले आहेत. प्रविधानफलांच्या भाषेत अनंताचा सिद्धांत असा : "'जर n ही विगामी संख्या असेल तर α हा n वस्तुमात्रांचा वर्ग आहे हे म्हणणे, α च्या काही मूल्यांकरता सत्य असते' हे प्रविधानफल n च्या सर्व संभाव्य मूल्यांसाठी सत्य असते". येथे, "α हा n वस्तुमात्रांचा वर्ग आहे" असे एक दुय्यम फल आहे. ते α च्या संबंधात *कधी कधी* सत्य असते; आणि n ही विगामी संख्या असता हे घडते, हे प्रतिपादन, n च्या संबंधात *नेहमी* सत्य असते.

ϕx हे फल नेहमी सत्य असते हे विधान न–ϕx हे कधीकधी सत्य असते ह्या विधानाचे नकरण होय, आणि ϕx हे कधीकधी सत्य असते हे विधान न–ϕx सदैव सत्य असते ह्या विधानांचे नकरण होय. तेव्हा "सर्व मनुष्य मर्त्य आहेत" हे विधान "x हा अमर्त्य मानव आहे" हे फल कधीकधी सत्य असते ह्या विधानाचे नकरण

होय आणि "एकशिंगी प्राणी अस्तित्वात आहेत" हे विधान "x हा एकशिंगी नाही" हे फल सदैव सत्य असते याचे नकरण होय.[१] ज्या वेळी न – ϕx हे नेहमी सत्य असते त्या वेळी ϕx, "कधीही सत्य नसते" किंवा "नेहमी असत्य असते" असे आपण म्हणतो. आपली इच्छा असेल त्याप्रमाणे "नेहमी किंवा सदैव," आणि "कधीकधी," या जोडीतील कोणतेही एक, आपण आदिकल्पना म्हणून निवडून, उरलेल्याची व्याख्या त्याच्या व त्याच्या नकरणाच्या रूपात करू शकतो. म्हणजे, जर "कधीकधी" ही आपली आदिकल्पना म्हणून आपण घेतली तर आपण अशी व्याख्या करू शकतो :

"'ϕx हे सदैव सत्य आहे' याचा अर्थ 'न – ϕx हे कधीकधी सत्य असते, हे असत्य आहे' असा करावा"[२]. पण जातिमीमांसेशी संबंधित कारणांकरता "सदैव," "कधीकधी" हे दोन्ही संबोध, आदिकल्पना म्हणून घेणे आणि ते ज्यांच्यात उद्भवतात त्या प्रविधानांच्या नकरणांची व्याख्या त्यांच्या साह्याने करणे हे अधिक
पृ. १६१ बरोबर. म्हणजे असे की, ज्या प्रविधानांमध्ये x आहे अशा प्रकारच्या प्रविधानांच्या नकरणांची व्याख्या आधीच केली आहे, (किंवा ती आदिकल्पना म्हणून स्वीकारली आहे) असे म्हणून आपण पुढील व्याख्या करू : "'ϕx सदैव' ह्याचे नकरण 'न – ϕx कधीकधी' आणि 'ϕx कधीकधी'चे नकरण 'न – ϕx सदैव'" ह्याच रीतीने, ज्यात चले उघडपणे आली आहेत अशा प्रविधानांना लागू करता येईल, अशा पद्धतीने विकल्पन, आणि बाकीची सत्यताफले, ज्यांत प्रत्यक्ष एकही चल नाही अशा प्रविधानांच्या, आदिकल्पनांच्या आणि व्याख्यांच्या रूपात पुर्नव्याख्यात करता येतील. ज्यात चले उघडपणे आलेली नसतील अशा प्रविधानांना "प्राथमिक प्रविधाने" म्हणतात. त्यांच्यापासून क्रमाक्रमाने चढत, आतापर्यंत निर्देशिलेल्या पद्धतींनी, ज्यांत एक, दोन, तीन चले, किंवा (n ही कोणतीही संख्या दिली असता) n पर्यंत कितीही, चले आहेत अशा प्रविधानांना लागू पडतील अशा सत्यताफलांच्या मीमांसेपर्यंत आपण जाऊ शकू.

पारंपरिक आकारिक तर्कशास्त्रात ज्या रचना साध्या म्हणून घेतल्या जातात त्या, साधेपणापासून फार दूर असत आणि त्या सर्वात, संयुक्त (Compound) प्रविधान-फलांच्या सर्व मूल्यांबद्दलचे किंवा काही मूल्यांबद्दलचे प्रतिपादन अंतर्भूत असे. सुरुवातीला,

---

[१] ले. टी. : निगमनाची पद्धत Principia Mathematica vol. i, *9 मध्ये दिली आहे.

[२] ले. टी. : भाषेच्या सोयीसाठी एकवचन किंवा अनेकवचन सूचित करण्याचे टाळण्याकरता "ϕx कधीकधी" किंवा "ϕx कधी कधी सत्य असते" असे म्हणण्या-पेक्षा "ϕx हे नेहमीच असत्य नसते" असे म्हणणे बहुधा सोईचे होईल.

" सर्व S, P असतात " हे घेऊ. आपण असे गृहीत धरू की, S ची व्याख्या ϕx या प्रविधानफलाने, आणि u. c. ची व्याख्या ψx यां प्रविधानफलाने केली आहे. उदाहरणार्थ, जर S म्हणजे *मानव* असतील तर ϕx म्हणजे " x मनुष्यप्राणी आहे ", असे होईल; जर P म्हणजे *मर्त्य* असतील तर ψx म्हणजे " x केव्हाना केव्हा मरणार " असे होईल. मग " सर्व S, P असतात "चा अर्थ : " ϕx मध्ये अभिप्रेत ψx हे सदैव सत्य असते ", असा होईल. जी पदे प्रत्यक्षात S मध्ये असतात त्यांनाच केवळ " सर्व S, P असतात " हे लागू पडते असे नव्हे, हे लक्षात घेतले पाहिजे; जी पदे S मध्ये नसतात त्यांच्याबद्दलही ते काही सांगते. समजा S आहे की नाही याबद्दल आपणाला काहीही माहिती नाही असा एखादा x आपल्याला सापडला असे समजू. तरी, " सर्व S, P असतात " हे आपले विधान आपणाला x बद्दल काहीतरी सांगते. म्हणजे *जर* x, S असेल तर x, P असतो आणि हे x, S असता जितके सत्य असते तितकेच x, S नसतानाही सत्य असते. जर तसे ते दोन्ही प्रकारात सारखेच सत्य नसते तर *क्रमविरुद्ध सिद्धता* ही पद्धत सयुक्तिक ठरली नसती; कारण ज्या प्रकारात गृहीत असत्य असते (तसे ते मागाहून ठरते) अशा अभिप्रेततांचा (Implication) उपयोग करणे हाच तर या पद्धतीचा विशेष आहे. हेच आपण निराळ्या पद्धतीने मांडू. " सर्व S, P असतात " हे जाणून घेण्यासाठी S मध्ये कोणती पदे आहेत त्या सर्वांची जंत्री करणे आवश्यक नाही. S असणे म्हणजे काय आणि P असणे म्हणजे काय हे जर आपणास माहीत असेल तर " सर्व S, P असतात " यामध्ये प्रत्यक्षतः काय मांडले आहे हे आपणाला संपूर्णतः समजू शकते; मग यातल्या कोणाबद्दलही आपल्याला कितीही थोडी माहिती असली तरी चालेल. यावरून असे दिसते की " सर्व S, P असतात " या विधानाच्या दृष्टीने जी पदे प्रत्यक्षतः S असतात तीच केवळ महत्त्वाची असतात असे नव्हे तर ज्या पदांच्या बाबतीत ती S असतात असे मानणे सार्थ ठरेल, तीही पदे महत्त्वाची असतात. म्हणजेच S असणारी सर्व पदे आणि S नसणारी सुद्धा सर्व पदे– म्हणजे उचित अशी संपूर्ण तार्किक " जाती " होय. *सर्व* बद्दलच्या विधानांना जे लागू पडते तेच *काही* बद्दलच्या विधानांनाही लागू पडते. उदा. " मनुष्य प्राणी अस्तित्वात आहे "चा अर्थ " x मनुष्यप्राणी आहे " हे फल x च्या काही मूल्यांकरताच सत्य असते, असा होतो. येथे x ची *सर्व* मूल्ये (म्हणजे ज्या मूल्यांकरता " x मनुष्यप्राणी आहे " हे सार्थ ठरेल– सत्य किंवा असत्य असेल– ती सर्व) महत्त्वाची आहेत. केवळ जी प्रत्यक्षतः मनुष्यप्राणी आहेत तेवढीच नव्हेत. (अशा प्रकारचे विधान *असत्य* असल्याचे आपण कसे सिद्ध करतो हे पाहिले की हे उघड होईल.) तेव्हा " सर्व " किंवा " काही " बद्दलच्या प्रत्येक प्रतिपादनामध्ये ज्या पक्षांकरता एखादे फल सत्य होते तेवढ्यांचाच अंतर्भाव होतो असे नसून ज्यांच्यामुळे ते सार्थ ठरते अशा सर्वांचा, म्हणजे ज्यांच्यामुळे त्याला सत्य किंवा असत्य यांपैकी एक मूल्य प्राप्त होते, अशा सर्व पदांचा अंतर्भाव होतो.

पृ. १६२

जुन्या पद्धतीच्या आकारिक तर्कशास्त्राच्या पारंपरिक रूपांच्या विवरणाकडे आता आपण वळू. आपण असे गृहीत धरतो की ज्यांच्याकरता ϕx सत्य असते ती x पदे म्हणजे S, आणि ज्यांच्याकरता ψx सत्य असते ती पदे म्हणजे P. (सर्व वर्ग याप्रमाणे प्रविधानफलांपासून मिळतात हे आपण नंतरच्या प्रकरणात पाहणार आहोत.) मग :

" सर्व S, P असतात " म्हणजे " ' ϕx मध्ये अभिप्रेत ψx ' हे नेहमी सत्य असते ".

" काही S, P असतात " म्हणजे " ' ϕx आणि ψx ' कधीकधी सत्य असते ".
" एकही S, P नसतो " म्हणजे, " ' ϕx मध्ये अभिप्रेत न–ψx ' हे नेहमी सत्य असते ".

" काही S, P नसतात " म्हणजे " ' ϕx आणि न–ψx ' कधीकधी सत्य असते ". सर्व किंवा काही मूल्यांकरता प्रतिपादिलेली प्रविधानफले ही स्वतः ϕx किंवा ψx नसतात, तर x ह्या *एकाच* पक्षाकरता ϕx आणि ψx ची सत्यताफले असतात हे लक्षात घ्यावे. अपेक्षित त्या प्रकारच्या गोष्टीची कल्पना करण्याचा सर्वांत सोपा मार्ग म्हणजे ϕx आणि ψx अशा सामान्य अवस्थेपासून आरंभ न करता ϕa आणि ψa (येथे a हा एक स्थिर आहे) पासून आरंभ करणे. समजा आपण सर्व " मनुष्य मर्त्य आहेत " याचा विचार करीत आहोत : आपण

" जर सॉक्रेटिस मनुष्यप्राणी असेल तर सॉक्रेटिस मर्त्य आहे "

ह्यापासून सुरुवात करू आणि मग जेथे जेथे " सॉक्रेटिस " येईल तेथे तेथे त्याच्या ऐवजी चल x लिहिले आहे असे मानू. मुख्यतः जो उद्देश

पृ. १६३

साधावयाचा आहे तो असा : जरी x चल राहात असेल आणि त्याला निश्चित असे मूल्य नसेल तरी, ज्या वेळी " ϕx मध्ये अभिप्रेत ψx " सदैव सत्य असते असे आपण प्रतिपादन करीत असू, त्या वेळी x ला " ϕx "मध्ये आणि " ψx "मध्ये तेच एक मूल्य असले पाहिजे. हे साध्य करण्यासाठी आपल्याला अशा फलापासून आरंभ केला पाहिजे की ज्याचे मूल्य ϕx आणि अशी स्वतंत्र फले नसून " ϕa मध्ये अभिप्रेत ψa " अशा प्रकारचे राहील. कारण जर आपण दोन स्वतंत्र फलांपासून आरंभ केला तर x अविज्ञात राहात असता दोन्हींकडे त्याचे मूल्य एकच असेल याची खात्री देता येणार नाही.

" ϕx मध्ये अभिप्रेत ψx " सदैव सत्य असते, असे ज्या वेळी आपणास म्हणावयाचे असेल त्या वेळी संक्षेपाने आपण " ϕx मध्ये सदैव अभिप्रेत ψx " असे म्हणू. " ϕx मध्ये सदैव अभिप्रेत ψx ", अशा प्रकारच्या सर्व प्रविधानांना " आकारिक अभिप्रेतता (Formal implication) " म्हणतात. ज्या वेळी अनेक चले असतात त्या वेळीही हेच नाव वापरतात.

पारंपरिक तर्कशास्त्र " सर्व S, P असतात, " अशा ज्या प्रविधानांपासून आरंभ करते, ती प्रविधाने साधेपणापासून किती दूर आहेत ते वरील व्याख्यांवरून दिसून येईल. पारंपरिक तर्कशास्त्र " सर्व S, P असतात " हे प्रविधान " x, P आहे " ह्या प्रकारचेच मानते. त्यात अंतर्भूत असलेले विवेचन किती कमी आहे याचा हा नमुनाच आहे. उदा. त्यात " सर्व मनुष्य मर्त्य आहेत " हे " सॉक्रेटिस मर्त्य आहे " ह्या प्रकारचे मानतात. पहिले, " ϕx मध्ये सदैव ψx अभिप्रेत आहे " ह्या प्रकारचे आहे तर दुसरे " ψx " ह्या प्रकारचे आहे हे आताच आपण वर पाहिले. ह्यांमध्ये भेद करण्यावर पेआनो आणि फ्रेगे यांनी जो भर दिला तो प्रतीकात्मक तर्कशास्त्राच्या प्रगतीच्या दृष्टीने फार मार्मिक होता.

" सर्व S, P आहेत " आणि " एकही S, P नाही " यांच्या रूपात, खरे म्हणजे फक्त ψx ऐवजी न–ψx लिहिले आहे इतके सोडले तर कोणताही फरक नाही हे दिसून येईल; तसेच " काही S, P आहेत " आणि " काही S, न–P आहेत " यांच्याबद्दलही म्हणता येईल. " सर्व S, P असतात " अशा प्रकारच्या प्रविधानांमध्ये S चे " अस्तित्व " अंतर्भूत नाही, म्हणजे S असतील अशी पदे असावीत अशी त्यांत अपेक्षा नाही. हा दृष्टिकोण केवळ तांत्रिक दृष्ट्या परवडण्यासारखा आहे; पण तो आपण स्वीकारल्यास संभाषणाचे पारंपरिक नियम सदोष असल्याचे दिसून येईल. वरील व्याख्यांचा परिणाम असा होईल की जर ϕx नेहमी असत्य असेल, म्हणजे जर एकही S अस्तित्वात नसेल तर मग P काहीही असले
पृ. १६४ तरी " सर्व S, P असतात " आणि " एकही S, P नसतो " ही दोन्ही सत्य ठरतील. कारण मागच्या प्रकरणातील व्याख्येनुसार " ϕx मध्ये अभिप्रेत ψx " म्हणजे " न–ϕx किंवा ψx " आणि जर न–ϕx नेहमी सत्य असेल तर हेही नेहमी सत्य असते. प्रथमतः, ह्या निष्कर्षांमुळे निराळ्या व्याख्या करण्याकडे वाचकाची प्रवृत्ती होईल, पण थोड्या व्यावहारिक अनुभवान्ती इतर कोणत्याही व्याख्या गैरसोईच्या ठरतील आणि त्यामुळे महत्त्वाचे मुद्दे दुर्लक्षिले जातात असे लगेच दिसून येईल. " ϕx मध्ये सदैव ψx अभिप्रेत आहे, आणि ϕx कधी कधी सत्य आहे " हे प्रविधान निश्चितच संयुक्त आहे. " सर्व S, P असतात " याची व्याख्या देणे फार विचित्र होईल. कारण मग " ϕx मध्ये सदैव ψx अभिप्रेत असते " हे म्हणावयाला आपल्याला शब्द राहाणार नाहीत. आणि वरचे प्रविधान आपल्याला जितके वेळा लागेल त्याच्या शेकडोपट हे आपल्याला लागेल. पण आपल्या व्याख्यांमुळे " सर्व S, P असतात " मध्ये " काही S, P असतात " हे अभिप्रेत ठरत नाही. कारण पहिल्यामध्ये S अस्तित्वात नसणे शक्य असते, तर तसे ते दुसऱ्यामध्ये नसते; तेव्हा योगायोगावर (Per accidens पर आक्सिदाँ) अवलंबून असणारे संभाषण अप्रमाण ठरते आणि संविधानाचे (Syllogism) काही प्रकार किंवा संघात (Mood) तर्कदुष्ट ठरतात. उदा. जर M अस्तित्वातच नसेल तर " सर्व M, S असतात, सर्व M,

P असतात, म्हणून काही S, P असतात" हा गहहप्रहा (Darapti) संवात चुकीचा ठरेल.

"अस्तित्वाच्या" कल्पनेची कित्येक रूपे आहेत. त्यापैकी एकाचा विचार आपल्याला पुढच्या प्रकरणात करावयाचा आहे; पण त्याचे मूलभूत रूप म्हणजे "कधीकधी सत्य" पासून लगेच निगमित करता येत असलेले रूप होय. ज्या वेळी ϕa सत्य असते त्या वेळी a हा ϕx ह्या फलाचे "समाधान" करतो असे आपण म्हणू; एखाद्या समीकरणाची मुळे (Roots), त्या समीकरणाचे समाधान करतात असे जे आपण म्हणतो त्याच प्रकारची ही भूमिका आहे. आता ϕx कधीकधी सत्य असेल, तर हे सत्य राहील असे x असतात किंवा "ϕx चे समाधान करणारे पक्ष *अस्तित्वात*" असतात असे आपण म्हणू. "अस्तित्व" ह्या शब्दाचा हा मूलभूत अर्थ होय. बाकीचे अर्थ एकतर ह्याच अर्थावरून निघालेले असतात किंवा त्यामध्ये विचारांचा संभ्रम असतो. "मनुष्य प्राणी असतात" हे अचूकपणे आपण "x हा मनुष्य आहे" हे कधीकधी सत्य आहे ह्या अर्थाने म्हणू. पण जर "मनुष्यप्राणी असतात, सॉक्रेटिस हा मनुष्य आहे म्हणून सॉक्रेटिस अस्तित्वात आहे" असे कृत्रिम संविधान (Pseudo syllogism) आपण मांडले तर आपण अर्थशून्य बडबड केली असे होईल. कारण "मनुष्यप्राण्यांप्रमाणे" "सॉक्रेटिस" हा काही दिलेल्या प्रविधानफलाचा अविज्ञात पक्ष नव्हे. हा तर्कदोष अगदी पुढील युक्तिवादासारखाच आहे: "मनुष्यप्राणी पुष्कळ आहेत, सॉक्रेटिस हा मनुष्य आहे म्हणून सॉक्रेटिस पुष्कळ
पृ. १६५ आहेत". ह्या उदाहरणातील अनुमान अर्थशून्य आहे हे उघड आहे, पण वर दिलेल्या, अस्तित्वाच्या उदाहरणात ते तितकेसे स्पष्ट नाही. याची कारणे पुढील प्रकरणात अधिक सविस्तरपणे आढळतील. तूर्त आपण केवळ इतकेच लक्षात घेऊ या की "मनुष्य प्राणी असतात" असे म्हणणे जरी बरोबर असले तरी मनुष्य असणाऱ्या अशा विशिष्ट x ला 'अस्तित्व' आहे असे मानणे चुकीचे, किंवा अर्थशून्यच असते. सामान्यतः "ϕx चे समाधान करणारी पदे अस्तित्वात असतात" चा अर्थ "ϕx कधीकधी सत्य असते" हा होय; पण (a हे ϕx चे समाधान करणारे एक पद असता) "a अस्तित्वात आहे" असे म्हणणे म्हणजे नुसताच गोंधळ किंवा अर्थशून्य असा एक आकार होय. हा साधा तर्कदोष ध्यानात ठेवल्यास अस्तित्वाच्या अर्थाबद्दलची कित्येक जुनी तत्त्वज्ञानात्मक कूटे आपल्याला सोडवता येतात हे कळून येईल.

प्रविधाने आणि प्रविधानफले यांच्यातील योग्य फरक न केल्यामुळे होणाऱ्या निराशाजनक गोंधळामध्ये, तत्त्वज्ञानाने ज्या कल्पनांमुळे स्वतःला गुरफटून घेतले आहे, त्या कल्पना म्हणजे रूप किंवा आकार (Modality): *आवश्यक*, *संभाव्य* आणि *असंभाव्य* (कधी कधी संभाव्य ह्याऐवजी *अनिश्चित* असेही म्हणतात.) पारंपरिक दृष्टिकोन असा होता की सत्य प्रविधानांपैकी काही आवश्यक असत तर काही केवळ

अनिश्चित किंवा असंभाव्य असत; आणि असत्य प्रविधानांपैकी काही म्हणजे ज्यांची विरोधी प्रविधाने आवश्यक असत, अशा प्रविधानांपैकी काही संभाव्य असत तर काही केवळ सत्य नाहीत, अशी असत. पण खरे म्हणजे आवश्यकतेच्या कल्पनेमुळे सत्यतेमध्ये कशाची भर घातली आहे, याचा स्पष्ट खुलासा कधीही केलेला नसे. प्रविधानफलाच्या संबंधात अशी त्रिविध विभागणी स्वाभाविक आहे. जर " ϕx " हे एखाद्या प्रविधानफलाचे अनिर्धारित (Undetermined) मूल्य असेल तर, फल सदैव सत्य असता ते *आवश्यक* असेल, कधी कधी सत्य असता *संभाव्य* असेल आणि कधीही सत्य नसता *असंभाव्य* असेल. उदाहरणार्थ, अशा तऱ्हेची परिस्थिती संभाव्यता शास्त्रामध्ये (Probability) उद्‌भवते. समजा एखाद्या पिशवीतील अनेक चेंडूंपैकी x हा एक चेंडू घेतला; जर सर्व चेंडू पांढरे असतील तर " पांढरा आहे " हे आवश्यक आहे; जर काही पांढरे असतील तर ते संभाव्य आहे; एकही पांढरा नसेल तर ते असंभाव्य आहे. तेथे x बद्दल जर काही *माहिती* असेल तर ते म्हणजे, तो विशिष्ट प्रविधान-फलाचे म्हणजे " x हा त्या पिशवीतील चेंडू आहे " याचे समाधान करतो इतकेच.

अशी परिस्थिती, सामान्यतः संभाव्यतेच्या प्रश्नामध्ये उद्भवते
पृ. १६६ आणि रोजच्या जीवनातही ती नवीन नव्हे. उदाहरणार्थ, ज्या वेळी एखादा मनुष्य आपल्याकडे येतो त्या वेळी त्याने आपल्या अमुक अमुक मित्राकडून आणलेल्या परिचयपत्राहून अधिक आपल्याला काहीही माहिती नसते. अशा सर्व प्रसंगात सर्वसामान्यतः आकाराच्या (Modality) दृष्टीने प्रविधान-फलाला महत्त्व येते. परस्परविरुद्ध अशा भिन्न भिन्न दिशांनी विचार करताना स्पष्टपणा येण्यासाठी प्रविधानफले प्रविधानांपासून कठोरपणे वेगळी करणे आत्यंतिक महत्त्वाचे आहे, आणि पूर्वी असे करण्यास चुकल्यामुळे तत्त्वज्ञानाला लांछन आले होते.

□ □

प्रकरण १६

वर्णने

मागच्या प्रकरणामध्ये आपण *सर्व* आणि *काही* या शब्दांचा विचार केला. या प्रकरणामध्ये आपण विशिष्ट किंवा निश्चित किंवा एकमेव (The)[1] ह्या शब्दाचा एकवचनात विचार करणार आहोत आणि पुढच्या प्रकरणामध्ये आपण विशिष्ट

पृ. १६७

या शब्दाचा अनेक वचनामध्ये विचार करणार आहोत. कदाचित एका शब्दाकरता दोन प्रकरणे खर्ची घालणे अनाठायी वाटेल. परंतु तत्त्वज्ञानी गणितज्ञाच्या दृष्टीने हा शब्द अतिशय महत्त्वाचा आहे. ब्राऊनिंगच्या व्याकरण-कर्त्याने (कवितेतील) ज्याप्रमाणे अगदी मृत्युशय्येवर असताना सुद्धा δε ह्या उपपदाचे विवरण केले होते, तसेच मी सुद्धा, केवळ तुरुंगातच काय पण अगदी शवपेटिकेत असलो तरीही एकमेव इ. (the) शब्दाचे विवरण करीन.[2]

" x चा बाप " किंवा " x चा sine " अशा प्रकारच्या वर्णनफलांचा उल्लेख करण्याचा प्रसंग पूर्वी आलेलाच आहे. त्यांची व्याख्या करण्यापूर्वी प्रथम " वर्णन " ह्या संबोधाची व्याख्या केली पाहिजे.

" वर्णन " दोन प्रकारचे असू शकेल, निश्चित आणि अनिश्चित (किंवा द्वयर्थी). अनिश्चित वर्णन म्हणजे " असे असे " अशा तऱ्हेचा वाक्प्रयोग होय आणि निश्चित वर्णन म्हणजे " विशिष्ट प्रकारचे असे असे " (एकवचनी) अशा प्रकारचा वाक्प्रयोग होय. आपण यातील पहिल्या प्रकारापासून सुरुवात करू.

" तुला कोण भेटले ? " " मला एक मनुष्य भेटला ". " हे अगदी अनिश्चित असे वर्णन आहे ". म्हणजे परिभाषेच्या नेहमीच्या उपयोगापासून आपण काही निराळे

---

[1] अ. टी. : मराठी भाषेमध्ये a आणि the यातील फरक दर्शवणारे प्रतिशब्द नाहीत. त्यामुळे येथे The चे भाषांतर विशिष्ट किंवा निश्चित किंवा एकमेव असे केले आहे. याचा खुलासा पूर्वी पाचव्या प्रकरणातही केला आहे.

[2] अ. टी. : हे सर्व वर्णन अलंकारिक आहे. त्याचे परिपूर्ण भाषांतर कठीण आहे. त्यातील आशय वाचकांना कळला असेल अशी आशा आहे.

करीत नाही. आपला प्रश्न असा : ज्या वेळी मी, "मला एक मनुष्य भेटला" असे प्रतिपादन करतो त्या वेळी मी खरोखर काय प्रतिपादन करतो ? क्षणभर असे समजू की माझे प्रतिपादन सत्य आहे आणि मला प्रत्यक्षात जोन्स भेटला. "मला जोन्स भेटला" असे मी प्रतिपादित *नाही* हे उघड आहे. मी असेही म्हणू शकेन, "मला एक मनुष्य भेटला, पण तो जोन्स नव्हता", अशा वेळी मी जरी खोटे बोलत असलो तरी मी स्वतःच्या विरोधी (आत्मव्याघाती) विधान करीत नाही; जर मी, मला एक मनुष्य भेटला असे म्हणत असता मला खरोखर जोन्सच भेटला असे
पृ. १६८ सुचवावयाचे असेल तर मात्र ते आत्मव्याघाती ठरेल. ज्याच्याशी मी बोलत आहे तो जरी परदेशी असेल आणि जोन्सची त्याला काहीही माहिती नसेल, त्यालासुद्धा मी काय म्हणतो ते समजू शकेल, हे उघड आहे.

परंतु आपण थोडे पुढे जाऊ : जोन्सच नव्हे तर प्रत्यक्षतः कोणत्याही माणसाचा माझ्या विधानामध्ये प्रवेश झालेला नाही. ज्यावेळी विधान असत्य असेल त्या वेळी हे स्वाभाविक ठरेल; कारण प्रतिपादनामध्ये दुसऱ्या कोणाचा प्रवेश झाला आहे असे मानण्यापेक्षा कोणताही अधिक आधार, जोन्सचा प्रवेश झाला आहे असे मानण्याला नाही. जर येथे एकही मनुष्य नसेल तर विधान कदाचित सत्य ठरणार नाही; पण तरीसुद्धा विधानाला अर्थ राहील. "मला एक एकशिंगी प्राणी भेटला" किंवा "मला एक समुद्रसर्प दिसला" हे प्रतिपादन अगदी अर्थपूर्ण आहे. मग एकशिंगी किंवा समुद्रसर्प म्हणण्याला म्हणजेच या कल्पित चमत्कारिक प्राण्यांच्या वर्णनाला काही अर्थ नसेलही. तेव्हा प्रविधानामध्ये कशाचा प्रवेश असेल तर तो संकल्पनेचा (Concept) होय. उदाहरणार्थ, "एकशिंगी प्राण्याच्या" संदर्भात केवळ एक कल्पना आहे. "एक एकशिंगी प्राणी" असे ज्याला म्हणता येईल त्यामध्ये भाषेच्या विविध छटांच्या दृष्टीने काहीतरी अवास्तव आहे, असेही नाही. म्हणून "मला एक एकशिंगी प्राणी दिसला" असे म्हणणे (असत्य असले तरी) अर्थपूर्ण असल्याने ह्या प्रविधानाचे योग्य विश्लेषण केल्यास हे स्पष्ट होईल की त्यात "एक एकशिंगी प्राणी" हा घटक नसून, "एकशिंगी प्राणी" ही संकल्पना आहे.

"अवास्तवते"चा प्रश्न, म्हणजे ज्याचा आपल्याला येथे प्रतिबंध होत आहे तो फार महत्त्वाचा आहे. ज्या तर्कशास्त्रज्ञांनी ह्या प्रश्नाला हात घातला त्यांपैकी बहुसंख्यांची व्याकरणामुळे दिशाभूल झाली, आणि त्यामुळे त्यांनी याचा विचार चुकीच्या दिशेने केला. विश्लेषणामध्ये त्यांनी व्याकरणाचा उपयोग मार्गदर्शक म्हणून, वस्तुस्थितीपेक्षा अधिक प्रमाणात गृहीत धरला आणि व्याकरणातील कोणते मुद्दे महत्त्वाचे आहेत ते त्यांना कळले नाही. "मला जोन्स भेटला" आणि "मला एक मनुष्य भेटला" ही दोन्ही, रूपे, जुन्या वाङ्मयात प्रविधानांची सारखीच रूपे म्हणून गणली गेली. पण प्रत्यक्षात पाहता ती अगदी भिन्न रूपे आहेत. पहिल्यात प्रत्यक्ष एका माणसाचा म्हणजे

जोन्सचा उल्लेख आहे, आणि अधिक स्पष्ट केल्यावर त्याचे स्वरूप " मला x भेटला, आणि x मनुष्य आहे ' हे फल कधीकधी सत्य असते " असे
पृ. १६९
होते. (" कधीकधी " म्हणजे अनेक वेळाच असते, असे अपेक्षित नाही असा संकेत आपण स्वीकारल्याचे वाचकांना स्मरत असेल.) हे प्रविधान " मला x भेटला " ह्या प्रकारचे नाही हे उघड आहे; त्यामध्ये " मला एक एकशिंगी प्राणी भेटला " ह्या प्रविधानाच्या अस्तित्वाचाही अंतर्भाव होतो; मग " एक एकशिंगी प्राणी " नावाची काही चीज प्रत्यक्षात नसेलही.

प्रविधानफलांच्या यंत्रणेच्या अभावी कित्येक तर्कशास्त्रज्ञ, अवास्तव गोष्टी अस्तित्वात असतात, अशा निष्कर्षाकडे ओढले गेले. काहींनी तर उदा. माइनोंगने (Meinong) असा युक्तिवाद [१] केला आहे की आपण " सोनेरी डोंगर " किंवा " वाटोळा चौकोन " इ. बद्दल बोलू शकू; हे ज्याचे कर्ते आहेत अशांबद्दल आपण सत्य प्रविधाने बनवू शकू; म्हणून त्यांना काही एक प्रकारचे तार्किक अस्तित्व असले पाहिजे;नाहीतर ज्या प्रविधानांमध्ये ते येतात ती अर्थशून्य ठरतील. मला असे वाटते की अत्यंत अमूर्त प्रकारच्या अभ्यासामध्ये सुद्धा वास्तवतेची जी भावना टिकवणे आवश्यक ठरते, तीसुद्धा अशा मीमांसामध्ये राहात नाही. माझा असा आग्रह आहे की एकशिंगी प्राण्याला प्राणिशास्त्रांत जितके स्थान आहे त्यापेक्षा अधिक स्थान तर्कशास्त्रामध्ये असता कामा नये. कारण प्राणीशास्त्र जितके वास्तव जगाबद्दल विचार करते तितकाच विचार तर्कशास्त्रही करते. फक्त त्याचे स्वरूप अधिक अमूर्त आणि व्यापक असते. स्तुतिस्तोत्रांत किंवा वाङ्मयात, किंवा कल्पनाजगतात एकशिंगी प्राण्यांना अस्तित्व असते, असे म्हणणे ही अगदी कीव करण्यासारखी आणि क्षुद्र पळवाट आहे. स्तुतिस्तोत्रांत ज्याला अस्तित्व आहे तो रक्तमासांचा, स्वयंप्रेरणेने हालचाल आणि श्वसन करणारा प्राणी नव्हे. ते केवळ एक चित्र किंवा शब्दांनी केलेले वर्णन असेल. तसेच, उदाहरणार्थ, हॅम्लेट स्वतःच्या जगामध्ये म्हणजेच शेक्सपीयरच्या कल्पनेच्या जगामध्ये अस्तित्वात आहे असा समज बाळगणे हे नेपोलियन खऱ्या जगात जसा अस्तित्वात होता तसेच आहे, असे म्हणणे म्हणजे बुद्धया केलेला गोंधळ होय; त्यावर क्वचितच विश्वास टाकता येईल. एकच जग अस्तित्वात आहे ते म्हणजे " सत्य " जग. शेक्सपीयरची कल्पना हा त्याचाच एक भाग आहे. आणि हॅम्लेटच्या लिखाणातील त्याचे विचार सत्य आहेत. त्याचे नाटक वाचण्यामधील विचारही तसेच आहेत. पण शेक्सपीयर आणि त्याचे वाचक ह्यांचे विचार, भावना इ. इतकेच काय ते सत्य असणे आणि त्याबाहेर हॅम्लेट नावाची काही वस्तू नसणे हेच तर कल्पितकथांचे

---

[१] ले. टी : Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie उंटर झुखुङ्गेन त्सुर् गेगेन्स्टान्स्टेओरी उंट प्स्युशोलोगी १९०४. वस्तुविज्ञान आणि मानसशास्त्र याबद्दलचे संशोधन.

सार होय. ज्या वेळी इतिहासाच्या लेखकांनी आणि वाचकांनी नेपोलियनबद्दल निर्माण केलेल्या सर्व भावना तुम्ही विचारात घेता त्या वेळी तुम्ही त्या प्रत्यक्ष मनुष्यास स्पर्श करीत नाही; पण हॅम्लेटच्या बाबतीत तुम्ही त्याच्या गाभ्यापर्यंत जाता. जर हॅम्लेटबद्दल कोणीच विचार केला नाही, तर त्याच्यासंबंधी काहीही शिल्लक राहणार नाही; पण जर नेपोलियनबद्दल एखाद्याने विचार केला नाही तर त्याला लवकरच
पृ. १७० असे दिसून येईल की दुसऱ्या कोणी तरी विचार केलेला आहे. सत्यतेची जाणीव ही तर्कशास्त्राचे चैतन्य आहे; आणि हॅम्लेट हे आणखी एका प्रकारचे जग आहे असे सोंग करून जो कोणी बनवेगिरी करतो तो खरे म्हणजे कार्यनाशच करतो. एकशिंगी प्राणी, सोनेरी डोंगर, वाटोळे चौकोन आणि अशा सर्व भासमय वस्तूंसंबंधीच्या प्रविधानाच्या अचूक विश्लेषणाची मांडणी करण्यामध्ये सत्यतेचा मजबूत आधार अत्यंत आवश्यक आहे.

वास्तवतेची भावना पाळण्यासाठी, प्रविधानांच्या विश्लेषणात " अवास्तव " अशा कोणत्याही गोष्टीला थारा द्यायचा नाही असा आपला आग्रह राहील. पण काही झाले तरी, अवास्तव असे काही *नसेलच* तर अवास्तव गोष्टींचा अंतर्भाव आपण करूच शकू कसा, असे विचारता येईल. उत्तर असे की, प्रविधानांचा विचार करीत असता, प्रथमतः आपण प्रतीकांचा विचार करीत असतो आणि मग ज्यांना काही अर्थ नाही अशा प्रतीकांच्या समूहाला जर आपण महत्त्व देऊ, तर वर वर्णन केलेल्या वस्तूंसारख्या अवास्तव गोष्टींना थारा देण्याचीही चूक आपण करू. " मला एक एकशिंगी भेटला " ह्या प्रविधानात चारी शब्द मिळून एक अर्थपूर्ण प्रविधान बनते. " मनुष्य " हा शब्द ज्या दृष्टीने अर्थपूर्ण आहे त्या दृष्टीने " एकशिंगी " हा शब्दसुद्धा स्वतःपुरता अर्थपूर्ण आहे; पण " एक एकशिंगी " ह्या *दोन* शब्दांमुळे मात्र अर्थपूर्ण असा उपसमूह (वरील चारांचा) मिळत नाही. तेव्हा जर ह्या शब्दांना आपण अर्थ देण्याची चूक केली तर आपण " एक एकशिंगी " ह्या शब्दात, आणि परिणामी, जगात एकही एकशिंगी प्राणी नसल्याने निर्माण होणाऱ्या प्रश्नात, अडकून पडू. " एक एकशिंगी " हे अनिश्चित वर्णन असून त्याने कशाचेच वर्णन केले जात नाही. अवास्तव अशा गोष्टींचे वर्णन करणारे असे ते अनिश्चित वर्णन नव्हे. ज्या वेळी " x " हे, निश्चित किंवा अनिश्चित, वर्णन असेल त्याच वेळी " x अवास्तव आहे " असल्या वर्णनाला अर्थ असेल; मग " x " हे कशाचेच वर्णन नसलेले वर्णन असेल, तर ते प्रविधान सत्य ठरेल. पण " x " हे कशाचे तरी वर्णन असले किंवा कशाचेही वर्णन नसले, तरी ते ज्या प्रविधानात उद्भवते त्याचे एक अंग असते; ते, " एक एकशिंगी " ह्या नुकत्याच वर्णन केलेल्या आणि स्वतःपुरताच अर्थ असलेल्या उपसमूहाप्रमाणे नाही. हे सर्व पुढील विचारातून उद्भवते. ज्या वेळी " x " हे वर्णन असेल त्या वेळी " x अवास्तव आहे " किंवा " x ला अस्तित्व नाही " हे वाक्य वेडगळ तर नसतेच, पण अर्थपूर्ण असते आणि कधी कधी सत्यही असते.

आता, ज्यांत संदिग्ध वर्णने असतात अशा प्रविधानांच्या सर्वसामान्य अर्थाची व्याख्या करू. समजा, आपल्याला " अमुक अमुक एक " बद्दल काही विधान करावयाचे आहे; येथे " अमुक अमुक " म्हणजे ज्यांच्याजवळ एखादा गुणधर्म ϕ आहे अशा वस्तू होत; अशा वस्तू म्हणजे ज्यांच्या बाबतीत ϕx सत्य आहे असे सर्व x (उदाहरणार्थ, " अमुक अमुक एक "चे उदाहरण म्हणून " एक
पृ. १७१
मनुष्य " असे घेतले तर ϕx म्हणजे " x मनुष्य आहे " असे होईल). आता, " अमुक एक "चा ψ हा गुणधर्म प्रतिपादन करण्याचे काम करू; म्हणजे ψx सत्य असता x कडे जो गुणधर्म असेल तो " अमुक एक " कडे असतो, हे प्रतिपादन करण्याचा विचार करू. (उदा. " मला एक मनुष्य भेटला "च्या संबंधात ψx म्हणजे " मला x भेटला ") आता, " अमुक अमुक एक " कडे ψ हा गुण आहे हे प्रविधान म्हणजे " ψx " ह्या प्रकारचे प्रविधान नव्हे. जर ते तसे असते तर " अमुक अमुक एक " म्हणजे सोईस्कर असा x च राहिला असता; आणि जरी (काही एका अर्थाने) काही बाबतीत हे खरे असले तरी, ते " एक एकशिंगी " च्या बाबतीत निश्चितच खरे नाही. हा विचार म्हणजे, अमुक एकाजवळ ψ हा गुणधर्म आहे हे विधान ψx प्रमाणे नव्हे, हाच होय. ψx मुळेच काही एक अर्थाने (जो स्पष्टपणे मांडता येईल त्या) " अमुक अमुक एक ", " अवास्तव " असणे संभवेल. व्याख्या अशी—

" ज्या वस्तूजवळ ϕ हा गुण आहे तसल्या एका वस्तूजवळ ψ हा गुण आहे "

ह्या विधानाचा अर्थ : ϕx आणि ψx यांचे संयुक्त प्रतिपादन नेहमीच असत्य असते असे नव्हे " असा होतो.

तर्कशास्त्रापुरते म्हणावयाचे तर हे प्रविधान म्हणजे " काही ϕ, ψ असतात ' अशासारखेच होय; पण भाषासौष्ठवाच्या दृष्टीने त्यात फरक आहे. कारण पहिल्यात एकवचन सुचवलेले आहे तर दुसऱ्यात अनेकवचन. अर्थात हा काही महत्त्वाचा मुद्दा नव्हे. महत्त्वाचा मुद्दा असा की विश्लेषण केल्यावर " अमुक एक " बद्दलच्या शाब्दिक प्रविधानात, ह्या वाक्प्रयोगाने सूचित केलेले घटक आढळत नाहीत. आणि म्हणूनच अमुक एक अशी काही चीज नसतानाही असली प्रविधाने अर्थपूर्ण असू शकतात.

संदिग्ध वर्णनांच्या संदर्भात लागू करावयाची *अस्तित्वाची* व्याख्या, मागच्या प्रकरणाच्या शेवटी जे मांडले आहे त्यातून निर्माण होते " x मनुष्यप्राणी आहे " हे प्रविधानफल ज्या वेळी कधीकधी सत्य असते त्या वेळी " मनुष्ये आहेत " किंवा " एक मनुष्य आहे " असे आपण म्हणतो; सामान्यपणे, ज्या वेळी
पृ. १७२
" x हा अमुक एक आहे " हे कधीकधी सत्य असते त्या वेळी " अमुक एक " ला अस्तित्व असते. आपण हे निराळ्या भाषेत

मांडू. "सॉक्रेटीस एक मनुष्य आहे" हे प्रविधान "सॉक्रेटीस एक मनुष्यप्राणी आहे" याच्याशी *समानार्थी* आहे यात शंका नाही. पण ती दोन्ही एकच नव्हेत. "सॉक्रेटिस एक मनुष्यप्राणी आहे" हे *असणे* म्हणजे कर्ता आणि विधेयक असा संबंध आहे; तर "सॉक्रेटीस एक मनुष्य आहे" हे *असणे* अभिन्नत्व (Identity) दर्शवते. ह्या दोन पूर्ण भिन्न कल्पनांकरता "असणे" हा एकच शब्द वापरण्याचे मनुष्यजातीने जे ठरवले आहे ते तिला लांछनास्पद आहे— ह्या लांछनावर, प्रतीकात्मक तर्कशास्त्राजवळ, अर्थातच, इलाज आहे.

"सॉक्रेटीस एक मनुष्य आहे" ह्यातील अभिन्नत्व, हे नाव जिला दिले आहे त्या वस्तूमधील ("सॉक्रेटीस" हे नाव आहे हे स्वीकारून; याचा तपशील नंतर मांडला आहे) आणि संदिग्धपणे वर्णन केलेल्या वस्तूंमधील, अभिन्नत्व आहे. संदिग्धपणे वर्णन केलेली वस्तू केव्हा "अस्तित्वात" असते? ज्या वेळी अशा प्रकारचे एक तरी प्रविधान सत्य असते त्या वेळी; म्हणजे "x" हे एक नाव असता, "x हा अमुक एक आहे" अशा तऱ्हेचे एक तरी प्रविधान सत्य असले पाहिजे. संदिग्ध वर्णनांचे (निश्चित वर्णनांच्या विरुद्ध टोक) वैशिष्ट्य असे आहे की, वरील तऱ्हेची सत्य प्रविधाने कितीही असू शकतील—सॉक्रेटीस एक मनुष्य आहे, प्लेटो एक मनुष्य आहे, इ०. तेव्हा "एक मनुष्य अस्तित्वात आहे" हे, सॉक्रेटीस, किंवा प्लेटो किंवा इतर कोणाहीपासून मिळेल. उलटपक्षी, निश्चित वर्णनांमध्ये असल्याप्रकारची म्हणजे "x हा विशिष्ट अमुक एक आहे" (येथे x हे एक नाव आहे) असली प्रविधाने x च्या जास्तीत जास्त एकाच मूल्याकरता सत्य असतील. ह्या ठिकाणी आपण निश्चित वर्णनांच्या विषयापाशी आलो. संदिग्ध वर्णनांत वापरलेल्या मार्गानेच यांच्या व्याख्या करावयाच्या आहेत. फक्त त्या काहीशी क्लिष्ट असतील इतकेच.

आता आपण प्रस्तुत प्रकरणाच्या मुख्य विषयाकडे म्हणजे *विशिष्ट* किंवा *निश्चित* (The) ह्या शब्दाच्या (एकवचनी) व्याख्येकडे वळू. "अमुक एक" च्या व्याख्येतील एक अगदी महत्त्वाचा मुद्दा "विशिष्ट अमुक एक"लाही तेवढाच लागू पडतो; आपल्याला जी व्याख्या शोधावयाची आहे ती हा वाक्प्रयोग ज्या प्रविधानांमध्ये येतो त्या प्रविधानांची होय केवळ स्वतंत्रपणे त्या वाक्प्रयोगाची नव्हे. "अमुक अमुक एक" च्या बाबतीत हे बरेचसे उघड आहे.

"एक मनुष्य" म्हणजे निश्चित अशी वस्तू असून तेवढ्यापुरतीच त्याची व्याख्या करता येईल असे काही कोणी समजणार नाही. सॉक्रेटीस एक मनुष्य आहे, प्लेटो एक मनुष्य आहे, ॲरिस्टॉटल एक मनुष्य आहे; पण "सॉक्रेटीस"चा
पृ. १७३
जो अर्थ आहे, किंवा "प्लेटो" चा जो अर्थ आहे, किंवा "ॲरिस्टॉटल"चा जो अर्थ आहे तोच "एक मनुष्य" याचाही आहे, असे अनुमान आपण करू शकणार नाही; कारण ह्या तिन्ही नावांना वेगवेगळा

अर्थ आहे. तरीसुद्धा ज्या वेळी आपण जगातील सर्व माणसांची जंत्री करू त्या वेळी ज्याच्याबद्दल, " हा मनुष्य आहे, इतकेच नव्हे तर हा एकमेव (The) ' एक मनुष्य ' आहे, तो विशिष्ट असा मनुष्य नसून कोणी एक निश्चित मनुष्य आहे; एक मनुष्य याचे ते परिपूर्ण असे उदाहरण आहे " असे म्हणण्यासारखे काहीही शिल्लक राहणार नाही. हे अर्थातच अगदी उघड आहे की जगामध्ये जे काही आहे ते अगदी निश्चित आहे; जर तो मनुष्य असेल तर तो एक निश्चित मनुष्य असतो, दुसरे काहीही असत नाही. जसा एखादा विशिष्ट मनुष्य आपल्याला मिळू शकतो तसा " एक मनुष्य " असा काही पदार्थ जगात आपल्याला मिळू शकणार नाही. परिणामतः आपण " एक मनुष्य " याची काही व्याख्या न करता ज्या प्रविधानांत त्याचा अंतर्भाव असेल त्याचीच फक्त व्याख्या करावी, हे स्वाभाविक आहे.

" विशिष्ट अमुक अमुक एक "च्या बाबतीत हे तितकेच सत्य आहे; कदाचित प्रथमदर्शनी, ते कमी आहे असे वाटेल. *नाव* आणि निश्चित वर्णन यांतील फरकाचा विचार करून, हे असलेच पाहिजे, असे आपण दाखवू शकू. " स्कॉट हा *वेव्हर्ली* (Waverly) चा लेखक आहे " हे प्रविधान घ्या. येथे आपल्याजवळ " स्कॉट " हे एक नाव आणि " वेव्हर्लीचा लेखक " हे वर्णन आहे; आणि ते त्या व्यक्तीला लागू असल्याचे प्रतिपादिले आहे. नाव आणि इतर प्रतीके यांतील भेद, पुढीलप्रमाणे स्पष्ट करता येईल. नाव हे एक साधे प्रतीक आहे, कर्ता म्हणूनच ते येऊ शकते असा त्याचा अर्थ आहे. म्हणजे ते प्रकरण १३ मध्ये व्याख्या केलेले " वस्तुमात्र " किंवा " वस्तु-विशेष " अशा प्रकारचे काही आहे. आणि ज्या प्रतीकाला कोणतेही भाग नाहीत ते प्रतीक म्हणजे " साधे " प्रतीक होय. तेव्हा " स्कॉट " हे साधे प्रतीक आहे कारण त्याला जरी भाग (अंगे) असले (म्हणजे त्यातील वेगवेगळी अक्षरे), तरी ते भाग म्हणजे प्रतीके नव्हेत. उलटपक्षी, " *वेव्हर्ली*चा लेखक " हे साधे प्रतीक नव्हे. कारण, तो वाक्प्रयोग ज्यांमुळे झाला, ते शब्द म्हणजे त्याचे भाग असून, स्वतः शब्द हे प्रतीके होत. जे " वस्तुमात्र " म्हणून *भासते* त्याचे आणखी विच्छेदन करता येऊ शकत असेल तर, ज्याला " सापेक्ष वस्तुमात्र " म्हणता येईल अशा गोष्टींवर आपल्याला समाधान मानले पाहिजे; आपल्या प्रश्नाच्या संदर्भात ह्या संज्ञा

पृ. १७४

सारख्या येत राहणार, त्यांचे विच्छेदन होऊ शकणार नाही आणि कर्त्याशिवाय इतर स्वरूपात त्या कधी येणार नाहीत. आणि मग अशा परिस्थितीत आपल्याला " सापेक्ष " नावांवरच समाधान मानून राहावे लागेल. आपल्या प्रस्तुतच्या प्रश्नाच्या दृष्टीने, म्हणजे वर्णनाची व्याख्या करण्याच्या दृष्टीने ह्या प्रश्नाकडे म्हणजे, ती नावे निर्विवाद (Absolute) नावे आहेत की फक्त सापेक्ष नावे आहेत, याकडे दुर्लक्ष केले पाहिजे; कारण त्याचा संबंध " जातींच्या " उतरंडीच्या निरनिराळ्या अवस्थांशी असतो, तर आपल्याला " स्कॉट " आणि " *वेव्हर्ली*चा लेखक " अशा

जोड्यांची तुलना करावी लागते; ही दोन्ही एकाच वस्तूला लागू असून जातींचा प्रश्न निर्माण करीत नाहीत. म्हणून क्षणभर आपण नावे ही निर्विवाद असू शकतात असे समजू. आपल्याला जे म्हणावयाचे आहे त्यातील काहीही, ह्या गृहीतावर अवलंबून नाही, पण त्याच्यामुळे शब्दरचना मात्र थोडीशी लहान होईल.

मग आपल्याजवळ तुलनेसाठी दोन गोष्टी आहेत. (१) *नाव*, हे एक साधे प्रतीक आहे. ते प्रत्यक्षतः वस्तुमात्र दर्शविते. ते वस्तुमात्र, हाच त्याचा अर्थ असून इतर शब्दांच्या अर्थाच्या निरपेक्ष असा त्याचा त्याला निश्चित अर्थ असतो; (२) *वर्णन*, ह्यामध्ये अनेक शब्द असतात त्यांचा " अर्थ " आधीच निश्चित झालेला असतो, आणि त्यांतूनच ज्याला वर्णनाचा " अर्थ " म्हणता येईल तो निर्माण होतो. " स्कॉट हा *वेव्हर्ली* चा लेखक आहे " हे प्रविधान " स्कॉट हा स्कॉट आहे " ह्या प्रविधानापेक्षा निराळे आहे हे उघड आहे : पहिले वाङ्मयेतिहासातील ज्ञान आहे, तर दुसरे मामूली सत्य आहे, आणि जर " *वेव्हर्ली* चा लेखक " म्हणून स्कॉटऐवजी दुसरे कोणाचे नाव लिहिले तर आपले प्रविधान असत्य ठरेल, मग ते काही पूर्वीचेच प्रविधान राहणार नाही. पण आपले प्रविधान मूलतः " स्कॉट, सर वॉटर आहेत " अशा (समजा) प्रकारचेच प्रविधान आहे असे म्हणता येईल; यातील दोन्ही नावे त्याच व्यक्तीला लागू आहेत असे म्हणता येईल; यावर उत्तर असे की, " स्कॉट हे सरवॉल्टर आहेत " ह्याचा अर्थ जर खरोखर " स्कॉट " ह्या नावाचा मनुष्य म्हणजेच " सर वॉल्टर " ह्या नावाचा मनुष्य आहे असे असेल तर ही नावे वर्णने म्हणून वापरलेली आहेत; व्यक्तीचे नाव सांगण्याऐवजी व्यक्तीचे ते नाव आहे असे तिचे वर्णन केलेले आहे. व्यवहारात वारंवार अशाच पद्धतीने

पृ. १७५

नावे वापरली जातात; आणि ती ह्या प्रकारे वापरली जात आहेत की नावे *म्हणूनच* वापरली जात आहेत, हे तिच्यामुळे कळून येईल अशी कोणतीच पद्धत, सामान्यतः, वाक्प्रयोगात उपलब्ध नसते. ज्या वेळी आपण कशाबद्दल बोलत आहोत हे दर्शविण्याकरता नाव प्रत्यक्ष वापरले जाते त्या वेळी आपण प्रतिपादिलेल्या माहितीचा तो *सत्यांश* नसतो; किंवा आपले प्रतिपादन असत्य असेल तर असत्यांश नसतो : ज्याच्या साह्याने आपण विचार करतो त्या प्रतीक-पद्धतीचा तो एक भाग असतो. आपल्याला जे काय व्यक्त करावयाचे ते कदाचित (उदाहरणार्थ) दुसऱ्या एखाद्या भाषेत भाषांतरित करता येईल; शब्द हे त्याचे वाहन असतील पण भाग (किंवा अंग) नव्हेत. उलटपक्षी ज्या वेळी " स्कॉट नावाच्या व्यक्तीविषयी " काही प्रविधान मांडतो, त्या वेळी आपल्या *प्रतिपादनात* " स्कॉट " हे प्रत्यक्ष नाव प्रवेश करते, केवळ आपण ज्या भाषेत प्रतिपादन करीत असू त्या भाषेतच नव्हे.

आता त्याऐवजी जर आपण " ' सर वॉल्टर ' नावाची व्यक्ती " असे घातले तर आपले प्रविधान निराळे होईल. पण जोवर आपण नावे ही नावे म्हणूनच वापरू

तोवर आपण इंग्रजीत बोलतो की फ्रेंचमध्ये, याला जसे महत्त्व नाही; तसे " स्कॉट " म्हटले काय किंवा " सर वॉल्टर " म्हटले काय, त्याचे आपल्या प्रतिपादनाच्या दृष्टीने काहीच महत्त्व नाही. तेव्हा जोवर आपण नावे ही नावे म्हणूनच वापरीत राहू तोवर ती प्रतिपादने " स्कॉट हे स्कॉट आहेत " यासारखीच मामूली आहेत. येथे, " स्कॉट हा *वेव्हर्ली* चा लेखक आहे " हे प्रविधान " *वेव्हर्ली*चा लेखक " ऐवजी दुसरे कोणतेही नाव घालून मिळणाऱ्या प्रविधानाप्रमाणेच नाही, याची सिद्धता संपते.

ज्यावेळी आपण चल वापरतो आणि प्रविधानफलाविषयी (समजा ϕx) बोलतो त्या वेळी x बद्दलची सामान्य विधाने विशिष्ट वस्तूंना लावण्याची प्रक्रिया, " x " ह्या अक्षराच्या जागी त्या वस्तूचे नाव घालणे, हीच असते; येथे वस्तुमात्र ϕ ह्या फलाचे पक्ष म्हणून, येत आहेत असे गृहीत धरलेले आहे. उदा. असे समजा, की ϕx हे " नेहमी सत्य " असते; समजा तो " एकात्मतेचा नियम (Law of identity) " म्हणजे, ' $x = x$ ' आहे. मग आपण x च्या जागी कोणतेही नाव लिहिले तरी आपल्याला सत्य प्रविधानच मिळेल. क्षणभर असे मानू की " सॉक्रेटीस ", " प्लेटो " आणि " ॲरिस्टॉटल " ही नावे आहेत. (हे गृहीत अगदी विचित्र वाटेल.) एकात्मता नियमावरून आपण असे अनुमान करू शकतो की सॉक्रेटीस, सॉक्रेटीस आहे, प्लेटो, प्लेटो आहे, आणि ॲरिस्टॉटल, ॲरिस्टॉटल आहे. पण यावरून आणखी काही पक्ष-विधानांच्या आधाराशिवाय, जर आपण *वेव्हर्ली*चा लेखक हा *वेव्हर्ली*चा लेखक आहे असे अनुमान करण्याचा प्रयत्न करू लागलो तर आपण तर्कदोष निर्माण केला असे होईल. आताच आपण जे सिद्ध केले की एखाद्या प्रविधानात

पृ. १७६

आपण " *वेव्हर्ली*चा लेखक " ह्याऐवजी एक नाव घातले तर आपल्याला मिळणारे प्रविधान निराळे राहील, त्यासारखेच हे आहे. म्हणजे असे की हे आपल्या सध्याच्या प्रकाराला लागू केल्यास : जर " x " हे नाव असेल तर " $x = x$ " हे प्रविधान " *वेव्हर्ली*चा लेखक, *वेव्हर्ली*चा लेखक आहे " यासारखेच नव्हे; मग x हे कोणतेही नाव का असेना. तेव्हा " $x = x$ " अशा प्रकारच्या सर्व प्रविधानांवरून काही गडबडगुंडा केल्याशिवाय *वेव्हर्ली*चा लेखक हा *वेव्हर्ली*चा लेखक आहे, हे आपण अनुमानित करू शकणार नाही. खरे म्हणजे " विशिष्ट अमुक एक हा विशिष्ट अमुक एकच आहे " अशा प्रकारची प्रविधाने नेहमी सत्य नसतात. त्याकरता, तो अमुक एक *अस्तित्वात* असला पाहिजे (याचा अर्थ लवकरच स्पष्ट करू) हे आवश्यक आहे. फ्रान्सचा आजचा राजा हा फ्रान्सचा आजचा राजा आहे, किंवा वाटोळा चौकोन हा वाटोळा चौकोन आहे, हे असत्य आहे. ज्या वेळी आपण नावाऐवजी वर्णन घालतो, त्या वेळी जर त्या वर्णनामुळे कशाचेच वर्णन होत नसेल तर " सदैव सत्य " असणारी प्रविधानफलेसुद्धा असत्य होऊ शकतात. ज्या वेळी आपण वर्णन (नावाऐवजी) घालतो त्या वेळी होणारा परिणाम संबंधित प्रविधान-

फळाचे मूल्य होत नाही हे समजून आले (आपण हे मागच्या परिच्छेदात सिद्ध केले आहे) की यात काही चमत्कार नसल्याचे उघड होईल.

ज्यात निश्चित वर्णने असतात अशा प्रविधानांची व्याख्या करता येईल, अशा स्थितीपर्यंत आता आपण आलो आहोत; " विशिष्ट अमुक एक " आणि " अमुक एक " ह्यातील भेद ज्यामुळे कळतो ती गोष्ट म्हणजे एकमेवत्व (Uniqueness). " लंडनमधील *विशिष्ट एकमेव रहिवासी* " असे आपण बोलू शकत नाही. कारण लंडनमधील रहिवासी हा गुण एकमेवत्व दर्शवीत नाही. आपण " फ्रान्सचा आजचा राजा "[1] ह्याबद्दल बोलू शकू. " विशिष्ट एकमेव अमुक एक " बद्दलच्या प्रविधानात तसलेच " अमुक एक " बद्दलचे एक प्रविधान अभिप्रेत असतेच. फक्त त्यात तसले दुसरे कोणी नसल्याबद्दलची पुस्ती जोडली पाहिजे. *वेव्हर्ली* कधी लिहिलेच गेले नसते. किंवा अनेक जणांनी ते लिहिलेले असते तर " स्कॉट वेव्हर्लीचा लेखक आहे " अशा-
सारखे प्रविधान सत्य ठरले नसते; तसेच x बद्दलच्या प्रविधान
पृ. १७७ फलात " x " बद्दल " *वेव्हर्ली* चा लेखक " असे घालून मिळणारे
प्रविधानही सत्य ठरणार नाही. आपण असे म्हणू की " *वेव्हर्ली* लेखक " म्हणजे ' x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ' हे ज्याकरता सत्य आहे असे x चे मूल्य. तेव्हा, उदा. " *वेव्हर्ली* चा लेखक स्कॉच (Scotch) होता " ह्या प्रविधानात खालील गोष्टी अंतर्भूत होत्या.

(१) " x ने *वेव्हर्ली* लिहिले " हे नेहमीच असत्य नसते;

(२) " जर x ने आणि y ने *वेव्हर्ली* लिहिले असेल तर x आणि y एकच आहेत " हे नेहमी सत्य असते;

(३) " जर x ने *वेव्हर्ली* लिहिले असेल तर, x स्कॉच होता " हे नेहमी सत्य असते. ही तीन प्रविधाने सर्वसाधारण भाषेत पुढीलप्रमाणे व्यक्त होतात.

(१) निदान एका व्यक्तीने *वेव्हर्ली* लिहिले.

(२) जास्तीत जास्ती एका व्यक्तीनेच *वेव्हर्ली* लिहिले,

(३) ज्याने कोणी वेव्हर्ली लिहिले तो स्कॉच होता.

ही तिन्ही प्रविधाने " वेव्हर्लीचा लेखक स्कॉच होता " ह्यामध्ये अभिप्रेत आहेत. आणि व्यत्यासाने, ही तिन्ही एकत्रित केली असता (यातली कोणतीही दोन पुरणार नाहीत) त्यामध्येही *वेव्हर्ली*चा लेखक स्कॉच होता. हे अभिप्रेत असते. म्हणून " *वेव्हर्ली* चा लेखक स्कॉच होता, " ह्या प्रविधानाने जे काय सूचित होते त्याची व्याख्या ह्या तिन्ही प्रविधानांनी मिळून झाली असे म्हणता येईल.

---

[1] अ. टी. : सदर पुस्तक १९१९ मध्ये लिहिले आहे.

आपण ही तीन प्रविधाने कांहीशी सोपी करू शकू. पहिले आणि दुसरे एकत्रित केले असता ते “ x, c असता ‘ x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ’ हे सत्य आणि x, c नसता असत्य असेल, असे एक पद c अस्तित्वात असते ” याच्याशी समानार्थी आहेत. निराळ्या शब्दांत, “ ‘ x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ’ हे ‘ x, c आहे ’ याच्याशी समानार्थी होईल, असे एक पद c अस्तित्वात असते ”. (ज्या वेळी दिलेल्या दोन प्रविधानांपैकी दोन्ही सत्य किंवा दोन्ही असत्य असतात त्या वेळी त्यांना “ समानार्थी ” (Equivalent) म्हणतात.) आरंभी, येथे आपल्यामवळ दोन फले आहेत, “ x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ” आणि “ x, c आहे ”, आणि x च्या ह्या दोन फलांच्या x च्या मूल्यांकरता समानार्थीता विचारात घेऊन आपण c चे फल तयार करतो; नंतर आपण असे प्रतिपादन करतो की c चे हे फल कधी कधी सत्य असते, म्हणजे ते c च्या एका तरी मूल्याकरता सत्य असते. (ते c च्या एकाहून अधिक मूल्यांकरता सत्य असणार नाही हे उघड आहे.) ह्या दोन कसोट्या एकत्रित केल्यास त्यांमुळे “ वेव्हर्लीचा लेखक अस्तित्वात आहे (होता) ” याची व्याख्या होते.

आता आपण “ ϕx ह्या फलाचे समाधान करणारे पद अस्तित्वात असते ” याची व्याख्या करू. वरील विशेष उदाहरणाचे हे सामान्य रूप आहे.
पृ. १७८
“ *वेव्हर्ली*चा लेखक ” हे “ ‘ x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ’, या फलाचे समाधान करणारे पद ” आहे. आणि “ एकमेव अमुक एक ” मध्ये एखाद्या तरी प्रविधानफलाचा संदर्भ उद्भवणारच. ते फल म्हणजे एखाद्या वस्तूला अमूक एक करणाऱ्या गुणधर्माची व्याख्या होय, आपली व्याख्या खालीलप्रमाणे आहे :

“ ϕx या फलाचे समाधान करणारे पद अस्तित्वात असते ” म्हणजे :

“ ϕx हे, ‘ x, c असते ’ याच्याशी नेहमी समानार्थी राहील अशा तऱ्हेचे एक पद असते. ”

“ *वेव्हर्ली* चा लेखक स्कॉच होता. ” याची व्याख्या करण्याकरता अजूनही आपल्याला आपल्या तीन प्रविधानांपैकी तिसऱ्याचा म्हणजे “ ज्याने कोणी *वेव्हर्ली* लिहिले तो स्कॉच होता, ” याचा विचार करावयाचा आहेच. हे करण्याकरता वरील प्रश्नातील c म्हणजे स्कॉच आहे एवढे म्हटले की झाले. तेव्हा “ *वेव्हर्ली*चा लेखक स्कॉच होता ” म्हणजे :

“ (१) ‘ x ने *वेव्हर्ली* लिहिले ’ हे ‘ x, c असतो ’ याच्याशी नेहमी समानार्थी असेल, (२) c स्कॉच असेल असे c हे एक पद असते, ” हे होय.
आणि सर्वसामान्यपणे : “ ϕx चे समाधान करणारे पद ψx चेही समाधान करते ” याची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करतात :

“ (१) ϕx हे ‘ x, c असतो ’ याच्याशी समानार्थी असेल, (२) ψc सत्य असेल, असे c हे एक पद असते. ”

ज्या प्रविधानांमध्ये वर्णने उद्भवतात त्यांची ही व्याख्या होय.

वर्णित पदाबद्दल पुष्कळ ज्ञान असणे शक्य आहे, म्हणजे तो "विशिष्ट अमुक एक" म्हणजे कोण हे प्रत्यक्षात माहिती नसूनही त्या विशिष्ट अमुक एकाविषयी पुष्कळ प्रविधाने माहिती असू शकतील. म्हणजे "x" हे नाव असता "x हा विशिष्ट अमुक एक आहे" अशा प्रकारचे एकही प्रविधान माहिती नसेल. गुप्तहेर कथांमध्ये "ज्या माणसाने हे कृत्य केले असेल" त्याच्याबद्दलची प्रविधाने गोळा केली जातात; ती या आशेने की सरते शेवटी ते ज्या कोणी A या व्यक्तीने ते कृत्य केले असेल ती व्यक्ती दर्शविण्यास ती प्रविधाने पुरी पडावीत. आपण आणखीही पुढे जाऊन असे म्हणू की शब्दांत व्यक्त करता येईल, अशा सर्व ज्ञानामध्ये "हे" आणि "ते" आणि ज्यांचा अर्थ प्रसंगानुरूप बदलतो अशांचाच काय तो अपवाद वगळता काटेकोर अर्थाने एकही नाव आढळत नाही; पण नावे म्हणून जी भासतात ती खरे म्हणजे वर्णने असतात. होमर (Homer) अस्तित्वात होता किंवा नाही असे आपण सार्थपणे विचारू शकतो. पण जर "Homer" हे केवळ नाव असते तर तसे करता आले नसते. "विशिष्ट अमुक एक" अस्तित्वात आहे हे प्रविधान सार्थ आहे, मग ते सत्य असो की असत्य, हा प्रश्न वेगळा; पण जर a हा विशिष्ट अमुक एक आहे (येथे "a" हे नाव आहे) असे म्हटले तर "a अस्तित्वात आहे" हे शब्द अर्थशून्य आहेत.

पृ. १७९ फक्त वर्णनांच्या संबंधातच — निश्चित किंवा अनिश्चित — आपण अस्तित्वाची भाषा सार्थपणे प्रतिपादू शकतो; कारण "a" जर नाव असेल तर ते कशाचे तरी नाव *असलेच* पाहिजे; जे कशाचेच नाव नाही ते नावच नव्हे, आणि नाव म्हणून ते वापरावयाचे असेल तर ते अर्थहीन राहील. तसेच "फ्रान्सचा आजचा राजा" अशासारखे वर्णन सार्थपणे उद्भवणे अशक्य आहे. कारण ते कशाचेच वर्णन होण्याच्या लायकीचे नाही; कारण असे की ते एक *संश्लिष्ट* (Complex) प्रतीक असून त्याचा अर्थ त्याच्या घटक प्रतीकांपासून तयार झाला आहे– आणि म्हणून होमर अस्तित्वात होता की नाही असे ज्या वेळी आपण विचारतो त्या वेळी "होमर" हा शब्द आपण संक्षिप्त वर्णन म्हणून योजलेला असतो त्याऐवजी आपण (समजा) "इलियड (Iliod) आणि ओडिसी (Odyssey) चा लेखक" घालू. विशेषनामाप्रमाणे दिसणाऱ्या जवळजवळ सर्वांच्या बाबतीत असे विचार लागू पडतील. ज्या वेळी वर्णने प्रविधानांमध्ये उद्भवतात त्या वेळी "प्राथमिक (Primary)" उद्भव आणि "दुय्यम (Secondary)" उद्भव यांच्यात भेद करणे आवश्यक आहे. यांच्यातील अमूर्त भेद असा : ज्या वेळी ϕx ह्या कोणा एका फलामध्ये "x"च्या जागी वर्णन घातल्यामुळे प्रविधान मिळते, त्या वेळी त्या प्रविधानातील त्याचा उद्भव "प्राथमिक" होय; ज्या वेळी ϕx मधील x च्या जागी वर्णन घातल्यावर इष्ट प्रविधानाचा फक्त एक *भाग* मिळतो त्या वेळी त्या वर्णनाचा "दुय्यम" उद्भव होतो. उदाहरणाने हे अधिक

स्पष्ट होईल. " फ्रान्सचा आजचा राजा टकल्या आहे " हे पहा. येथे " फ्रान्सचा आजचा राजा " ह्याचा उद्भव प्राथमिक आहे आणि प्रविधान असत्य आहे. ज्या प्रविधानात कशाचेच वर्णन न करणाऱ्या वर्णनाचा प्राथमिक उद्भव होतो ते प्रविधान असत्य असेल. पण आता " फ्रान्सचा आजचा राजा टकल्या नाही " हे पाहा. हे संदिग्ध आहे. जर आपण प्रथम " x टकल्या आहे " घेऊन नंतर " x " ऐवजी " फ्रान्सचा आजचा राजा " लिहिले, आणि मग त्याचा नकार केला तर " फ्रान्सचा आजचा राजा "चा उद्भव दुय्यम होईल आणि आपले प्रविधान सत्य ठरेल; पण आपण " x टकल्या नाही " असे घ्यायचे ठरवले आणि " x " ऐवजी " फ्रान्सचा आजचा राजा " घातले, तर " फ्रान्सचा आजचा राजा "चा उद्भव प्राथमिक होईल आणि प्रविधान असत्य ठरेल. जेथे वर्णनाचा संबंध येतो तेथे प्राथमिक आणि दुय्यम उद्भव यांतील गोंधळ म्हणजे तर्कदोषांचा तयार झराच होय.

गणितामध्ये वर्णने ही मुख्यतः *वर्णनफलांच्या* रूपात उद्भवतात; म्हणजे " R हा संबंध असेल असे पद y " किंवा, " y चा बाप " ह्या पद्धतीने " y चा R " आणि असे इतर वाक्प्रयोग. उदाहरणार्थ, " y चा बाप श्रीमंत आहे " असे म्हणणे म्हणजे c बद्दलचे पुढील प्रविधानफल " c श्रीमंत आहे आणि ' x ने y ला जन्म दिला आहे ' हे ' x, c आहे ' याच्याशी सदैव समानार्थी आहे " हे " कधीकधी सत्य असते " म्हणजेच c च्या निदान एका मूल्यासाठी सत्य असते, असे म्हणणे होय. ते एकाहून अधिक मूल्यांसाठी सत्य असणार नाही हे उघड आहे.

प्रस्तुत प्रकरणात ज्या वर्णमीमांसेची रूपरेखा मांडलेली मीमांसा आहे ती वर्णन-मीमांसा तर्कशास्त्र आणि ज्ञानमीमांसा आणि ह्या दोन्हीमध्ये अत्यंत महत्त्वाची आहे. पण गणिताकरिता ह्या मीमांसेचे अधिक तत्त्वज्ञानात्मक भाग आवश्यक नाहीत. आणि म्हणून वरील विवेचनातून ते वगळले असून गणिताच्या दृष्टीने उपयुक्त अशा मोजक्या भागांपुरतीच मीमांसा मर्यादित ठेवली आहे.

□ □

प्रकरण १७

वर्ग

प्रस्तुत प्रकरणामध्ये आपण मुख्यतः विशिष्ट किंवा निश्चित किंवा एकमेव (The) हे अनेकवचनात पाहणार आहोत : लंडनचे रहिवासी, श्रीमंत माणसाचे मुलगे, इ०. दुसऱ्या शब्दांत, आपण *वर्गांचा* विचार करणार आहोत. प्रधानां-
पृ. १८१ काची व्याख्या वर्गांचा वर्ग अशी करावयाची असते हे प्रकरण २ मध्ये आपण पाहिले. आणि 1 या संख्येची व्याख्या ज्यांच्यात फक्त एकच सदस्य आहे अशा सर्व वर्गांचा वर्ग अशी, म्हणजे एकेरी वर्ग अशी करावयाची असते. ह्यातून कदाचित दुष्टचक्र उद्‌भवेल. अर्थात ज्या वेळी 1 ह्या संख्येची व्याख्या सर्व एकेरी वर्गांचा वर्ग अशी केली जाते त्या वेळी " एकेरी वर्गांची " व्याख्या करताना " एक " म्हणजे काय आहे ते आपणास माहिती आहे असे गृहीत धरता कामा नये; वर्णनांची व्याख्या ज्याप्रकारे केली, जवळजवळ त्याचप्रकारे यांची व्याख्या करतात. म्हणजे : ज्या वेळी " ' x हा एक α आहे ' हे ' x, c आहे ' (हे c चे फल आहे असे मानून) याच्याशी नेहमी समानार्थी असते ", हे प्रविधानफल नेहमीच असत्य नसेल तर α हा वर्ग " एकेरी " वर्ग आहे असे म्हणतात. म्हणजे अधिक सामान्य भाषेत जर c हे पद असे असेल की ज्या वेळी x हा c असेल त्याचवेळी x हा α चा सदस्य असेल एरव्ही नव्हे, तर α हा एकेरी वर्ग आहे असे म्हणतात. जर व्यापक अर्थाने वर्ग म्हणजे काय हे आपणास आधीच माहिती असेल, तर ह्यापासून आपल्याला एकेरी वर्गाची माहिती मिळते. येथवर, अंकगणिताचा विचार करताना आपण " वर्ग " ही कल्पना आदिकल्पना म्हणून वागवली; पण इतर कारणांसाठी नव्हे तरी, १३ व्या प्रकरणात मांडलेल्या कारणासाठी तरी " वर्ग " ही कल्पना आदिकल्पना म्हणून आपणास स्वीकारता येणार नाही. वर्णनांची व्याख्या ज्या पद्धतीने आपण केली त्याच पद्धतीची व्याख्या आपणास शोधली पाहिजे. म्हणजे ज्या प्रविधानांच्या शाब्दिक किंवा प्रतीकात्मक अभिव्यक्तीत शब्द किंवा प्रतीके, बाह्यतः वर्गांचे प्रतिनिधित्व
पृ. १८२ करतात त्या प्रविधानांना अर्थ देऊ शकेल, पण अशा प्रविधानांच्या योग्य विश्लेषणातून वर्गांचा उल्लेख संपूर्णतः नाहीसा करील, असा अर्थ देणारी व्याख्या आपणास शोधावयाची आहे. मगच आपण असे म्हणू

शकू की वर्गाकरता वापरलेली प्रतीके ही केवळ सोय होती. ज्यांना "वर्ग" म्हणता येईल अशा वस्तू त्यांनी व्यक्तवलेल्या नाहीत, आणि खरे म्हणजे वर्ग हे, वर्णनांप्रमाणेच तार्किक कल्पना किंवा (आपण म्हणतो त्याप्रमाणे) "अपूर्ण प्रतीकेच" होत.

वर्णनमीमांसेहून वर्गमीमांसा ही कमी पूर्ण आहे आणि वर्गांची जी व्याख्या सुचविली जाईल ती व्याख्या पूर्ण समाधानकारक नाही असे मानण्याची कारणेही आहेत. (त्याची रूपरेषा आपण देणार आहोत.) विवेचनात आणखी थोडी सूक्ष्मता लागेल असे वाटते. पण पुढे मांडलेली व्याख्या पुष्कळशी अचूक आहे आणि योग्य प्रकारची आहे असे मानण्याची कारणे असंख्य आहेत.

वर्ग म्हणजे जगातील सर्वात अखेरचे साधन आहे असे समजता येणार नाही याची जाणीव होणे ही पहिली गोष्ट. ह्या विधानामध्ये काय म्हणावयाचे आहे हे नेमके समजावून सांगणे अवघड आहे. पण त्यात अभिप्रेत असलेल्या एका परिणामाचा उपयोग त्याचा अर्थ स्पष्ट करण्यासाठी करता येईल. ज्यांची व्याख्या करता येते अशा सर्व गोष्टींची व्याख्या जिच्यात आहे आणि ज्यांची व्याख्या करता येणार नाही अशा सर्व गोष्टींकरता अव्याख्यात प्रतीके आहेत, अशी पूर्ण प्रतीकमय भाषा जर आपल्याजवळ असेल तर ज्याला मी "जगातील शेवटची साधने" म्हणतो तीच या भाषेतील अव्याख्यात प्रतीकांनी, प्रतीकात्मकरीत्या व्यक्तवली जातील. माझा अजूनही असा आग्रह आहे की, या अव्याख्यात प्रतीकांच्या सामग्रीमध्ये सर्वसामान्य "वर्गाकरता" किंवा विशिष्ट वर्गाकरता कोणत्याही प्रतीकांचा अंतर्भाव करावयाचा नाही. उलटपक्षी, जगातील सर्व गोष्टींच्या नावांचा अंतर्भाव अव्याख्यात प्रतीकांमध्ये केला पाहिजे. वर्णनांचा उपयोग करून हा प्रसंग टाळण्याचा प्रयत्न आपण करू शकू. उदाहरणार्थ, "सीझरने मरणापूर्वी पाहिलेली शेवटची गोष्ट" घ्या. हे एखाद्या विशिष्ट गोष्टीचे वर्णन असेल; आपण ते वर्णन (काही एका पूर्ण न्याय्य अर्थाने) त्या गोष्टीची *व्याख्या* म्हणून योजू शकू. पण जर त्या विशिष्ट गोष्टीचे *नाव* "a" असेल तर ज्या प्रविधानामध्ये "a" आढळते ते आणि या प्रविधानात "a" ऐवजी "सीझरने मरणापूर्वी पाहिलेली शेवटची गोष्ट" घालून मिळणारे प्रविधान (आपण मागच्या प्रकरणात पाहिल्याप्रमाणे) एकच नव्हे. जर आपल्या भाषेमध्ये "a" हे नाव किंवा त्याच वस्तूचे दुसरे एखादे नाव नसेल तर वरील वर्णनाने व्यक्त केलेले प्रविधान "a" च्या साह्याने व्यक्त करण्याचे कोणतेही साधन
पृ. १८३
आपल्याकडे असणार नाही. तेव्हा वर्णनांमुळे, सगळ्या वस्तूंची नावे टाळून परिपूर्ण भाषा बनवणे शक्य होणार नाही. या दृष्टीने आपला असा आग्रह आहे की, वर्ग, वस्तुमात्रांपेक्षा वेगळे असून, अव्याख्यात प्रतीकांनी ते व्यक्त करण्याचे कारण नाही. आपले पहिले काम म्हणजे, ह्या मतासाठी कारणे देणे हे आहे.

वर्ग हे वस्तुविशेषांचे प्रकार मानता येणार नाहीत हे आपण पूर्वीच पाहिले आहे. याचे कारण, स्वतःचे सदस्य नसणाऱ्या वर्गांमुळे निर्माण होणारा (१३ व्या प्रकरणात

स्पष्ट केल्याप्रमाणे) व्याघात होय. तसेच वस्तुविशेषांच्या संख्येपेक्षा वर्गांची संख्या अधिक असते हे आपल्याला सिद्ध करता येईल. केवळ रास किंवा ढीग म्हणून शुद्ध व्याप्ती सांगून वर्गांची व्याख्या करता येणार नाही. जर आपण तसा प्रयत्न करावयाचे ठरवले तर रिक्त वर्गासारखा वर्गही अस्तित्वात असू शकतो हे समजणे आपल्याला अशक्य होईल; कारण त्यात एकही सदस्य असणार नाही. म्हणून त्याला " ढीग " मानता येणार नाही; तसेच ज्या वर्गात एकच सदस्य आहे तो त्या सदस्यासमान का मानावयाचा नाही हेही समजणे कठीण होईल. ज्याला " ढीग " असे म्हणता येईल अशी काही चीज आहे, असे मला मांडावयाचेही नाही किंवा नाकारावयाचेही नाही. गणिती तर्कशास्त्रज्ञ म्हणून ह्या मुद्यावर मत देण्यास मला सांगितलेले नाही. जरी " ढीग " म्हणून काही चीज असली तरी ती त्याच्या घटकांनी बनलेल्या वर्गाशी आपण एकरूप मानू शकणार नाही, असाच माझा आग्रह आहे.

जर आपण वर्ग, प्रविधानफलांशी एकरूप मानण्याचा प्रयत्न केला तर आपली मीमांसा पुष्कळच समाधानकारक होईल. दुसऱ्या प्रकरणात स्पष्ट केल्यानुसार प्रत्येक वर्गाची व्याख्या एखाद्या प्रविधानफलामुळे होते; ते त्या वर्गाच्या सदस्यांसाठी सत्य असते व इतर वस्तूंसाठी असत्य असते. पण जर वर्गाची व्याख्या एखाद्या प्रविधानफलाने करता येत असेल तर हे फल सत्य असता जे सत्य असेल आणि असत्य असता असत्य असेल अशा दुसऱ्या कोणत्याही प्रविधानफलानेसुद्धा त्याची व्याख्या करता येईल. ह्याच कारणासाठी वर्ग, अशा अनेक प्रविधानफलांपैकी फक्त एखाद्याशीच एकरूप मानता येत नाही.— आणि एखादे प्रविधानफल दिले असता, ते सत्य असता जी सत्य असतील आणि असत्य असता असत्य असतील अशी कित्येक

पृ. १८४

फले तर नेहमीच मिळतील. ज्या वेळी असे घडते त्या वेळी दोन प्रविधानफले " आकारिकपणे समानार्थी " असतात. जी फले एकाच वेळी, दोन्ही सत्य किंवा दोन्ही असत्य असतात त्या *प्रविधानांना* " समानार्थी " म्हणतात; ज्या वेळी ϕx हे ψx शी नेहमी समानार्थी असेल त्या वेळी ϕx व ψx ही प्रविधानफले " आकारिकपणे समानार्थी " असतात. दिलेल्या फलाशी आकारिकरीत्या समानार्थी असणारी आणखी इतर फले असतात ह्यामुळेच वर्गाचे फलाशी एकरूपत्व मानणे अशक्य होते; कारण दोन भिन्न वर्गांमध्ये नेमके तेच सदस्य असू नयेत अशी आपली इच्छा आहे आणि म्हणून आकारिकरीत्या समानार्थी असतील अशा दोन फलांनी तोच एक वर्ग निश्चित केला पाहिजे.

वर्गांची जात आणि त्यांच्या सदस्यांची जात सारख्या नसाव्यात, ते केवळ ढीग किंवा संग्रह नसावेत, आणि ते प्रविधानफलांशी एकरूप नसावेत असे आपण ठरवले आहे. मग जर ते प्रतीकात्मक कल्पितांपेक्षा काही तरी निराळे असावेत अशी अपेक्षा असेल तर ते काय असावेत हे ठरवणे अतिशय कठिण होते. आणि प्रतीकात्मक कल्पिते म्हणून

ते वापरण्याचा काही एक मार्ग जर आपण काढू शकलो तर तर्कदृष्ट्या आपली स्थिती अधिक सुरक्षित केली असे होईल; कारण मग वर्ग अस्तित्वात आहेत हे गृहीत धरण्याची आवश्यकता टाळता येईल. तसेच एकही वर्ग अस्तित्वात नाही असे विरुद्ध गृहीतही धरावे लागणार नाही. आपण दोन्ही गृहीतांपासून दूर राहू. Occam[१] च्या Razor चे उदाहरण आहे म्हणजे "गरज नसेल तर वस्तूंची संख्या वाढता कामा नये". पण ज्या वेळी वर्गाचे अस्तित्व प्रतिपादन करण्याचे आपण नाकारत असतो, त्या वेळी पोथीनिष्ठांप्रमाणे, एकही वर्ग अस्तित्वात नाही असे आपण प्रतिपादन करतो आहोत, असेही समजता कामा नाही. त्या बाबतीत आपण अज्ञेयवादी आहोत. लाप्लासप्रमाणे (Laplace) आपण असे म्हणू शकतो की "हे गृहीत धरून चालण्याची मला गरज नाही. (Je n'ai pas besoin de cette hypothe'se ज ने पा बेस्वां द सेत्त इपोतेझ.)"

आता एखाद्या प्रतीकाने वर्गाचे काम करावयाचे तर त्याने कोणत्या कसोट्या पूर्ण करावयाच्या याचा विचार करू. पुढील कसोट्या आवश्यक आणि पुरेशा ठरतील असे मला वाटते :—

(१) प्रत्येक प्रविधानफलामुळे, ते ज्या पक्षांकरता सत्य असेल अशांचा एक वर्ग निश्चित झाला पाहिजे. कोणते प्रविधान (सत्य किंवा असत्य) (समजा सॉक्रेटिसबद्दलचे) दिले असता सॉक्रेटिसऐवजी प्लेटो किंवा ॲरिस्टॉटल् किंवा जगातील कोणतीही एक वस्तू, घातली आहे अशी आपण कल्पना करू शकतो. सर्वसामान्यपणे, यामुळे काही सत्य प्रविधाने आणि काही असत्य प्रविधाने मिळतील. त्या
पृ. १८५ प्रविधानफलाने तयार झालेल्या वर्गामध्ये, ते ज्यामुळे सत्य ठरते अशा वस्तू असतील. अर्थात "असे सर्व की इ.," म्हणजे आपल्याला काय अपेक्षित आहे हे आपल्याला अजूनही ठरवावयाचे आहे. तूर्त प्रविधानफलामुळे एक वर्ग निश्चित केला जातो असे समजू, आणि प्रत्येक प्रविधानफल योग्य असा वर्ग निश्चित करते इतकेच आपण पाहू.

(२) आकारिकरीत्या समानार्थी असणाऱ्या दोन प्रविधानफलांनी एकच एक वर्ग निश्चित केला पाहिजे आणि आकारिकरीत्या समानार्थी नसणाऱ्या दोन फलांनी दोन भिन्न वर्ग निश्चित केले पाहिजेत. म्हणजे, असे वर्ग त्याच्या सदस्यत्वामुळे निश्चित होतात. त्यामुळे दोन भिन्न वर्गाचे सदस्यत्व सारखे असू शकणार नाही. (जर एखादा वर्ग ϕx ह्या फलाने निश्चित होत असेल तर, ϕa सत्य असेल तेव्हा a हा त्या वर्गाचा "सदस्य" असतो, असे आपण म्हणतो.)

---

[१] अ. टी. : विल्यम ओकॅम हा एक इंग्लिश तत्त्वज्ञ व धर्मगुरु (१२८०-१३४९) होऊन गेला. त्याची उक्ती Occam's razor म्हणून प्रसिद्ध आहे.

(३) आपण केवळ वर्गांचीच व्याख्या करण्याचा नव्हे, तर वर्गाच्या वर्गाची व्याख्या करण्याचाही मार्ग शोधला पाहिजे. दुसऱ्या प्रकरणात आपण पाहिले की, प्रधानांकांची व्याख्या, वर्गांचे वर्ग अशी आपण केली. प्राथमिक गणितातील " n वस्तूंचे एकावेळी m घेऊन केलेले संवेश (Combination) " अशा तऱ्हेचे साधे वाक्प्रयोग वर्गांचा वर्गच व्यक्त करतात; तो वर्ग म्हणजे ज्या वर्गात n पदे आहेत अशा एखाद्या दिलेल्या वर्गातून m पदे निवडून होणाऱ्या सर्व वर्गांचा वर्ग होय. वर्गांचे वर्ग वापरण्याची, काही एक प्रतीकात्मक पद्धत नसेल तर गणिती तर्कशास्त्र बंद पडेल.

(४) एखादा वर्ग स्वतःचा सदस्य आहे किंवा स्वतःचा सदस्य नाही असे समजणे हे कोणत्याही परिस्थितीत अर्थशून्य (असत्य नव्हे) असले पाहिजे. १३ व्या प्रकरणात आपण चर्चा केलेल्या व्याघाताचाच हा परिणाम आहे.

(५) शेवटी—— ही कसोटी पूर्ण करणे सर्वांत कठीण आहे,— वस्तुमात्रांच्या *सर्व* वर्गांकरता किंवा एकाच तार्किक " जाती " च्या वस्तूंच्या सर्व वर्गांकरता, प्रविधाने तयार करणे शक्य झाले पाहिजे. असे होत नसेल तर वर्गांचे कित्येक उपयोग मोडून पडतील– उदाहरणार्थ, गणिती विगमन. दिलेल्या पदाच्या वंशाची व्याख्या करताना, त्याच्या वंशातील पद, ते पद ज्या ज्या आनुवंशिक वर्गात असेल त्या *सर्व* आनुवंशिक वर्गात असते, असे म्हणणे आपल्याला शक्य झाले पाहिजे; आणि या करताच वर उल्लेखिलेली सार्वत्रिकता आवश्यक आहे. ह्या कसोटीमध्ये अडचण येण्याचे कारण असे की ज्याचे पक्ष (Argument) दिलेल्या जातीचे असतील अशा *सर्व* प्रविधानफलां-बद्दल बोलणे अशक्य असल्याचे सिद्ध करता येते.

ह्या शेवटच्या कसोटीकडे आणि तिने निर्माण केलेल्या प्रश्नांकडे आपण सध्या दुर्लक्ष करू. पहिल्या दोन कसोट्या एकत्रित घेता येतील. त्यात असे मांडले
पृ. १८६ आहे की, आकारिकपणे समानार्थी असलेल्या प्रविधानफलांच्या प्रत्येक गटाकरता नेमका एक वर्ग, कमी नव्हे आणि जास्तीही नव्हे, असला पाहिजे; उदा. माणसांचा वर्ग म्हणजेच पिसे नसलेल्या द्विपदांचा किंवा बुद्धिप्रधान प्राण्यांचा किंवा मनुष्यप्राण्याची व्याख्या करण्याकरता लागणारे दुसरे कोणतेही सोईस्कर लक्षण असणाऱ्यांचा वर्ग होईल. आता जरी तोच वर्ग निश्चित करणारी पण आकारिकपणे समानार्थी असलेली दोन प्रविधानफले एकरूप नाहीत असे जेव्हा आपण म्हणतो तेव्हा, त्या वेळी एखादे विधान एका फलासाठी सत्य असून दुसऱ्यासाठी असत्य असू शकेल असे उदाहरण दाखवून आपल्या प्रतिपादनाची सिद्धता, आपण देतो, उदा. " सर्व माणसे मर्त्य आहेत यावर माझा विश्वास आहे " हे सत्य आहे, पण " सर्व बुद्धीप्रधान प्राणी मर्त्य आहेत यावर माझा विश्वास आहे " हे असत्य असू शकेल, कारण फीनिक्स हा बुद्धिमान आणि अमर्त्य आहे असा माझा चुकीचाच विश्वास असू शकेल. म्हणून

आपल्याला *फलांबद्दलच्या विधानांचा* किंवा (अधिक अचूकपणे) *फलांबद्दलच्या फलांचा* विचार करावा लागेल.

फलांबद्दलच्या काही गोष्टी त्या फलाने व्याख्यात केलेल्या वर्गाबद्दल सांगितल्या आहेत असे म्हणता येईल, तर काही येणार नाहीत. " सर्व माणसे मर्त्य आहेत " ह्या विधानात " x मनुष्यप्राणी आहे " आणि " x मर्त्य आहे " ही फले अंतर्भूत आहेत, किंवा आपल्याला आवडत असेल तर, त्यात *माणसांचा* आणि *मर्त्यांचा* वर्ग अंतर्भूत आहे असे आपण म्हणू. ह्या विधानाचा अर्थ आपण कोणत्याही प्रकारे लावू शकतो; कारण आकारिकपणे समानार्थी असलेल्या कोणत्याही फलात " x मर्त्य आहे " या ऐवजी " x मनुष्यप्राणी आहे " हे घातल्यावर सत्यतामूल्य बदलत नाही. पण आपण आताच पाहिल्याप्रमाणे " सर्व माणसे मर्त्य आहेत यावर माझा विश्वास आहे " हे विधान, यांपैकी कोणत्याही फलाने निश्चित केलेल्या वर्गाविषयी आहे असे म्हणता येणार नाही, कारण त्याऐवजी आकारिकपणे समानार्थी असलेल्या दुसऱ्या फलाची योजना केल्यास सत्यतामूल्य बदलू शकेल. (वर्ग बदलणार नाही.) ϕx हे फल, " सर्व माणसे मर्त्य आहेत " अशा प्रकारचे असेल. म्हणजे त्याऐवजी त्याच्याशी आकारिकपणे समानार्थी असलेले कोणतेही फल योजल्यास त्याचे सत्यतामूल्य बदलत नसेल तर ते फल ज्यात अंतर्भूत असेल अशा विधानाला आपण ϕx ह्या फलाचे " व्याप्तीदर्शक (Extensional) " फल म्हणू. आणि जेव्हा फलाचे फल व्याप्ती-दर्शक नसेल त्या वेळी त्याला आपण " आशयदर्शक (Intensional) " म्हणू. म्हणजे " सर्व माणसे मर्त्य आहेत यावर माझा विश्वास आहे "

पृ. १८७ हे " x मनुष्यप्राणी आहे " किंवा " x मर्त्य आहे " ह्याचे आशयदर्शक फल होईल. तेव्हा व्यावहारिक कामाच्या दृष्टीने x च्या फलाचे *व्याप्तीदर्शक* फल हे x ने निश्चित केलेल्या वर्गाचे फल आहे असे मानता येईल, पण *आशयदर्शक* फल तसे मानता येणार नाही.

गणिती तर्कशास्त्रात, फलांची जी *विशिष्ट* फले मांडण्याचा प्रसंग आपल्याला येईल, ती सर्व व्याप्तीदर्शकच असली पाहिजे. तेव्हा, उदाहरणार्थ, फलांची मूलभूत अशी दोन फले पुढीलप्रमाणे " ϕx सदैव सत्य असते " आणि " ϕx कधी-कधी सत्य असते ". ϕx ऐवजी आकारिकपणे समानार्थी असलेले कोणतेही फल घातले तरी यांपैकी कोणाचेही सत्यतामूल्य बदलणार नाही. वर्गाच्या भाषेत, जर α हा ϕx ने निश्चित केलेला वर्ग असेल तर " ϕx सदैव सत्य असते " हे " सगळे जग α चे सदस्य आहेत " याच्याशी समानार्थी आहे. आणि " ϕ x कधी कधी सत्य असते " हे " α ला घटक आहेत " याच्याशी किंवा (अधिक चांगले म्हणजे) " α मध्ये निदान एक घटक आहे " याच्याशी समानार्थी आहे. " ϕx चे समाधान करणाऱ्या पदाच्या " अस्तित्वा-बद्दलची मागच्या प्रकरणात पाहिलेली कसोटी पुन्हा घ्या. कसोटी अशी की,– " x, c

आहे " याच्याशी ϕx सदैव समानार्थी राहील असे c हे एक पद अस्तित्वात असते. ही अर्थातच व्याप्तीदर्शक आहे. ϕx ह्या फलाने निश्चित केलेला वर्ग एकेरी, म्हणजे ज्यात एकच पद आहे असा वर्ग आहे, ह्या प्रतिपादनाशी ती समानार्थी आहे; निराळ्या शब्दांत, तो वर्ग 1 चा सदस्य आहे.

व्याप्तीदर्शक असेल किंवा नसेल, अशा तऱ्हेचे एखादे फलाचे फल दिले असता, त्याच्यापासून त्याच्याशी संबंधित आणि अगदी त्याच फलाचे व्याप्तीदर्शक असेल असे फल आपण पुढील पद्धतीने नेहमीच मिळवू शकू : आपले मूळचे फलाचे फल, ϕx ला f हा धर्म लावते असे समजू. मग " f हा धर्म असणारे आणि आकारिकपणे ϕx शी समानार्थी असणारे एक तरी फल असते " ह्या प्रतिपादनाचा विचार करू. हे ϕx चे व्याप्तीदर्शक फल आहे; ज्या वेळी आपले मूळचे फल सत्य असते त्या वेळी हेही सत्य असते; आणि जर मूळचे फल व्याप्तीदर्शक असेल तर ते ϕx च्या मूळच्या फलाशी आकारिकपणे समानार्थी असते; पण मूळचे फल आशयदर्शक असेल तर मूळच्या फलापेक्षा हे नवीन फल अधिक वेळा सत्य असते. उदाहरणार्थ, " सर्व माणसे मर्त्य असतात यावर माझा विश्वास आहे ", हे " x मनुष्य आहे " याचे फल मानून विचार करू. नवीन व्याप्तीदर्शक फल असे : " x मनुष्य आहे " याच्याशी आकारिकपणे समानार्थी असेल त्याचे समाधान करणारी प्रत्येक गोष्ट मर्त्य असते
पृ. १८८ यावर माझा विश्वास असेल असे एक फल आहे ". फीनिक्स हा बुद्धिप्रधान आणि अमर्त्य आहे असा जरी माझा चुकीचा विश्वास असला तरी, " x मनुष्याप्राणी आहे " ऐवजी " x बुद्धिप्रधान प्राणी आहे " हे घातले असता हे फल सत्य राहते.

वर रचलेल्या फलाला – म्हणजे " f हा धर्म असलेले आणि ϕx शी आकारिकरीत्या समानार्थी असलेले असे एक तरी फल असते " याला आपण " साधित (Derived) व्याप्तीदर्शक फल " असे नाव देऊ. येथे मूळ फल, ϕx ह्या फलाजवळ f हा धर्म आहे " असे होते.

ज्याचा पक्ष ϕx ह्या फलाने निश्चित केलेला वर्ग आहे आणि ह्या वर्गाजवळ f हा धर्म आहे असे प्रतिपादन करणारे असे हे साधित व्याप्तीदर्शक फल आहे, असे आपण मानू. वर्गाबद्दलच्या प्रविधानाची ही व्याख्या म्हणून घेता येईल. म्हणजे आपण पुढील व्याख्या करू :

" ϕx ह्या फलाने निश्चित केलेल्या वर्गाजवळ f हा धर्म आहे ", असे प्रतिपादन करणे म्हणजेच f पासून साधित केलेल्या व्याप्तीदर्शक फलाचे ϕx समाधान करते, असे प्रतिपादन करणे होय.

फलाबद्दल सार्थपणे मांडता येईल अशा, वर्गाबद्दलच्या कोणत्याही विधानाला

ह्याच्यामुळे अर्थ येतो; आणि ही मीमांसा प्रतीकदृष्ट्या समाधानकारक करण्याकरता ज्या गोष्टी लागतात, त्या ह्याच्यापासून तांत्रिक पद्धतीने मिळतात.[1]

वर्गांच्या व्याख्येबद्दल आताच आपण जे काही म्हटले आहे ते आपल्या पहिल्या चार कसोट्या पूर्ण करण्याच्या दृष्टीने पुरेसे आहे. ज्या पद्धतीने ती व्याख्या तिसऱ्या आणि चौथ्या कसोटीच्या पूर्ततेची ग्वाही देते, म्हणजे वर्गांच्या वर्गांची शक्यता आणि वर्ग स्वतःचा सदस्य असणे किंवा नसणे ह्याची अशक्यता, ठरवते, ती कांहीशी तांत्रिक आहे; ती Principia Mathematica मध्ये स्पष्ट केली आहे, पण येथे ते विवेचन गृहीत धरून चालण्यास हरकत नाही. परिणामतः आपली पाचवी कसोटी सोडता आपले काम पूर्ण झाले आहे असे समजता येईल. ही कसोटी अत्यंत महत्त्वाचीही आहे आणि अत्यंत अवघडही आहे. पण ही कसोटी आतापर्यंत आपण जे काय मांडले तेवढ्या आधारावर, पूर्ण झाली आहे असे म्हणता येणार नाही. ह्या अडचणीचा संबंध जाति-मीमांसेशी आहे, आणि तिची चर्चा थोडक्यात केली पाहिजे.[2] तार्किक जातींची उतरंड असू शकते, हे आपण तेराव्या प्रकरणात पाहिले. आणि तसेच, एका जातीच्या वस्तू-ऐवजी दुसऱ्या जातीची वस्तू घालू देण्याने तर्कदोष कसा निर्माण होतो, हेही पाहिले. आता दिलेली एकच वस्तू a, पक्ष म्हणून घेऊ शकतील, अशी
पृ. १८९ निरनिराळी फले एकाच जातीची नसतात, हे दाखवणे अवघड
नाही. त्या सर्व फलांना आपण a-फले म्हणू. यापैकी ज्या फलांचा आपल्या समुदायाशी, असलेला संबंध अंतर्भूत नाही, अशी फले आपण प्रथम घेऊ; ह्यांना आपण " विधेयकारक (Predicative) a-फले " म्हणू. आता जर आपण सर्व विधेयकारक a-फलांचा संदर्भ अंतर्भूत असलेल्या फलांकडे वळलो, आणि ही फले आपण विधेयकारक a-फलांच्या जातीचीच आहेत असे मांडले तर आपण तर्कदोषात गुरफटू. " a हा एक नमुनेदार फ्रेंच मनुष्य आहे " अशासारखे नेहमीच्या व्यवहारातले एक विधान घ्या. आपण " नमुनेदार " फ्रेंच मनुष्य ह्याची व्याख्या कशी करणार ? त्याची व्याख्या आपण " बहुसंख्य फ्रेंच माणसांकडे असणारे गुण असणारा " अशी करू शकू. पण जोपर्यंत गुणांच्या साकल्याचा (Totality) संदर्भ ज्यात नाही अशापुरतेच " सर्व गुण " मर्यादित ठेवणार नाही तोपर्यंत आपल्याला असे आढळून येईल की बहुसंख्य फ्रेंच लोक वरील अर्थाने नमुनेदार *नाहीत*. म्हणून व्याख्येवरून असे दिसेल की नमुनेदार फ्रेंच मनुष्य नसणे हेच नमुनेदार फ्रेंच मनुष्याला आवश्यक आहे. हा तार्किक व्याघात

---

[1] ले. टी. : Principia Mathematica, vol. i, पृ. ७५–८४ आणि * २० पाहा.

[2] ले. टी. : ज्या वाचकाला संपूर्ण चर्चा हवी असेल त्याने Principia Mathematica परिचय, प्रकरण II; आणि * १२ पाहावेत.

नव्हे कारण नमुनेदार फ्रेंच लोक अस्तित्वात असावेत असे समजण्यास कोणतेही कारण नाही. पण यामुळे गुणांच्या साकल्याचा संदर्भ ज्यात अंतर्भूत आहे असा गुण, तसा संदर्भ ज्यात नाही अशांपासून वेगळे करण्याची आवश्यकता स्पष्ट होते.

ज्या वेळी एखादे चल, जी मूल्ये सार्थपणे घेऊ शकेल अशा "सर्व" किंवा "काही" मूल्यांबद्दलच्या विधानामुळे आपण नवीन वस्तू निर्माण करतो, त्या वेळी ही नवीन वस्तू आपल्या पूर्वीच्या चलाने घेतलेल्या मूल्यांमध्ये अंतर्भूत असता कामा नये. कारण जर ती तशी असेल तर जी जी मूल्ये ते घेऊ शकेल त्यांच्या साकल्याची व्याख्या स्वतःच्याच रूपात करता येईल आणि आपण पुन्हा एका दुष्ट चक्रांत गुरफटू. उदाहरणार्थ, मी जर असे म्हटले की "मोठा नेता होण्यासाठी आवश्यक ते सर्व गुण नेपोलियनजवळ होते" तर, "गुणांची" व्याख्या मी अशा तऱ्हेने केली पाहिजे की त्यांमध्ये आता जे मी काय म्हणतो आहे त्याचा अंतर्भाव होता कामा नये. म्हणजे गुण ह्याचा जो अर्थ आपण समजलो आहोत त्यातच "मोठा नेता होण्यासाठी लागणारे सर्व गुण असणे" हे अंतर्भूत असता कामा नये. हे पुष्कळसे स्पष्ट आहे. आणि हे तत्त्व, जिच्यामुळे दुष्ट-चक्रात्मक विरोधाभास टाळता येतील अशा जातिमीमांसेकडे आपल्याला नेते. a–फलांना लागू असलेला "गुण" चा अर्थ म्हणजे "विधेयफले" असे आपण समजू शकू. मग मी जेव्हा म्हणतो की "नेपोलियनजवळ इ. इ." त्या वेळी "नेपो-
पृ. १९० लियन सर्व विधेयकारक फलांचे समाधान करतो, इ." असे मला म्हणावयाचे असते. ह्या विधानामुळे नेपोलियनला एक गुण लागू होतो. पण विधेयकारक गुण लागू होत नाही; आणि ह्याप्रमाणे आपण दुष्टचक्रातून निसटतो. पण जर दुष्टचक्र टाळावयाचे असेल तर, जेथे जेथे "अशा प्रकारची सर्व फले" असा वाक्प्रयोग उद्भवतो तेथे संबंधित फले एकाच जातीपुरती मर्यादित ठेवली पाहिजेत. मग नेपोलियन किंवा नमुनेदार फ्रेंच मनुष्य ह्या उदाहरणांनी दाखवल्याप्रमाणे पक्षाच्या जातीवरून त्यांची जाती निश्चित होते असे नव्हे हे दिसून येईल; हा मुद्दा पूर्ण स्पष्ट करण्यासाठी कदाचित आणखी तपशीलवार विवेचन आवश्यक असेल. पण एखादा दिलेला पक्ष (मूल्य म्हणून) घेणाऱ्या फलांच्या जाती असंख्य असतील हे स्पष्ट करण्यात आता-पर्यंत जे काय मांडले ते पुरेसे आहे. n ही एक सान्त संख्या दिली असता, पहिल्या n जातीतून फिरू शकेल असे चल आपण विविध तांत्रिक पद्धतीने घडवू शकू; पण सर्व जातींतून फिरू शकेल असे चल आपण घडवू शकणार नाही. आणि जर तसे शक्य झाले तर लागलीच आपल्याला तोच पक्ष असलेले नवीन जातीचे फल मिळेल आणि मग सर्व प्रक्रिया पुन्हा चालू होईल.

आपण विधेयकारक फलांना *पहिल्या* जातीची a-फले म्हणू; पहिल्या जातीच्या फलांच्या साकल्याचा संदर्भ असणाऱ्या a-फलांना *दुसऱ्या* जातीची फले म्हणू; इ० कोणतेही चल a-फल ह्या सर्व भिन्न जातीतून फिरू शकणार नाही; कोठल्या तरी एका जातीपाशी ते थांबले पाहिजे.

हे विचार, साधित व्याप्तीदर्शक फलाच्या आपल्या व्याख्येशी सुसंगतच आहेत. तेथे आपण " ϕx शी आकारिकपणे समानार्थी असलेल्या फलांविषयी बोललो ". आपल्या फलाची जात कोणती याचा निर्णय करणे आवश्यक आहे. कोणताही निर्णय चालेल, पण निर्णय टाळता येणार नाही. आकारिकपणे समानार्थी आहे असे ज्याच्याबद्दल मानले आहे ते फल, ψ मानू. मग ψ हे चल असल्याचे दिसेल. आणि ते कोणत्यातरी एका निश्चित जातीचे असले पाहिजे. ϕ च्या जातीविषयी आपल्याला जर काही माहिती असेल तर ते दिलेल्या जातीचे पक्ष घेते इतकेच; म्हणजे ते (समजा) a-फल आहे इतकेच माहिती आहे. पण तेवढ्यामुळे, आताच आपण पाहिल्याप्रमाणे, त्याची जात ठरत नाही. जर आपल्याला (आपल्या पाचव्या कसोटीनुसार) ज्यांच्या सदस्यांची जात a सारखीच आहे अशा सर्व वर्गांचा विचार करावयाचा असेल तर आपल्याला अशा सर्व वर्गांची व्याख्या कोणत्यातरी एका जातीच्या फलांच्या साह्याने करता आली पाहिजे. म्हणजे असे की, कोणत्यातरी जातीचे—समजा n—व्या—a-फल अस्तित्वात असले
पृ. १९१ पाहिजे; हे फल असे असावे की, कोणतेही a-फल n—व्या जातीच्या कोणत्यातरी a-फलाशी आकारिकपणे समानार्थी असेल. जर असे असे असेल तर, n—व्या जातीच्या a-फलांकरता सत्य असणारे कोणतेही व्याप्तीदर्शक फल कोणत्याही a-फलाकरता सत्य असते. मुख्यतः हा परिणाम घडवणाऱ्या गृहीताला मूर्त स्वरूप देण्याकरता तांत्रिक साधन म्हणून वर्ग उपयुक्त आहेत. ह्या गृहीताला " संक्षेपणीयतेचा (Reducibility) सिद्धांत " म्हणतात; तो असा मांडता येईल :—

" विचाराधीन जातीच्या एखाद्या फलाशी आकारिकपणे समानार्थी असेल अशा प्रकारच्या a-फलांची एक जाती (समजा r) अस्तित्वात असते. "

जर हा सिद्धांत गृहीत धरला तर आपल्या संबंधित (Associated) व्याप्तीदर्शक फलाची व्याख्या करण्याकरता आपण या जातीची फले वापरू. सर्व a—वर्गांबद्दलच्या (म्हणजे a-फलांनी व्याख्या केलेल्या सर्व वर्गांबद्दलच्या) विधानांचा संक्षेप r जातीच्या सर्व फलांबद्दलच्या विधानांमध्ये करता येईल; जोवर केवळ व्याप्तीदर्शक फलांचा संबंध असेल तोवर याच्यामुळे व्यवहारात, एरवी ज्याला " सर्व a-फलांची " असंभाव्य कल्पना लागली असती, असे निष्कर्ष मिळतील. जिथे ही गोष्ट अत्यंत महत्त्वाची आहे असे एक क्षेत्र म्हणजे गणिती विगमन.

वर्गांच्या मीमांसेला खरोखर जे काही अत्यावश्यक असते त्या सर्वांचा अंतर्भाव संक्षेपणीयतेच्या सिद्धांतामध्ये होतो. त्यामुळे तो सत्य मानण्याकरता काही सबळ कारण आहे किंवा नाही ही शंका रास्तच ठरेल.

गुणन-सिद्धांत आणि अनंताचा सिद्धांत याप्रमाणे हा सिद्धांतही काही गोष्टींसाठी आवश्यक आहे. पण निगमनात्मक कार्यकारण—मीमांसेच्या निव्वळ अस्तित्वाकरता आवश्यक नाही. १४ व्या प्रकरणात स्पष्ट केलेली निगमन—मीमांसा आणि " सर्व '

आणि " काही " यांचा अंतर्भाव असलेल्या प्रविधानांचे नियम, हे गणिती युक्तिवादाचे अंतरंगच होत : त्यांच्याविना किंवा तत्सम इतर काही नियम नसतील तर, आपल्याला केवळ तसलेच परिणाम मिळणार नाहीत, इतकेच नव्हे तर कुठल्रेच परिणाम मिळणार नाहीत. आपण ते गृहीत म्हणून वापरू शकणार नाही आणि त्यांच्यापासून अनुमानेही काढू शकणार नाही, कारण ते निगमनाचे नियमही आहेत आणि पक्षविधानेही आहेत. ते निर्विवादपणे सत्य असले पाहिजेत. नाहीतर त्यांच्या साहाय्याने निगमित केलेले परिणाम पक्षविधानांपासून निघणेसुद्धा शक्य होणार नाही. उलटपक्षी, पूर्वीच्या इतर दोन गणिती सिद्धांताप्रमाणे संक्षेपणीयतेचा सिद्धांतसुद्धा प्रत्यक्षतः सत्य आहे असे मानण्या-ऐवजी ज्या ज्या वेळी लागेल त्याच वेळी तो गृहीत धरून आरंभ
पृ. १९२ करणे चांगले. त्याचे निष्कर्ष आपण त्यावरून तत्त्वतः निगमित करू शकू; तो असत्य आहे असे मानूनही त्याचे निष्कर्ष निगमित करता येतील. म्हणून तो केवळ सोईचा आहे इतकेच. आवश्यक आहे असे नाही. जातिमीमांसा क्लिष्ट असल्याने आणि तिची सामान्य तत्त्वे सोडली असता इतर तत्त्वे फार अनिश्चित असल्यामुळे, संक्षेपणीयतेचा सिद्धांत अजिबात टाळून जाण्याचा काही मार्ग आहे किंवा कसे हे सांगणे अद्यापिही शक्य झालेले नाही; तरीसुद्धा वर मांडलेल्या मीमांसेच्या रूपरेषेची अचूकता गृहीत धरल्यास ह्या सिद्धान्ताच्या सत्यासत्यतेविषयी आपण काय सांगू शकू ?

हा सिद्धान्त म्हणजे लायबनित्सच्या, दृष्टिगोचर नसणाऱ्या वस्तूंच्या एकात्मतेचे सामान्यीकृत रूप आहे असे दिसेल. दोन भिन्न कर्त्यांमध्ये विधेयांच्या दृष्टीने फरक असला पाहिजे असे लाईब्नित्सने तार्किक तत्त्व म्हणून गृहीत धरले होते. आता विधेये म्हणजे ज्याला आपण " विधेयकारक फल " म्हटले त्यांपैकीच काही होत. या फलांमध्ये, दिलेल्या फलांचे संबंधही आहेत आणि ज्यांना विधेय म्हणता येणार नाही असे विविध धर्मही आहेत. म्हणून लायब्नित्सचे गृहीत आपल्यापेक्षा अधिक काटेकोर आणि संकुचित आहे. (अर्थात *त्याच्या* तर्कशास्त्राप्रमाणे नव्हे, त्या तर्कशास्त्रामध्ये *सर्व* प्रविधाने *कर्ता–विधेय* या रूपात संक्षिप्त करता येतात असे मांडले जाते.) पण त्याच्या पद्धतीवर, मला दिसते आहे त्याप्रमाणे, विश्वास ठेवण्यास चांगलेसे कारण नाही. " विधेय " हा शब्द आपण ज्या संकुचित अर्थाने वापरीत आहोत त्या अर्थाने ज्यांना नेमके तेच विधेय असेल अशा दोन वस्तूंचे अस्तित्व शुद्ध तर्कशास्त्रदृष्ट्या प्रस्थापित करणे अगदी शक्य आहे. विधेयाच्या ह्या संकुचित अर्थाच्या पलीकडे गेल्यास आपला सिद्धांत कसा दिसेल ? प्रत्यक्ष जगात स्थलकालविवेकामुळे (Spatio– temporal differntiation) वस्तुमात्रांच्या सत्यतेविषयी शंका घेण्यास जागा आहे असे दिसत नाही. कोणत्याही वस्तूचा इतर सर्व वस्तूंशी नेमका तोच स्थलकालवाचक संबंध असू शकणार नाही. पण हा एक अपवाद आहे; ज्या जगात आपण राहतो, तेथील ही

परिस्थिती आहे. शुद्ध तर्कशास्त्र आणि शुद्ध गणित (दोन्ही एकच) यांचा हेतू, लाईब्नित्सच्या परिभाषेत सर्व प्रकारच्या जगात सत्य राहणे हा आहे; केवळ आताच्या अस्ताव्यस्त व यदृच्छेवर (chance) अवलंबून असणाऱ्या जगातच सत्य राहणे इतकाच नव्हे. तर्कशास्त्रज्ञाने काही एक प्रकारचा आव राखून राहिले पाहिजे; आसपास त्याला जे काय दिसते त्यावरुन युक्तिवाद करण्याचा कमीपणा त्याने पत्करता कामा नये.

कठोर तर्कशास्त्राच्या दृष्टीतून पाहिले असता, संक्षेपणीयतेचा सिद्धांत, ही तार्किक गरज आहे. म्हणजे, तो सर्वच (प्रकारच्या) जगात सत्य असतो, असे मानण्यास मला काही कारण दिसत नाही. म्हणून तर्क-पद्धतीमध्ये ह्या सिद्धांताचा प्रवेश होणे, मग तो अनुभवान्ती सत्य ठरत असला तरी, म्हणजे एक दोषच आहे. याच कारणास्तव वर्गमीमांसा ही वर्णनमीमांसेइतकी परिपूर्ण मानता येत नाही.
पृ. १९३ जातिमीमांसेच्या क्षेत्रात आणखी कार्य करण्याची आवश्यकता आहे. अशा तऱ्हेचा शंकास्पद सिद्धांत जिच्यात लागत नाही अशी, वर्गांची मीमांसा त्यामुळे प्राप्त होईल अशी आशा आहे. पण प्रस्तुतच्या प्रकरणात स्थूलपणे मांडलेली मीमांसा मुख्य दृष्टीने, म्हणजे वर्गांबद्दलच्या प्रविधानांचे नाममात्र क्षपण (Reduction) ते वर्ग ज्या फलांमुळे निश्चित होतात, त्या फलांबद्दलच्या प्रविधानांत, करण्याच्या दृष्टीने योग्य आहे असे समजणे सयुक्तिक आहे. ह्या रीतीने वर्ग हे वस्तू म्हणून घेण्याचे टाळणे कदाचित तत्त्वतः सुयोग्य भासेल, पण तपशिलामध्ये कदाचित फार जुळवून घ्यावे लागेल अशी शंका आहे. पण शक्यतो जे शंकास्पद आहे ते वगळण्याची आमची इच्छा असतानाही वर्गमीमांसेचा अंतर्भाव आम्ही केला आहे.

स्थूलमानाने वर वर्णन केलेल्या वर्ग मीमांसेचा संक्षेप, एक सिद्धांत आणि एक व्याख्या यांत होतो. निश्चितपणा येण्याकरता आपण येथे त्यांची पुनरुक्ती करू. सिद्धांत असा :

τ ही अशी एक जाती अस्तित्वात आहे की, दिलेली वस्तू पक्ष म्हणून घेऊ शकेल असे ϕ हे जर फल असेल; तर τ च्याच जातीचे आणि ϕ शी आकारिकरीत्या समानार्थी असेल असे ψ हे एक फल अस्तित्वात असते.

व्याख्या अशी :

जर दिलेली वस्तू पक्ष म्हणून घेऊ शकेल असे ϕ हे एक फल असेल आणि τ म्हणजे वरील सिद्धांतात उल्लेखिलेली जाती असेल तर, ϕ ने निश्चित केलेल्या वर्गाजवळ f हा धर्म आहे असे म्हणणे म्हणजेच, ϕ शी आकारिक समानार्थी असणारे, τ ह्या जातीचे आणि f हा धर्म असणारे फल अस्तित्वात आहे असे म्हणणे होय.

□ □

प्रकरण १८

गणित आणि तर्कशास्त्र

ऐतिहासिकदृष्ट्या बोलावयाचे तर गणित आणि तर्कशास्त्र ह्या दोन ज्ञानशाखा संपूर्णतः भिन्न आहेत. गणिताचा संबंध शास्त्राशी (विज्ञानाशी) होता, तर तर्कशास्त्राचा संबंध ग्रीकांशी होता. पण सध्याच्या काळात दोन्हींचा विकास
पृ. १९४ झाला आहे. तर्कशास्त्र हे अधिक गणिती झाले आहे आणि गणित हे अधिक तार्किक झाले आहे. परिणामतः दोहोंमध्ये सीमारेषा काढणे आता पूर्ण अशक्य झाले आहे; खरे म्हणजे दोन्ही एकच आहेत. त्यांच्यात बाल आणि प्रौढ असला फरक आहे; तर्कशास्त्र म्हणजे गणिताचे बाल्य आणि गणित म्हणजे तर्कशास्त्राचे प्रौढत्व. ह्या दृष्टिकोणाला तर्कशास्त्रज्ञांचा विरोध आहे. कारण त्यांनी आपला वेळ पारंपरिक ग्रंथांचा अभ्यास करण्यात घालवलेला असल्याने, प्रतीकात्मक युक्तिवाद समजण्यास ते असमर्थ बनले आहेत; उलटपक्षी, गणितज्ञांनी केवळ तंत्राचा अभ्यास केला आणि त्याचा अर्थ किंवा त्याचा उपयोग ह्याची चौकशी करण्याच्या फंदात ते पडले नाहीत, म्हणून त्यांचाही विरोध आहे. सुदैवाने दोन्ही प्रकारचे लोक हळु हळू विरळ होत चालले आहेत. आधुनिक गणितातील केवढे तरी कार्य हे उघडपणे तर्कशास्त्राच्या सीमा रेषेवर आहे. आधुनिक तर्कशास्त्रातील पुष्कळसे कार्य प्रतीकात्मक आकारिक (Formal) आहे, त्यामुळे तर्कशास्त्र व गणित यांच्यातील घनिष्ट संबंध प्रत्येक विद्यार्थ्याला स्पष्ट दिसतो. त्यांच्या एकरूपतेची सिद्धता म्हणजे अर्थातच तपशीलाचा प्रश्न आहे : तर्कशास्त्रातील म्हणून सार्वत्रिकपणे मान्य असलेल्या पक्षविधानांपासून आरंभ करून गणितात जे परिणाम मिळत आहेत असे उघड दिसते अशा परिणामापर्यंत निग-मनाच्या पद्धतीने पोचल्यावर आपल्याला असे दिसेल की एका बाजूला तर्कशास्त्र आणि दुसऱ्या बाजूला गणित येईल अशी स्पष्ट विभागणी करणारी रेषा काढणे कोणत्याच अवस्थेत शक्य नाही. तर्कशास्त्र आणि गणित यांची एकात्मता अजूनही जे कोणी स्वीकारीत नसतील, त्यांना आमचे आव्हान आहे की, Principia Mathe-
पृ. १९५ matica मधील, व्याख्या आणि निगमन यातील कोणत्या ठिकाणी तर्कशास्त्र संपवून गणित सुरू होते हे त्यांनी दर्शवावे. मग हे स्पष्ट होईल की कोणतेही उत्तर हे काल्पनिकच असेल.

ह्या पुस्तकाच्या प्रारंभीच्या प्रकरणांत स्वाभाविक संख्यांपासून आरंभ करून आपण प्रथम " प्रधानांकांची " व्याख्या केली, आणि संख्याकल्पनेचा विस्तार कसा करावयाचा ते दाखविले; आणि ह्या व्याख्येत अंतर्भूत असणाऱ्या कल्पनांचे विश्लेषण इतके केले की शेवटी आपण तर्कशास्त्राच्या मूलतत्त्वांपाशी आलो असल्याचे आढळून आले. रचनात्मक आणि निगमनात्मक विवेचनामध्ये ही मूलतत्त्वे प्रथम येतात, आणि स्वाभाविक संख्या, अगदी दीर्घ प्रवासानंतर येतात. असे विवेचन आपण स्वीकारलेल्या विवेचनाहून आकारिकदृष्ट्या अधिक चूक असले तरी वाचकांच्या दृष्टीने अधिक अवघड असते, कारण ज्या अंतिम तार्किक कल्पना आणि प्रविधानांपासून त्यात सुरुवात होते ती स्वाभाविक संख्यांपेक्षा फार दूरची आणि अपरिचित असतात. शिवाय ते ज्ञानाचे आजचे क्षितिज तेवढेच दर्शवतात आणि त्यापलीकडचे तर अद्यापि अज्ञातच आहे; तसेच त्यांच्याविषयीच्या ज्ञानाचे क्षेत्रही अजून फारसे स्थिर नाही.

गणित हे " राशीचे (Quantity) " शास्त्र आहे असे म्हटले जात असे " राशी " हा शब्द संदिग्ध आहे, पण युक्तिवादाकरता आपण त्याऐवजी " संख्या " हा शब्द घेऊ. गणित हे संख्यांचे शास्त्र आहे, हे विधान दोन प्रकारे खोटे आहे. एक म्हणजे ज्यात संख्यांचा संपर्कही नाही अशा, गणिताच्या मान्य शाखा आहेत निर्देशक (Coordinate) किंवा मापन यांचा वापर न करणारी संपूर्ण भूमिती, प्रक्षेपीय आणि वर्णनात्मक भूमिती यांमध्ये जेथे प्रथमच निर्देशक लागतात तेथवर, संख्यांचा संबंध येत नाही. किंवा *मोठा* आणि *लहान* ह्या अर्थी सुद्धा राशींचा संबंध येत नाही. दुसरीकडे प्रधानांकांच्या व्याख्येतून, विगमन आणि अनुवंशमीमांसेतून, मालिकांच्या सामान्य मीमांसेतून आणि अंकगणिती क्रियांच्या व्याख्यांतून, जे केवळ संख्यांपुरतेच सिद्ध केले जात असे त्याचे सामान्यीकरण करणे शक्य झाले आहे. परिणाम असा की पूर्वी जो केवळ अंकगणिताचा अभ्यास मानला जात असे त्याचे आता कित्येक शाखांमधून विभाजन झाले आहे, आणि यांपैकी कोणाचाच संख्यांशी विशेष संबंध नाही. संख्यांच्या अगदी प्राथमिक गुणधर्मांचा संबंध एक-एक संबंधांशी आणि वर्गांतील

पृ. १९६ सादृश्याशी असतो. बेरजेचा संबंध, जे दोन वर्ग परस्पर वियुक्त नाहीत अशांशी सदृश असणाऱ्या पण परस्परवियुक्त असणाऱ्या वर्गांची रचना करण्याशी असतो. गुणाकार " उद्ग्रहणाच्या " मीमांसेत म्हणजे विशिष्ट प्रकारच्या एक-अनेक संबंधांत बुडून गेलेला असतो. ज्याच्यातून गणिती विगमनाची संपूर्ण मीमांसा जन्माला आली त्या अनुवंशसंबंधाच्या व्यापक मीमांसेमध्ये सान्तता बुडलेली असते. निरनिराळ्या प्रकारच्या संख्यामालिकांचे क्रमाबद्दलचे गुणधर्म फलांच्या सांतत्याची आणि सीमांची मीमांसा यांचे सामान्यीकरण इतके झाले आहे की संख्यांचा कोणताही संदर्भ आणण्याचे कारण राहात नाही. जास्तीत जास्त सामान्यीकरण करावयाचे हे सर्व आकारिक कारणमीमांसेचे तत्त्वच आहे. कारण त्यामुळे दिलेली निगमन प्रक्रिया अधिक व्यापक क्षेत्रांना लागू होऊ शकेल याची आपणाला खात्री

मिळते; म्हणून, याप्रमाणे अंकगणिताची कार्यकारणमीमांसा व्यापक करण्यामध्ये आपण गणितात सर्वत्र स्वीकारलेल्या नियमांचेच पालन करीत असतो. तेव्हा सामान्यीकरण करण्यात, परिणामी आपण नवीन निगमनपद्धतीचा संचच निर्माण केला आहे; त्यामध्ये पारंपरिक गणित एकदम विरघळून विस्तृत झाले आहे; पण या नव्या निगमनपद्धतीतील कोणतीही मीमांसा– उदाहरणार्थ उद्ग्रहणाची मीमांसा– तर्कशास्त्रात मोडते असे म्हणावयाचे की अंकगणितात, हा पूर्णपणे मर्जीचा प्रश्न असून त्याचा निर्णय बुद्धीच्या जोरावर लावता येणार नाही.

यामुळे आपण पुढील प्रश्नाच्या अगदी समोर येऊन ठेपतो: ज्याला गणित किंवा तर्कशास्त्र यापैकी काहीही म्हणता येईल असा हा कोणता विषय आहे? त्याची व्याख्या करता येईल असा काही एक मार्ग आहे काय?

ह्या विषयाची काही लक्षणे स्पष्ट आहेत. प्रारंभी, आपण ह्या विषयात विशिष्ट गोष्टी किंवा विशिष्ट गुणधर्मांचा विचार करीत नाही. आपण *कोणत्याही* गोष्टीबद्दल किंवा *कोणत्याही* गुणधर्माबद्दल काय म्हणता येईल याचा आकारिकपणे विचार करतो. एक आणि एक म्हणजे दोन असे म्हणण्याची आपली तयारी आहे. पण सॉक्रेटीस आणि प्लेटो म्हणजे दोन असे म्हणण्याची तयारी नाही. तर्कशास्त्रज्ञ म्हणून किंवा गणितज्ञ म्हणून आपण सॉक्रेटीस किंवा प्लेटो यांच्याबद्दल कधीही ऐकलेले नाही. ज्या जगात अशा कोणी व्यक्ती नसतील त्या जगातही एक आणि एक दोनच राहतील. शुद्ध गणितज्ञ किंवा तर्कशास्त्रज्ञ म्हणून कशाचाही उल्लेख करण्यास आपण मुक्त नाही.
पृ. १९७ कारण जर आपण तसे केले तर असंबद्ध गोष्टींचा किंवा जे शुद्ध आकारात्मक नाही त्याचा उल्लेख आपण केला असे होईल. संविधानाच्या कल्पनेला लागू करून आपण हे स्पष्ट करू. पारंपरिक तर्कशास्त्र असे म्हणते की, “सर्व माणसे मर्त्य आहेत, सॉक्रेटीस मनुष्य आहे म्हणून तो मर्त्य आहे”. आता हे स्पष्ट आहे की आपण जे प्रतिपादन करू इच्छितो, ते, म्हणजे आरंभी तरी, पक्षविधानांमध्ये निष्कर्ष अभिप्रेत इतकेच; पक्षविधाने आणि निष्कर्ष प्रत्यक्षतः सत्य आहेत हे नव्हे अगदी सर्वात जुने तर्कशास्त्रसुद्धा, पक्षविधानांच्या प्रत्यक्ष सत्यत्वाचा तर्कशास्त्राशी संबंध नाही असे म्हणते. तेव्हा वरील पारंपरिक संविधानामध्ये पहिला बदल करावयाचा होता की ते, “जर सर्व माणसे मर्त्य असतील आणि सॉक्रेटीस मनुष्य असेल तर सॉक्रेटीस मर्त्य असतो” अशा रूपात मांडणे. आता, ह्याचा हेतू हा युक्तिवाद त्याच्या आकारामुळेच सप्रमाण आहे, त्यात येणाऱ्या विशिष्ट पदांमुळे नाही, हे सांगणे, हा आहे हे लक्षात घेतले पाहिजे. जर आपल्या प्रविधानांमधून आपण “सॉक्रेटीस हा मनुष्य आहे” हे वगळले असते तर आपल्याला अनाकारिक युक्तिवाद मिळाला असता, आणि सॉक्रेटीस प्रत्यक्षतः मनुष्य आहे म्हणूनच स्वीकारार्ह ठरला असता; आणि मग आपल्याला सर्वसामान्य युक्तिवाद मिळाला नसता. पण जेव्हा युक्तिवाद वरीलप्रमाणे आकारिक असतो त्यावेळी त्यात आढळणाऱ्या पदांवर कोणतीही गोष्ट अवलंबून नसते,

आपण माणसे ऐवजी α आणि मर्त्यऐवजी β आणि सॉक्रेटीसऐवजी x घालू शकू; येथे α β हे कोणतेही वर्ग आणि x ही कोणतीही वस्तू आहे. मग आपल्याला पुढील विधान मिळते : “ x, α आणि यांना कोणतीही संभाव्य मूल्ये दिली असता, जर सर्व α, β असतील आणि x, α असेल तर x, β असतो ”. निराळ्या शब्दांत, “ जर सर्व α, β असतील आणि x, α असेल तर x, β असतो ’ हे प्रविधानफल नेहमी सत्य असते ”. सरतेशेवटी, येथे आपल्याला तर्कशास्त्राचे प्रविधान मिळते. हे प्रविधान सॉक्रेटीस आणि मनुष्य आणि मर्त्य ह्यांच्याबद्दलच्या पारंपरिक विधानाने सुचवलेलेच प्रविधान होय.

जर आपला हेतू आकारिक युक्तिवाद; हाच असेल तर, सरतेशेवटी आपण वरीलसारख्या प्रविधानांप्रत पोहोचू, हे उघड आहे; यात प्रत्यक्षपणे कोणत्याही वस्तू किंवा कोणतेही धर्म आढळणार नाहीत; जे सामान्यपणे सिद्ध करता येते ते विशेष प्रकारात सिद्ध करण्यात आपला वेळ वाया जाऊ नये, ह्या इच्छेतूनच केवळ हे घडून येईल. सॉक्रेटीसबद्दल लांबलचक युक्तिवाद करावयाचा आणि पुन्हा जवळ जवळ तसाच युक्तिवाद प्लेटोबद्दल करावयाचा, हा खुळचटपणा होईल. जर पृ. १९८ आपला युक्तिवाद (समजा) सर्व माणसांकरता सत्य असेल तर तो आपण “ जर x मनुष्य असेल ” हे गृहीत घेऊन “ x ” करता सिद्ध करू. हे गृहीत स्वीकारल्यास x जरी मनुष्य नसेल तरी युक्तिवादाची तात्त्विक सप्रमाणता तशीच राहील. पण आता आपल्याला असे आढळेल की, x एक मनुष्य आहे असे समजण्याऐवजी तो एक माकड आहे, किंवा एक बदक आहे, किंवा एक पंत-प्रधान आहे असे मानले तरी आपला युक्तिवाद सप्रमाणच राहील. त्यामुळे आपण आपले पक्षविधान “ x एक मनुष्य आहे ” असे घेऊन, आपला वेळ फुकट घालवणार नाही तर “ x एक α आहे ” (येथे α हा वस्तूंचा कोणताही एक वर्ग) असे किंवा “ ϕx ” (येथे ϕ दिलेल्या एखाद्या जातीचे प्रविधानफल आहे) घेऊ, तेव्हा तर्कशास्त्रात किंवा गणितात विशिष्ट गोष्टींच्या किंवा धर्मांच्या उल्लेखाचा अभाव हा, त्यांचा अभ्यास आपण म्हणतो त्याप्रमाणे “ शुद्ध आकारिक ” असल्याचा परिणाम आहे.

ह्या ठिकाणी आपल्याला अशा एका प्रश्नाला तोंड द्यावयाचे असल्याचे आढळून येईल की तो मांडण्यास सोपा पण सोडवण्यास कठिण आहे. प्रश्न असा, “ तार्किक प्रविधानाचे घटक कोणते ? ” मला उत्तर माहिती नाही, पण प्रश्न कसा निर्माण होतो ते सांगण्याचा माझा इरादा आहे. उदाहरणार्थ, “ सॉक्रेटीस, ॲरिस्टॉटलच्या आधी झाला ” हे प्रविधान घ्या. येथे हे उघड वाटते आहे की आपल्याकडे दोन पदांतील एक संबंध आहे, आणि प्रविधानाचे घटक (तसेच संबंधित घटनेचेही) घटक, केवळ दोन पदे आणि त्यांच्यातील एक संबंध, म्हणजे सॉक्रेटीस, ॲरिस्टॉटल आणि *आधी* इतकेच आहेत. (सॉक्रेटीस, ॲरिस्टॉटल हे घटक साधे नाहीत ह्या गोष्टीकडे मी दुर्लक्ष करतो. ह्यातील कोणत्याही बाबीचा प्रस्तुतच्या मुद्याशी संबंध नाही.) अश्या प्रविधानांचा सामान्य आकार आपण “ xRy ” असा व्यक्त करू; तो “ x चा y शी R संबंध आहे ”

असा वाचू. तार्किक प्रविधानात सामान्य आकारच येऊ शकेल. पण कोणताही विशिष्ट प्रकार उद्भवणार नाही. सामान्य आकारच अशा तार्किक प्रविधानांचे घटक असतो असे अनुमान आपण करावयाचे काय ?

“ सॉक्रेटीस, ॲरिस्टॉटलच्या आधी झाला ” अशा प्रकारचे प्रविधान दिले असता आपल्याकडे काही घटक असतात आणि विशिष्ट आकारही असतो. पण हा आकार मात्र घटक नव्हे; जर तसा असता तर तो आणि इतर घटक ह्यांना व्यापणारा आणखी एक आकार लागला असता. खरे तर आपण प्रविधानाच्या *सर्व* घटकांचे रूपांतर त्याचा आकार न बदलता, चलांमध्ये करू शकू. ज्या वेळी आपण
पृ. १९९ “ xRy ” अशासारखी रचना वापरतो त्या वेळी आपण हेच करतो.
ज्यात दोन पदांमधील संबंध प्रतिपादन केलेला असतो अशा प्रकारच्या प्रविधानाच्या कोणत्याही वर्गाचे, ही रचना प्रतिनिधित्व करते. “ xRy कधी कधी सत्य असते ” म्हणजे द्विपद संबंध (Dual relations) असू शकतात, अशा सारख्या सामान्य प्रतिपादनाकडे आपण वळू शकू. हे प्रतिपादन तर्कशास्त्रात (किंवा गणितात) ज्या अर्थाने आपण हा शब्द वापरतो आहोत त्यानुसार, मॉडेल. पण ह्या प्रतिपादनात आपण कोणत्याही विशिष्ट वस्तूंचा किंवा संबंधांचा उल्लेख करणार नाही; कोणत्याही वस्तूंचा किंवा विशिष्ट संबंधांचा प्रवेश शुद्ध तर्कशास्त्रात कधीही होऊ शकणार नाही. तार्किक प्रविधानांचे घटक म्हणून आपल्याजवळ शुद्ध *आकारच* तेवढे उरतात.

आपण ज्या प्रकारची प्रविधाने पाहतो आहोत त्यात “ xRy ”सारखे शुद्ध आकार प्रत्यक्षतः येतातच, असे मुद्दाम म्हणण्याची माझी इच्छा नाही. परस्परविरुद्ध मतांमुळे अशा प्रविधानांच्या विश्लेषणाचा प्रश्न अवघड आहे. ह्या प्रश्नाला आपण आताच हात घालू शकत नाही. पण पहिली पायरी म्हणून, *आकारच* हे तार्किक प्रविधानामध्ये त्यांचे घटक म्हणून प्रवेश करतात हा दृष्टिकोण स्वीकारू, आणि प्रविधानाचा आकार म्हणजे आपल्याला काय म्हणायचे आहे ते खालीलप्रमाणे स्पष्ट करू (औपचारिक व्याख्या करणार नाही) :——

प्रविधानातील कोणत्याही घटकाबद्दल दुसरा घटक घातला असता प्रविधानात जे काही अचल राहते तोच त्याचा “ आकार ” होय.

तेव्हा “ सॉक्रेटीस ॲरिस्टॉटलच्या आधी झाला ” याचा आकार, त्या प्रविधानांतील घटक वेगळे असले तरीही, “ नेपोलियन वेलिंग्टनपेक्षा मोठा होता ” याच्यासारखाच आहे.

यावरून तार्किक गणिती प्रविधानाचे एक आवश्यक (पुरेसे नसेल) लक्षण मांडू. ज्या प्रविधानात चले नाहीत (म्हणजे *सर्व, काही: एक, विशिष्ट,* इ. शब्द नाहीत) अशा प्रविधानांतील घटकांऐवजी चले घालून आणि होणारा परिणाम सदैव सत्य

असल्याचे किंवा कधीकधी सत्य असल्याचे किंवा काही चलांच्याबाबतीत सदैव सत्य असल्याचे, मिळू शकते, किंवा ह्यांचीच विविध रूपे प्रतिपादन करून ती मिळू शकतात,
तीच गोष्ट मांडण्याचा दुसरा मार्ग म्हणजे तर्कशास्त्राचा (किंवा
पृ. २०० गणिताचा) संबंध फक्त *आकारापुरताच* असतो. तसेच ते सदैव
किंवा कधीकधी सत्य असल्याचे सांगण्याच्या पद्धतीशी असतो.
" सदैव " आणि " कधीकधी " ह्यांचे होतील तेवढे पर्याय यात आले तरी चालतील.

प्रत्येक भाषेत असे काही शब्द असतात की ते फक्त आकारच दर्शवितात. हे शब्द, स्थूलमानाने बोलावयाचे तर भाषांमधून सर्वत्र आढळतात आणि कमीत कमी बदलतात. " सॉक्रेटीस मनुष्य आहे " हे घ्या. तेथे " आहे " हा प्रविधानाचा घटक नव्हे पण तो कर्ता-विधेय असा आकार दर्शवितो. तसेच " सॉक्रेटीस, ॲरिस्टॉटलच्या आधी झाला " यात " झाला " आणि " च्या " हे केवळ आकार दर्शवितात; हे प्रविधान " सॉक्रेटीस ॲरिस्टॉटलपूर्वी " यासारखेच आहे. यात वरील शब्द नाहीसे झाले असून तोच आकार निराळ्या पद्धतीने दर्शविला आहे. आकार, सर्वसामान्यतः विशिष्ट शब्दांशिवाय निराळ्या पद्धतीनेही दर्शविणे शक्य असते. शब्दांचा क्रम इष्ट ते घडवू शकतो. पण हे तत्त्व फार ताणू नये. उदाहरणार्थ, एकही शब्द न वापरता प्रविधानांचे (म्हणजे ज्याला आपण " सत्यता-फले " म्हणतो त्यांचे) सूक्ष्म आकार सोईस्करपणे कसे व्यक्त करावेत हे पाहणे कठिण आहे. ह्याकरता एक शब्द (किंवा प्रतीक) पुरेसा असतो हे आपण १४ व्या प्रकरणात पाहिले. जसे *अननुरूपता* व्यक्त करण्याकरता एक शब्द (किंवा प्रतीक) पुरतो. पण एकही शब्द वापरायचा नसेल तर आपण अडचणीत सापडू. तरीसुद्धा, आपल्या प्रस्तुत हेतूच्या दृष्टीने हा मुद्दा महत्त्वाचा नाही. आकार हा सर्वसामान्य प्रविधानाचा महत्त्वाचा विचार असतो हे पाहणे हेच महत्त्वाचे आहे, मग त्यातील एकाही शब्दाने किंवा प्रतीकाने आकार सुचवला जात नसेलही. आपल्याला जर आकाराबद्दलच बोलावयाचे असेल तर त्याकरता आपल्याला शब्द लागेल; पण आपल्याला जर, गणितातल्याप्रमाणे, ज्यांना आकार आहे अशा सर्व प्रविधानांबद्दल बोलावयाची इच्छा असेल तर बहुधा आकारासाठी शब्द आवश्यक नसल्याचे आढळून येईल; तात्त्विक चर्चेत तर बव्हंशी तो *कधीच* आवश्यक नसतो.

प्रविधानांचे आकार, ज्यांत आकारांसाठी कोणताही विशिष्ट शब्द वापरला नसेल अशा प्रविधानांत व्यक्त केलेल्या आकारांच्या रूपात, व्यक्त *करता येतात*, असे गृहीत धरल्यास (तसे करता येईल असे मला वाटते), आपण अशा भाषेपर्यंत पोहोचू की जिच्यात सर्व औपचारिक गोष्टी, वाक्यरचना – विचारातील असतील, शब्दसंग्रहातील नसतील– अशा भाषेतील एक शब्दही जरी आपणाला माहीत नसला तरी, त्या भाषेत गणिताची *सर्व* प्रविधाने आपण व्यक्त करू शकू. गणिती तर्कशास्त्राची भाषा, परिपूर्ण केल्यास ती अशा तऱ्हेची एक भाषा होईल. आपल्याकडे विविध प्रकारे रचलेल्या

चलांसाठी "x" आणि "R" आणि "y" अशासारखी प्रतीके असतील; आणि रचनेचा प्रकार चलांच्या सर्व मूल्यांकरता, किंवा काही मूल्यांकरता

पृ. २०१

सत्य असल्याबद्दलचे काही तरी सुचवील. आपल्याला एकही शब्द माहिती नसला तरी चालेल, कारण चलांना मूल्ये देण्यापुरतेच ते लागतात. हे काम प्रयुक्त गणितज्ञाचे आहे, शुद्ध गणितज्ञाचे किंवा तर्कशास्त्रज्ञाचे नव्हे. तर्कशास्त्रातील प्रविधानांचे हे एक वैशिष्ट्यच आहे की, सोईस्कर भाषा दिली असता अशा तऱ्हेचे प्रविधान, ज्याला भाषेतील एकही शब्द माहीत नाही पण वाक्यरचना माहिती आहे असा कोणताही मनुष्य प्रतिपादन करू शकेल.

पण सरतेशेवटी, आकार व्यक्त करणारे "आहे" आणि "च्या" अशांसारखे शब्द असतातच. आणि गणिती तर्कशास्त्राकरता आजवर शोधलेल्या प्रत्येक प्रतीक पद्धती-मध्ये ज्यांचा औपचारिक अर्थ स्थिर आहे अशी प्रतीके आहेतच. उदाहरणार्थ, सत्यता-फले घडविण्याकरता योजलेल्या अननुरूपतेचे प्रतीक आपण घेऊ. असे शब्द किंवा प्रतीके तर्कशास्त्रात येऊ शकतात. प्रश्न असा : आपण त्यांची व्याख्या कशी करणार ?

अशा शब्दांनी किंवा प्रतीकांनी, ज्यांना "तार्किक स्थिर (Constant)" म्हणतात ते व्यक्त होतात. ज्या पद्धतीने आपण आकारांची व्याख्या केली, नेमक्या त्याच पद्धतीने तार्किक स्थिरांची व्याख्या करता येईल; खरे म्हणजे, मूलतः ते एकच होत. अनेक प्रविधानां-मध्ये समाईक असणारा तो मूलभूत तार्किक स्थिर होय. या प्रविधानांतील कोणतेही एक दुसऱ्यापासून एकाऐवजी दुसरे पद घालून मिळू शकेल. उदाहरणार्थ, "वेलिंग्टनपेक्षा नेपोलियन मोठा आहे," हे ॲरिस्टॉटलपेक्षा सॉक्रेटीस आधीचा आहे," यापासून "सॉक्रेटीस" ऐवजी "नेपोलियन", "ॲरिस्टॉटल" ऐवजी "वेलिंग्टन" आणि "आधीचा" ऐवजी" "मोठा" घालून मिळेल. "ॲरिस्टॉटलपेक्षा सॉक्रेटीस आधीचा आहे" ह्या नमुन्यापासूनन ह्याप्रकारे काही प्रविधाने मिळवता येतील तर काही येणार नाहीत; जी मिळवता येतात ती "xRy" ह्या प्रकारची आहेत, म्हणजे ती द्विपद संबंधाने व्यक्त करता येतात. एका पदाऐवजी दुसरे पद घालून वरील नमुन्यापासून "सॉक्रेटीस मनुष्य आहे" किंवा "ॲथेन्सवासीयांनी सॉक्रेटीसला हेमलॉक (विषारी फूल) दिले" अशा प्रकारची प्रविधाने आपण मिळवू शकणार

पृ. २०२

नाही; कारण पहिले कर्ता-विधेय या आकाराचे आहे तर दुसऱ्या-मध्ये त्रिपद संबंध व्यक्त केला आहे. जर आपल्या शुद्ध तार्किक भाषेमध्ये आपल्याला काही शब्द हवे असतील तर त्यांनी "तार्किक स्थिर" तेवढेच व्यक्त केले पाहिजेत आणि "तार्किक-स्थिर" हे नेहमीच, एकतर, जी प्रविधाने वरील प्रकारे एका पदाऐवजी दुसरे पद घालून परस्परांपासून निगमित करता येतात अशांतील समाईक अशी वस्तू असेल किंवा तिच्यापासून साधता येईल. आणि हे जे काही समाईक आहे त्यालाच आपण "आकार" असे म्हणतो.

याच अर्थाने शुद्ध गणितात जे "स्थिर" असतात ते सर्व तार्किक स्थिर असतात, उदाहरणार्थ, 1 ही संख्या पुढील प्रकारच्या प्रविधानांपासून साध्य करता येईल : " "ज्या वेळी x, c असेल त्यावेळी आणि त्याचवेळी ϕx सत्य असेल अशा तऱ्हेचे c हे एक पद अस्तित्वात असते". हे ϕ चे फल आहे आणि ϕ ला विविध मूल्ये देऊन पुष्कळ वेगवेगळी प्रविधाने निर्माण होतात. आपण (आपल्या प्रस्तुतच्या उद्देशाशी संबंध नसलेल्या मधल्या पायऱ्या थोड्याशा गाळून) ϕ च्या वरील पदाचा अर्थ "ϕ ने निश्चित केलेला वर्ग हा एकेरी एकेरी वर्ग होय" हा किंवा "ϕ ने निश्चित केलेला वर्ग हा 1 चा सदस्य होय" (1 हा वर्गांचा वर्ग आहे) हा घेऊ. या प्रकारे ज्या प्रविधानांमध्ये 1 येतो त्यांचा अर्थ विशिष्ट स्थिर तार्किक आकारावरून साधता येतो. सर्व गणिती स्थिरांच्या बाबतीत असेच होत असल्याचे आढळेल : सगळे तार्किक स्थिर किंवा प्रतीकात्मक संक्षेप असून योग्य अशा संदर्भात त्यांच्या संपूर्ण उपयोगाची व्याख्या तार्किक स्थिरांच्या साह्याने करता येईल.

पण सर्व तार्किक (किंवा गणिती) प्रविधाने, तार्किक स्थिर आणि चल यांच्या रूपात संपूर्णतः व्यक्त करता येत आली तरी, व्यत्यासाने, जी प्रविधाने याप्रकारे व्यक्त करता येतात ती तार्किक असतात असे नव्हे. आतापर्यंत आपण गणिती प्रविधानांसाठी आवश्यक असलेले पण पुरेसे नसलेले गमक शोधून काढले. गणितातील सर्व कल्पनांची व्याख्या ज्यांच्या रूपात करता येईल अशा मूलभूत *कल्पनांच्या* लक्षणाची व्याख्या पुरेशी केली आहे. पण ज्यांच्यापासून गणितातील सर्व प्रविधाने *निगमित* करता येईल अशा मूलभूत प्रविधानांचे लक्षण मात्र सांगितलेले नाही. हे फार अवघड काम आहे आणि त्याचे पूर्ण उत्तर काय आहे हे अद्याप माहिती नाही.

आपण अनंताच्या सिद्धांताचे उदाहरण घेऊ. हा जरी तार्किक पदांच्या रूपात मांडता येत असला तरी तो सत्य असल्याचे तर्कशास्त्राच्या साह्याने प्रतिपादता येणार नाही. तर्कशास्त्राच्या सर्व प्रविधानांचे एक लक्षण ती विश्लेषणा-
पृ. २०३ त्मक असतात असे म्हणून किंवा त्यांची विरोधी प्रविधाने आत्म-
व्याघाती असतात, असे म्हणून व्यक्त करतात. व्याघाताचा (Contradiction) नियम हा तार्किक प्रविधानांपैकी केवळ एक आहे; त्याला काही विशेष महत्त्व नाही; आणि एखाद्या प्रविधानाचे विरोधी प्रविधान, आत्मव्याघाती आहे यांच्या सिद्धतेकरता, व्याघात नियमाव्यतिरिक्त, निगमनाची आखणीही तत्त्वे लागण्याची शक्यता आहे. काही असले तरी, तार्किक प्रविधानांच्या ज्या लक्षणाच्या शोधात आपण आहोत तेच व्याघात नियमापासूनच्या निगमनीयतेमध्ये अंतर्भूत आहे असे काहींना जे वाटत होते ते होय; तशीच व्याख्या त्यांना करावयाची होती. हे लक्षण, त्याला आपण तूर्त पुनरुक्ती (Tautology) म्हणू. विश्वामधील वस्तुमात्रांची संख्या n (n कोणतीही संख्या असेल) आहे याच्याशी निगडित नाही. जातींमधला विरोध सोडला तर, n

पदांचे (n कोणतीही सान्त संख्या असेल) वर्ग असतात असे, किंवा $\aleph_0$ पदांचे वर्ग असतात असेही तर्कशास्त्राने सिद्ध करता येईल. पण जातींमुळे अशा सिद्धता, आपण १३ व्या प्रकरणात पहिल्याप्रमाणे, तर्कदूषित ठरतात. जगामध्ये n वस्तुमात्र आहेत की नाहीत हे अनुभवाने आणि निरीक्षणांनी ठरवण्याशिवाय आपल्याला मार्ग उरला नाही. सर्व "संभाव्य" जगांमध्ये, लाइब्नित्सच्या अर्थाने ज्यात एक, दोन, तीन...... वस्तुमात्र आहेत अशीही जगे असतील. एक तरी वस्तू असावी याचीही तर्कदृष्ट्या काही गरज आहे असे दिसत नाही,[1] इतकेच काय पण एखादे जग तरी असावे याचीही आवश्यकता नाही. अस्तित्ववादातील (Ontology) ईश्वराच्या अस्तित्वाची सिद्धता, जर सयुक्तिक असती तर तिच्यामुळे एका तरी वस्तुमात्राची आवश्यकता प्रस्थापित झाली असती. पण सर्वसाधारणपणे ती अप्रमाण मानली जाते; खरे म्हणजे ती अस्तित्वाच्या चुकीच्या दृष्टिकोणावर आधारित आहे. म्हणजे ज्याचे वर्णन होऊ शकते त्याचेच अस्तित्व प्रतिपादन करता येते, ज्याला नाव देता येते त्याचे नव्हे, हे त्यात ओळखलेले नाही, त्यामुळे "हे निश्चित अमुक एक अस्तित्वात आहे", ह्यावरून ".ह्याला अस्तित्व आहे" असा युक्तिवाद करणे अर्थशून्य आहे. जर आपण अस्तित्ववादाचा युक्तिवाद टाकून दिला तर जगाचे अस्तित्व हा एक अपघात आहे अशा निष्कर्षाकडे आपण ढकलले जातो, म्हणजेच ती तर्कशास्त्रीय गरज नव्हे. असे असेल तर तर्कशास्त्राचे कुठलेच तत्त्व, गृहीत धरल्याशिवाय "अस्तित्व" प्रतिपादित करू शकणार नाही. म्हणजेच कोणतेही तत्त्व, "अमुक एक प्रविधानफल कधी कधी सत्य असते". अशा प्रकारचे असणार नाही. अशा प्रकारच्या प्रविधानांना, जेव्हा ती तर्कशास्त्रात आढळतात तेव्हा, त्यांना गृहीते म्हणून किंवा गृहीतांचे परिणाम म्हणूनच यावे लागते, संपूर्णतः प्रतिपादित प्रविधान म्हणून नव्हे. काही एक प्रविधानफल *सदैव* सत्य असल्याचे मांडू शकतील, अशा प्रविधानांना तर्कशास्त्राची संपूर्णतः प्रतिपादित प्रविधाने म्हणता येईल. उदाहरणार्थ, जर p मध्ये अभिप्रेत q आणि q मध्ये अभिप्रेत r तर p मध्ये अभिप्रेत r असते, हे किंवा जर सर्व α, β असतील आणि x, α असेल तर x, β असतो, हेच सदैव सत्य असते. अशी प्रविधाने तर्कशास्त्रात येतात आणि त्यांचे सत्यत्व विश्वाच्या अस्तित्वाच्या निरपेक्ष असते. विश्वाला अस्तित्वच नसले तरी सर्वव्यापक प्रविधाने सत्य ठरतील असे आपण मांडू शकतो; व्यापक प्रविधानांच्या विरोधी म्हणजे (आपण १५ व्या प्रकरणात पाहिल्याप्रमाणे) अस्तित्व प्रतिपादन करणारे प्रविधान होय, आणि म्हणून जर विश्वाला अस्तित्व नसेल तर ते सदैव असत्यच ठरेल.

पृ. २०४

---

[1] ले. टी. : *Principia Mathematica* मधील मूलभूत प्रविधानांत, एक तरी वस्तू असल्याचे गृहीत धरले आहे. पण तर्कशास्त्राच्या शुद्धतेच्या दृष्टीने हा दोष आहे असे मला आता वाटते.

जी जगाच्या प्रत्यक्ष अभ्यासाशिवाय अनुभवनिरपेक्षच (A priori) माहिती होतात तीच तार्किक प्रविधाने होत. सॉक्रेटीस हा मनुष्य आहे हे आपल्याला केवळ आनुभविक माहितीच्या अभ्यासामुळेच कळते. पण संविधान अमूर्त रूपात (म्हणजे ज्या वेळी ते चलांच्या रूपात व्यक्त केले असेल तेव्हा) असतानाच आणि अनुभवाला कोणतेही आवाहन न करताच त्याची अचूकता कळते. हे, केवळ तार्किक प्रविधानांचेच नव्हे तर ज्या मार्गाने आपण ती समजून घेतो त्या मार्गाचेही लक्षण आहे. मात्र त्यांचे स्वरूप कसे आहे ह्या प्रश्नावरच ते आधारलेले आहे. कारण काही प्रविधाने अशा प्रकारची आहेत की अनुभवाने जाणल्याशिवाय ती कशी आहेत हे समजणे अतिशय कठीण होईल.

"विश्लेषणात्मक" प्रविधानांच्या जुन्या संबंधांना नवीन व्याख्या देण्याच्या प्रयत्नातूनच "तर्कशास्त्र" किंवा "गणित" यांच्या व्याख्या शोधाव्या लागतील हे स्पष्ट आहे. व्याघात नियमापासून निघतात ती तार्किक प्रविधाने अशी व्याख्या करून, जरी आता आपले समाधान होणार नसले तरी, अनुभवान्ती कळणाऱ्या प्रविधानांहून त्यांचा वर्ग पूर्णपणे वेगळा आहे हे आपण मान्य करू शकू, आणि केलेही पाहिजे. त्या सर्वांचे एक लक्षण म्हणजे, नुकतेच ज्याला आपण "पुनरुक्ति" म्हणावयाचे ठरवले ते होय.

पृ. २०५ हे आणि त्याच बरोबर, ती, चल आणि तार्किक स्थिर यांच्या रूपात पूर्णपणे व्यक्त करता येतात (*सर्वच्यासर्व* घटक बदलले तरी प्रविधानामध्ये जी गोष्ट स्थिर राहते तिला तार्किक स्थिर म्हणतात.)

ही माहिती तर्कशास्त्र किंवा शुद्ध गणित यांची व्याख्या देईल. क्षणभर, समजा की, मला "पुनरुक्ती" ची[1] व्याख्या कशी करावयाची ते माहिती नाही. काही काळ समाधानकारक वाटेल, अशी व्याख्या पुढे करणे सोपे असेल; पण व्याख्येच्या लक्षणाशी परिचय असल्याचे वाटत असूनही, समाधानकारक म्हणता येईल अशी एकही व्याख्या मला दिसत नाही. म्हणून ह्या ठिकाणी, गणिताच्या तार्किक आकाराच्या दिशेने चाललेल्या आपल्या उलट प्रवासात आपण ज्ञानाच्या क्षितिजावर पोचलो आहोत असे नुर्त म्हणता येईल.

आता आपण गणिती तत्वज्ञानाच्या आपल्या काहीश्या त्रोटक अशा परिचयाच्या, शेवटास येऊन ठेपलो आहोत. जोवर आपण तार्किक चिन्हांचा उपयोग करण्यापासून दूर राहू तोवर, ह्या विषयात अंतर्भूत असलेल्या कल्पना समजावून सांगणे अशक्य आहे.

---

[1] ले. टी. : गणिताच्या व्यख्येच्या दृष्टीने "पुनरुक्ती"चे महत्व लुटविक् विटगेन्स्टाइन (Ludwig Wittgenstein) ह्या माझ्या पूर्वीच्या एका शिष्याने माझ्या लक्षात आणून दिले; तो ह्या प्रश्नावर संशोधन करीत होता. त्याने तो प्रश्न सोडवला आहे किंवा नाही हे मला माहिती नाही; इतकेच नव्हे तर आता तो जिवंत आहे की दिवंगत झाला आहे हेही मला माहिती नाही.

आपण जे व्यक्त करू इच्छितो ते स्वाभाविकरीत्या नेमके व्यक्त करण्याकरता नेहमीच्या चालू भाषेत मुळीच शब्द नाहीत. त्यामुळे, जोवर आपण चालू भाषेलाच चिकटून राहू तोवर शब्दांच्या अर्थाची अनैसर्गिक ओढाताण होणे साहजिक आहे. आणि सुरवातीस नाही तरी काही वेळानंतर वाचक शब्दांच्या चालू अर्थामध्ये पडण्याची, आणि त्यामुळे जे म्हणावयाचे आहे त्याबद्दल चुकीचा ग्रह करून घेण्याची शक्यता निश्चित आहे. शिवाय नेहमीचे व्याकरण आणि वाक्यरचना कमालीच्या भ्रामक आहेत. उदाहरणार्थ, संख्यांच्या बाबतीत असे घडते; "दहा माणसे" ह्याचे रूप व्याकरणदृष्ट्या "गोरी माणसे" सारखे आहे. त्यामुळे दहा हे "मनुष्यांचे वर्णन करणारे विशेषण आहे असेच वाटेल; आणि जेथे प्रविधानफलांचा अंतर्भाव होतो, विशेषतः अस्तित्व आणि वर्णनाच्या संदर्भात, तेथे हेच घडते. भाषा ही भ्रामक असल्यामुळे तसेच ती तर्कशास्त्रास लावली असता वेडीवाकडी आणि अचूक नसल्याने (तर्कशास्त्राकरता ती निर्माण झालीच नव्हती) आपल्या विषयाचे विवेचन अचूक किंवा परिपूर्ण होत
पृ. २०६ नाही. त्याकरता तार्किक प्रतीकव्यवस्था सर्वस्वी अत्यावश्यक आहे. म्हणून ज्या वाचकांना गणिताच्या तत्त्वांवर प्रभुत्व संपादन करावयाचे असेल, ते प्रतीकांवर प्रभुत्व मिळविण्यास कष्ट करण्यात अनमान करणार नाहीत अशी आशा आहे. हे कष्ट वाटतात त्यापेक्षा, खूपच कमी आहेत. वरील धावत्या आढाव्यावरून लक्षात आले असेल की ह्या विषयातील न सुटलेली अशी असंख्य कूटे आहेत, आणि त्यांवर खूप काम केले पाहिजे. जर ह्या पुस्तकाचा परिणाम म्हणून एखाद्या विद्यार्थ्यास गणिती तर्कशास्त्राचा सखोल अभ्यास करण्याची इच्छा झाली तर ते ज्या हेतूंकरता लिहिले त्यातील प्रमुख हेतू सफल होईल.

सूची

(मूळ ग्रंथातील)

□ □

इंग्रजी–मराठी

(मूळ सूचीमध्ये न आलेले शब्द)

Function	फल ४६
Identity	अविकारी ४७
Propositional	प्रविधान ४६
Generated	जनित ५९
Group	गट ५१
Identity	अविकारी (वि.) ४७, एकात्मता (ना.)
Law of	एकात्मतेचा नियम १७५
Imaginary	कल्पित ६३
Implication	अभिप्रेतता १४६
Strict	काटेकोर १५४
Imply	अभिप्रेत असणे ३३
Imply diversity	भिन्नत्वसूचन ३२
Incommensurability	अपरिमेयता ४
Incompatible	अननुरूप १४६
Infinitesimal	शून्यलब्धी ९७
Integration	संकलन १
Integral calculus	संकलन ९७
Intension	आशय १२
Intensional	आशयदर्शक १८६
Interpretation	विवरण ७
Kinematics	गतिशास्त्र ८६
Limit	मर्यादा २९
Lower	निम्न ६८
Upper	उच्च ६८
Logical	तार्किक २५
Logically	तर्कदृष्ट्या १
Magnitude	महत्ता २९
Metaphysical	सत्ताशास्त्रीय १८
Mood	संघात १६४
Darapti	गहहप्रहा १६४
Multipliable	गुणनीय १३०
Mutually exclusive	परस्परवियुक्त ४३
Negation	नकरण १४७
Negative	नकारात्मक, नकृत १४६

Nonformal	अनाकारिक १४८
Notion	संबोध ४६
Number	संख्या १
Cardinal	प्रधानांक ६३
Complex	संमिश्र १
Imaginary	कल्पित ६३
Irrational	अपरिमेय १३
Multipliable	गुणनीय १३०
Natural	स्वाभाविक १३
Non–inductive	अविगामी ८८
Ordinal	क्रमिक ५४
Rational	परिमेय ७१
Real	वास्तव ६१
Relation	संबंध-, संबंधांक ५६
Serial	मालिका-अंक ५७
One–one correspondence	एक-एक संवाद ५२
Open	विवृत ३८
Open order	मुक्तक्रम ४१
Operation	क्रिया १४६
Binary	द्विपद १४६
Order	क्रम २९ कोटी ७६
Order of magnitude	महत्तेचा क्रम ७१
Ordered	क्रमित ६०
Well–	सु– ९२
Pair	युग्म ११८
Paradoxical	विरोधाभासात्मक १८
Perfect	परिपूर्ण १०२
Plane	प्रतल २९
Precedence	प्राधान्य १७
Predecessor	पूर्वचर २२
Immediate	लगतचा २२
Predicate	विधेय ४४
Predicative	विधेयकारक १८९
Probability	संभाव्यता, संभाव्यता शास्त्र १६५

□ □

मराठी–इंग्रजी

□ □